Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakültesi Dergisi
Cilt: XV, Sayı: 1, 2002

BİLİM ve SANATIN KESİŞTİĞİ TEMEL BİR NOKTA: MATEMATİK ve MÜZİK İLİŞKİSİ

Uzay BORA [*]

ÖZET

Müzik, en temel ögesinden en karmaşık ögesine kadar, çeşitli matematiksel yapılar içermektedir. Burada, sesin yapısından diziler, melodi, ritim, armoni gibi konulara uzanan müzik ögeleriyle matematiğin ilişkisi incelenmiştir. Perde, tını, aralıklar, Pisagor koması, eşit düzenli sistem gibi kavramların matematiksel açıklamaları, ayrıca tematik dönüşümler ve armonik uzaklık hesaplamaları ile ilgili çalışmalara örnekler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: *Müzik, matematik.*

ABSTRACT

Music, from its most fundamental to the most complex element, possesses various mathematical structures. Here, relationship of mathematics with music elements ranging from the structure of sound to scales, melody, rhythm, harmony is examined. Mathematical explanations of such concepts as pitch, timbre, intervals, Pythagorean comma, equally tempered tuning system, and also examples of studies on thematic transformations and harmonic distance calculations are given.

Keywords: *Music, mathematics.*

---

[*] *Yard. Doç. Dr.; Dokuz Eylül Üniversitesi Devlet Konservatuarı Öğretim Üyesi.*

GİRİŞ

Matematik ve müzik ilişkisini incelemeye, doğal bir giriş olması için, bu iki alanın bazı tanımlarıyla başlamak gerekirse, matematik için: "Tümdengelimli akılyürütme yoluyla, soyut varlıkların (sayılar, geometrik şekiller, fonksiyonlar, uzaylar vb) özelliklerini ve bunlar arasında kurulan bağıntıları inceleyen bilim"[1]; "[gerçek dünyadaki hiçbirşeyle ilişkisi olması *gerekmeyen*] formal sistemlerin kurulması ve keşfedilmesi"; "aksiyomlardan [doğayla değil mantıkla sınanan] teoremler türetme uğraşı"; müzik için: "İnsana, sesler aracılığıyla kendini anlatma olanağı veren sanat, bu sanatın ürünleri"[2]; "işitsel ortam ve seslerin belli bir ölçüde bilinçli olarak düzenlenmiş hali"; "seslerin insanın biyolojik ritmini sembolik olarak canlandırmak için kullanılışı"[3]; "anlamlı bir yapı oluşturmak üzere melodik, armonik ve ritmik desenler halinde düzenlenmiş sesler" gibi tanımlar sıralanabilir.

Şekil 1'de görülen sınıflandırma, günümüzden yaklaşık 26 yüzyıl önceki Pisagor okulunun müfredatını gösteriyor[4]. Burada "ayrıklık özelliği olan nicelikler" ve "süreklilik özelliği olan büyüklükler"le uğraşan iki grup yapılmış; aritmetik mutlak olan, müzik göreceli (bağıl) olan niceliklerle, geometri sabit duran, astronomi ise hareketli büyüklüklerle ilişkili olarak sınıflandırılmış. Acaba müziği neden matematiğin dalı olarak sınıflandırmışlardı; bu hiç yerinde olmayan bir sınıflandırma mıydı yoksa mantıklı yanları mı vardı? Bu sorunun yanıtını düşünürken müziği en küçük, temel bileşeninden en üst düzeydeki yapılarına kadar gözden geçirerek anımsamak matematik–müzik ilişkisini aydınlatmaya yardımcı olacaktır.

Q U A D R I V I U M

Matematik ('değişmez'in bilimi)			
Aritmetik (mutlak)	Müzik (göreceli)	Geometri (sabit)	Astronomi (hareketli)

Şekil 1. *Quadrivium ve bileşenleri*

---

1 Büyük Larousse Sözlük ve Ansiklopedisi, Cilt 15, Milliyet yayınları, İstanbul, 1992, s. 7860.

2 a.g.k., s. 8490.

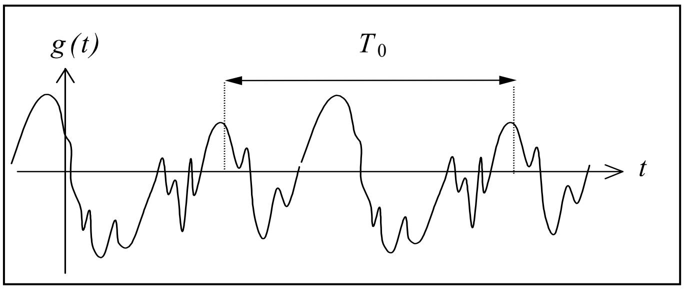
3 J. Winsor, "A Definition of Music (And Why It's Needed)", http://home.att.net/~j-winsor/jhw_art1.html, 1997.

4 T.H. Garland and C.V. Kahn, Math and music: Harmonious connections, Palo Alto, Dale Seymour Publications, 1995, s. 64.

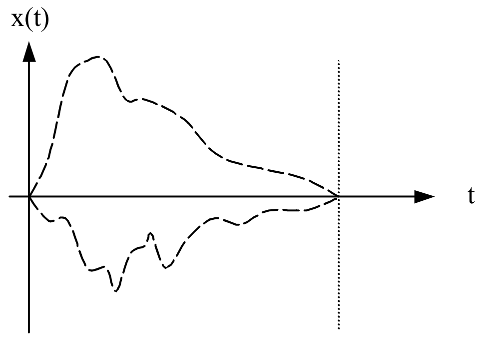
Müziksel Sesin Başlıca Özellikleri

Girişteki tanımlarda, müziğin öncelikle ses içermesi gerektiğine değinilmişti. Bu ses, genellikle müziksel bir ses olacaktır. Müziksel sesleri gürültü seslerinden ayıran özellik, müziksel seslerin ayırdedilebilir bir perde verebilme özelliğinin olmasıdır*. Bilindiği gibi perde, sesin tizlik derecesine ilişkin bilgiyi taşıyan parametresidir. Yani sesin temel frekansına bağlı bir tizlik derecesi (perde) algılanıyor. Bir sese ilişkin bir perdenin algılanabilmesinin ölçütü ise, o sesin periyodik olma derecesidir. Müziksel bir ses, zamana bağlı bir periyodik fonksiyon olarak düşünülebilir:

$$g(t \pm mT_0) = g(t) \quad \begin{cases} m \in Z \\ -\infty < t < \infty \end{cases}$$



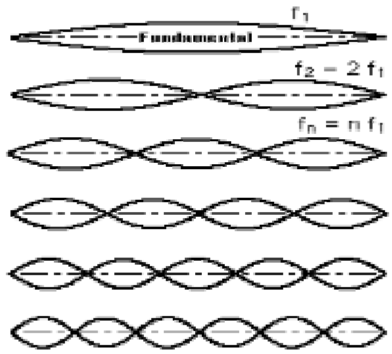
Şekil 2. *Periyodik bir* g(t) *fonksiyonu*



Şekil 3. *Doğal bir müziksel ses zarfı örneği*

---

* Müzikte yalnızca müziksel sesler değil, gürültü sesleri ve konuşma sesleri de yeralabilir.



Şekil 4. *Titreşen bir telin ilk 6 harmoniği*

Şekil 2’de T_0 periyoduyla periyodik olan bir ses yeralıyor, dikey eksen de şiddetini gösteriyor. Ancak doğal kaynaklı müziksel seslerin sınırlı bir süresi vardır ve yarı periyodik özelliktedirler[5] (Şekil 3). Müziksel seslerin belirleyici özellikleri arasında ‘perde’, ‘şiddet’ ve ‘süre’nin yanısıra bir de ‘tını’, yani örneğin keman, flüt ve piyano seslerini birbirinden ayırmamızı sağlayan özellik bulunmaktadır. Tını, “sesin dokusu” olarak adlandırılabilir. Doğal müziksel ses zarfı örneğini gösteren şekilde, sesin şiddetindeki yükselme ve alçalmalar, nasıl söndüğü vb gibi özellikler, o sese ilişkin tınıyı belirleyen özellikler arasındadır. Daha kapsamlı bir inceleme için ise harmoniklerine göz atmalıyız.

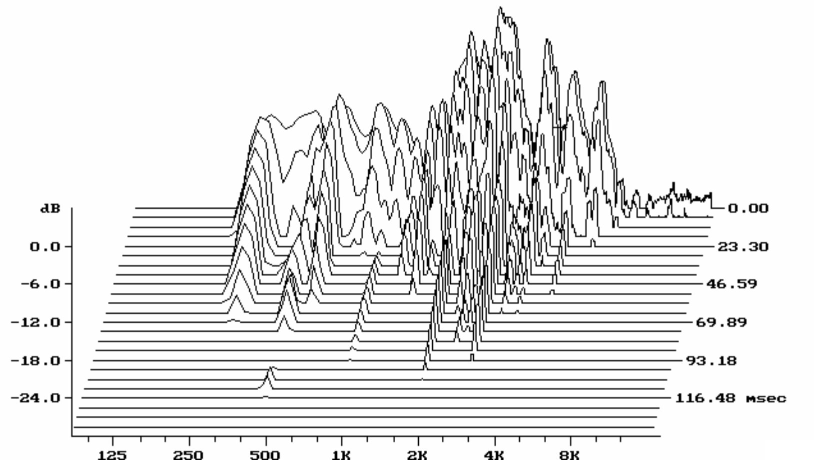
Gergin bir tel gibi titreşebilen yapılar, birden çok sayıda frekansta titreşir. Titreşimde temel frekansın yanısıra yeralan “temel frekansın tamsayı katları”, harmonikler olarak adlandırılır (Şekil 4). Tını farkını belirleyen de, titreşen sistemlerin boyut, biçim, malzeme bakımından farkları nedeniyle gerek harmoniklerin, gerekse harmonik olmayan spektral bileşenlerin zaman içinde izledikleri ayrı genlik değişimlerinin (nasıl bir şiddet değeri konturu izleyip ne zaman söndüğü vb) farklı sistemler (titreşim kaynakları) için farklı olmasıdır. Böylece, tını farklarını inceleyebilmek için sesin frekans spektrumunun zaman içindeki değişiminin bilinmesi gerektiğinden, zaman–frekans gösterimi elde edilmelidir. Bunun için biraz daha matematik kullanmamız gerekiyor. Sözgelimi, “sinyal işleme”cilerin klasik yöntemlerinden biri olan “kısa süreli Fourier dönüşümü” ile bir sesin zaman–frekans gösterimi elde edilebilir:

---

5 U. Bora, “Geleneksel Türk Sanat Müziği Çalgılarının Dinamik Spektrum Analizi”, *2. Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı Bildiriler Kitabı*, s. 258-263, 1994, s. 258-9.

$$STFT_x^{(\gamma)}(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\gamma^*(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt$$

Burada $x(t)$ incelenen "ses sinyalini", $\gamma(t)$ pencereleme fonksiyonunu, τ pencere merkezinin zaman eksenindeki konumunu simgeliyor. Böylece, özetle açıklanırsa, incelenen sinyalin iç çarpım yoluyla doğal logaritma tabanlı (e) terimin içeriğindeki sinüs ve kosinüs bileşenleri ile korelasyonu saptanarak sinüsoidal dekompozisyonu elde ediliyor. Şekil 5'te bir keman sesinin zaman–frekans gösterimi yeralıyor.



Şekil 5. *Bir keman sesinin waterfall diyagramıyla gösterilen zaman-frekans gösterimi*[6]

Müziksel Ses Sistemi, Diziler, Zamanla İlişkili Ögeler

Yukarıda müziksel seslere ve gürültü seslerine değinilmişti. "Konuşma sesleri", müziksel ses ve gürültü sesi olarak tarif edilen sesleri birarada içeriyor. Basit bir örnekle açıklarsak, örneğin "kitap" sözcüğündeki k, t, ve p harflerini söylediğimiz anlarda gürültü yapıyoruz, yani belli bir perdenin algılanamadığı sesler üretiyoruz. İ ve a'yı söylediğimiz anlarda ise perdeler oluşuyor. Şarkı söyleyen bir kişinin sesinde de bu periyodik ve periyodik olmayan kısımların hepsi bulunuyor; o halde niçin konuşma değil

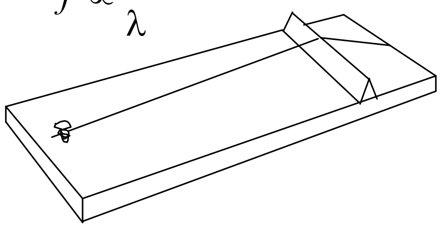
---

6 http://www.ciarm.ing.unibo.it/researches/violin-1.html

ama şarkı müzik olarak duyuluyor? Çünkü şarkıda yer alan perdeler "bir müziksel ses sistemini oluşturacak biçimde belirlenmiş bir perdeler kümesi" içinden seçilerek kullanılan perdelerdir. Müziksel ses sisteminin oluşumu ve yapısından sözedebilmek için yine 26 yüzyıl öncesine gitmek gerekiyor. Eski Yunanlılar, bir sesin, temel frekansları o sesin temel frekansının tamsayı katlarına eşit olan seslerle uyumlu tınladığını keşfetmişlerdi. Bu frekanslar yukarıda sözedilen tek sesin harmonik bileşenlerinin frekanslarına eşittir: f_1 ile $2f_1$, $3f_1$, $4f_1$, vb.

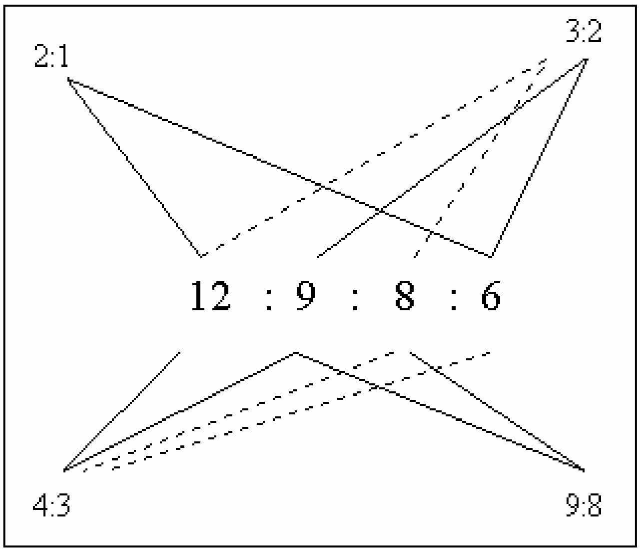
Efsaneye göre, Pisagor ellerinde çekiçlerle çalışan bazı demircilere rastlar[7]. Çekiçlerden çıkan sesler birbiriyle çok uyumlu tınlamaktadır. Pisagor çekiçleri tarttığında ağırlıklarının (12:9:8:6) oranında olduğunu farkeder. Çekiç ağırlıklarıyla seslerinin temel frekansları arasında matematiksel bir ilişki kurmak doğal olarak pek olası değil; ama gergin bir telin boyu ile sesinin temel frekansı arasında kesin bir ilişki bulunuyor (Şekil 6). Pisagorcular (12:9:8:6) oranlarından Şekil 7'deki gibi türettikleri (2:1), (3:2), (4:3) ve (9:8) oranlarını müzikteki esas aralıklar olarak kabul ettiler. Bu oranlar, tamsayı katlardaki frekansların tek bir oktav (başlangıç frekansı ile onun iki katı olan frekans arasındaki oktav) içine aktarıldığında başlangıç frekansına oranlarını belirtiyor. Şekil 6'da görülen "monokord"u kullanarak, telin boyunu değiştirmek yoluyla bu "bağıl frekansları" kolayca hesaplaya-biliyorlardı. (Müziği "bağıl niceliklerin" hesabıyla uğraşan bir öğreti olarak tanımladıklarını burada anımsamak yerinde olur.)

$$f \propto \frac{1}{\lambda}$$



***Şekil 6.** Monokord*

[7] http://home.datacomm.ch/straub/mamuth/mamufaq.html



Şekil 7.

Pisagorculara göre "esas aralıklar"

2:1 $\longrightarrow$ oktav (sekizli) ($f_1, 2f_1, 4f_1, 8f_1, ...$)

3:2 $\longrightarrow$ tam beşli

4:3 $\longrightarrow$ tam dörtlü

9:8 $\longrightarrow$ tam ses (büyük ikili)

Frekans oranı (2:1) ("oktav") olan sesler (f_1, $2f_1$, $4f_1$, $8f_1$, ...), aynı ses renginin ("kroma*"nın) açık/koyu tonları gibiydi, böylece aynı adla adlandırıldılar. Ancak, esas aralıklar olarak saptadıkları aralıkların (2:1) dışında hiçbir çeşidini tek başına üst üste ekleyerek başlangıç kromasını üst oktavlardan herhangi birinde tam olarak elde etmeye olanak yoktu, çünkü p 1'den büyük bir doğal sayı olmak üzere $(p+1):p$ şeklindeki Pisagor tipi aralıkların hiçbir pozitif tamsayı kuvveti, 2'nin hiçbir pozitif tamsayı kuvvetine eşit değildir:

$$2^m \neq \left(\frac{p+1}{p}\right)^n \qquad \begin{cases} m, n, p \in N \\ p > 1 \end{cases}$$

---

* kroma: oktav gözönüne alınmaksızın algılanan tizlik derecesi; bir tizlik derecesinin algılanışında oktava göre değişmeyen özellik.

Bununla birlikte, çok önem verdikleri (3:2) oranındaki bağıl frekansı (müzik dilinde "tam beşli") 12 kez üst üste ekleyerek başlangıç sesinin 7 oktav yukarısına yaklaşık olarak ulaşabildiklerini saptadılar ($(3/2)^{12} \approx 2^7$) ve buldukları 12 sesin frekanslarını başlangıç oktavına aktararak oktavı 12 parçaya böldüler. Aşağıda gösterilen, buldukları 12 tam beşli yukarıdaki frekansın tam 7. oktavın frekansına oranına "Pisagor koması" denir:

$$\frac{(3/2)^{12}}{2^7} = 1.0136432... = \frac{(9/8)^6}{2} = \begin{matrix} \textit{Pisagor} \\ \textit{koması} \end{matrix}$$

Eşitlikte görüldüğü gibi, bu oran aynı zamanda 6 "tam ses" yukarıdaki sesin de başlangıç oktavındaki bağıl frekansıdır. Bu farklılık, başlangıç sesinin değişik bir yere aktarılması, dizilerin tiz ve kalın bölgelere doğru sürdürülerek genişletilmek istenmesi ve daha karmaşık ve çok sesli müziğin geliştirilmek istenmesi sözkonusu olduğunda yeni ses uyumsuzluklarının oluşmasına yol açtı. Bu sorunları gidermek için bugün "eşit düzenli" sistem kullanılmaktadır. Bu ses sisteminin iki kriteri, 12 "yarım ses"in eşit aralıklı olması ve oktavın tam iki kat frekansta olmasıdır. Bu yolla, katsayısı ikinin on ikinci dereceden köküne eşit olan bir geometrik dizi elde edilmektedir:

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = ... = \frac{f_{12}}{f_{11}} = a$$

$$\left.\begin{aligned} f_{12} &= a^{12} f_0 \\ f_{12} &= 2 f_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \sqrt[12]{2}$$

Böylece örneğin doğal tam beşli biraz küçültülmüş, doğal tam dörtlü biraz büyütülmüştür. Piyano akortçularının saatlerce irrasyonel frekans oranlarıyla uğraştıkları bugünkü sistem, sözgelimi, Johann Sebastian Bach'a, 12 sesten her birinin majör ve minör tonlarında ikişer tane bestelediği ve "Eşit Düzenli Klavye" adını verdiği ünlü 48 Prelüd ve Füg'ü yazma olanağını sağlamıştır.

Aralarındaki müziksel aralık "yarım ses" olarak adlandırılan ve her oktavda yinelenen bu 12 kroma arasından seçilen bir başlangıç sesine çeşitli ardışık aralık kombinasyonları uygulanarak, bu başlangıç sesini bir üst oktavdaki karşılığına bir merdiven gibi bağlayan çeşitli diziler elde edilir. Bu dizileri oluşturan aralık kombinasyonlarına örnek olarak

Kromatik dizi için:	[½, ½, ½, ½, ½, ½, ½, ½, ½, ½, ½, ½]
Majör dizi için:	[1, 1, ½, 1, 1 1, ½]
Armonik minör dizisi için:	[1, ½, 1, 1, ½, $3/2$, ½]
Tam ses dizisi için:	[1, 1, 1, 1, 1, 1]
Blues dizisi için:	[$3/2$, 1, ½, ½, $3/2$, 1]

yazılabilir. Dizilerin bir ya da daha fazla türüne ait seslerin çeşitli besteleme kuralları içinde seçilip sıralanmasıyla "melodi (ezgi)"ler oluşturulur.

Müzikte zamanla ilişkili ögeler olan tempo, ritim, ölçü gibi kavramlara şöyle tanımlar getirilebilir:

Tempo = vuruş sayısı / zaman

Ritim : vuruş sürelerinin (ve bazen şiddetlerinin de) periyodik olarak yinelenen deseni.

Ölçü : genellikle ritmin 1 periyodunda yeralan toplam vuruş sayısı

Bu durumda, çeşitli ritimler, bu deseni oluşturan ardışık süre oranları olarak gösterilebilir. Örneğin desenin 1 periyodunun süresi 1 birim alınırsa:

Vals :	$[1/3, 1/3, 1/3]$
Swing :	$[1/6, 1/12, 1/6, 1/12, 1/6, 1/12, 1/6, 1/12]$
Samba :	$[1/8, 1/8, 1/8, 1/16, 1/8, 1/8, 1/16, 1/16, 1/16, 1/8]$
Bossa nova:	$[1/8, 1/16, 1/16, 1/16, 1/8, 1/8, 1/8, 1/16, 1/8, 1/8]$

şeklinde yazılabilir. Eğer vuruşların sürelerinin yanı sıra şiddetlerinin de simgelenmesi istenirse, her bir vuruş ikişer değer ile gösterilebilir. Sözgelimi, 'kuvvetli'yi 3, 'hafif'i '1' ile simgelersek Vals için

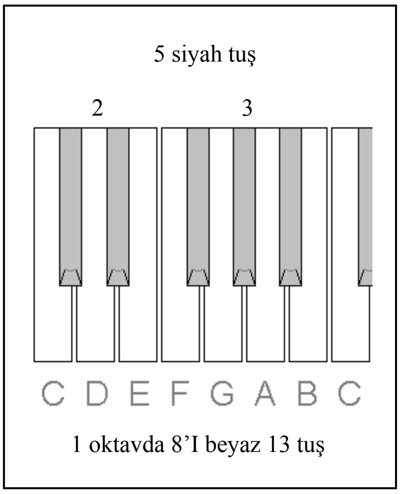
[(1/3, 3), (1/3, 1), (1/3, 1)] yazılabilir.

Karşılaşılan Bazı Özel Matematiksel Yapılar

Görsel sanat dallarının yanısıra müzikte de sıkça anılan bir konu "Fibonacci dizisi" ve "altın oran"dır. Fibonacci dizisi, ilk iki elemanı 1, sonraki her bir elemanın değeri kendisinden önceki son iki elemanın değerlerinin toplamına eşit olan dizidir:

Fibonacci dizisi = {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...}

Bir piyano klavyesinin bir oktavlık bölümüne bakıldığında, diyatonik ve kromatik dizilerin bağlandığı başlangıç perdesi ile birlikte düşünülerek, Fibonacci dizisinin ilk yedi elemanı görülebilir[8] (Şekil 8).



Şekil 8. *Piyano klavyesi ve Fibonacci dizisi*

Fibonacci dizisi sonsuza giderken dizinin her bir elemanının bir sonraki elemanına oranının yakınsadığı değer olan "altın oran"ın geometrik anlamı, bir doğru ya da dikdörtgen bu oranda bölündüğünde, büyük parçanın bütüne oranının küçük parçanın büyük parçaya oranına eşit olmasıdır:

$$\text{Altın oran: } \varphi = \frac{\left|\sqrt{5}\right| - 1}{2} \approx 0.618$$

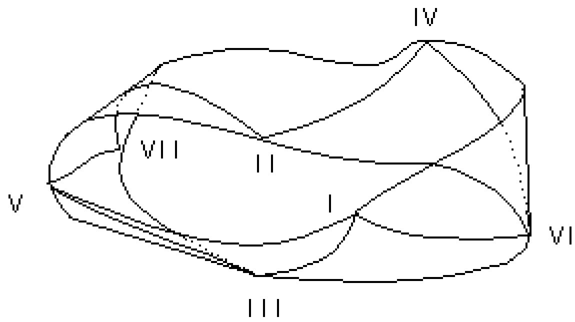
Bestecilerin, yapıtlarında kimi zaman yapıtı oluşturan daha küçük bölümlerin sürelerini, kimi zaman da yapıtın doruk noktasının konumunu altın orana uygun olarak yerleştirdikleri bulunmuştur (Haendel'in "*Hallelujah* (*Messiah*)"ı, Mozart'ın çoğu piyano sonatı[9], Beethoven'in 5.

8 http://tqjunior.thinkquest.org/4116/Music/fibonacc.htm

9 http://perso.unifr.ch/michael.beer/mathandmusic.pdf

senfonisi[10], Debussy'nin "*Reflets dans l'eau*", "*L'isle joyeuse*" adlı yapıtları[11], vb).

Schönberg'in bir düşüncesinden kaynaklanan "armonik örgü (harmonic braid)" ise şöyle bir yapıdır: Diyatonik dizinin I'den VII'ye kadar numaralandırılmış üç sesli akorları birer nokta ile gösterilerek, en az bir ortak kroma içeren akorları gösteren noktalar çizgiyle birleştirilirse ortaya tanınmış bir matematiksel yapı olan "Möbius şeridi" çıkar (Şekil 9)[12].



Şekil 9. *Möbius şeridi biçimindeki "armonik örgü"*

20. Yüzyıldaki Çalışmalara Örnekler

20. yüzyılın yeni besteleme yöntemleri (ör. oniki ses tekniği ve dizisel müzik) içinde matematik daha yoğun biçimde kullanılmaya başlandı. Ünlü kuramcı-besteci Iannis Xenakis'in, bestelemede olasılık kuramı ve Markov modelleri, seslerin granüler sentezi gibi konuları içeren "*Formalized Music*" adlı kitabı da bu alanda geniş yankı uyandıran bir yapıt olmuştur[13].

Besteleme teknikleri kapsamında eskiden beri (örneğin barok dönemde de) kullanılan "tematik dönüşümler", belli bir perde dizisinin, perde ekseni ve zaman ekseninin simetri eksenleri olarak alındığı yansımalarının hesaplandığı dönüşümlerdir. Sözgelimi, Beethoven'ın 5. senfonisinin ünlü motifi için bu dönüşümler, gösterimi sadeleştirmek amacıyla seslerin

---

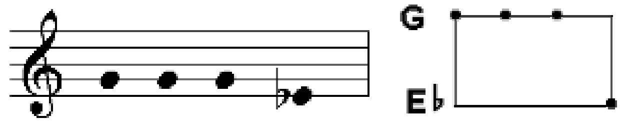
10 http://tqjunior.thinkquest.org/4116/Music/fibonacc.htm

11 http://www.music.indiana.edu/som/courses/rhythm/annotations/howat83.html

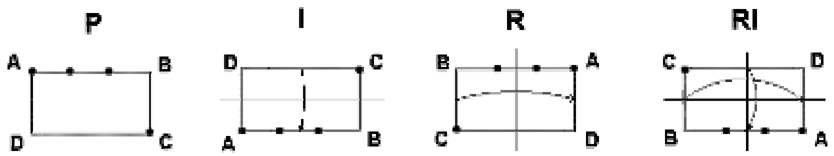
12 http://home.datacomm.ch/straub/mamuth/mamufaq.html

13 I. Xenakis, Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition, Indiana University Press, Bloomington, London, 1972; ayrıca bkz. http://nicemusic4.music.niu.edu/XenForMus.html

süreleri değil yalnızca sıraları gözönüne alınarak (Şekil 10), Şekil 11'deki gibi yazılabilir[14].

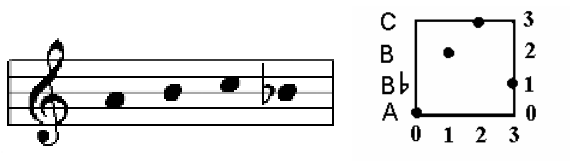


***Şekil 10.** Beethoven'in ünlü motifinin grafiksel gösterimi*



***Şekil 11.** P ve 3 yansıma işlemi*

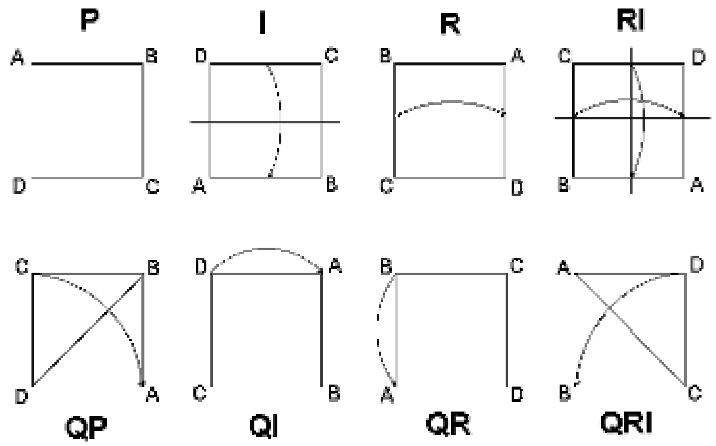
Burada P (*prime*) motifin esas hali, I (*inverse*) zaman ekseni simetri ekseni alınarak bulunan (perde ekseni boyunca) yansıması, R (*retrograde*) perde ekseni simetri ekseni alınarak bulunan (zaman ekseni boyunca) yansıması, RI (*retrograde-inverse*) ise iki yansıma işleminin birlikte yapılmış halidir. Şekil 10'daki motifte bulunan toplam perde sayısı, toplam perde çeşidine eşit değildir. Bu iki toplamın eşit olduğu motifler (ör. Şekil 12) için 20. yüzyılda ortaya konan ek dönüşümler, bu özellikteki motifler için dönüşüm sayısını iki katına çıkarmaktadır (Şekil 13).



***Şekil 12.** Toplam perde sayısının toplam perde çeşidine eşit olduğu bir motif*

---

[14] L. Solomon, "Symmetry as a Compositional Determinant", *Perspectives of New Music*, Vol. 11/2, pp. 257-263, Spring/Summer 1973 (revised 2000 in http://cc.pima.edu/users/larry/diss8.htm).



Şekil 13. ‘Kare’sel bir desenin olası dönüşümleri

QP (*Quadrate Prime*) harfleri ile simgelenen dönüşüm, P motifinin perde sayısı perde çeşidine eşit olması sonucu Şekil 12’de üzerine yerleştirilebildiği ‘kare’nin soldan sağa yükselen köşegeninin simetri ekseni olarak alındığı yansımasıdır. Bu durumda P’nin dönüşümleri, her bir sıralı çiftte ilk terim zamandaki sırayı (t), ikinci terim perde numarasını (p), n toplam perde sayısının 1 eksiğini göstermek üzere matematiksel olarak şöyle yazılabilir:

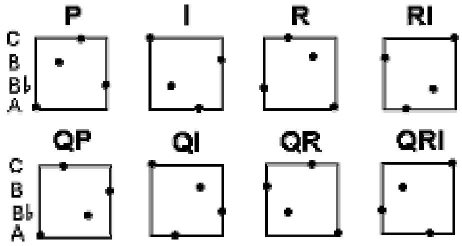
P(t,p) = P(t,p)　　QP(t,p) = P(p,t)

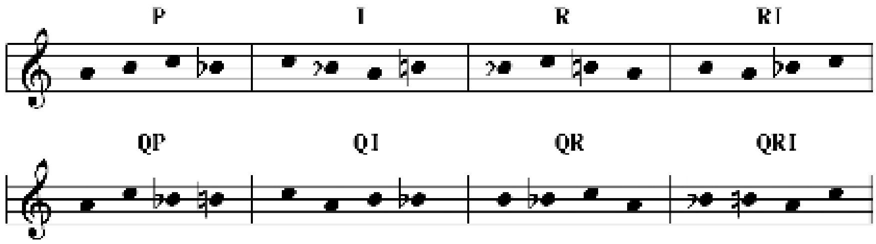
I(t,p) = P(t,n-p)　　QI(t,p) = P(p,n-t)

R(t,p) = P(n-t,p)　　QR(t,p) = P(n-p,t)

RI(t,p) = P(n-t,n-p)　　QRI(t,p) = P(n-p, n-t)

Bu işlemler Şekil 12’deki örneğe uygulandığında aşağıdaki dönüşümler elde edilmiş olur:





(P=0231, I=3102, R=1320, RI=2013, QP=0312, QI=3021, QR=2130, QRI=1203)

Son yıllarda müziği armonik ve melodik açıdan çözümlemek için tasarlanan bazı matematiksel yöntemler de bulunuyor. Dinleyicide oluşan armonik gerginliğin hesaplanması için kurulan bir modelde, bir tonalitedeki her akorun temel perde sınıfı uzayı beş ayrı düzeyde listelenerek (Şekil 14), *x* akorunun *y* akoruna armonik uzaklığı, *x*'ten *y*'ye diyatonik düzeyde ve temel akor düzeyinde beşliler çemberi boyunca gidilen yollar ile *x* ve *y*'de ortak olmayan perde sayısı toplanarak hesaplanmaktadır[15]:

oktav düzeyi:				3								
beşli düzeyi:				3							10	
temel akor düzeyi:				3				7			10	
diyatonik düzey:	0		2	3		5		7	8		10	
kromatik düzey:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Şekil 14. *Mibemol majör tonalitesinin birinci derece akorunun temel perde sınıfı uzayı*

15 F. Lerdahl, "Calculating Tonal Tension", *Music Perception*, Vol. 13, No. 3, pp. 319-363, Spring 1996, s. 322.

$$d(x \rightarrow y) = i + j + k$$

$d(x \rightarrow y)$, x akorunun y akoruna armonik uzaklığını, i diyatonik düzeyde x'ten y'ye beşliler çemberi boyunca gidilen yolu, j temel akor düzeyinde x'ten y'ye beşliler çemberi boyunca gidilen yolu, k ise x ve y'de ortak olmayan perde sayısını simgeliyor. Böylece, gidilen akorun referans akordan armonik uzaklığı, kararsızlığının bir ölçüsü oluyor. Sözgelimi, Şekil 14'te verilen mibemol majör tonalitesinin birinci derece akoru ile ikinci derece akoru arasındaki armonik uzaklık

$$d(\mathrm{I/E}\beta \rightarrow \mathrm{ii/E}\beta) = i + j + k = 0 + 2 + 6 = 8$$

olarak, fa minör tonalitesinin beşinci derece akoru ile uzaklığı ise

$$d(\mathrm{I/E}\beta \rightarrow \mathrm{V/f}) = 1 + 3 + 7 = 11$$

olarak bulunur.

Armonik uzaklık hesabının ikinci bir uygulaması olarak, sözgelimi, referansımız I/Eβ ise ve fa minör akoruna gidiliyorsa, normal koşullarda (yani başka bir tonaliteye doğru hazırlayıcı olaylar olmamışsa), yorumlanabileceği çeşitli olasılıklar içinden (ii/Eβ, i/f, iv/c, vi/Aβ, vb) ii/Eβ olarak duyulur çünkü $d(\mathrm{I/E}\beta \rightarrow y)$ uzaklığını minimum yapan y değeri odur ("en kısa yol" ilkesi).

Günümüzde bilgisayarların işlem gücünün artması "algoritmik kompozisyon" yöntemlerini doğurdu. Fraktal sistemlerin matematiksel formüllerinin beste oluşturmada kullanılması yoluyla "kaos" olgusunun müziksel uygulamalarının gerçekleştirilmesi; genetik algoritmaların müzik-sel motiflere uygulanması yoluyla motiflerin gelişim ve dönüşümlerinin mutasyon, modifikasyon, doğal ayıklanma gibi evrimsel süreçlerle yapılması bu yeni yöntemlerin en yaygın örneklerindendir.

SONUÇ

Yukarıda yer alan örneklerin tümü, matematik ve müziğin ilişkisini örnek alarak bilim ve sanatın, Eski Yunan'da da farkedildiği gibi, iç içeliğini vurguluyor.

Burada özellikle klasik dönemin büyük bestecilerinin, yukarıda değinilen 'altın oran' gibi matematiksel ilişkileri bilerek ve kullanarak değil, sanatsal sezgilerine dayanarak yarattıklarını, bu yapıtlardaki matematiksel özelliklerin, sonradan yapılan incelemelerle kısmen saptandığını da belirtmek gerekir.

Müziğin mantığa ve hesaplamaya dayalı olan yapısı, bilim ve teknoloji ile birlikteliğini kaçınılmaz kılarak günümüzde özellikle bilgisayar teknolojisinin müziğin üretiminden analizine kadar çok çeşitli işlemlerinde kullanılabilmesini sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

Bora, U., "Geleneksel Türk Sanat Müziği Çalgılarının Dinamik Spektrum Analizi", 2. Sinyal İşleme ve Uygulamaları Kurultayı Bildiriler Kitabı, s. 258-263, 1994.

Büyük Larousse Sözlük ve Ansiklopedisi, Cilt 15-16, Milliyet yayınları, İstanbul, 1992.

Garland, T.H., and Kahn, C.V., Math and music: Harmonious connections, Palo Alto, Dale Seymour Publications, 1995.

http://home.datacomm.ch/straub/mamuth/mamufaq.html

http://nicemusic4.music.niu.edu/XenForMus.html

http://perso.unifr.ch/michael.beer/mathandmusic.pdf

http://tqjunior.thinkquest.org/4116/Music/fibonacc.htm

http://www.ciarm.ing.unibo.it/researches/violin-1.html

http://www.music.indiana.edu/som/courses/rhythm/annotations/howat83.html

Lerdahl, F., "Calculating Tonal Tension", Music Perception, Vol. 13, No. 3, pp.319-363, Spring 1996.

Solomon, L., "Symmetry as a Compositional Determinant", Perspectives of New Music, Vol. 11/2, pp.257-263, Spring/Summer 1973 (revised 2000 in http://cc.pima.edu/users/ larry/diss8.htm).

Winsor, J. "A Definition of Music (And Why It's Needed)", http://home.att.net/~j-winsor/jhw_art1.html, 1997.

Xenakis, I., Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition, Indiana University Press, Bloomington, London, 1972.