MATEMATİKTEKİ BAZI DİZAYN ÇEŞİTLERİ

Eolita SELMANAJ

TEZ ONAYI

Eolita Selmanaj tarafından hazırlanan "MATEMATİKTEKİ BAZI DİZAYN ÇEŞİTLERİ " adlı tez çalışması aşağıdaki juri tarafından oy birliği ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitisü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Basri ÇELİK

Başkan: Prof.Dr. Süleyman ÇİFTÇİ
Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye : Prof. Dr. Basri ÇELİK
Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye : Prof. Dr. İbrahim GÜNALTILI
Osmangazi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü

27/ 06/ 2016

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/06/2016

İmza

Eolita SELMANAJ

T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİKTEKİ BAZI DİZAYN ÇEŞİTLERİ

Eolita SELMANAJ

Prof. Dr. Basri ÇELİK
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA–2016

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİKTEKİ BAZI DİZAYN ÇEŞİTLERİ

Eolita SELMANAJ

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Basri ÇELİK

Bu çalışmanın amacı literatürde matematiksel dizaynlar hakkında var olan temel kavramları bir araya getirip, bazı örneklerle bunların kolay anlaşılır hâle gelmesini sağlamaktır.

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümünde konunun rahat anlaşılmasını sağlamak için gerekli temel kavramlar ve bazı teoremler yer almaktadır. Üç alt başlık hâlinde düzenlenmiş olan ikinci bölümde ise matematiksel dizaynlar tanıtılıp sonlu ve sonsuz dizaynlar hakkında temel bilgiler verilmiştir. Bu temel bilgiler verilen örneklerle desteklenmiştir. Son bölüm olan üçüncü bölümde parçalanabilir dizaynlar tanıtılmıştır. Bu bölüm üç alt başlık bulundurmaktadır. Önce parçalanabilir dizaynlarla ilgili genel kavramlar tanıtılmış ve daha sonra parçalanabilir dizaynların temel özellikleri verilmiştir. Bu bölümde son olarak parçalanabilir dizaynlar üzerinde grupların etkisi üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Dizayn teori, Matematiksel dizayn, Parçalanabilir dizayn

2016, iv + 65 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

SOME MATHEMATICAL DESIGN CLASSES

Eolita SELMANAJ

Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Basri ÇELİK (Uludag University)

The aim of this work is to combine the fundamental notions about mathematical designs which exist in literature and to make them more understandable with the help of some examples.

This thesis consists of three chapters. In the first chapter which is entitled as Introduction, the fundamental notions and some theorems are recalled to make the topic understandable.

In the second chapter which has been organized under three subsection, mathematical designs are introduced and some information about finite and infinite designs are given. This notions are supported with given examples. In the third chapter which is the last chapter, divisible designs are introduced. This chapter has three subsections. First of all, the fundamental notions related to divisible designs are introduced and some basic properties of divisible designs are given. Also in this chapter, the group action on divisible designs is mentioned.

Key Words: Design theory, Mathematical design, Divisible design
2016, iv + 65 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Öncelikle yüksek lisansa başlamama vesile olan ve bu süre zarfında destek veren Yrd. Doç. Nisa ÇELİK'e şükranlarımı sunarım.

Tanıdığım günden bu yana ilminden çok faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum, tecrübelerinden faydalanırken hoşgörü, sabır gösteren ve çalışma boyunca bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren Prof. Dr. Basri ÇELİK'e müteşekkirim.

Türkiye'ye gelmeme vesile olan ve geldiğim günden bu yana maddi ve manevi hiçbir yardımını esirgemeyen kardeşim Elona SELMANAJ ER'e, eşi Şeref ER'e, nişanlım Denis MİSKU'ya ve canım aileme de özel bir teşekkürü borç bilirim.

Eolita SELMANAJ
27/06/2016

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bu bölümde, tezde kullanacağımız temel tanım, kavram ve gösterimler tanıtılıp, gerekli olan bazı teoremler toplu halde verilecektir. Bu bölümde yer alan soyut matematik ile ilgili konular (Çelik 2015), geometri ile ilgili konular, (Kaya 1978), (Hughes ve Piper 1985) ve (Demirtola 2000), cebir ile ilgili konular (Bayraktar 1997) ve Jacobson'dan (1989) derlenmiştir.

Tez boyunca kümeler genellikle büyük ve koyu harfle ve bir **A** kümesinin eleman sayısı $|\mathbf{A}|$ ile gösterilecektir. x ve y herhangi iki nesne iken $\{x, \{x, y\}\}$ kümesine bir sıralı ikili, x e bu sıralı ikilinin birinci bileşeni y ye de ikinci bileşeni denir ve bu sıralı ikili kısaca (x,y) biçiminde gösterilir. Sıralı ikililerden oluşan kümelere grafik adı verilir. **G** bir grafik iken **G** yi oluşturan sıralı ikililerin birinci bileşenlerinin kümesi iz_1(**G**), ikinci bileşenlerinin kümesi iz_2(**G**) ile gösterilir. **A** ve **B** kümeleri için **B** nin **A** da olmayan elemanlarından oluşan kümeye **A** nın **B** deki tümleyeni denir ve bu küme $\mathbf{A}'_{\boldsymbol{B}}$ ile gösterilir. E evrensel küme iken $\mathbf{A}'_{\boldsymbol{E}}$ yerine kısaca $\mathbf{A}'$ gösterimi kulanılır.

1.1 Tanım. **A** ve **B** herhangi iki küme olsun.

$\boldsymbol{B_1}$) **G** bir grafiktir.

$\boldsymbol{B_2}$) iz_1(**G**) ⊆**A** dır.

$\boldsymbol{B_3}$) iz_2(**G**) ⊆**B** dir.

şartları sağlanıyorsa **Γ=(G,A,B)** sıralı üçlüsüne **A** dan **B** ye (ya da **A** ile **B** arasında) bir ***bağıntı*** denir. **A** dan **B** ye bir **Γ** bağıntısı $\mathbf{\Gamma}: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ biçiminde de gösterilir.

Şimdi yukarıdaki tanıma eşdeğer bir şart ifade eden ve tanımdan daha kulanışlı olan bir teorem vereceğiz:

1.2 Teorem. **A, B** herhangi iki küme olsun **Γ=(G,A,B)** nin **A** dan **B** ye bir bağıntı olması için gerek ve yeter şart **G⊆A×B** olmasıdır.

1.3 Tanım. $\Delta_{\mathbf{A}} = \{(x, x) \mid x \in \mathbf{A}\}$ kümesine **A** kümesinin ***köşegeni*** adı verilir.

1.4 Tanım f=**(G,A,B)** bir bağıntı olsun.

F$_1$) $\left(\forall(\mathrm{x},\mathrm{u}),(\mathrm{x},v)\right)\ ((\mathrm{x},\mathrm{u}) \in \mathbf{G} \wedge (\mathrm{x},\mathrm{v}) \in \mathbf{G} \Longrightarrow \mathrm{u}=\mathrm{v})$ dir.

F$_2$) $(\forall\mathrm{x})\ (\mathrm{x} \in \mathbf{A} \Longrightarrow \exists\ (\mathrm{x},\mathrm{u}) \in \mathbf{G}$ dir.

şartları sağlanıyorsa f=(**G,A,B**) bağıntısına **A** dan **B** ye bir ***fonksiyon*** denir. f=**(G,A,B)** fonksyonu için (x,y) ∈ **G** ise bu $f(\mathrm{x}) = y$ biçiminde de gösterilir.

1.5 Tanım. Bir $f = (\mathbf{G},\mathbf{A},\mathbf{B})$ fonksyonu için

$$\forall(\mathrm{x},\mathrm{u}),(y,\mathrm{u}))[((\mathrm{x},\mathrm{u}) \in \mathbf{G} \wedge (\mathrm{y},\mathrm{u}) \in \mathbf{G}) \Longrightarrow \mathrm{x}=\mathrm{y}]$$

şartı sağlanıyorsa f ye **A** dan **B** ye ***birebir fonksyon*** adı verilir.
1.5 Tanımda yer alan

$$\forall(\mathrm{x},\mathrm{u}),(y,\mathrm{u}))[((\mathrm{x},\mathrm{u}) \in \mathbf{G} \wedge (\mathrm{y},\mathrm{u}) \in \mathbf{G}) \Longrightarrow \mathrm{x}=\mathrm{y}]$$

şartının

$$\forall(\mathrm{x},\mathrm{y})\ [\left(f(x)=f(y)\right) \Longrightarrow \mathrm{x}=\mathrm{y}]$$

biçiminde de ifade edileceği aşikârdır. Hatta olmayana ergi yöntemi gereği

$$\left(f(\mathrm{x})=f(\mathrm{y})\right) \Longrightarrow \mathrm{x}=\mathrm{y}$$

önermesi ile

$$\mathrm{x} \neq \mathrm{y} \Longrightarrow \left(f(\mathrm{x}) \neq f(\mathrm{y})\right)$$

önermesi denktir. Bu nedenle fonksiyonların birebirliği birbirine denk olan bu üç şarttan herhangi bir yardımıyla gösterilebilir.

1.6 Tanım. Bir $f = (\mathbf{G},\mathbf{A},\mathbf{B})$ fonksyonu için:

$$(\forall y)\ [y \in \mathbf{B} \Longrightarrow (\exists \mathrm{x})(\mathrm{x} \in \mathbf{A} \wedge (\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbf{G}]$$

şartı sağlanıyorsa f ye **A** dan **B** ye ***örten fonksiyon*** adı verilir.
Bu tanımda yer alan şart ile

$$(\forall y)\ [y \in \mathbf{B} \Longrightarrow (\exists \mathrm{x})(\mathrm{x} \in \mathbf{A} \wedge f(\mathrm{x}) = \mathrm{y})]$$

önermesinin denk olduğu aşikârdır.

1.7 Tanım. Γ=(**G**,**A**,**A**) bağıntısı için,

$\boldsymbol{D_1}$) $(\forall \mathrm{x})\ (\mathrm{x} \in \mathbf{A} \ \Longrightarrow (\mathrm{x},\mathrm{x}) \in \mathbf{G})$ dir.

$\boldsymbol{D_2}$) $(\forall (\mathrm{x},\mathrm{y}))((\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbf{G} \Longrightarrow (\mathrm{y},\mathrm{x}) \in \mathbf{G})$ dir.

$\boldsymbol{D_3}$) $(\forall (\mathrm{x},\mathrm{y}),(y,z))[((\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbf{G} \wedge (\mathrm{y},\mathrm{z}) \in \mathbf{G}) \Longrightarrow (\mathrm{x},\mathrm{z}) \in \mathbf{G}]$ dir.

şartları sağlanıyorsa **Γ** ya **A** kümesi üzerinde bir ***denklik bağıntısıdır*** denir.

1.8 Tanım Γ=(**G**,**A**,**A**) bir denkik bağıntısı ve $a \in \mathbf{A}$ keyfi bir eleman olsun. Bu durumda;

$$[\mathrm{a}]= \{\mathrm{x} \mid (\mathrm{a},\mathrm{x}) \in \mathbf{G}\}$$

kümesine "a nın **Γ** bağıntısına göre ***denklik sınıfı***" veya kısaca "a nın denklik sınıfı" denir. b ∈[a] olacak biçimdeki b elemanına [a] için bir ***temsilci*** adı verilir. **Γ** denklik bağıntısına göre tüm denklik sınıflarının kümesi olan $\{[\mathrm{x}] \mid \mathrm{x} \in \mathbf{A}\}$ kümesine **A** kümesinin **Γ** bağıntısına göre bölüm kümesi denir ve **A/ Γ**=$\{[\mathrm{x}] \mid \mathrm{x} \in \mathbf{A}\}$ biçiminde gösterilir.

Γ=(**G**,**A**,**A**) bir denklik bağıntısı iken $(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in$**G** olması x~y biçiminde de gösterilir. Bu gösterim kulanıldığında denklik sınıfları $[\mathrm{a}] = \{\mathrm{x} \in \mathbf{A} \mid \mathrm{a}\sim\mathrm{x}\}$ biçiminde ifade edilir.

1.9 Tanım. Verilen bir **S** kümesi için **S**×**S** den **S** ye tanımlı bir fonksyona **S** kümesi üzerinde bir ***ikili işlem*** ya da ***iç işlem*** denir. Eğer $*$, **S** üzerinde bir ikili işlem ise a,b ∈ **S** için $*((\mathrm{a}, \mathrm{b}))$ görüntüsü $\mathrm{a}* \mathrm{b}$ biçiminde gösterilir.

1.10 Tanım. **G** boş olmayan bir küme ve $*$, **G** üzerinde bir ikili işlem olsun. (**G**, $*$) cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa ***grup*** adını alır.

G_1) $\forall a,b,c\in \mathbf{G}$ için $a*(b*c)=(a*b)*c$ dir. (**Birleşme özelliği** geçerlidir).

G_2) $\forall a \in \mathbf{G}$ için $a*e=e*a=a$ olacak şekilde $\exists\, e\in \mathbf{G}$ dir. (e ye **birim elemanı** denir.

G_3) $\forall a \in \mathbf{G}$ için $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ olacak şekilde $\exists\, a^{-1}\in \mathbf{G}$ dir. (a^{-1} elemanına a nın **tersi** denir

Eğer bir karışıklık olmayacaksa **(G,** $*$**)** grubu kisaca **G** ile gösterilir.

1.11 Tanım. $(\mathbf{G},*)$ ve $(\mathbf{G}',o)$ iki grup ve Φ: $\mathbf{G}\longrightarrow \mathbf{G}'$ bir dönüşüm olsun. Her a,b$\in$ **G** için

$$\Phi(a*b)=\Phi(a)\,o\,\Phi(b)$$

oluyorsa Φ dönüşümüne ***grup homomorfizmi*** (veya kısaca ***homomorfizm***) denir. Φ homomorfizmi birebir ise Φ ye "***monomorfizm***"adı verilir.

1.12 Tanim. $(\mathbf{G},*)$ ve $(\mathbf{G}',o)$ iki grup olsun Φ: $\mathbf{G}\longrightarrow \mathbf{G}'$

1) Φ birebir ve örtendir.

2) Her $x,y\in\mathbf{A}$ için $\Phi(x*y)=\Phi(x)\,\boldsymbol{o}\,\Phi(y)$ dir.

şartları sağlanıyorsa **G** ve **G'**ye izomorf gruplar, Φ ye de **G** ve **G'** arasında ***grup izomorfizmi*** denir.

1.13 Tanım. Elemanlarına noktalar adı verilen ***N*** ve elemanlarına bloklar adı verilen ***B*** gibi ayrık iki küme ile bunlar arasında verilen bir o bağıntısı için **S**=(***N***,***B***,o) üçlüsüne bir ***geometrik yapı*** (veya kısaca ***yapı***) denir. $o\subseteq$ ***NxB*** ye ise bu yapı için ***üzerinde olma bağıntısı*** adı verilir. Genellikle noktalar büyük harflerle ve bloklar küçük harflerle gösterilir. Verilen herhangi bir blok üzerindeki noktaların kümesiyle özdeşleştirilir. Eğer P noktası y bloğun üzerinde ise yani (P,y)$\in$ o ise bu P oy veya P$\in$y ile gösterilir ve bu gösterimler "P ,y üzerindedir", "y , P yi kapsar" veya "y , P den geçer" biçiminde okunur.

S =(***N***,***B***,o) yapısı için ***N*** ve ***B*** sonlu ise **S** ye ***sonlu yapı*** denir. Yukarıdaki tanımdan anlaşılacağı üzere bir geometrik yapının her bir bloğu, üzerindeki noktaların kümesi olarak yazılabilir. Bu durumda iki farklı bloğun aynı nokta kümesi ile tanımlanmamasına hiç bir neden yoktur. Aynı nokta kümelerinden oluşan bloklara sahip geometrik yapılara ***tekrarlı bloklu yapılar*** denir.

Bir geometrik yapıda A ve B noktalarından geçen doğru tek türlü belliyse bu doğru AB ya da A∨B biçiminde gösterilir.

Eğer iki farklı bloğun ortak hiç bir elemanı yoksa bu bloklara ***paralel bloklar*** denir a ve b blokları parallel iseler bu a∥b biçiminde gösterilir.

1.14 Tanım. Aşağıdaki aksyomlari sağlayan bir $\mathcal{A}$ =(**N**, **D**, o) geometrik yapısına ***afin düzlem*** denir**:**

A_1) Her M, N ∈ **N**, M≠N, noktalaı için Mo d ve N o d olacak şekilde bir tek d∈ D bloğu vardır.

A_2) N ∅ d olmak üzere her N ∈ **N** ve her d∈ **D** için N o c ve d ∥ c olacak şekilde bir tek c∈ **D** bloğu vardir.

A_3) Aynı blokta olmayan üç nokta vardır.

(**N**, **D**. o) afin düzlemi kısaca $\mathcal{A}$ =(**N**, **D**. o) biçiminde gösterilir.

Genel olarak düzlemlere ait bloklara ***doğru*** adı verilir. Bu nedenle daha sonra tanımını vereceğimiz projektif düzlem tanımında da "**blok**" yerine "**doğru**" ifadesi kulanılacaktır.

1.16 Teorem. Her sonlu $\mathcal{A}$ afin düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir n ≥ 2 tamsayısı vardir. (Bu tamsayıda $\mathcal{A}$ afin düzleminin ***mertebesi*** denir.)

1) $\mathcal{A}$ nın her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta bulunur.
2) $\mathcal{A}$ nın her noktası tam olarak n+1 tane doğru üzerindedir.
3) $\mathcal{A}$ daki noktalarin toplam sayısı n^2 dir.
4) $\mathcal{A}$ daki doğruların toplam sayısı $n^2 + n$ dir.

1.17 Tanım. Aşağıdaki aksyomları sağlayan $\mathcal{P}$ =(**N**, **D**. o) geometrik yapısına ***projektif düzlem*** denir**:**

$\mathbf{P_1}$) Her M, N $\in \boldsymbol{N}$, M$\neq$ N için M o d ve N o d olacak şekilde bir tek d $\in$ **D** doğrusu vardır.

$\mathbf{P_2}$) Her c , d $\in$ **D** , c $\neq$ d için N o c ve N o d olacak şekilde en az bir N $\in \boldsymbol{N}$ noktası vardır.

$\mathbf{P_3}$) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

1.18 Teorem. Her sonlu $\boldsymbol{\mathcal{P}} = (\mathbf{N},\ \mathbf{D}.\ o)$ projektif düzlemi için aşağıdaki koşulara uyan bir n pozitif tamsayısı vardır. (Bu tamsayıya ilgili ***projektif düzlemin mertebesi*** denir.)**:**

1) $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ nin her doğrusu üzerinde n+1 nokta vardır.

2) $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ nin her noktasından n+1 doğru geçer.

3) $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ deki tüm noktaların sayısı n^2 +n + 1 dir.

4) $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ deki tüm doğruların sayısı n^2 +n + 1 dir.

2.MATEMATİKSEL DİZAYNLAR

Bu bölümde üç alt başlık altında matematiksel dizaynlar hakkında genel bilgiler örnekleriyle birlikte verilecektir. Bu çalışmada 2.3 kısım dışındaki tüm kısımlarda kullanacağımız yapılar çoğunlukta sonlu geometrik yapılar olacaktır. Sadece 2.3 kısımda bazı sonsuz geometrik yapılar üzerinde durulacaktır.

2.1. Genel Kavramlar

Bu kısımda matematiksel dizaynlar hakkında genel kavramlar ve gösterimler tanıtılacaktır. Bu kısımda vereceğimiz tüm bilgiler (Hughes ve Piper 1985) ile (Demirtola 2000)'de bulunabilir.

S yapısına ait bir P noktası ve bir y bloğu için , <P> ile **S** de P noktasından geçen bütün blokların kümesi ve <y> ile de y bloğu üzerindeki bütün noktaların kümesi gösterilir. **U** herhangi bir küme iken |**U**| ile **U** kümesine ait elemanların sayısı gösterilir fakat bu çalışma boyunca |<P>| yerine kısaca |P| ve |<y>| yerine de |y| gösterimi kullanılacaktır.

Keyfi bir sonlu **S** yapısının noktalarının sayısı v ve blokların sayısı b ile gösterilir. Noktalar veya bloklar kümesinin boş küme olmasının bir anlamı yoktur. Bu nedenle herhangi bir yapı için aksi belirtilmedikçe $v\neq0$ ve $b\neq0$ olduğu kabul edilecektir.

Eğer **S** tekrarlı bloklu bir yapı ise tekrar eden blokların her birinden biri hariç diğerlerini atarak yeni bir yapı elde edebilir. Yani bloklar kümesi üzerinde "<x>=<y> ise x*R*y" biçiminde tanımlı *R* denklik bağıntısı yardımıyla **S**/*R* bölüm kümesi elde edilebilir. Bu durumda **S**/*R* bölüm kümesine ***indirgenmiş yapı*** denir. Bir x elemanının bu denklik bağıntısına göre denklik sınıfındaki eleman sayısına x ***in katlılığı*** denir. Katlılığı birden büyük olan blokların tekrarlı blokların olacağı aşikârdır. **S**/*R* yapısının noktaları **S** nin noktaları ile aynıdır, blokları ise **S** nin bloklarının denklik sınıflardır. P noktasının x bloğunun denklik sınıfında olması, **S** yapısında P noktasının x bloğunda olmasına karşılık gelir.

S yapısının bir elemanı diğer elemanlarından hiç birinin üzerinde değilse veya bir tanesi üzerinde ise bu elemana ***ayrık eleman*** denir. **S** nin mümkün tüm elemanları üzerinde olan bir elemanı varsa , bu elemana ***tam eleman*** adı verir. Bir **S** yapısının tüm tam elemanları ve tüm ayrık elemanları atılarak bulunan $\bar{\mathbf{S}}$ yapısına (Bu boş yapı da olabilir) **S** ***den elde edilen standartlandırılmış*** yapı adı verilir. Hem standartlandırılmış hem de indirgenmiş bir yapıya ***tam standartlandırılmış yapı*** denir. Yani tam standartlandırılmış yapıda tekrarlı bloklar , ayrık elemanlar ve tam elemanlar yoktur.

Blokların kümesi boş olmayan ve her bir bloğu tam olarak $k>0$ adet noktadan oluşan bir **S** yapısına ***blok düzenliliği k olan yapı*** veya kısaca ***blok düzenli yapı*** denir. Noktaları kümesi boş olmayan ve her bir noktadan tam olarak $r>0$ adet blok geçen **S** yapısına ***nokta düzenliği r olan*** yapı veya kısaca ***nokta düzenli yapı*** denir. Tanımdan k ve r nin sonsuz da olabileceği aşikârdır.

S , v noktalı bir yapı olsun. **S** nın her t noktalı bir kümesi tam olarak λ adet blok üzerinde olacak şekilde $\lambda > 0$ ve $0 \leq t \leq v$ tamsayıları varsa **S** ye λ ya gore **t-yapı** denir. v noktaların sayısını ve λ ise t noktanın üzerinde bulunduğu blokların sayısını göstermek üzere , k noktalı bloklardan oluşan blok düzenli bir t-yapıya bir ***t*-(v,k,λ) yapı** veya **(v,k,λ) ya gore ((v,k,λ) için) bir t-yapı** denir. Burada k, r, λ' nın değerlerin sonsuz da olabilir. Bununla birlikte özellikle ***t*-(v,k,λ)** yapılarda tüm değerlerin sonsuz olması durumu üzerinde çalışma değer görülmemektedir. Biz 2.3 kısmında bazı sonsuz t-yapı örnekleri vereceğiz.

Tanımından dolayı herhangi blok düzenli yapının boş olamayacağı aşikârdır. Ayrıca herhangi bir ***t*-(v,k,λ)** yapısının blok düzenli olduğu da aşikârdır.

Blok düzenli bir indirgenmiş yapıya **dizayn** denir. Bır t-yapı aynı zamanda bir dizayn ise bu yapıya ***t*-dizayn** adı verilir.

S ve **T** iki yapı olsun , **S** nin noktalarından **T** nin noktalarına ve **S** bloklarından **T** nin bloklarına birebir ve örten $\boldsymbol{\alpha}$**:** **S**$\rightarrow \boldsymbol{B}$ dönüşümü için "Pox$\Leftrightarrow\alpha$(P)oα(x)" şartı sağlanıyorsa α ya **S** ve **T** yapıları arasında bir **izomorfizm** denir. **S** den **T** ye bir izomorfizm varsa **S** ve **T** ye **izomorf yapılar** denir ve **S** ≅**T** biçiminde göstrilir. Yapılar arasında izomorf olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bir yapıdan kendisi üzerine izomorfizmlere **otomorfizm** adı verilir.

S ve **T** iki yapı olsun. **S** nin noktalarını **T** nin bloklarına ve **S** nin bloklarını **T** nin noktalarına dönüştüren ve üzerinde olmayı koruyan birebir örten bir dönüşüme **S** den **T** ye bir **anti-izomorfizm** denir.
S yapısınından kendisi üzerine tanımlı bir anti-izomorfizme bir ***korelasyon*** denir. $v=b$ olmadığında yani karesel yapı üzerinde çalışılmadığında, herhangi bir **S** yapısı bir korelasyona sahip olamaz. Aşağıdaki önermenin doğru olduğunu göstermek zor değildir.

2.1.1. Önerme. $\boldsymbol{\alpha}$**,** **S** den **T** ye bir anti-izomorfizm ve β , **T** den **S** ye bir anti-izomorfizm ise $\beta\alpha$, **S** yapısı için bir otomorfizmdir.

2.1.2. Sonuç. 2.1.1 önerme **S** nin iki korelasyonunun bileşkesinin bir otomorfizm olduğunu ifade etmektedir. Eğer α korelasyonu için α^2 özdeşlik dönüşümü ise α ya ***kutupluk (polarite)*** adı verilir.

2.2 Sonlu Matematiksel Dizaynlar

Bir dizaynda nokta ve bloklar kümesi sonlu ise bu dizaynlara **sonlu dizayn** denir. Bu kısımda sonlu dizaynlarla ilgili (Hughes ve Piper 1985) ile (Demirtola 2000)’de yer alan bazı kavramlar yeniden düzenlemiş ve kavramların daha iyi anlaşılabilmesi için bazı örnekler verilmiştir.

Aşağıdaki verilecek yöntemi kullanarak, sonlu dizaynların bir matrisle özdeşleştirilmesi mümkündür. v, b> 0 olmak üzere **S** , v noktalı b bloklu sonlu bir yapı olsun ve bu yapının noktaları P_1, P_2,..., P_v , blokları x_1, x_2,.., x_b ile gösterilsin. Bu durumda P_i noktası x_j bloğu üzerinde ise $a_{ij} = 1$, üzerinde değilse $a_{ij} = 0$ özelliğindeki , vxb tipinden A=(a_{ij}) matrisine **S** yapısının ***üzerinde olma matrisi*** denir.

A üzerine olma matrisi yardımıyla **S** hakkındaki tüm bilgiler (izomorfizm farkıyla) anlaşılabilir.

Tüm girdileri 0 ya da 1 olan matrise **(0,1) matris** denir.

Herhangi bir üzerinde olma matrisinin (0,1) matris olduğu aşikârdır.

Üzerinde olma matrisi yapı tarafından tek türlü belli değildir. Noktaların ve blokların indislenmesine bağlı olarak üzerinde olma matrisi değişir. Farklı indisleme farklı matrisleri verir. Aynı bir **S** yapısının farklı üzerinde olma matrisleri arasında aşağıda gibi yakın bir ilişki vardır:

Bir **S** yapısının nokta ve bloklarının sırasıyla P_1, P_2,..., P_v ve x_1, x_2,..., x_b isimlendirmesine göre elde edilmiş üzerinde olma matrisi A ve nokta ve doğrularının $Q_1, Q_2,\ldots,Q_v$ ve $y_1,y_2,\ldots,y_b$ isimlendirmesine göre elde edilmiş üzerinde olma matrisi B olsun. Bu durumda her Q_i, P_j lerden biridir. Bu nedenle $\{1,2,\ldots,v\}$ kümesi üzerinde bir θ permütasyonu $\theta(i) = j \Leftrightarrow Q_i = P_j$ olacak şekilde vardır. Yani herhangi bir i için B nin i-yinci satırı A nın $\theta(i)$-yinci satırıdır. Benzer düşünce bloklar için de uygulanabilir. Bu aşağıdaki önermenin doğru olduğunu gösterir:

2.2.1. Önerme. A ve B bir ***S*** yapısının iki üzerinde olma matrisi ise PAQ= B olacak şekilde P ve Q permütasyon matrisleri mevcuttur.

2.2.1 Önerme bir **S** yapısının herhangi iki üzerinde olma matrisinin denk olduğunu ve dolayısıyla bu matrislerin aynı ranka sahip olduklarını ifade eder. Bu özellik **S** yapısının rankının , üzerinde olma matrislerinden herhangi birinin rankı olarak tanımlanabilmesi sağlar. **S** yapısının rankı , **rank S** ile gösterilir.

Bir yapının üzerinde olma matrisi, yapı hakında önemli bilgiler verir. P_1 , $P_2, \ldots$, P_v noktaları ve $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_b$ blokları ile verilen **S** yapısının üzerinde olma matrisinin i-yinci satırındaki sıfırlar P_i noktasından geçmeyen blokları temsil eden sütünları belirtir. Bu nedenle yapının bir ayrık elemanı üzerinde olma matrisinde en fazla bir tane sıfırdan farklı elemanı olan bir satırın (ya da sütünün) oluşmasına yol açar. Benzer olarak bir tam eleman bütün girdileri 1 olan bir satırın (ya da sütunun) oluşmasına yol açar. Son olarak üzerinde olma matrisinde iki özdeş sütunun olması, yapıda bir tekrarlı bloğun olması demektir. Bu nedenle , bir A (0,1) matrisi için eğer ;

i) Her satırda ve sütunda en az bir tane 0, en az iki tane 1 vardır.

ii) İki özdeş sütunu yoktur.

şartları sağlanıyorsa, A tam standart bir yapının üzerinde olma matrisidir.
Eğer bir **S** yapısındaki nokta ve blok sayısı eşit ise (yani b=v ise), **S** nin üzerinde olma matisleri kareseldir. Bu nedenle b=v özelliğindeki bir yapıya **karesel yapı** adı verilir.

Nokta ve blok düzenli 1- yapının karesel olması için gerek ve yeter şart $k=r$ olmasıdır.

Eğer bir yapının üzerinde olma matrisinin tüm sütunları farklı , fakat sütunlarının toplamı aynı ise bu yapının dizayn olduğu anlaşılır. Tanımdan anlaşılacağı gibi bir dizaynın her bir bloğu, noktaların farklı bir alt kümesi olarak tanımlanmalıdır.

Eğer **S**, (v,k,λ) için bir t-dizayn ise **S** ye kısaca **t-(**v,k,λ**) dizayn** denir. t,v,k,λ nın keyfi seçimleri için t-(v,k,λ) dizaynların olmayabileceği aşikârdır. Bununla birlikte, verilen herhangi t,v,k ; 0≤t≤k≤v için bir t-$\left(v,k,\binom{v-t}{k-t}\right)$ dizayn vardır ve bu dizayn verilen v noktalı kümenin mümkün her k noktalı alt kümesinin bir blok olarak isimlendirilmesiyle elde edilir. Böyle dizaynlara **aşikâr dizaynlar** denir. Daha genel olarak blok düzenliliği k olan bir yapının noktalarının her k-kümesi en az bir blok üzerinde ise bu yapıya **aşikâr yapı** adı verilir.

S blok düzenliliği k olan bir dizayn ise **S** nin aşikâr yapı olması için gerek ve yeter şart $0\leq t \leq k$ özeliğindeki bütün t ler için **S** nin bir t-dizayn olmasıdır.

Bir **S** yapısı yardımıyla yeni bir takım yapılar inşa edilebilir. Bunlardan iki tanesini kısaca tanıtacağız. Bunlardan biri ***T(S)*** ile gösterilen **S nin tümleyen yapısıdır.** ***T(S)*** nin noktaları ***S*** nin noktalarıdır ve ***S*** nin her bir x bloğu için ***T(S)*** yapısında bir x^* bloğu vardır. Bir P noktasının x^* bloğunda olması için gerek ve yeter şart P nin x bloğunda olmamasıdır.

Bir ***S***=(**N**,**B**,*o*) geometrik yapısı için $\mathbf{N}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}$ ve $\mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \{<N>|\ N \in \mathbf{N}\}$ olacak şekilde elde edilen $\mathbf{S}^{\mathbf{T}} = (\mathbf{N}^{\mathbf{T}}, \mathbf{B}^{\mathbf{T}}, o)$ yapısına **S yapısının duali** denir. **S** yapısının üzerinde olma matrisi A iken $\mathbf{S}^{\mathbf{T}}$ yapısının üzerinde olma matrisi , A nın transpoz matrisidir.

Basit bir sayma tekniğini iki farklı türden uygulamak suretiyle doğru olduğu gösterilebilen, ispatı (Hughes ve Piper 1985) ile (Demirtolla 2000)'de bulunabilecek bir teorem ile bu kısmın kavram ve teoremlerini sonlandırıyoruz.

2.2.2. Teorem. Eğer **S** , (v,k,λ) için bir *t*-yapı ise 0≤s≤*t* özelliğindeki herhangi bir s tamsayısı için **S** de herhangi s nokta üzerinde olan blokların sayısı λ_s ile gösterilir ve

$$\lambda_s = \frac{\lambda(\mathrm{v}-\mathrm{s})(\mathrm{v}-\mathrm{s}-1)\ldots(\mathrm{v}-\mathrm{t}+1)}{(k-s)(k-s-1)\ldots(k-t+1)}$$

olur.

Şimdi bu bölümde tanıttığımız kavramlara ve özeliklere örnekler vereceğiz.

2.2.3. Örnek. Noktaların kümesi $\mathbf{N} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, \text{İ}, J, K, L, M, N\}$ ve

$b_1 = \{\mathrm{ABC}\}$ $b_6 = \{\mathrm{BDE}\}$ $b_{11} = \{\mathrm{CDM}\}$ $b_{16} = \{\mathrm{DFH}\}$ $b_{21} = \{\mathrm{EHM}\}$
$b_2 = \{\mathrm{ADJ}\}$ $b_7 = \{\mathrm{BGH}\}$ $b_{12} = \{\mathrm{CEJ}\}$ $b_{17} = \{\mathrm{DGK}\}$ $b_{22} = \{\mathrm{FJK}\}$
$b_3 = \{\mathrm{AH\text{İ}}\}$ $b_8 = \{\mathrm{BKL}\}$ $b_{13} = \{\mathrm{CF\text{İ}}\}$ $b_{18} = \{\mathrm{D\text{İ}L}\}$ $b_{23} = \{\mathrm{GJM}\}$
$b_4 = \{\mathrm{AEK}\}$ $b_9 = \{\mathrm{BFM}\}$ $b_{14} = \{\mathrm{CHK}\}$ $b_{19} = \{\mathrm{EFL}\}$ $b_{24} = \{\mathrm{HJL}\}$
$b_5 = \{\mathrm{AFG}\}$ $b_{10} = \{\mathrm{B\text{İ}J}\}$ $b_{15} = \{\mathrm{CGL}\}$ $b_{20} = \{\mathrm{E\text{İ}G}\}$ $b_{25} = \{\mathrm{\text{İ}KM}\}$

olmak üzere blokları kümesi $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{b_1, b_2 \dots, b_{25}\}$ olarak alınsın. Bir x ∈ **N** noktası ve $b_j \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ bloğu için x noktasının b_j bloğunda olması x ∈ b_j olması olarak tanımlansın. Bu durumda elde edilen yapı hem bir 2-(14,3,1) dizayndır.

2.2.4. Örnek. **S** noktaları kümesi {1,2,3,4,5,6,7} ve blokları b_1 ={1,2,3,4,5} , b_2 ={1,6,7}, b_3 ={1,2,3,5,4} , b_4 ={1,6,7} , b_5 ={1,4,3,5,2} olan bir yapı olsun. Bu taktirde **S** nin üzerinde olma matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Her blokta aynı sayıda nokta bulunmadığından **S** blok düzenli değildir. 1 noktası bütün bloklarda olduğu ve 6 noktası sadece b_2 ve b_4 te olduğu için yapı nokta düzenli değildir. Üstelik, $\langle b_1 \rangle = \{b_1, b_3, b_5\}$ olduğundan b_1 in katlılığı 3 ve $\langle b_2 \rangle = \{b_2, b_4\}$ olduğundan b_2 nin katlılığı 2 dir. Bu, S nin dizayn olmadığını gösterir. **S**/*R* nin 2 bloğu vardır : b_1={1,2,3,4,5} ve b_2 ={1,6,7} **S**/*R* indirgenmiş yapıdır. Bu yapıda 2,3,4,5,6,7 ayrık elemanları olduğu için $\overline{\mathbf{S}/R}$ boş kümedir.

2.2.5. Örnek. **N**= {1,2,3,4,5,6,7,8} ve b_1 ={4,1,2,5} , b_2 ={5,3,7} , b_3 ={2,8,7} , b_4= {1,8,3} için ***B***={b_1,b_2,b_3,b_4} olmak üzere verilen **S**=(***N***,***B***,o) yapısının üzerinde olma matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. 6 noktası hiç bir bloğun üzerinde olmadığından ve 4 noktası sadece b_1 üzerinde olduğundan ayrık noktalardır. 4 ve 6 noktaları atıldığında geriye $\mathbf{N}_1$= {1,2,3,5,7,8} nokta kümesi kalır. Bu durumda bloklar : b_1'={1,2,5} , b_2'={5,3,7} , b_3'={2,8,7} , $b_4' = \{1,8,3\}$ olur ve $\mathbf{B_1}=\{b_1', b_2', b_3', b_4'\}$ olmak üzere elde edilen $\mathbf{S_1}=(\boldsymbol{N_1},\boldsymbol{B_1},o)$ yapısının üzerinde olma matrisi

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

olur. S_1 yapısında ayrık ve tam eleman olmadığından S_1 standartlandırılmış bir yapıdır. Tüm blokları üç noktalı olduğundan S_1 yapısı blok düzenlidir. S_1 aynı zamanda indirgenmiş bir yapı olduğundan bir dizayn örneğidir.

2.2.6. Örnek. Bu örnekte (0,1) matrisine karşılık gelen yapıyı ve bu yapının tam standartlandırılmış formunu bulacağız. Verilen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5x4 tipinden matrisine ve karşılık gelen yapıyı oluşturalım. Oluşturacağımız yapının noktaları sayısının 5 ve blokları sayısının 4 olacağı A matrisinin tipinden bellidir. Noktalarını {1,2,3,4,5} olarak isimlendirelim, bloklarını ise A matrisinin sütunlarına uygun olarak: b_1 ={1,3} , b_2={3,4} , b_3={1,3,4,5} , b_4={3,5} seçelim. $\boldsymbol{B}$={b_1,b_2,b_3,b_4} olmak üzere **S**=($\boldsymbol{N}$,$\boldsymbol{B}$,o) yapısının üzerinde olma matrisi A dir. Bu yapıda tekrarlı blok yoktur. 2 noktası hiç bir bloğun üzerinde olmadığından ayrık elemandır. 3 noktası bütün blokların üzerinde olduğundan tam elemandır. Başka ayrık ve tam eleman yoktur. Ayrık ve tam elemanlar atıldığında b_1'={1} , b_2'={4} , b_3'={1,4,5} , b_4'={5} olmak üzere $\boldsymbol{N}' = \{1,4,5\}$, $\boldsymbol{B}' = \{b_1', b_2', b_3', b_4'\}$ $\boldsymbol{S}' = (\boldsymbol{N}', \boldsymbol{B}', o)$ yapısı elde edilir. $\boldsymbol{S}'$ yapısında 1, 4 ve 5 noktaları tek bir bloğun üzerinde olduğundan ayrık elemanlardır. Tam eleman yoktur. $\boldsymbol{S}'$ den ayrık elemanları atıldığında $\boldsymbol{N}'' = \emptyset$ ve $\boldsymbol{B}'' = \emptyset$ olur ve $\boldsymbol{S}'' = (\emptyset\,,\emptyset\,,o)$ yapısı **S** den elde edilen tam standart yapıdır.

2.2.7. Örnek. Verilen 5x5 tipinden

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\1&1&0&0&0\\1&1&1&1&0\\0&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

matrisinin satır ve sütün sayısı aynı olduğundan A ya karşılık gelen yapı karesel bir yapıdır. Noktaların kümesi {1,2,3,4,5} bloklar da b_1 ={1,2,3} , b_2={2,3,4} , b_3= {1,3,5} , b_4 ={3,4,5} , b_5 ={1,4,5} olmak üzere **S**=($\boldsymbol{N}$,$\boldsymbol{B}$,o) yapısı A ya karşılık gelen yapıdır. **S** nin blok düzenli olduğu aşikârdır. Tekrarlı bloklar, tam ve ayrık elemanlar olmadığından bu yapı tam standartlandırılmış bir yapıdır. Bu nedenle bu yapı blok düzenli ve indirgenmiş bir yapı olarak bir dizayn örneğidir.

2.2.8. Örnek. **S** ve **T** iki yapı olsun. **S** nın noktaları {1,2,3,4,5} ve blokları b_1 ={1,2} , b_2={1,3} , b_3= {1,4} , b_4 ={1,5} , b_5 ={2,3,4,5}. **T** nin noktaları {1,2,3,4,5} blokları

c_1 ={5,1} , c_2={5,2} , c_3= {5,3} , c_4 ={5,4} , c_5 ={1,2,3,4} olsun. Bu yapıların üzerinde olma matrisleri sırasıyla:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\1&1&1&1&0\end{bmatrix}$$

olur. Tüm nokta ikililerinden bir blok geçtiğinden **S** ve **T** 2-yapı örnekleridir. Fakat blok düzenli olmadığından 2-Dizayn değildirler. **S** ve **T** nin noktaları aynıdır ama farklı indislemeye göre farklı matrisleri bulunmaktadır. Dolayısıyla B matrisi A nın satırları permüte edilerek bulunabilir. Bu nedenle {1,2,3,4,5} kümesi üzerinde bir θ permütasyonu $\theta(i) = j \Leftrightarrow Q(i) = P(j)$ olacak şekildeki θ permütasyonu θ= $\begin{pmatrix}1\ 2\ 3\ 4\ 5\\5\ 1\ 2\ 3\ 4\end{pmatrix}$ dir. θ permütasyonuna karşılık gelen permutasyon matrisi ise

$$P=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda PA matrisi hesaplandığında

$$PA=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\1&1&1&1&0\end{bmatrix}=B$$

olduğu bulunur.

Şimdi **T** yapısının tümleyenini oluşturalım. Tümleyenin notaları **T** nin noktaları ile aynı olacağından **N**={1,2,3,4,5} olur. **T** nin her bir c_i doğrusunun **N** deki tümleyeni olan c_i' tümleyen yapının bir doğrusunu vereceğinden, tümleyen yapının bloklarının

$$c_1'=\{2,3,4\}\ ,\ c_2'=\{1,3,4\}\ ,c_3'=\{1,2,4\}\ ,c_4'=\{1,2,3\}\ ,\ c_5'=\{5\}$$

olduğu elde edilir. Buradan, **T** nin tümleyen yapısının üzerinde olma matrisinin

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. **T** nin üzerinde olma matrisi olan B ile **T** nin tümleyen yapısının üzerinde olma matrisi olan C nin toplamının

$$B+C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğu bulunur.

2.2.9. Örnek. **S** yapısı noktalarının kümesi **N**= {1,2,3,4,5,6} ve blokları b_1={1,2,3,4}, b_2={1,2,3,5}, b_3={1,2,3,6}, b_4={1,2,4,5}, b_5= {1,2,4,6}, b_6= {1,2,5,6}, b_7={1,3,4,5}, b_8= {1,3,4,6}, b_9= {1,4,5,6}, b_{10}= {2,3,4,5}, b_{11}= {2,3,4,6}, b_{12}= {3,4,5,6}, b_{13}={1,2,5,6}, b_{14}={2,3,5,6}, b_{15}={1,3,5,6} olan bir yapı olsun. Her bloğu 4 noktalı olduğundan **S** blok düzenli bir yapıdır. Her 4 noktadan 1 blok geçtiğinden **S** bir 4-(6,4,1) yapıdır. Teorem 2.2.2 kulanarak $0<s<t$ özeliğindeki λ_s leri hesaplayabiliriz. 4-(6,4,1) yapıda t=4, v=6,

k=4, $\lambda = 1$ olduğu bilinmektedir. **S** nin 4 ten küçük olan tüm pozitif tamsayı değerleri için hesaplama yapılmalıdır. s=3 için;

$$\lambda_s = \lambda_t \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} = 1\frac{\binom{6-3}{4-3}}{\binom{4-3}{4-3}} = \frac{3}{1} = 3$$

olur. Dolasıyla **A** yapısı bir 3-(6,4,3) yapıdır. s=2 için;

$$\lambda_s = \lambda_t \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} = 1\frac{\binom{6-2}{4-2}}{\binom{4-2}{4-2}} = \frac{\binom{4}{2}}{1} = 6$$

olur. Bu nedenle **A** bir 2-(6,4,6) yapıdır. s=1 için;

$$\lambda_s = \lambda_t \frac{\binom{v-s}{t-s}}{\binom{k-s}{t-s}} = 1\frac{\binom{6-1}{4-1}}{\binom{4-1}{4-1}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{3}{3}} = \binom{5}{3} = 10$$

olur. Dolasıyla **A** bir 1-(6,4,10) yapıdır. Bu yapılar aynı zamanda doğru düzenli ve indirgenmiş yapılar olduklarından birer dizayn örneğidirler. 0≤t≤k özeliğindeki bütün t ler t=$\binom{v-t}{k-t}$ olduğundan **S** bir aşikâr yapıdır.

2.2.10. Örnek. S, noktaları kümesi **N** = {1,2,3,4,5,6,7} ve blokları b_1={1,2,3,4,5}, b_2={1,2,3,4,6}, b_3={1,2,3,4,7}, b_4={1,2,3,5,6}, b_5={1,2,3,5,7}, b_6={1,2,3,6,7}, b_7={2,3,4,5,6}, b_8={2,3,4,5,7}, b_9={2,3,4,6,7}, b_{10}={3,4,5,6,7}, b_{11}={1,2,4,5,6}, b_{12}={1,2,4,5,7}, b_{13}={1,2,4,6,7}, b_{14}={1,2,5,6,7}, b_{15}={1,3,4,5,6}, b_{16}={1,3,4,5,7}, b_{17}= {1,3,5,6,7}, b_{18}={1,4,5,6,7}, b_{19}={2,3,5,6,7}, b_{20}={1,3,4,6,7}, b_{21}={2,4,5,6,7} olan bir yapı olsun. Her 5 noktadan bir blok geçtiğinden **S**, 5-(7,5,1) yapıdır. Ve dolayısıyla

4-(7,5,3) , 3-(7,5,6) ,2-(7,5,10), 1-(7,5,15) yapı olmasını gerektirir. Bu yapılar aynı zamanda doğru düzenli ve indirgenmiş yapılar olduklarından birer dizayn örnekleridir.

2.2.11. Örnek. **S** yapısının noktaları kümesi **N**= {1,2,3,4} ve b_1={1,3} , b_2={1,2} , b_3={2,3,4}} olmak üzere blokları kümesi **B**=$\{b_1, b_2, b_3\}$ olsun. Bu örnekte **S** yapısının dualini bulacağız. **S**=(**N**,**B**,o) geometrik yapısı için $\mathbf{N}^T$=**B** ve $\mathbf{B^T}$ ={<N>| N∈**N**} olacak şekilde elde edilen $\mathbf{S^T}$=($\mathbf{N}^T$,$\mathbf{B}^T$,o) yapısı **S** yapısının dualidir. Bu nedenle $\mathbf{N}^{\boldsymbol{T}}$={$b_1$,$b_2$,$b_3$} olur. **S** de 1, 2, 3 ve 4 noktalarından geçen blokların kümesi sırasıyla d_1={b_1,b_2}, d_2={b_2,b_3} , d_3={b_1,b_3}, d_4={b_3} olduğundan, dual yapının blokları kümesi **B**={d_1,d_2,d_3,d_4} olur.

2.2.12. Örnek. Noktaları kümesi **N**={1,2,3,4,5} ve blokları b_1={1,3}, b_2={3,5}, b_3={5,2}, b_4={2,4} , b_5= {1,4} olan **S** yapısını göz önüne alalım. Bu yapının blok ve nokta düzenliliğinin 2 olduğu aşikârdır. Bu nedenle **S,** 1-(5,2,2) dizayndır. Şimdi **S** nin noktalarını, **S** nin bloklarına ve **S** nin bloklarını , **S** nin noktalarına dönüştüren aşağıdaki α korelasyonunu göz önüne alalım.

$$\alpha:\ \begin{array}{l} 1\leftrightarrow b_3 \\ 2\leftrightarrow b_1 \\ 3\leftrightarrow b_4 \\ 4\leftrightarrow b_2 \\ 5\leftrightarrow b_5 \end{array}$$

Bu örnekte α nın bir kutupluk olduğunu göstereceğiz. α dönüşümü için α^2=i olduğu açıktır. O halde geriye sadece α nın üzerinde olma bağıntısını koruduğunu göstermek kalır.

1∈b_1 için $\alpha(1)=b_3$, $\alpha(b_1)=2$ olup 2∈b_3 olduğundan $\alpha(b_1)\in\ \alpha(1)$
3∈b_1 için $\alpha(3)=b_4$, $\alpha(b_1)=2$ olup 2∈b_4 olduğundan $\alpha(b_1)\in\ \alpha(3)$
3∈b_2 için $\alpha(3)=b_4$, $\alpha(b_2)=4$ olup 4∈b_4 olduğundan $\alpha(b_2)\in\ \alpha(3)$
5∈b_2 için $\alpha(5)=b_5$, $\alpha(b_2)=4$ olup 4∈b_5 olduğundan $\alpha(b_2)\in\ \alpha(5)$
5∈b_3 için $\alpha(5)=b_5$, $\alpha(b_3)=1$ olup 1∈b_5 olduğundan $\alpha(b_3)\in\ \alpha(5)$

$2 \in b_3$ için $\alpha(2)=b_1$, $\alpha(b_3)=1$ olup $1 \in b_1$ olduğundan $\alpha(b_3) \in \alpha(2)$

$2 \in b_4$ için $\alpha(2)=b_1$, $\alpha(b_4)=3$ olup $3 \in b_1$ olduğundan $\alpha(b_4) \in \alpha(2)$

$4 \in b_4$ için $\alpha(4)=b_2$, $\alpha(b_4)=3$ olup $3 \in b_2$ olduğundan $\alpha(b_4) \in \alpha(4)$

$1 \in b_5$ için $\alpha(1)=b_3$, $\alpha(b_5)=5$ olup $5 \in b_3$ olduğundan $\alpha(b_5) \in \alpha(1)$

$4 \in b_5$ için $\alpha(4)=b_2$, $\alpha(b_5)=5$ olup $5 \in b_2$ olduğundan $\alpha(b_5) \in \alpha(4)$

olduğundan α üzerinde olmayı korur , dolayısıyla α bir kutupluktur.

2.3 Bazı Sonsuz Matematiksel Dizayn Örnekleri

Bu kısmında Öklid düzlemi ve Öklid uzayından esinlenerek iki sonsuz matematiksel dizayn örneği vereceğiz.

2.3.1. Örnek: Öklid düzlemi bir sonsuz dizayn örneğidir. Öklid düzleminin noktalar kümesi

$$\mathbf{N} = \{(x, y) |\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

doğrular kümesi

$$\mathbf{D} = \{[m, n] |\ m, n \in \mathbf{R}\} \cup \{[a] |\ a \in \mathbf{R}\}$$

ve Öklid düzleminde bir noktanın bir doğru üzerinde olması

$$(x, y) \in [m, n] \Leftrightarrow y = mx + n$$
$$(x, y) \in [a] \Leftrightarrow x = a$$

biçiminde tanımlıdır. Tanımdan hemence görüleceği gibi

$$\forall\, y \in \mathbf{R} \text{ için} (a, y) \in [a]$$

olur ve bu nedenle $[a]$ tipinden doğrular, üzerinde sonsuz sayıda nokta bulundurur.

$$(k, y) \in [m, n] \Leftrightarrow y = mk + n$$

olması gerektiğinden

$$(\forall k)(k \ \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow \ (k, mk+n) \in [m,n]$$

önermesi doğrudur. Bu her bir $[m,n]$ doğrusunda sonsuz sayıda nokta bulunduğunu gösterir. N nin tüm farklı nokta ikililerinden bir tek doğru geçtiği gösterilirse yapının bir 2-dizayn olduğu gösterilmiş olur. Bu nedenle şimdi, Öklid düzleminde alınan $N_1 = (x_1, y_1) \neq N_2 = (x_2, y_2)$ noktalarından bir tek doğru geçtiğini gösterelim.

i) $x_1 = x_2$ ise

$$\begin{matrix} N_1 \in [m,n] \\ N_2 \in [m,n] \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x_1, y_1) \in [m,n] \\ (x_1, y_2) \in [m,n] \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_1 + n \end{matrix} \Leftrightarrow \ y_1 = y_2$$

olur ve bu $N_1 = N_2$ olduğunu gösterir ki $N_1 \neq N_2$ olması ile çelişir. Bu nedenle $x_1 = x_2$ iken N_1 ve N_2 den $[m,n]$ tipinden doğru geçmez.

$$\begin{matrix} N_1 \in [a] \\ N_2 \in [a] \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x_1, y_1) \in [a] \\ (x_1, y_2) \in [a] \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = a \\ x_2 = a \end{matrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = a$$

olduğu bulunur. Yani $N_1N_2 = [x_1] = [a]$ doğrusu N_1 ve N_2 den geçen doğrudur.

ii) $x_1 \neq x_2$ ise

$$\begin{matrix} N_1 \in [a] \\ N_2 \in [a] \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x_1, y_1) \in [a] \\ (x_1, y_2) \in [a] \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = a \\ x_2 = a \end{matrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = a$$

olur ki bu $x_1 \neq x_2$ olmasıyla çelişir. Bu nedenle $N_1N_2 \neq [a]$ olduğu bulunur.

$$\begin{matrix} N_1 \in [m,n] \\ N_2 \in [m,n] \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x_1, y_1) \in [m,n] \\ (x_2, y_2) \in [m,n] \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{matrix}$$

olması durumunda taraf tarafa çıkarma yapılırsa $y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$ olduğu bulunur ve $x_1 \neq x_2$ olduğundan $x_1 - x_2$ ile bölme yapılarak

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

eşitliği bulunur. Bulunan bu m değeri $y_1 = m\mathrm{x}_1 + n$ eşitliğinde yerine yazılarak

$$y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1 + n$$

olduğu elde edilir. Buradan $n = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$ olduğu bulunur. Yani;

$$N_1 N_2 = [m, n] \ = \left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1\right]$$

doğrusu, N_1 ve N_2 noktalarından gecen doğrudur. Böylece bu dizayn örneğinde $v = \infty\, , k = \infty$ olup $t = 2$ için $\lambda_t = 1$ olduğu bulunur.

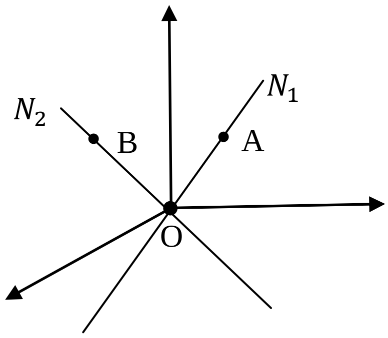
2.3.2. Örnek. $\mathbf{R^3}$ Öklid uzayında noktalar kümesi

$$\mathbf{N} = \{d_i | d_i, \mathbf{R^3} \text{ te orijinden geçen doğru}\}$$

ve bloklar kümesi

$$\boldsymbol{B} = \left\{\alpha_j | \alpha_j,\ \mathbf{R^3}\text{te orijinden geçen düzlem}\right\}$$

olarak alınsın. Bir d_i noktasının bir α_j bloğu üzerinde olması $\mathbf{R^3}$ uzayında "d_i doğrusunun α_j düzlemine ait olması" olarak tanımlansın.



Şekil 2.1. $\mathbf{R^3}$ te orijinden geçen doğru ve orijinden geçen düzlem

$N_1 \in \mathbf{N}$, $N_2 \in \mathbf{N}$ ve $N_1 \neq N_2$ olsun. Tanım gereği N_1 ve N_2, O=(0, 0) dan geçen $\boldsymbol{R^3}$ ün doğrularıdır. $\mathbf{R^3}$ te her bir doğru üzerinde sonsuz çoklukta nokta var olduğundan N_1 doğrusu üzerinde O dan farklı bir A, N_2 doğrusu üzerinde O dan farklı bir B noktası almak mümkündür. O, A, B noktaları $\mathbf{R^3}$ te doğrudaş değildir (aksi halde N_1 ve N_2 $\mathbf{R^3}$te aynı doğrular olurdu ki bu $N_1 = N_2$ anlamına gelir). Doğrudaş olmayan üç noktadan $\mathbf{R^3}$ te bir tek düzlem geçeceğinden O, A, B noktaların bir tek α düzlemi geçer.

O, A$\in \alpha$ olduğundan $\mathbf{R^3}$ te OA=N_1 doğrusu üzerindeki tüm noktalar α üzerindedir. Benzer biçimde O, B$\in \alpha$ olduğundan, OB=N_2 doğru üzerindeki tüm noktalar α üzerindedir. Yani $\mathbf{R^3}$ te α düzlemi O yu ve N_1 ve N_2 yi bulundurur. Bu α nın N_1 ve N_2 den geçen bir blok olduğunu gösterir.

β, O dan geçen $\mathbf{R^3}$ ün bir düzlemi olsun. Bu durumda β üzerindeki tüm noktalarla O yu birleştiren doğrular sonsuz çoklukta olup bu doğrular yapımızda birer nokta olduğundan her bir β bloğunda sonsuz çoklukta nokta vardır.

3. PARÇALANABİLİR DİZAYNLAR

3.1. Genel Kavramlar

Bir spor müsabakasında toplam v oyuncu yer aldığını ve her bir takımın s oyuncudan oluştuğunu farz edelim. v= s= 0 olma durumu anlamsız olduğundan $v > 0$ ve $s > 0$ olduğunu kabul edelim. Toplam oyuncu sayısı, v ve her takımdaki oyuncu sayısı s olduğundan müsabakaya katılan takım sayısının v/s olduğu bulunur. Bu nedenle v/s bir tamsayı olmalıdır. Bir müsabaka için en azından 2 takım gerekli olduğundan $v/s \geq 2$ olması gerektiği bulunur. Müsabakaların farklı oyunlardan oluştuğunu, her oyunda farklı takımlardan gelen $k \geq 2$ oyuncunun birbirine karşı oynadığını farz edelim. Takımlardan birinin en kuvvetli oyuncularını belirleyip devamlı olarak oyunlarda bu oyunculara yer vermesini önlemek maksadıyla; farklı takımlardan gelen her bir oyuncu ikilisinin birbiriyle oynamaları gereken oyun sayısının belli bir λ_2 sayısı kadar olması gerektiği şartını koyalım.

Bu, takımlardan birinin diğerine karşı bir avantaj sağlamasını önlemek için konulmuş bir şarttır. Bu spor müsabakasında ki her bir oyuncuya bir nokta, her bir takıma bir sınıf, her bir oyundaki oyuncu kümesine bir blok gözüyle bakılırsa bir geometrik yapı elde edileceği aşikârdır. Aslında bu geometrik yapı, tanımını daha sonra vereceğimiz v noktalı bir 2-(s,k,λ_2) parçalanabilir dizayndır.

$\mathbf{X}$ bir sonlu küme ve $R \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ bir denklik bağıntısı olsun. $\mathbf{X}$ in R denklik bağıntısına göre bölüm kümesi

$$\boldsymbol{S} := \{[x] \mid x \in \mathbf{X}\}$$

ile gösterilsin. Her $x \in \mathbf{X}$ için $|(\boldsymbol{Y} \cap [x])| \leq 1$ şartı sağlanıyorsa $\mathbf{X}$ in $\boldsymbol{Y}$ alt kümesine R-***transversal küme*** denir. Tanımdan anlaşılacağı üzere $\boldsymbol{Y}$ bir R-transversal küme iken bütün denklik sınıfları ise kesişmek zorunda değildir ve kesiştiği denklik sınıfları da sadece bir tek noktada kesmek zorundadır.

2.1 Kısımda matematiksel dizaynlar tanıtılmış ve blok düzenli indirgenmiş bir (**N**,**B**,o) yapısına dizayn adı verilmişti. Şimdi, literatürde genel olarak **X** noktalar kümesi üzerinde bir R denklik bağıntısı ve R yardımıyla elde edilen $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \mathbf{X}/R$ bölüm kümesi kullanılarak tanımlanan parçalanabilir dizayn tanımını vereceğiz.

3.1.1 Tanım. Eğer t, s, k, λ_t pozitif tamsayılar için aşağıdaki aksyomları sağlanan bir $\boldsymbol{\mathcal{D}} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ üçlüsü varsa $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ye ***parçalanabilir dizayn*** adı verilir:

- **A)** Her $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ için $|B| = k$ dır ve $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ nin her bir elemanı **X** in R-transversal altkümesidir.
- **B)** Her x ∈ **X** için |[x] | = s dir.
- **C)** **X** in t elemanlı her $\boldsymbol{Y}$, R-transversal altkümesi için $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ nin $\boldsymbol{Y}$ yi bulunduran λ_t elemanı vardır.
- **D)** $v := |\mathbf{X}|$ iken $t \leq \frac{v}{s}$ dir.

$\boldsymbol{\mathcal{D}} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ bir parçalanabilir dizayn iken **X** in elemanları ***nokta***, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ nin elemanları ***blok*** ve $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ nin elemanları ***nokta sınıfları*** olarak isimlendirilir. Genelde "parçalanabilir dizayn" ifadesi için kısaca "PD" ifadesini kullanacağız ve bazen t, s, k, λ_t parametrelerini yazmadan "t, s, k, λ_t parametrelerine sahip $\boldsymbol{\mathcal{D}} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ parçalanabilir dizaynı" ifadesi yerine kısaca t-PD yazacağız. Tanımdan anlaşılacağı üzere parçalanabilir dizaynlarda da bloklar **X** kümesinin birer altkümesidir. Tekrarlı bloklara sahip PD ler bu çalışmada dikkate alınmayacaktır.

$\boldsymbol{\mathcal{S}}$ kümesi R denklik bağıntısından elde edildiğinden ve tersine, her bir R denklik bağıntısından $\boldsymbol{\mathcal{S}} = \mathbf{X}/R$ bölüm kümesi elde edilebileceğinden PD ler $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ üçlüsü yerine $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, R)$ üçlüsü ile de gösterilir.

3.2. Parçalanabilir Dizaynların Temel Özelikleri

Şimdi keyfi bir t-(s,k,λ_t)-PD için geçerli olan bazı özelikleri vereceğiz. s, $t \geq 1$ olduğundan **D)** aksiyomu gereği

$$|\mathbf{X}| = v \geq st \geq 1 \tag{3.1}$$

olduğu bulunur ki bu $\mathbf{X} \neq \emptyset$ olduğu anlamına gelir. Bu sonucu ve **B)** yi kullanarak

$$|\boldsymbol{S}| = \frac{v}{s} \geq 1 \tag{3.2}$$

olduğu elde edilir. Bu nedenle en azından **X** in $\boldsymbol{Y_0}$ gibi bir R-transversal t-altkümesi vardır. Bu durumda **C)** den dolayı $\boldsymbol{Y_0}$ altkümesi $\lambda_t \geq 1$ blok içerisinde yer alır, ki bu

$$|\boldsymbol{\mathcal{B}}| =: b \geq 1$$

olduğunu gösterir. Buradan $\boldsymbol{\mathcal{B}} \neq \emptyset$ olduğu bulunur. **A)** aksiyomu ile (3.2) kullanıldığında her $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ için

$$|B| = k \leq \frac{v}{s} \tag{3.3}$$

sonucu elde edilir. Her bloğu tüm nokta sınıfları ile kesişen PD lere ***transversal*** PD denir. Aksi taktirde PD ye ***düzenli*** **(*regüler*)** PD adı verilir. Daha önce verilen transversal küme tanımı ile transversal dizayn tanımı karıştırılmamalıdır.

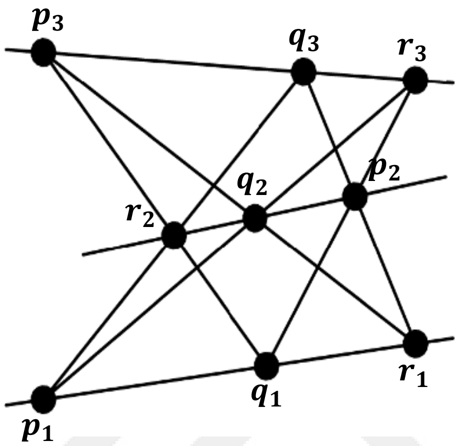
Parçalanabilir dizaynlar ile ilgili kavramlar için terminolojide farklı kullanımlar mevcuttur. Örneğin "nokta sınıfı" yerine "nokta grubu" denip PD ye ***grup parçalanabilir dizayn*** ismini veren çalışmalar bulunmaktadır. Literatürde cebirsel bir terim olan grup terimini biraz değiştirerek bu kavram yerine "***groop-parçalanabilir dizayn***" ifadesini kullanan bazı kaynaklar da mevcuttur.

D) de yer alan $t \leq \frac{v}{s}$ ifadesinde eşitlik durumu geçerli iken, yani $t = \frac{v}{s}$ iken **C)** de yer alan λ_t nin değeri 1 olur. Eğer $t > \frac{v}{s}$ ise **C)** de yer alan λ_t değeri anlamsız olur. Çünkü $|\boldsymbol{Y}| = t > \frac{v}{s}$ olacak biçimde bir $\boldsymbol{Y}$, R-transversal kümesi bulunamaz.

PD için $s = v$ ise **D)** den dolayı $t \leq 1$ olur. (3.1)'den dolayı $\mathbf{X} \neq \emptyset$ olduğundan $v \neq 0$ dır. Bu nedenle $t \neq 0$ olduğu anlaşılır. Bu $t = 1$ olacağını ve $|\boldsymbol{S}| = \frac{v}{s} = k = 1$

olduğunu gösterir. $s = v$ ve $t = k = 1$ özeliğindeki PD ler üzerinde çalışılmaya değer görülmeyen PD lerdir.
Şimdi bazı parçalanabilir dizayn örnekleri vereceğiz.

3.2.1 Örnek. Şekil 3.1 ile verilen Pappus Konfigurasyonunu göz önüne alalım. Bu konfigürasyon reel projektif düzlemde 9 noktalı ve 9 doğrulu bir konfigurasyondur. Bu örnekte, Pappus konfigurasyonundan bir 2-(3,3,1) PD elde edeceğiz.



Şekil 3.1 Pappus Konfigürasyonu

Şekil 3.1 de verilen yapıyı,

$\mathbf{X}$: $\{p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2, r_3\}$
$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\{p_1, q_1, r_1\}, \{p_1, q_2, r_3\}, \{p_1, r_2, q_3\}, \{p_2, q_2, r_2\}, \{q_1, r_2, p_3\}, \{q_1, p_2, r_3\}, \{r_3, p_3, q_3\}, \{r_1, q_2, p_3\}, \{r_1, p_2, q_3\}\}$
$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{r_1, r_2, r_3\}\}$

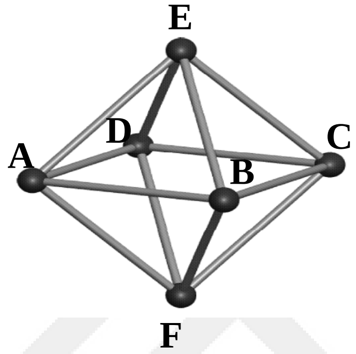
olmak üzere $\boldsymbol{\mathcal{D}} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ olarak alalım ve $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ nin bir *t*-PD olduğunu gösterelim. $v = |\mathbf{X}| = 9$ olur. $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ nin tüm elemanları 3 noktalı olduğundan k=3 olduğu aşikârdır. *R* bağıntısını, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ nin elemanlarını denklik sınıfları olarak kabul eden denklik bağıntısı olarak alalım. Bu durumda $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ nin her bir elemanı p_i, q_i ve r_i lerden sadece birer tane bulundurduğundan $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ nin tüm elemanları *R*-transversaldır. Yani **A)** sağlanır. **B)** nin sağlandığı, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ nin her bir elemanının 3 elemanlı bir küme olmasından bellidir. Yani

$s = 3$ tür. **X** in 2 elemanlı tüm R-transversal altkümeleri (ki bu altkümeler 27 adettir) ve bu altkümeleri bulunduran bloklar aşağıda gösterilmiştir:

$$\{p_1, q_1\} \subseteq \{p_1, q_1, r_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_1, q_2\} \subseteq \{p_1, q_2, r_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_1, q_3\} \subseteq \{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{r_2}, \boldsymbol{q_3}\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_1, r_1\} \subseteq \{p_1, q_1, r_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_1, r_2\} \subseteq \{p_1, r_2, q_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_1, r_3\} \subseteq \{p_1, q_2, r_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_2, q_1\} \subseteq \{r_3, p_2, q_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_2, q_2\} \subseteq \{p_2, q_2, r_2\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_2, q_3\} \subseteq \{r_1, p_2, q_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_2, r_1\} \subseteq \{q_3, p_2, r_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_2, r_2\} \subseteq \{p_2, q_2, r_2\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_2, r_3\} \subseteq \{q_1, p_2, r_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_3, q_1\} \subseteq \{p_3, r_2, q_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_3, q_2\} \subseteq \{p_3, q_2, r_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_3, q_3\} \subseteq \{p_3, q_3, r_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_3, r_1\} \subseteq \{p_3, q_2, r_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_3, r_2\} \subseteq \{p_3, r_2, q_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{p_3, r_3\} \subseteq \{p_3, q_3, r_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{q_1, r_1\} \subseteq \{p_1, q_1, r_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{q_1, r_2\} \subseteq \{q_1, r_2, p_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{q_1, r_3\} \subseteq \{q_1, p_2, r_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{q_2, r_1\} \subseteq \{p_3, q_2, r_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{q_2, r_2\} \subseteq \{p_2, q_2, r_2\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{q_2, r_3\} \subseteq \{p_1, q_2, r_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{q_3, r_1\} \subseteq \{q_3, p_2, r_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{q_3, r_2\} \subseteq \{q_3, r_2, p_1\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$
$$\{q_3, r_3\} \subseteq \{p_3 q_3, r_3\} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$$

Böylece **C)** nin sağlandığı görülür. $|\mathbf{X}| = 9$ olup $2 \leq \frac{9}{3} = 3$ olduğundan **D)** nin sağlandığı aşikârdır. **A)**, **B)**, **C)** ve **D)** nin tümü sağlandığından, örnekte verilen $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ üçlüsü bir 2-(3,3,1) PD dir.

3.2.2 Örnek. Bu örnekte 3-boyutlu Öklid uzayında Şekil 3.2.'deki verilen 8-yüzlü yardımıyla bir PD oluşturacağız. $\mathbf{X}$ olarak 8-yüzlünün köşelerinin kümesini alalım. Yani $\mathbf{X} = \{\mathrm{A, B, C, D, E, F}\}$ olsun. Bu nedenle $v = 6$ olur.



Şekil 3.2. Sekizyüzlü

Eğer **X** te alınan p ve q noktaları sekizyüzlünün karşılıklı köşeleri ise pRq olacak biçimde bir *R* bağıntısı tanımlayalım. Yani

$$R = \{(p, q) | p, q \in \mathbf{X},\ \text{p ve q sekizyüzlünün karşılıklı köşeleri}\}$$

olsun. Bu durumda

$$R = \{(\mathrm{A, D}), (\mathrm{D, A}), (\mathrm{B, E}), (\mathrm{E, B}), (\mathrm{C, F}), (\mathrm{F, C})\} \cup \Delta_{\mathbf{X}}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\{\mathrm{E,C,D}\}, \{\mathrm{E,C,B}\}, \{\mathrm{E,B,A}\}, \{\mathrm{E,A,D}\}, \{\mathrm{F,A,B}\}, \{\mathrm{F,B,C}\}, \{\mathrm{F,C,D}\}, \{\mathrm{F,D,A}\}\}$$

olmak üzere $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, R)$ üçlüsünün bir 3-(2,3,1) PD olduğu 3.2.1 Örnekte yapılan işlemlerin benzerleri yapılarak kolayca görülür.

3.2.3 Örnek. Şimdi 3 mertebeli projektif düzlemin bir 2-(1,4,1) PD olduğunu göstereceğiz. 3 mertebeli projektif düzlem Şekil 3.3.'te gösterilmiştir. Bu şekilde yer alan 13 nokta projektif düzlemin noktaları olup Şekil 3.3.'te verilen bir eğri üzerindeki nokta dörtlüleri projektif düzlemin doğrularını göstermektedir. Her nokta bir denklik sınıfı olarak ele alındığında,

$$\mathbf{X} = \{\mathrm{N}_{\mathbf{1}}, \mathrm{N}_{\mathbf{2}}, \mathrm{N}_{\mathbf{3}}, \mathrm{N}_{\mathbf{4}}, \mathrm{N}_{\mathbf{5}}, \mathrm{N}_{\mathbf{6}}, \mathrm{N}_{\mathbf{7}}, \mathrm{N}_{\mathbf{8}}, \mathrm{N}_{\mathbf{9}}, \mathrm{N}_{\mathbf{10}}, \mathrm{N}_{\mathbf{11}}, \mathrm{N}_{\mathbf{12}}, \mathrm{N}_{\mathbf{13}}\}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \begin{Bmatrix} \{\mathrm{N}_{\mathbf{1}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{2}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{3}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{4}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{5}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{6}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{7}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{8}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{9}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{10}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{11}}\}, \\ \{\mathrm{N}_{\mathbf{12}}\}, \{\mathrm{N}_{\mathbf{13}}\} \end{Bmatrix}$$

ve

$$b_1 = \{\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_5, \mathrm{N}_9, \mathrm{N}_{11}\},\ b_2 = \{\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_8, \mathrm{N}_6, \mathrm{N}_{13}\},\ b_3 = \{\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \mathrm{N}_3, \mathrm{N}_{12}\},$$

$$b_4 = \{\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_4, \mathrm{N}_7, \mathrm{N}_{10}\},\ b_5 = \{\mathrm{N}_2, \mathrm{N}_5, \mathrm{N}_8, \mathrm{N}_{10}\},\ b_6 = \{\mathrm{N}_3, \mathrm{N}_6, \mathrm{N}_9, \mathrm{N}_{10}\},$$

$$b_7 = \{\mathrm{N}_{\mathbf{4}}, \mathrm{N}_{\mathbf{5}}, \mathrm{N}_{\mathbf{6}}, \mathrm{N}_{\mathbf{12}}\},\ b_8 = \{\mathrm{N}_{13}, \mathrm{N}_2, \mathrm{N}_4, \mathrm{N}_9\},\ b_9 = \{\mathrm{N}_{\mathbf{13}}, \mathrm{N}_{\mathbf{3}}, \mathrm{N}_{\mathbf{5}}, \mathrm{N}_{\mathbf{7}}\},$$

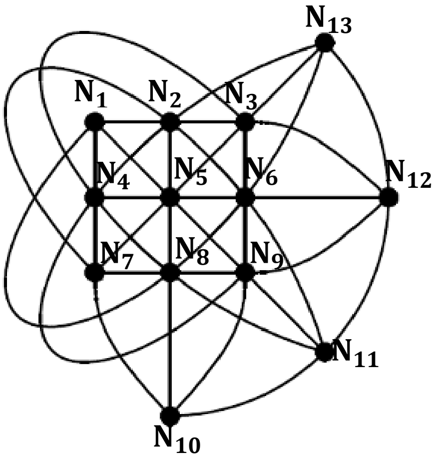
$$b_{10} = \{\mathrm{N}_7, \mathrm{N}_8, \mathrm{N}_9, \mathrm{N}_{12}\}, b_{11} = \{\mathrm{N}_7, \mathrm{N}_2, \mathrm{N}_6, \mathrm{N}_{11}\}, b_{12} = \{\mathrm{N}_7, \mathrm{N}_2, \mathrm{N}_6, \mathrm{N}_{11}\},$$

$$b_{13} = \{\mathrm{N}_7, \mathrm{N}_2, \mathrm{N}_6, \mathrm{N}_{11}\}$$

olmak üzere,

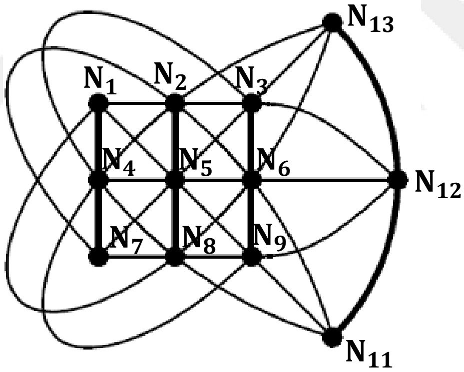
$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathrm{b}_1,\ \mathrm{b}_2,\ \mathrm{b}_3,\ \mathrm{b}_4,\ \mathrm{b}_5,\ \mathrm{b}_6,\ \mathrm{b}_7,\ \mathrm{b}_8, \mathrm{b}_9,\ \mathrm{b}_{10}, \mathrm{b}_{11},\ \mathrm{b}_{12}, \mathrm{b}_{13}\}$$

kümeleri için Şekil 3.3 te verilen projektif düzleme karşılık gelen yapı $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ yapısı olur. Burada projektif düzlemin noktaları noktalar, doğruları bloklar olarak göz önüne alınmıştır. Bu nedenle 13 nokta ve 13 blok vardır. Blokların her biri $k = 4$ noktalıdır. Her bir nokta, bir nokta sınıfı olarak alındığından s =1 dir. Şekil 3.3 ile verilen projektif düzlemin tüm doğruları 4 noktalı olduğundan bu projektif düzlemin mertebesinin 3 olduğu anlaşılır. Projektif düzlemlerde iki noktadan bir tek doğru geçtiğinden Şekil 3.3 te verilen yapının 2-(1,4,1) PD olduğu bulunur.



Şekil 3.3. Üç mertebeli projektif düzlem

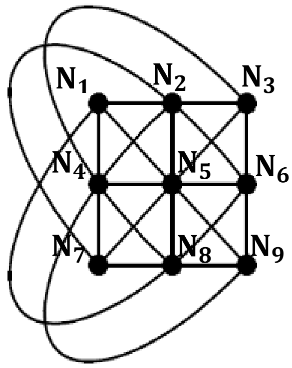
Şimdi projektif düzlemin noktalar kümesinden bir noktayı, mesela $\mathrm{N}_{\mathbf{10}}$ noktasını çıkaralım. Böylece elde edilen yeni yapının şekli Şekil 3.4.'teki gibi olur.



Şekil 3.4. Bir noktası çıkarılmış üç mertebeli projektif düzlem

Nokta sınıflarını ise Şekil 3.4.'te daha koyu olarak verilen nokta üçlülerinin kümeleri olarak tanımlayalım. Yani 4 farklı nokta sınıfı bulunsun ve s =3 olsun. Koyu olarak verilen doğruların dışında kalan 9 doğru ise bloklar olarak alınsın. Böylece elde edilen yapının bir 2-(3,4,1) PD olduğu, 3.2.1.Örnekteki işlemlere benzer işlemler yapılarak gösterilebilir.

Eğer Şekil 3.3 ile verilen projektif düzlemin bir doğrusu, mesela $b_{13} = \{N_7, N_2, N_6, N_{11}\}$ üzerindeki noktalarla birlikte atılırsa geriye Şekil 3.5.'teki gibi bir yapı kalır ve bu yapı mertebesi 3 olan bir afin düzlemdir.



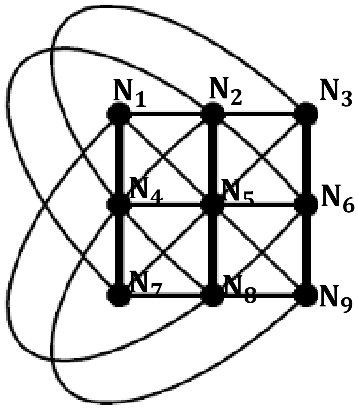
Şekil 3.5. Bir doğrusu üzerindeki noktalarla birlikte atılmış 3 mertebeli projektif düzlem

$b_{13} = \{N_7, N_2, N_6, N_{11}\}$ doğrusu ve üzerindeki noktalar atıldıktan sonra geriye kalan 12 doğrunun tümü bloklar olarak ve her bir nokta bir nokta sınıfı olarak alınsın. Bu durumda elde edilen yapının bir 2-(1,3,1) PD olduğu gösterilebilir.

Son olarak Şekil 3.5 ile verilen afin düzlemin doğruları kümesini ve nokta sınıfları kümesini değiştirerek yeni bir PD elde edeceğiz. İkişer ikişer paralel olan 3 doğru seçip bunları doğru kümesinden çıkaralım örneğin:

$$\{N_1, N_4, N_7\}, \{N_2, N_5, N_8\}, \{N_3, N_6, N_9\}$$

paralel doğruları doğrular kümesinden çıkaralım. Bu doğrular Şekil 3.6.'da koyu olarak verilmiştir.

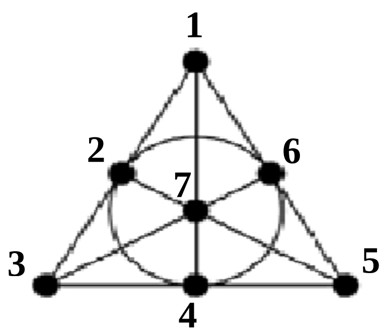


Şekil 3.6 Nokta sınıfları değiştirilmiş yapı

Çıkarılan bu doğruların her birini 3 elemanlı birer nokta sınıfı olarak alalım. Her bir blok 3 noktadan oluştuğundan k =3 olur ve elde edilen yapının 2-(3,3,1)-PD olduğu gösterilebilir.

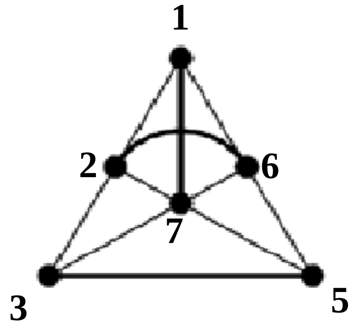
3.2.4 Örnek. 3.2.3 Örnekte kullanılan 3-mertebeli projektif düzlemden elde edilen PD lere benzer yollar kullanarak, 2 mertebeli projektif düzlemden de PD ler elde edilebilir. Şekil 3.7.'de

$$\mathbf{X} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \big\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\}\big\}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \big\{\{1,2,3\},\{1,6,5\},\{3,4,5\},\{1,7,4\},\{2,7,5\},\{3,7,6\},\{2,,4,6\}\big\}$$



Şekil 3.7. Mertebesi 2 olan projektif düzlem

olmak üzere 2 mertebeli $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ projektif düzlemi verilmiştir. Bu projektif düzlemden $4 \in \mathbf{X}$ noktası atılarak ve nokta sınıfları düzenlenerek elde edilen geometrik yapı Şekil 3.8 de verilmiştir.



Şekil 3.8. Bir noktası çıkarılmış 2 mertebeli projektif düzlemi

Şekil 3.8 ile verilen yapı;

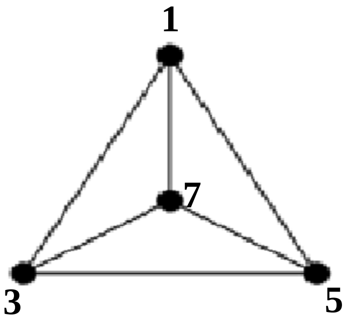
$$\boldsymbol{X_1} = \{1,2,3,5,6,7\}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{S}_1} = \big\{\{1,7\},\{2,6\},\{3,5\}\big\}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_1 = \big\{\{1,2,3\},\{1,6,5\},\{2,7,5\},\{3,7,6\}\big\}$$

olmak üzere $(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{\mathcal{B}_1}, \boldsymbol{\mathcal{S}_1})$ yapısıdır ve bu yapı bir 2-(2,3,1) PD dir.

Şekil 3.8 ile verilen $(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{\mathcal{B}_1}, \boldsymbol{\mathcal{S}_1})$ yapısından $\{2,4,6\}$ doğrusunun üzerindeki noktalarla birlikte atılmasıyla elde edilen geometrik yapı,

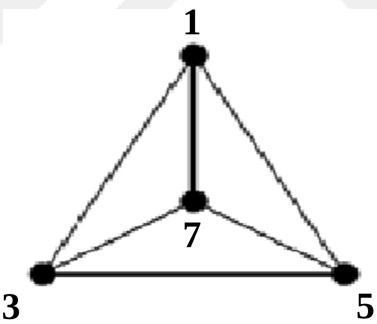
$$\boldsymbol{X_2} = \{1,3,5,7\}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{S}_2} = \big\{\{1\},\{3\},\{5\},\{7\}\big\}$$
$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_2 = \big\{\{1,3\},\{3,5\},\{1,5\},\{1,7\},\{7,5\},\{3,7\}\big\}$$

olmak üzere $(\boldsymbol{X_2}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_2, \boldsymbol{\mathcal{S}_2})$ yapısıdır. Bu yapının şekli Şekil 3.9 da verimiştir.



Şekil 3.9. Üzerindeki noktalarla birlikte bir doğrusu çıkarılmış 2 mertebeli projektif düzlem

Şekil 3.9 ile verilen $(\boldsymbol{X_2}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_2, \boldsymbol{\mathcal{S}_2})$ yapısı bir 2-(1,2,1) PD dir. Şekil 3.9 ile verilen $(\boldsymbol{X_2}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_2, \boldsymbol{\mathcal{S}_2})$ PD sinin nokta sınıfları yeniden düzenlenir ve $\boldsymbol{\mathcal{S}_3} = \{\{1,7\}, \{3,5\}\}$ olarak ve bu düzenlemeye göre bloklar kümesi $\boldsymbol{\mathcal{B}}_3 = \{\{1,3\}, \{1,5\}, \{7,5\}, \{3,7\}\}$ olarak alınırsa, elde edilen ($\boldsymbol{X_2}, \boldsymbol{\mathcal{S}_3}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_3$) yapısı bir 2-(2,2,1) PD dir. ($\boldsymbol{X_2}, \boldsymbol{\mathcal{S}_3}, \boldsymbol{\mathcal{B}}_3$) PD sinin şekli Şekil 3.10 da verilmiştir.



Şekil 3.10. $(\boldsymbol{X_2}, \boldsymbol{\mathcal{B}_2}, \boldsymbol{\mathcal{S}_2})$ nin nokta sınıflarının düzenlemiş hali

Böylece 3.2.3 Örnekte, 3 mertebeli projektif düzlemden elde edilen PD lerin benzerlerinin benzer yöntemlerle 2 mertebeli projektif düzlemden elde edilebileceği görülmüştür.

Daha önce 3.2.2 Örnekte elde edilen 3-PD, aynı zamanda bir 2-PD dir. Benzer biçimde 2-PD ler aynı zamanda 1-PD olur. Aşağıdaki teorem bu durumu genellemektedir.

3.2.5 Teorem. $\mathcal{D}$ bir t-(s,k,λ_t)-PD olsun $t \geq 2$ ve i tamsayısı $1 \leq i \leq t$ özeliğinde olsun. Bu durumda

$$\lambda_i = \lambda_t \frac{\binom{vs^{-1} - i}{t - i} s^{t-1}}{\binom{k - i}{t - i}} \tag{3.4}$$

olmak üzere $\mathcal{D}$ yapısı bir i-(s,k,λ_i)-PD dir.

İspat. Belli bir I transversal *i*-altkümesi alalım.

"$|\boldsymbol{Y}| = t - i$, $\mathbf{I} \cup \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{B} \ \exists \ \mathbf{B} \in \mathcal{B}$, $\mathbf{I} \cup \boldsymbol{Y}$ transversal t-altküme"

olacak biçimdeki ($\boldsymbol{Y}$, **B**) ikililerini iki farklı yol ile hesaplayacağız.
I yi kapsayan bir **B** bloğu için $\boldsymbol{Y}$ kümesini belirlemede

$$\binom{k - i}{t - i}$$

seçenek var olup, **I** yi kapsayan tüm blokların sayısı λ_i olduğundan, **I** yi kapsayan tüm bloklar için $\boldsymbol{Y}$ kümesini belirlemede

$$\lambda_i \binom{k - 1}{t - i} \tag{3.5}$$

farklı seçenek vardır. İkinci yol olarak **I** bir *i*-transversal küme olup her bir nokta kümesinden 1 eleman bulundurduğundan I nin dışında $\frac{v}{s} - i$ farklı nokta sınıfı vardır. Bu $\frac{v}{s} - i$ sınıfın her birinden birer eleman alınarak elde edilebilecek (t-*i*)-altkümeler $\boldsymbol{Y}$ olarak alınacak kümelerdir. Eğer her bir denklik sınıfı 1 elemanlı olsaydı $\boldsymbol{Y}$ olarak

$$\binom{vs^{-1} - i}{t - i} s^{t-1}$$

farklı altküme belirlenebilirdi. Fakat her bir denklik sınıfı s elemanlı olduğundan, ***Y*** olarak

$$\binom{vs^{-1}-i}{t-i}\cdot\underbrace{s\cdot s\cdot\ldots\cdot s}_{\text{t-1}}=\binom{vs^{-1}-i}{t-i}s^{t-1}$$

farklı t-altküme belirlenebilir. Bu özelikte seçilen her ***Y*** için ***Y*** yi bulunduran λ_i farklı blok var olduğundan, ***Y*** kümesini bulunduran tüm blokların sayısı

$$\lambda_t\binom{vs^{-1}-i}{t-i}s^{t-1} \tag{3.6}$$

olur. (3.5) ve (3.6) nin ikisi de tüm (***Y***, B) ikililerinin sayısını verdiğinden (3.5) ve (3.6) de bulunan ifadeler aynı olmalıdır. Bu nedenle

$$\lambda_i\binom{k-1}{t-i}=\lambda_t\binom{vs^{-1}-i}{t-i}s^{t-1} \tag{3.7}$$

eşitliliği elde edilmiş olur. ■

Bu son teorem bir *t*-(s,k,λ_t)-PD sinin diğer bazı parametrelerini bulmamızı sağlar. (3.4) eşitliğinde $i=0$ alınığında bütün blokların sayısı elde edilir. Yani (3.4) formülünden

$$b:=|\boldsymbol{\mathcal{B}}|=\lambda_t\frac{\binom{vs^{-1}}{t}s^t}{\binom{k}{t}}$$

bulunur. Benzer biçimde $i=1$ alındığında

$$r=\lambda_1$$

olduğu elde edilir. $i=t-1$ alındığında (3.4) formülünden

$$\lambda_{t-i} = \lambda_t \frac{v - st + s}{k - t + 1} v - st \tag{3.8}$$

elde edilir. 3.2.5 Teoremden dolayı (3.8) ile verilen formülde t yerine $1 \leq t' \leq t$ olmak üzere herhangi bir t' alınması durumunda da aynı formülün geçerli olduğu bellidir. Bu nedenle $t' = 1$ alınarak $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 v}{k}$ eşitliğinden

$$bk = rv$$

eşitliği bulunur. $t \geq 2$ alındığında $t' = 2$ durumu

$$r(k-1) = \lambda_2(v - s)$$

eşitliğini verir. Bu son iki eşitlik (3.7) eşitliğinin özel durumlarıdır.

s=1 olduğunda PD lere dizayn adı verilmektedir. Bu nedenle dizayn teorisinde s parametresi göz önünde alınmaz ve v noktalı bir t-(1,k,λ_t) dizaynı genelde daha önce Bölüm 2'de gösterildiği gibi t-(v,k,λ_t) biçiminde gösterir. Tabi ki Bölüm 2'de gösterilen t-(v,k,λ_t) notasyonu farklı notasyonlardır. Bu farklılık dikkate alınmalı ve yanlışlıkla "$1 = s$" hatalı sonucuna ulaşılmamalıdır.

Biz daha önce 3.2.3 ve 3.2.4 Örnekte projektif ve afin düzlemlerden elde dilen dizayn örnekleri vermiştik. Bu başlık altında konumuz dizayn olmadığından sadece $s > 1$ olması durumuna odaklanacağız.

$\boldsymbol{\mathcal{D}} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ bir t-(s,k,λ_t)-PD ve $\boldsymbol{\mathcal{D}}' = (\mathbf{X}', \boldsymbol{\mathcal{B}}', \boldsymbol{\mathcal{S}}')$ bir t'-(s', k', $\lambda_t{}'$)- PD olsun. Eğer bir

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{X} &\to \mathbf{X}' \\ p &\mapsto p^{\varphi} \end{aligned}$$

fonksiyonu birebir, örten ve

$$\mathrm{B} \in \boldsymbol{\mathcal{B}} \iff \mathrm{B}^{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}' \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{\mathcal{S}} \iff \mathrm{S}^{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}' \tag{3.10}$$

şartları sağlayacak biçimde varsa φ ye $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ve $\boldsymbol{\mathcal{D}}'$ PD ler arasında bir ***izomorfizm*** denir. $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ve $\boldsymbol{\mathcal{D}}'$ arasında bir izomorfizm varsa $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ve $\boldsymbol{\mathcal{D}}'$ PD lerine izomorfturlar denir.

Bir izomorfizmin tersinin de izomorfizm olduğu aşikârdır. Eğer iki izomorfizmin bileşkesi tanımlıysa bileşke de bir izomorfizmdir. Bir PD den kendi üzerine bütün izomorfizmlerin (yani bütün otomorfizmlerin) kümesi fonksiyon bileşke işlemi altında bir gruptur.

Eğer $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ve $\boldsymbol{\mathcal{D}}'$ sırasıyla t-(s,k,λ_t) ve t'-($s', k', \lambda_t{}'$) PD leri izomorf iseler

$$v = v' \, , s = s' \, , k = k'$$

olur. Bununla birlikte 3.2.5 Teoremden dolayı $t \neq t'$ olabileceği bellidir. Eğer t ve t' parametreleri bu özelikleri maksimal tamsayılar ise, yani $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ bir t-PD olduğu halde $(t+1)$-PD değilse be benzer olarak $\boldsymbol{\mathcal{D}}'$ bir t' -PD olduğu halde $(t'+1)$-PD değilse,

$$t = t' \text{ ve } \lambda_t = \lambda'_{t'}$$

olacağı aşikârdır.

İzomorfizm tanımında yer alan (3.9) şartı, daha zayıf gibi görünen

$$\boldsymbol{S} \epsilon \, \boldsymbol{\mathcal{S}} \implies \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}' \tag{3.11}$$

şartı ile değiştirilebilir. (3.11) şartını sağlayan bir $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ birebir örten fonksiyonunun verildiği kabul edelim. Eğer **X** in bir $\boldsymbol{S}$ altkümesi için $\boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'$ oluyorsa bir $\mathrm{x} \in \boldsymbol{S}$ elemanı var demektir. Bu durumda (3.11) dan dolayı $\mathrm{x}^{\varphi} \in \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{\varphi}} \cap [\mathrm{x}]^{\varphi}$ ve $[\mathrm{x}]^{\varphi} \in \boldsymbol{S}'$ olduğu bulunur. Bir ortak elemanı bulunan iki denklik sınıfı özdeş olacağından $\boldsymbol{S}^{\varphi} = [\mathrm{x}]^{\varphi}$ ve dolayısıyla $\boldsymbol{S} = [\mathrm{x}] \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ olduğu bulunur. Bu sonucu bulmamızdaki önemli etken (3.9) de yer alan ancak ve ancak simgesidir.

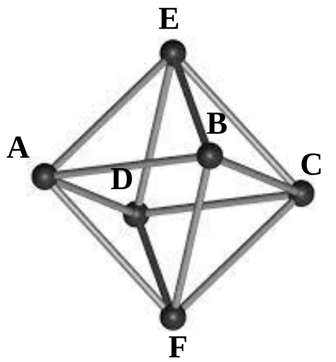
Aşağıdaki özel durumda (3.10) şartını göstermeye gerek kalmaz: $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ ve $\boldsymbol{\mathcal{D}'}$ (3.9)' i sağlayan iki PD ve $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ dönüşümü $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ den $\boldsymbol{\mathcal{D}'}$ ye birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\text{her } \mathrm{x}, y \in \mathbf{X}, \ \mathrm{x} \neq y \text{ için } \mathrm{x}Ry \Leftrightarrow \text{x ve } y \text{ yi içeren bir blok vardır.}$$

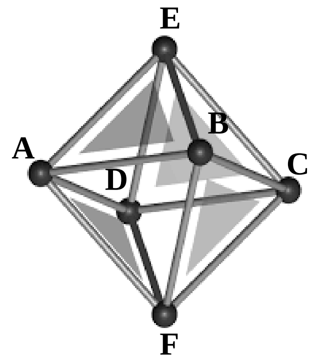
ifadesinin doğru olduğu elde edilir. Aynı karakterizasyon $\boldsymbol{\mathcal{D}'}$ için de uygulanabilir. Bu nedenle her $\mathrm{x}, y \in \mathbf{X}$ için $\mathrm{x}Ry$ olması $\mathrm{x}^{\varphi}Ry^{\varphi}$ olması demektir.

3.2.6 Örnek. Öklid 3-uzayında bir düzgün sekizyüzlüyü göz önüne alalım. İki farklı yolla sekizyüzlünün köşelerini bir 2-PD nin 6 noktasına dönüştüreceğiz (Şekil 3.11). İki PD de de nokta sınıfları karşılıklı köşelerin oluşturduğu 2 elemanlı kümeler alınacaktır. Fakat bu PD ler için blokları farklı oluşturacağız. Şekil 3.11 de yer alan PD 8 üçgenin her birini bloklar olarak alacağız ve böylece 2-(2,3,2)-PD elde edeceğiz ki bunun aynı zamanda bir 3-PD olduğunu Örnek 3.2.2 de gördük. Şekil 3.12'de yer alan yapıda sadece gölgeli olarak verilen 4 üçgen blok olarak alınacaktır ki bu bir 2-(2,3,1) PD verir. Şekil 3.11'den elde edilen PD $\boldsymbol{\mathcal{D}} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ ile Şekil 3.12'den elde edilen PD ise $\boldsymbol{\mathcal{D}'} = (\mathbf{X}', \boldsymbol{\mathcal{B}'}, \boldsymbol{\mathcal{S}'})$ ile gösterilsin.

$\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ={{E,C,D}, {E,C,B},{E,B,A},{E,A,D},{F,A,B},{F,B,C},$\{F,C,D\}$,$\{\mathrm{F,D,A}\}$}
$\boldsymbol{\mathcal{B}'}$ ={{E,C,D}, {E,B,A},{F,B,C},$\{\mathrm{F,D,A}\}$}



Şekil 3.11. Sekizyüzlü



Şekil 3.12. Blokları düzenlenmiş sekizyüzlü

$\mathcal{D}'$ den $\mathcal{D}$ ye id_X özdeşlik fonksiyonu blokları bloklara dönüştürür. Bu nedenle PD lerin nokta kümeleri arasındaki birebir ve örten olan id_X fonksiyonu nokta sınıflarını her iki yönde de korur fakat blokları sadece bir yönde korur ve bu nedenle izomorfizm değildir.

3.2.7 Örnek. 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.6, Örneklerde verilen PD lerden hangileri izomorftur?

3.2.4 Örnekte verilen Şekil 2.8 yapısı ile 3.2.6 Örnekte Şekil 2.12 ile verilen yapının ikisi de 2-(2,3,1) yapı olup;

$$\varphi: \mathbf{X} \longmapsto \mathbf{X}'$$

$$\begin{gathered} 1 \longmapsto \mathrm{F} \\ 2 \longmapsto \mathrm{A} \\ 3 \longmapsto \mathrm{D} \\ 4 \longmapsto \mathrm{B} \\ 5 \longmapsto \mathrm{C} \\ 6 \longmapsto \mathrm{E} \end{gathered}$$

dönüşümü göz öne alınırsa,

$$\{1,2,3\} \longrightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{A}, \mathrm{D}\}$$

$$\{1,5,4\} \longrightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$$

$$\{2,6,4\} \longrightarrow \{\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{B}\}$$

$$\{1,2,3\} \longrightarrow \{\mathrm{F}, \mathrm{A}, \mathrm{D}\}$$

$$\{3,6,5\} \longrightarrow \{\mathrm{C}, \mathrm{E}, \mathrm{C}\}$$

olduğundan bloklar φ altında bloklara dönüşür. Benzer biçimde φ altında

$$1, 6 \longrightarrow F, E$$

$$2, 5 \longrightarrow A, C$$

$$3, 4 \longrightarrow D, B$$

olduğundan sınıflar sınıflara dönüşür. Aynı zamanda φ birebir ve örten olduğundan 3.2.4 Örnek ve 3.2.6 Örnekte verilen PD ler izomorftur.

3.2.1 Örnekte verilen Şekil 2.1 in yapısı ile 3.2.3 Örnek de Şekil 2.6 da verilen yapının ikisi de 2-(3,3,1) yapı olup

$$\varphi: \mathbf{X} \longmapsto \mathbf{X}'$$

$$\begin{gathered} p_1 \longmapsto 1 \\ p_2 \longmapsto 4 \\ p_3 \longmapsto 7 \\ q_1 \longmapsto 2 \\ q_2 \longmapsto 5 \\ q_3 \longmapsto 8 \\ r_1 \longmapsto 3 \\ r_2 \longmapsto 6 \\ r_3 \longmapsto 9 \end{gathered}$$

dönüşümü altında

$$\{1,2,3\} \longrightarrow \{p_1, q_1, r_1\}$$

$$\{4,5,6\} \longrightarrow \{r_2, q_2, p_2\}$$

$$\{7,8,9\} \longrightarrow \{r_3, q_3, p_3\}$$

$$\{1,5,9\} \longrightarrow \{p_1, q_2, r_3\}$$

$$\{3,5,7\} \longrightarrow \{r_1, q_2, p_3\}$$

$$\{1,8,6\} \longrightarrow \{p_1, q_3, r_2\}$$

$$\{2,4,9\} \longrightarrow \{q_1, p_2, r_3\}$$

$$\{8,4,3\} \longrightarrow \{q_3, p_2, r_1\}$$

$$\{6,2,7\} \longrightarrow \{r_2, q_1, p_3\}$$

olduğundan, bloklar φ altında bloklara dönüşür. Benzer biçimde φ altında

$$1,\ 4,\ 7 \longrightarrow p_1, p_4, p_3$$

$$2,\ 5,\ 8 \longrightarrow q_1, q_2, q_3$$

$$3,\ 6,\ 9 \longrightarrow r_1, r_2, r_3$$

olduğundan sınıflar sınıflara dönüşür. Aynı zamanda φ birebir ve örten olduğundan 3.2.1 Örnekte ve 3.2.3 Örnekte yer alan PD ler izomorftur.

3.3. Parçalanabilir Dizaynlar Üzerinde Grup Etkisi

Geometride çalışılan önemli bir yapı olan dizaynlar üzerinde cebirsel bir kavram olan grupların etkisi önemli bir rol oynamaktadır. Bu kısımda bir grubun keyfi bir küme üzerindeki etkisi incelenecektir. Ayrıca bu kısımda bazı karışıklıkların önüne geçmek için bir x elemanının bir α permütasyonu altındaki görüntüsü x^{α} ile gösterilecektir.

X sonlu bir küme iken

$$\boldsymbol{S}_{\mathbf{X}} = \{f \mid f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X} \text{ birebir ve örten}\}$$

kümesi fonksiyon bileşke işlemine göre bir gruptur ve bu gruba **X** kümesi için **simetrik grup** denir. Aslında $\boldsymbol{S}_{\mathbf{X}}$ in elemanları **X** in permütasyonlarıdır. **G** herhangi bir grup iken eğer

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbf{G} &\longrightarrow \boldsymbol{S}_{\mathbf{X}} \\ g &\longmapsto g^{\alpha} \end{aligned}$$

bir homomorfizm ise α ya **G** nin ***permütasyon temsili*** ya da kısaca ***temsili*** denir. α fonksiyonu **G** nin bir permütasyon temsili iken **G** grubuna **X *üzerinde α ya göre etki grubu***, ya da kısaca ***etki grubu*** adı verilir. Bu durumda **G** nin her bir g elemanı için $g^{\alpha} \in \boldsymbol{S}_{\mathbf{X}}$ olduğundan

$$\begin{aligned} g^{\alpha} : \mathbf{X} &\longrightarrow \mathbf{X} \\ \mathrm{x} &\longmapsto \mathrm{x}^{(g^{\alpha})} \end{aligned}$$

fonksiyonunun **X** in bir permütasyonu olduğu elde edilir. Eğer bir karışıklık olmayacaksa $\mathrm{x}^{(g^{\alpha})}$ yerine kısaca x^{g} yazılır. Fonksiyon bileşke işlemi çarpma biçiminde gösterilirse her $\mathrm{x} \in \mathbf{X}$ ve her $g, h \in \mathbf{G}$ için

$$\mathrm{x}^{(gh)} = (\mathrm{x}^{g})^{h}$$

olur. Eğer α temsili birebir ise α ya **G** için ***güvenilir temsil*** adı verilir. Eğer bir temsil güvenilir değilse α birebir olmayacağından **G** nin, **X** üzerinde aynı permütasyonu veren farklı elemanları vardır.

3.3.1 Örnek. $\mathbf{X} = \{1,2,3,4\}$ kümesini ve işlemi aşağıdaki tablo ile verilen **G**= $\{e, a, b, c\}$ grubunu göz önüne alalım.

$*$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{e}$	e	a	b	c
$\boldsymbol{a}$	a	e	c	b
$\boldsymbol{b}$	b	c	e	a
$\boldsymbol{c}$	c	b	a	e

Tablo 3.13. G= $\{e, a, b, c\}$ için grup tablosu

$|\mathbf{X}| = 4$ olduğundan $|\boldsymbol{S}_{\mathbf{X}}| = 4! = 24$ olup **X** kümesinin tüm permütasyonları aşağıda verilen 24 permütasyondan ibarettir:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$
$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$
$$f_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$f_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$f_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$f_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad f_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu durumda

$$\alpha_1 : \mathbf{G} \to S_{\mathbf{X}}$$
$$e \longmapsto f_1$$
$$a \longmapsto f_8$$
$$b \longmapsto f_{15}$$
$$c \longmapsto f_{24}$$

biçimde tanımlı α_1 fonksiyonu için,

$$\alpha_1(e * e) = \alpha_1(e) = f_1$$

$$\alpha_1(e) \circ \alpha_1(e) = f_1 \circ f_1 = f_1$$

olduğundan $\alpha_1(e * e) = \alpha_1(e) \circ \alpha_1(e)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_1(e * a) = \alpha_1(a) = f_8$$

$$\alpha_1(e) \circ \alpha_1(a) = f_1 \circ f_8 = f_8$$

olduğundan $\alpha_1(e * a) = \alpha_1(e) \circ \alpha_1(a)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_1(e * b) = \alpha_1(b) = f_{15}$$

$$\alpha_1(e) \circ \alpha_1(b) = f_1 \circ f_{15} = f_{15}$$

olduğundan $\alpha_1(e * b) = \alpha_1(e) \circ \alpha_1(b)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_1(e * c) = \alpha_1(c) = f_{24}$$

$$\alpha_1(e) \circ \alpha_1(c) = f_1 \circ f_{24} = f_{24}$$

olduğundan $\alpha_1(e * c) = \alpha_1(e) \circ \alpha_1(c)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_1(a * e) = \alpha_1(a) = f_8$$

$$\alpha_1(a) \circ \alpha_1(e) = f_8 \circ f_1 = f_8$$

olduğundan $\alpha_1(a * e) = \alpha_1(a) \circ \alpha_1(e)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_1(a * a) = \alpha_1(e) = f_1$$

$$\alpha_1(a) \circ \alpha_1(a) = f_8 \circ f_8 = f_1$$

olduğundan $\alpha_1(a * a) = \alpha_1(a) \circ \alpha_1(a)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_1(a * b) = \alpha_1(c) = f_{24}$$

$$\alpha_1(a) \circ \alpha_1(b) = f_8 \circ f_{15} = f_{24}$$

olduğundan $\alpha_1(a * b) = \alpha_1(a) \circ \alpha_1(b)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_1(a * c) = \alpha_1(b) = f_{15}$$

$$\alpha_1(a) \circ \alpha_1(c) = f_8 \circ f_{24} = f_{15}$$

olduğundan $\alpha_1(a * c) = \alpha_1(a) \circ \alpha_1(c)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_1(b * e) = \alpha_1(b) = f_{15}$$

$$\alpha_1(b) \circ \alpha_1(e) = f_{15} \circ f_1 = f_{15}$$

olduğundan $\alpha_1(b * e) = \alpha_1(b) \circ \alpha_1(e)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_1(b * a) = \alpha_1(c) = f_{24}$$

$$\alpha_1(b) \circ \alpha_1(a) = f_{15} \circ f_8 = f_{24}$$

olduğundan $\alpha_1(b * a) = \alpha_1(b) \circ \alpha_1(a)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_1(b * b) = \alpha_1(e) = f_1$$
$$\alpha_1(b) \circ \alpha_1(b) = f_{15} \circ f_{15} = f_1$$
olduğundan $\alpha_1(b * b) = \alpha_1(b) \circ \alpha_1(b)$ eşitliği geçerlidir.
$$\alpha_1(b * c) = \alpha_1(a) = f_8$$
$$\alpha_1(b) \circ \alpha_1(c) = f_{15} \circ f_{24} = f_8$$
olduğundan $\alpha_1(b * c) = \alpha_1(b) \circ \alpha_1(c)$ eşitliği geçerlidir.
$$\alpha_1(c * e) = \alpha_1(c) = f_8$$
$$\alpha_1(c) \circ \alpha_1(e) = f_{24} \circ f_1 = f_8$$
olduğundan $\alpha_1(c * e) = \alpha_1(c) \circ \alpha_1(e)$ eşitliği geçerlidir.
$$\alpha_1(c * a) = \alpha_1(b) = f_{15}$$
$$\alpha_1(c) \circ \alpha_1(a) = f_{24} \circ f_8 = f_{15}$$
olduğundan $\alpha_1(c * a) = \alpha_1(c) \circ \alpha_1(a)$ eşitliği geçerlidir.
$$\alpha_1(c * b) = \alpha_1(a) = f_8$$
$$\alpha_1(c) \circ \alpha_1(b) = f_{24} \circ f_{15} = f_8$$
olduğundan $\alpha_1(c * b) = \alpha_1(c) \circ \alpha_1(b)$ eşitliği geçerlidir.
$$\alpha_1(c * c) = \alpha_1(e) = f_1$$
$$\alpha_1(c) \circ \alpha_1(c) = f_{24} \circ f_{24} = f_1$$
olduğundan $\alpha_1(c * c) = \alpha_1(c) \circ \alpha_1(c)$ eşitliği geçerlidir.

Bu nedenle α_1 homomorfizmdir. Bu α_1 in **G** için bir temsili olduğunu gösterir. Aynı zamanda α_1 fonksiyonu birebir olduğundan **G** için bir güvenilir temsildir. **G** nin güvenilir temsili tek olarak belli değildir. Yani **G** nin α_1 den farklı güvenilir temsilleri de var olabilir. Örneğin

$$\alpha_2 : \mathbf{G} \to \boldsymbol{S}_{\mathbf{X}}$$
$$\begin{gathered} e \longmapsto f_1 \\ a \longmapsto f_{10} \\ b \longmapsto f_{15} \\ c \longmapsto f_{19} \end{gathered}$$

biçimde tanımlı fonksiyonun da **G** için bir güvenilir temsil olduğu α_1 için yaptıklarımıza, benzer işlemlerle görülebilir.

Son olarak

$$\alpha_3 : \mathbf{G} \rightarrow \boldsymbol{S}_{\mathbf{X}}$$
$$e \longmapsto f_1$$
$$a \longmapsto f_1$$
$$b \longmapsto f_8$$
$$c \longmapsto f_8$$

biçiminde tanımlı α_3 fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\alpha_3(e * e) = \alpha_3(e) = f_1$$
$$\alpha_3(e) \circ \alpha_3(e) = f_1 \circ f_1 = f_1$$

olduğundan $\alpha_3(e * e) = \alpha_3(e) \circ \alpha_3(e)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(e * a) = \alpha_3(a) = f_1$$
$$\alpha_3(e) \circ \alpha_3(a) = f_1 \circ f_1 = f_1$$

olduğundan $\alpha_3(e * a) = \alpha_3(e) \circ \alpha_3(a)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(e * b) = \alpha_3(b) = f_8$$
$$\alpha_3(e) \circ \alpha_3(b) = f_1 \circ f_8 = f_8$$

olduğundan $\alpha_3(e * b) = \alpha_3(e) \circ \alpha_3(b)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(e * c) = \alpha_3(c) = f_8$$
$$\alpha_3(e) \circ \alpha_3(c) = f_1 \circ f_8 = f_8$$

olduğundan $\alpha_3(e * c) = \alpha_3(e) \circ \alpha_3(c)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(a * e) = \alpha_3(a) = f_1$$
$$\alpha_3(a) \circ \alpha_3(e) = f_1 \circ f_1 = f_1$$

olduğundan $\alpha_3(a * e) = \alpha_3(a) \circ \alpha_3(e)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(a * a) = \alpha_3(e) = f_1$$
$$\alpha_3(a) \circ \alpha_3(a) = f_1 \circ f_1 = f_1$$

olduğundan $\alpha_3(a * a) = \alpha_3(a) \circ \alpha_3(a)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(a * b) = \alpha_3(c) = f_8$$
$$\alpha_3(a) \circ \alpha_3(b) = f_1 \circ f_8 = f_8$$

olduğundan $\alpha_3(a * b) = \alpha_3(a) \circ \alpha_3(b)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(a * c) = \alpha_3(b) = f_8$$
$$\alpha_3(a) \circ \alpha_3(c) = f_1 \circ f_8 = f_8$$

olduğundan $\alpha_3(a * c) = \alpha_3(a) \circ \alpha_3(c)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(b * e) = \alpha_3(b) = f_8$$

$$\alpha_3(b) \circ \alpha_3(e) = f_8 \circ f_1 = f_8$$

olduğundan $\alpha_3(b * e) = \alpha_3(b) \circ \alpha_3(e)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(b * a) = \alpha_3(c) = f_8$$

$$\alpha_3(b) \circ \alpha_3(a) = f_8 \circ f_1 = f_8$$

olduğundan $\alpha_3(b * a) = \alpha_3(b) \circ \alpha_3(a)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(b * b) = \alpha_3(e) = f_1$$

$$\alpha_3(b) \circ \alpha_3(b) = f_8 \circ f_8 = f_1$$

olduğundan $\alpha_3(b * b) = \alpha_3(b) \circ \alpha_3(b)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(b * c) = \alpha_3(e) = f_1$$

$$\alpha_3(b) \circ \alpha_3(c) = f_8 \circ f_8 = f_1$$

olduğundan $\alpha_3(b * c) = \alpha_3(b) \circ \alpha_3(c)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(c * e) = \alpha_3(c) = f_8$$

$$\alpha_3(c) \circ \alpha_3(e) = f_8 \circ f_1 = f_8$$

olduğundan $\alpha_3(c * e) = \alpha_3(c) \circ \alpha_3(e)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(c * a) = \alpha_3(b) = f_8$$

$$\alpha_3(c) \circ \alpha_3(a) = f_8 \circ f_1 = f_8$$

olduğundan $\alpha_3(c * a) = \alpha_3(c) \circ \alpha_3(a)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(c * b) = \alpha_3(a) = f_1$$

$$\alpha_3(c) \circ \alpha_3(b) = f_8 \circ f_8 = f_1$$

olduğundan $\alpha_3(c * b) = \alpha_3(c) \circ \alpha_3(b)$ eşitliği geçerlidir.

$$\alpha_3(c * c) = \alpha_3(e) = f_1$$

$$\alpha_3(c) \circ \alpha_3(c) = f_8 \circ f_8 = f_1$$

olduğundan $\alpha_3(c * c) = \alpha_3(c) \circ \alpha_3(c)$ eşitliği geçerlidir.

Bu α_3 ün bir homomorfizm olduğunu gösterir. Bu nedenle α_3 **G** için bir temsildir. Fakat α_3 birebir olmadığından güvenilir temsil değildir.

G, α ya göre **X** üzerinde etki grubu olsun. Her x ∈ **X** için

$$\mathrm{x}^G := \{\mathrm{x}^g \mid g \epsilon \mathbf{G}\}$$

kümesine **X** in **G** altındaki ***yörüngesi*** denir. Bütün yörüngelerin kümesi **X** in bir parçalanışıdır. Eğer **X** kümesinin kendisi bir yörünge ise **G** ye **X** üzerinde ***geçişli etki*** denir. Bu durumda herhangi x,y∈ **X** elemanları için $x^g = y$ olacak biçimde en az bir g∈**G** elemanı vardır. Üstelik bu g∈**G** elemanı her bir durum için tek olarak belirleniyorsa **G** etkisine ***düzenli etki*** ya da ***kesin geçişli etki*** denir. Eğer **G**, **X** üzerinde geçişli etki ise temsilcisi güvenilirdir, çünkü **X** sonlu olduğundan α nın birebir olması durumda **X i**n kendisi bir yörünge olamaz.

Verilen **G** grubunun **X** üzerindeki etkisi, **X** yardımıyla bulunan diğer kümeler üzerinde de aynı etkiyi yaptığı kabul edilir. Örneğin negatif olmayan bir t tamsayı için **G** grubunun bir g elemanı $\mathbf{X^t}$ nin elemanları üzerinde

$$(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_t)^g := \left(\mathrm{x}_1^g, \mathrm{x}_2^g, \dots, \mathrm{x}_t^g\right)$$

biçimde etki ettiği düşünülür. Eğer **G**, **X** in farklı girdili tüm sıralı *t*-lileri üzerinde geçişli ise **G** ye **X** üzerinde ***t-geçişli*** denir. Üstelik $t \leq |\mathbf{X}|$ için $g \in \mathbf{G}$ olmak üzere **X** in farklı *t* elemanından oluşan $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_t\}$ kümesi üzerindeki etkisi

$$\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_t\}^g := \left\{\mathrm{x}_1^g, \mathrm{x}_2^g, \dots, \mathrm{x}_t^g\right\}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer **X** in boş olmayan tüm *t* elemanlı altkümeleri üzerinde **G** etkisi geçişli ise **G** ye **X** üzerinde ***t- homojen etki*** denir.

X kümesi üzerindebir R denklik bağıntısı için

$$\mathrm{x}R\mathrm{y} \implies \mathrm{x}^g R \mathrm{y}^g \;\; \forall\, \mathrm{x}, y \in \mathbf{X},\; \forall g \in \mathbf{G} \qquad (3.12)$$

şartı sağlanıyorsa R ye **G-*invarianttır*** denir. **G** grup olduğundan $\forall g \in \mathbf{G}$ için $g^{-1} \in \mathbf{G}$ dir ve bu nedenle (1) den dolayı

$$\mathrm{x}R\mathrm{y} \iff \mathrm{x}^g R \mathrm{y}^g \; \forall\, x, y \in \mathbf{X}, \forall g \in \mathbf{G} \qquad (3.13)$$

olduğu elde edilir. R olarak $\Delta_{\mathbf{X}}=\{(\mathrm{x},\mathrm{x})|\mathrm{x}\in\mathbf{X}\}$ veya $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ alındığında elde edilen denklik bağıntılarının **G**-invaryant olacağı aşikârdır.

G nin **X** üzerinde geçişli bir etki olduğunu kabul edelim. Eğer **X** üzerinde $\Delta_{\mathbf{X}}$ ve $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ ten başka **G**-invariant denklik bağıntısı yoksa **G** etkisine ***ilkel etki*** denir. Aksi taktirde **G** etkisine ***ilkel olmayan etki*** adı verilir.

G, **X** üzerinde ilkel olmayan bir etki ve $\mathbf{S}\subset\mathbf{X}$ olsun. Eğer **S**, Δ_X ve $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$ ten farklı bir **G**-invariant R denklik bağıntının denklik sınıfı oluyorsa **S** ye ***ilkel olmayan bloktur*** denir. Bu nedenle ilkel olmayan bir **S** bloğu,

$$\mathbf{X}\text{ in } |\mathbf{S}|>1\text{ , }\mathbf{S}\neq\mathbf{X}\text{ ve }\forall g\in\mathbf{G}\text{ için }\mathbf{S}^{g}=\mathbf{S}\text{ veya }\mathbf{S}^{g}\cap\mathbf{S}=\emptyset \tag{3.14}$$

özeliğindeki bir **S** altkümesidir.

Verilen bir $\boldsymbol{Y}\subseteq\mathbf{X}$ altkümesi için $\mathbf{G}_{\mathrm{Y}}=\{g\in\mathbf{G}|\,\boldsymbol{Y}^{g}=\boldsymbol{Y}\}$ kümesine ***Y*** nin ***kümesel stabilizeri*** denir. Her $\boldsymbol{Y}\subseteq\mathbf{X}$ için $\mathbf{G}_{\boldsymbol{Y}}$, **G** nin bir altgrubudur. ***Y*** nin tüm $\mathrm{y}\in\boldsymbol{Y}$ noktaları için $\mathrm{y}^{\mathrm{g}}=\mathrm{y}$ özeliğindeki tüm $g\in\mathbf{G}$ lerin kümesine ***Y*** kümesinin ***noktasal stabilizeri*** denir. ***Y*** nin noktasal stabilizeri **G** nin altgrubu ve $\mathbf{G}_{\boldsymbol{Y}}$ nin normal altgrubudur.
$\mathrm{y}\in\mathbf{X}$ için $\mathbf{G}_{\{y\}}$ stabilizerini kısaca $\mathbf{G}_{\boldsymbol{Y}}$ ile göstereceğiz. Bu durumda:

$$|y^{g}|=\frac{|\mathbf{G}|}{|\mathbf{G}_{y}|} \tag{3.15}$$

olur.

3.3.2 Örnek. 3.3.1 Örnekte verilen α_1 temsilini göz önüne alalım.
Her $\mathrm{x}\in\mathbf{X}$ elemanı için $\mathrm{x}^{G}:=\{\mathrm{x}^{g}|g\in\mathbf{G}\}$ yörüngelerini bulalım.

$$1^{G}=\{1^{e},1^{a},1^{b},1^{c}\}=\{1,2,3,4\}$$
$$2^{G}=\{2^{e},2^{a},2^{b},2^{c}\}=\{2,1,4,3\}$$
$$3^{G}=\{3^{e},3^{a},3^{b},3^{c}\}=\{3,4,1,2\}$$

$$4^G = \{4^e, 4^a, 4^b, 4^c\} = \{4,3,2,1\}$$

olduğundan **X** in kendisi bir yörüngedir. Dolayısıyla **G** , **X** üzerinde geçişli bir etkidir. $\mathbf{X} = \{1,2,3,4\}$ kümesinden alınan her x ve y için $x^g = y$ olacak biçimdeki tek $g \in \mathbf{G}$ elemanı aşağıdaki tabloda verilmiştir:

x	**y**	**g**
1	1	e
1	2	a
1	3	b
1	4	c
2	2	e
2	1	a
2	4	b
2	3	c
3	3	e
3	4	a
3	1	b
3	2	c
4	4	e
4	3	a
4	2	b
4	1	c

Tablo 3.14. $x^g = y$ olacak biçimdeki $g \in \mathbf{G}=\{e, a, b, c\}$ elemanları

Bu nedenle **G** etkisi düzenli bir etkidir.

Verilen bir $\boldsymbol{Y} \subseteq \mathbf{X}$ altkümesi için noktasal stabilizerleri be kümesel stabilizerleri bulalım:

Mesela $\boldsymbol{Y} = \{1,2\} \subset \mathbf{X}$ altkümesi için $\mathbf{G}_{\boldsymbol{Y}} = \{g \in \mathbf{G} | \boldsymbol{Y}^g = \boldsymbol{Y}\}$ noktasal stabilizeri $\{e\}$ dir ve kümesel stabilizeri $\{e, a\}$ kümesinden oluşur.

3.3.3 Örnek. 3.3.1 Örnekte verilen α_1 temsiline göz önüne alalım.

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$$

ile verilen R denklik bağıntısının **G**-invariant olduğunu gösterelim. Bunun için

$$(\mathrm{x}, y) \in R \implies (\mathrm{x}^g, y^g) \in R \;\; \forall g \in \mathbf{G} \text{ ve } \forall\, \mathrm{x}, y \in \mathbf{X}$$

şartının sağlandığı gösterilmelidir.

$(1,1) \in R$ için $(1^e, 1^e) = (1,1) \in R$; $(2,2) \in R$ için $(2^e, 2^e) = (2,2) \in R$

$(1^a, 1^a) = (2,2) \in R$ $(2^a, 2^a) = (1,1) \in R$

$(1^b, 1^b) = (3,3) \in R$ $(2^b, 2^b) = (4,4) \in R$

$(1^c, 1^c) = (4,4) \in R$ $(2^c, 2^c) = (3,3) \in R$

$(3,3) \in R$ için $(3^e, 3^e) = (3,3) \in R$; $(4,4) \in R$ için $(4^e, 4^e) = (4,4) \in R$

$(3^a, 3^a) = (4,4) \in R$ $(4^a, 4^a) = (3,3) \in R$

$(3^b, 3^b) = (1,1) \in R$ $(4^b, 4^b) = (2,2) \in R$

$(3^c, 3^c) = (2,2) \in R$ $(4^c, 4^c) = (1,1) \in R$

$(1,2) \in R$ için $(1^e, 2^e) = (1,2) \in R$; $(2,1) \in R$ için $(2^e, 1^e) = (2,1) \in R$

$(1^a, 2^a) = (2,1) \in R$ $(2^a, 1^a) = (1,2) \in R$

$(1^b, 2^b) = (3,4) \in R$ $(2^b, 1^b) = (4,3) \in R$

$(1^c, 2^c) = (4,3) \in R$ $(2^c, 1^c) = (3,4) \in R$

$(3,4) \in R$ için $(3^e, 4^e) = (3,4) \in R$; $(4,3) \in R$ için $(4^e, 3^e) = (4,3) \in R$

$(3^a, 4^a) = (4,3) \in R$ $(4^a, 3^a) = (3,4) \in R$

$(3^b, 4^b) = (1,2) \in R$ $(4^b, 3^b) = (2,1) \in R$

$(3^c, 4^c) = (2,1) \in R$ $(4^c, 3^c) = (1,2) \in R$

olduğundan $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$ bağıntısı **G**-invaryanttır. $R \neq \Delta_{\mathbf{X}}$ ve $R \neq (\mathbf{X} \times \mathbf{X})$ olduğundan **G** etkisi ilkel değildir.
Benzer biçimde

$$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$$
$$\mathrm{R}_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\}$$

denklik bağıntılarının **G**-invaryant olduklarını benzer işlemlerle gösterilebilir.

Şimdi ilkel olmayan 2 elemanlı blokları araştıralım.

$\boldsymbol{S}_1 = \{1,2\}$ ve $\mathbf{S}_2 = \{3,4\}$ kümeleri R_1 in denklik sınıfları,
$\mathbf{S}_3 = \{1,3\}$ ve $\mathbf{S_4} = \{2,4\}$ kümeleri R_2 nin denklik sınıfları,
$\boldsymbol{S}_5 = \{1,4\}$ ve $\boldsymbol{S}_6 = \{2,3\}$kümeleri R_3 ün denklik sınıfları

olduğundan $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5, \mathbf{S}_6$ kümelerinin ilkel olmayan blok oldukları elde edilir. $\mathbf{X} = \{1,2,3,4\}$ in başka 2 elemanlı altkümesi olmadığından **X** in tüm iki elemanlı altkümeleri ilkel olmayan bloklardır.

Daha önce belirtildiği gibi **S** nin ilkel olmayan bir blok olması

$$|\mathbf{S}| > 1\ ,\ \mathbf{S} \neq \mathbf{X} \text{ ve } \forall g \in \mathbf{G} \text{ için } \mathrm{S}^{\mathrm{g}} = \mathbf{S} \text{ veya } \mathbf{S}^g \cap \mathbf{S} = \emptyset$$

şartının sağlanması anlamında gelmektedir. Şimdi $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5, \mathbf{S}_6$ dan $\mathbf{S}_1$ in bu şartı sağlandığını gösterelim:

$$\mathbf{S}_1 = \{1,2\}\ ,\ \boldsymbol{S}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{g}} = \{1^g, 2^g\}$$
$$\mathbf{S}_1^{\boldsymbol{e}} = \{1^e, 2^e\} = \{1,2\} = \mathbf{S}_1$$
$$\mathbf{S}_1^{\boldsymbol{a}} = \{1^a, 2^a\} = \{2,1\} = \mathbf{S}_1$$
$$\mathbf{S}_1^{\boldsymbol{b}} = \{1^b, 2^b\} = \{3,4\} \cap \mathbf{S}_1 = \emptyset$$
$$\mathbf{S}_1^{\boldsymbol{c}} = \{1^c, 2^c\} = \{4,3\} \cap \mathbf{S}_1 = \emptyset$$

$\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3, \mathbf{S}_4, \mathbf{S}_5, \mathbf{S}_6$ nın da aynı şartı sağladığı benzer biçimde gösterilebilir. Yani **X** in 2 elemanlı her altkümesi ilkel olmayan bir bloktur. **X** in 3 elemanlı altkümeleri de inceleyelim $|\mathbf{S}| = 3, |\mathbf{S}| > 1$ alındığından, $\mathbf{S} \neq \mathbf{X}$ olduğu aşikârdır.

$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 = \{1,2,3\}$ için $\mathbf{S}_1^{\mathrm{g}} = \{1^g, 2^g, 3^g\}$ olup

$\mathbf{S}_1^{\mathrm{e}} = \{1^e, 2^e, 3^e\} = \{1,2,3\} = \mathbf{S}_1$

$\mathbf{S}_1^{\mathrm{a}} = \{1^a, 2^a, 3^a\} = \{2,1,4\} \cap \mathbf{S}_1 \neq \emptyset$

$\mathbf{S}_1^{\mathrm{b}} = \{1^b, 2^b, 3^b\} = \{3,4,1\} \cap \mathbf{S}_1 \neq \emptyset$

$\mathbf{S}_1^{\mathrm{c}} = \{1^c, 2^c, 3^c\} = \{4,3,2\} \cap \mathbf{S}_1 \neq \emptyset$

$\mathbf{S} = \mathbf{S}_2 = \{1,2,4\}$ için $\mathbf{S}_2^{\mathrm{g}} = \{1^g, 2^g, 4^g\}$ olup

$\mathbf{S}_2^{\mathrm{e}} = \{1^e, 2^e, 4^e\} = \{1,2,4\} = \mathbf{S}_2$

$\mathbf{S}_2^{\mathrm{a}} = \{1^a, 2^a, 4^a\} = \{2,1,3\} \cap \mathbf{S}_2 \neq \emptyset$

$\mathbf{S}_2^{\mathrm{b}} = \{1^b, 2^b, 4^b\} = \{3,4,2\} \cap \mathbf{S}_2 \neq \emptyset$

$\mathbf{S}_2^{\mathrm{c}} = \{1^c, 2^c, 4^c\} = \{4,3,1\} \cap \mathbf{S}_2 \neq \emptyset$

$\mathbf{S} = \mathbf{S}_3 = \{2,3,4\}$ için $\mathbf{S}_3^{\mathrm{g}} = \{2^g, 3^g, 4^g\}$ olup

$\mathbf{S}_3^{\mathrm{e}} = \{2^e, 3^e, 4^e\} = \{2,3,4\} = \mathbf{S}_3$

$\mathbf{S}_3^{\mathrm{a}} = \{2^a, 3^a, 4^a\} = \{1,4,3\} \cap \mathbf{S}_3 \neq \emptyset$

$\mathbf{S}_3^{\mathrm{b}} = \{2^b, 3^b, 4^b\} = \{4,1,2\} \cap \mathbf{S}_3 \neq \emptyset$

$\mathbf{S}_3^{\mathrm{c}} = \{2^c, 3^c, 4^c\} = \{3,2,1\} \cap \mathbf{S}_3 \neq \emptyset$

$\mathbf{S} = \mathbf{S}_4 = \{1,3,4\}$ için $\mathbf{S}_4^{\mathrm{g}} = \{1^g, 3^g, 4^g\}$ olup

$\mathbf{S}_4^{\mathrm{e}} = \{1^e, 3^e, 4^e\} = \{1,3,4\} = \mathbf{S}_4$

$\mathbf{S}_4^{\mathrm{a}} = \{1^a, 3^a, 4^a\} = \{2,4,3\} \cap \mathbf{S}_4 \neq \emptyset$

$\mathbf{S}_4^{\mathrm{b}} = \{1^b, 3^b, 4^b\} = \{3,1,2\} \cap \mathbf{S}_4 \neq \emptyset$

$\mathbf{S}_4^{\mathrm{c}} = \{1^c, 3^c, 4^c\} = \{4,2,1\} \cap \mathbf{S}_4 \neq \emptyset$

olduğundan **X** in 3 elemanlı altkümeleri arasında ilkel olmayan bloğu yoktur. Çünkü **X** in 3 elemanlı tüm altkümeleri yukarıda bahsedilen S_1, S_2, S_3, S_4 den ibarettir ve bunların hiçbirinin (3.13) şartını sağlamadığını yukarıda gösterilmiştir. Bu aslında $\mathbf{X} = \{1,2,3,4\}$ kümesinin 3 elemanlı bir denklik sınıfına sahip **G**-invaryant denklik bağıntısının var olmadığını gösterir. Örneğin,

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (3,1), (1,3)(2,3), (3,2)\}$$

denklik bağıntısı için

$$\begin{aligned}(2,3) \in R \text{ için } (2^e, 3^e) &= (2,3) \in R \\ (2^a, 3^a) &= (1,4) \notin R \\ (2^b, 3^b) &= (4,1) \notin R \\ (2^c, 3^c) &= (3,2) \in R\end{aligned}$$

olduğundan R_1 denklik bağıntısı **G**-invariant değildir. Benzer biçimde

$$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,4), (4,1), (3,1), (1,3)(3,4), (4,3)\}$$
$$R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1)(2,4), (4,2)\}$$
$$R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,4), (4,2), (4,3), (3,4)(2,3), (3,2)\}$$

denklik bağıntılarının **G**-invaryant olmadıkları gösterilebilir. **X** üzerinde R_1, R_2, R_3, R_4 ten başka 3 elemanlı denklik sınıfı bulunan denklik bağıntısı olmadığından **X** in 3 elemanlı ilkel olmayan bloğu yoktur.

3.3.4 Örnek. 3.3.1 Örnekte verilen α_2 temsilini göz önüne alalım.
Her x ∈ **X** elemanı için $\mathrm{x}^{\mathbf{G}} := \{\mathrm{x}^g | g \in \mathbf{G}\}$ yörüngeleri bulalım.

$$1^{\mathbf{G}} = \{1^e, 1^a, 1^b, 1^c\} = \{1,2,3,4\}$$
$$2^{\mathbf{G}} = \{2^e, 2^a, 2^b, 2^c\} = \{2,3,4,1\}$$
$$3^{\mathbf{G}} = \{3^e, 3^a, 3^b, 3^c\} = \{3,4,1,2\}$$
$$4^{\mathbf{G}} = \{4^e, 4^a, 4^b, 4^c\} = \{4,1,2,3\}$$

olduğundan **X** in kendisi bir yorüngedir. Dolayısıyla **G** , **X** üzerinde geçişli bir etkidir. 3.3.2 Örnekteki gibi **G** etkisinin düzenli olduğu kolayca gösterilebilir.

Şimdi $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,1), (2,4), (4,2)\}$ ile verilen R denklik bağıntısının **G**-invaryant olduğunu gösterelim. Bunun için

$$(\mathrm{x}, y) \in R \implies (\mathrm{x}^g, y^g) \in R,\ \forall g \in \mathbf{G},\ \forall\, \mathrm{x}, y\ \in \mathbf{X}$$

şartının sağlandığı gösterilmelidir.

$$\begin{array}{ll}
(1,1) \in R \text{ için } (1^e, 1^e) = (1,1) \in R; & (2,2) \in R \text{ için } (2^e, 2^e) = (2,2) \in R \\
\qquad (1^a, 1^a) = (2,2) \in R & \qquad (2^a, 2^a) = (3,3) \in R \\
\qquad (1^b, 1^b) = (3,3) \in R & \qquad (2^b, 2^b) = (4,4) \in R \\
\qquad (1^c, 1^c) = (4,4) \in R & \qquad (2^c, 2^c) = (1,1) \in R
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(3,3) \in R \text{ için } (3^e, 3^e) = (3,3) \in R\ ; & (4,4) \in R \text{ için } (4^e, 4^e) = (4,4) \in R \\
\qquad (3^a, 3^a) = (4,4) \in R & \qquad (4^a, 4^a) = (1,1) \in R \\
\qquad (3^b, 3^b) = (1,1) \in R & \qquad (4^b, 4^b) = (2,2) \in R \\
\qquad (3^c, 3^c) = (2,2) \in R & \qquad (4^c, 4^c) = (3,3) \in R
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(1,3) \in R \text{ için } (1^e, 3^e) = (1,3) \in R\ ; & (3,1) \in R \text{ için } (3^e, 1^e) = (3,1) \in R \\
\qquad (1^a, 2^a) = (2,4) \in \mathrm{R} & \qquad (3^a, 1^a) = (4,2) \in R \\
\qquad (1^b, 3^b) = (3,1) \in R & \qquad (3^b, 1^b) = (1,3) \in R \\
\qquad (1^c, 3^c) = (4,2) \in R & \qquad (3^c, 1^c) = (2,4) \in R
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(2,4) \in R \text{ için } (2^e, 4^e) = (2,4) \in R\ ; & (4,3) \in R \text{ için } (4^e, 2^e) = (4,2) \in R \\
\qquad (2^a, 4^a) = (3,1) \in R & \qquad (4^a, 2^a) = (1,3) \in R \\
\qquad (3^b, 4^b) = (4,2) \in R & \qquad (4^b, 2^b) = (2,4) \in R \\
\qquad (2^c, 4^c) = (1,3) \in R & \qquad (4^c, 2^c) = (3,1) \in R
\end{array}$$

olduğundan $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,1), (2,4), (4,2)\}$ bağıntısı **G**-invaryanttır. $\Delta_{\mathbf{X}}$ ve $(\mathbf{X} \times \mathbf{X})$ ten farklı bir invaryant denklik bağıntısı olduğundan **G** grubu ilkel değildir.

Şimdi ilkel olmayan 2 elemanlı blokları araştıralım. $|\mathbf{S}| = 2$ olduğundan $|\mathbf{S}| > 1$, $\mathbf{S} \neq \mathbf{X}$ olduğu aşikârdır. Bu durumda $\forall g \in \mathbf{G}$ için $\mathbf{S}^{\mathrm{g}} = \mathbf{S}$ veya $\mathbf{S}^{\mathrm{g}} \cap \mathbf{S} = \emptyset$ olacak biçimdeki kümelerini bulmalıyız.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 = \{1,2\} \text{ için } \mathbf{S}_1^{\mathrm{g}} = \{1^g, 2^g\} \text{ olup}$$
$$\mathbf{S}_1^{\mathrm{e}} = \{1^e, 2^e\} = \{1,2\} = \mathbf{S}_1$$
$$\mathbf{S}_1^{\mathrm{a}} = \{1^a, 2^a\} = \{2,3\} \cap \mathbf{S}_1 \neq \emptyset$$
$$\mathbf{S}_1^{\mathrm{b}} = \{1^b, 2^b\} = \{3,4\} \cap \mathbf{S}_1 = \emptyset$$
$$\mathbf{S}_1^{\mathrm{b}} = \{1^c, 2^c\} = \{4,1\} \cap \mathbf{S}_1 \neq \emptyset$$

olması dolayısıyla, $\mathbf{S}_1 = \{1,2\}$ altkümesi ilkel olmayan bir blok değildir.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_2 = \{1,3\} \text{ için } \mathbf{S}_2^{\mathrm{g}} = \{1^g, 3^g\} \text{ olup}$$
$$\mathbf{S}_2^{\mathrm{e}} = \{1^e, 3^e\} = \{1,3\} = \mathbf{S}_2$$
$$\mathbf{S}_2^{\mathrm{a}} = \{1^a, 3^a\} = \{2,4\} \cap \mathbf{S}_2 = \emptyset$$
$$\mathbf{S}_2^{\mathrm{b}} = \{1^b, 3^b\} = \{3,1\} = \mathbf{S}_2$$
$$\mathbf{S}_2^{\mathrm{c}} = \{1^c, 3^c\} = \{2,4\} \cap \mathbf{S}_2 = \emptyset$$

olması dolayısıyla, $\mathbf{S}_2 = \{1,3\}$ altkümesi ilkel olmayan bir bloktur.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_3 = \{1,4\} \text{ için } \boldsymbol{S}_3^{\mathrm{g}} = \{1^g, 4^g\} \text{ olup}$$
$$\mathbf{S}_3^{\mathrm{e}} = \{1^e, 4^e\} = \{1,4\} = \boldsymbol{S}_3$$
$$\mathbf{S}_3^{\mathrm{a}} = \{1^a, 4^a\} = \{2,1\} \cap \boldsymbol{S}_3 \neq \emptyset$$
$$\mathbf{S}_3^{\mathrm{b}} = \{1^b, 4^b\} = \{3,2\} \cap \boldsymbol{S}_3 = \emptyset$$
$$\mathbf{S}_3^{\mathrm{c}} = \{1^c, 4^c\} = \{\mathbf{4}, \mathbf{3}\} \cap \boldsymbol{S}_3 \neq \emptyset$$

olması dolayısıyla, $\mathbf{S}_3 = \{1,4\}$ altkümesi ilkel olmayan bir blok değildir.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_4 = \{2,3\} \text{ için } \mathbf{S}_4^{\mathrm{g}} = \{2^g, 3^g\} \text{ olup}$$
$$\mathbf{S}_4^{\mathrm{e}} = \{2^e, 3^e\} = \{2,3\} = \mathbf{S}_4$$
$$\mathbf{S}_4^{\mathrm{a}} = \{2^a, 3^a\} = \{3,4\} \cap \mathbf{S}_4 \neq \emptyset$$
$$\mathbf{S}_4^{\mathrm{b}} = \{2^b, 3^b\} = \{4,1\} \cap \mathbf{S}_4 = \emptyset$$
$$\mathbf{S}_4^{\mathrm{c}} = \{2^c, 3^c\} = \{1,2\} \cap \mathbf{S}_4 \neq \emptyset$$

olması dolayısıyla, $\mathbf{S}_4 = \{2,3\}$ ilkel olmayan bir blok değildir.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_5 = \{2,4\}, \mathbf{S}_5^{\mathrm{g}} = \{2^g, 4^g\} \text{ olup}$$
$$\mathbf{S}_5^{\mathrm{e}} = \{2^e, 4^e\} = \{2,4\} = \mathbf{S}_5$$
$$\mathbf{S}_5^{\mathrm{a}} = \{2^a, 4^a\} = \{3,1\} \cap \mathbf{S}_5 = \emptyset$$
$$\mathbf{S}_5^{\mathrm{b}} = \{2^b, 4^b\} = \{4,2\} = \mathbf{S}_5$$
$$\mathbf{S}_5^{\mathrm{c}} = \{2^c, 4^c\} = \{1,3\} \cap \mathbf{S}_5 = \emptyset$$

olması dolayısıyla, $\mathbf{S}_5 = \{2,4\}$ ilkel olmayan bir bloktur.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_6 = \{3,4\}, \mathbf{S}_6^{\mathrm{g}} = \{3^g, 4^g\} \text{ olup}$$
$$\mathbf{S}_6^{\mathrm{e}} = \{3^e, 4^e\} = \{3,4\} = \mathbf{S}_6$$
$$\mathbf{S}_6^{\mathrm{a}} = \{3^a, 4^a\} = \{4,1\} \cap \mathbf{S}_6 \neq \emptyset$$
$$\mathbf{S}_6^{\mathbf{b}} = \{3^b, 4^b\} = \{1,2\} \cap \mathbf{S}_6 = \emptyset$$
$$\mathbf{S}_6^{\mathrm{c}} = \{3^c, 4^c\} = \{2,3\} \cap \mathbf{S}_6 \neq \emptyset$$

olması dolayısıyla, $\mathbf{S}_6 = \{3,4\}$ ilkel olmayan bir blok değildir. 2 elemanlı altkümelerinden sadece $\mathbf{S}_2 = \{1,3\}$ ve $\mathbf{S}_5 = \{2,4\}$ ilkel olmayan bloklardır.

3.3.5. Örnek. **X** $= \{1,2,3\}$ ve **G**$= \{e, a, b\}$ aşağıdaki işlem tablosu ile verilen grup olsun.

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Tablo 3.15. G$=\{e, a, b\}$ için grup işlem tablosu

$|\mathbf{X}| = 3$ olduğundan $|\mathbf{S_X}| = 3! = 6$ olup **X** kümesinin tüm permütasyonları aşağıda verilen 6 permütasyondan ibarettir:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_4 : \mathbf{G} \to \mathbf{S_X}$$
$$e \longmapsto f_1$$
$$a \longmapsto f_4$$
$$b \longmapsto f_5$$

Her x ∈ **X** elemanı için $\mathrm{x}^{\mathbf{G}} := \{\mathrm{x}^g | g \in \mathbf{G}\}$ yörüngelerini bulalım.

$$1^G = \{1^e, 1^a, 1^b\} = \{1,3,2\}$$
$$2^G = \{2^e, 2^a, 2^b\} = \{2,1,3\}$$
$$3^G = \{3^e, 3^a, 3^b\} = \{3,2,1\}$$

olduğundan **X** in kendisi bir yorüngedir. Dolayısıyla **G** , **X** üzerinde geçişli bir etkidir. **X** üzerinde oluşturulabilecek tüm denklik bağıntıları aşağıdaki beş bağıntıdan ibarettir:

$$\{(1,1), (2,2), (3,3)\} = \triangle_{\mathbf{X}}$$
$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$$
$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$$
$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\}$$
$$\{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\} = \mathbf{X} \times \mathbf{X}$$

$\triangle_{\mathbf{X}}$ ve $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ dışında **G**-invaryant denklik bir bağıntısının olmadığı kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla **G** grubu ilkeldir.

Son olarak güvenilir, geçişli fakat düzenli olmayan bir örnek vereceğiz.

3.3.6 Örnek. $\mathbf{X} = \{1,2,3,4\}$ olsun $\mathbf{G} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ grubu aşağıdaki işlem tablosu ile verilsin.

$\cdot$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2	a_5	a_4	a_7	a_6
a_2	a_2	a_6	a_0	a_5	a_7	a_3	a_1	a_4
a_3	a_3	a_7	a_1	a_4	a_6	a_2	a_0	a_5
a_4	a_4	a_5	a_7	a_6	a_0	a_1	a_3	a_2
a_5	a_5	a_4	a_6	a_7	a_1	a_0	a_2	a_3
a_6	a_6	a_2	a_5	a_0	a_3	a_7	a_4	a_1
a_7	a_7	a_3	a_4	a_1	a_2	a_6	a_5	a_0

Tablo 3.16. $\mathbf{G} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ için grup işlem tablosu

$\boldsymbol{S}_{\mathbf{X}}$ simetrik grubu 3.3.1 Örnekte verilen 24 elemandan oluşur.

$$\begin{aligned} \alpha_5 : \mathbf{G} &\to S_{\mathbf{X}} \\ a_0 &\longmapsto f_1 \\ a_1 &\longmapsto f_5 \\ a_2 &\longmapsto f_8 \\ a_3 &\longmapsto f_{10} \\ a_4 &\longmapsto f_{15} \\ a_5 &\longmapsto f_{17} \\ a_6 &\longmapsto f_{19} \\ a_7 &\longmapsto f_{24} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan α_5 fonksiyonu birebirdir ve bu nedenle α_5 güvenilir bir temsildir.

Her $\mathrm{x} \in \mathbf{X}$ elemanı için $\mathrm{x}^{\mathbf{G}} := \{\mathrm{x}^g | g \in \mathbf{G}\}$ yörüngeleri bulalım.

$$1^{\mathbf{G}} = \{1^{a_0}, 1^{a_1}, 1^{a_2}, 1^{a_3}, 1^{a_4}, 1^{a_5}, 1^{a_6}, 1^{a_7}\} = \{1,2,3,4\}$$
$$2^{\mathbf{G}} = \{2^{a_0}, 2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}, 2^{a_5}, 2^{a_6}, 2^{a_7}\} = \{1,2,3,4\}$$
$$3^{\mathbf{G}} = \{3^{a_0}, 3^{a_1}, 3^{a_2}, 3^{a_3}, 3^{a_4}, 3^{a_5}, 3^{a_6}, 3^{a_7}\} = \{1,2,3,4\}$$
$$4^{\mathbf{G}} = \{4^{a_0}, 4^{a_1}, 4^{a_2}, 4^{a_3}, 4^{a_4}, 4^{a_5}, 4^{a_6}, 4^{a_7}\} = \{1,2,3,4\}$$

olduğundan **X** in kendisi bir yorüngedir. Dolayısıyla **G** , **X** üzerinde geçişli bir etkidir.

$\mathbf{X} = \{1,2,3,4\}$ kümesinden alınan her x ve y için $\mathrm{x}^{g} = y$ olacak biçimdeki $g \in \mathbf{G}$ elemanları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

x	**y**	**g**
1	1	a_0
1	1	a_1
1	2	a_2
1	2	a_3
1	3	a_4
1	3	a_5
1	4	a_6
1	4	a_7
2	2	a_0
2	4	a_1
2	1	a_2
2	3	a_3
2	4	a_4
2	2	a_5
2	1	a_6
2	3	a_7
3	3	a_0
3	3	a_1
3	4	a_2
3	4	a_3
3	1	a_4
3	1	a_5
3	2	a_6
3	2	a_7
4	4	a_0
4	2	a_1
4	3	a_2
4	1	a_3
4	2	a_4
4	4	a_5
4	3	a_6
4	1	a_7

Tablo 3.17. $x^g = y$ olacak biçimdeki $g \in$ **G** elemanları

Tablodan görüldüğü gibi **X** ten alınan her x ve y elemanı için $x^g = y$ olacak biçimde bir $g \in$ **G** elemanı vardır. Fakat her $x \in$ **X** ve $y \in$ **X** elemanları için $x^g = y$ olacak biçimde

$g \in \mathbf{G}$ elemanı tek değildir. Örneğin $\mathrm{x} = 1$, $y = 1$ için $1^{a_0} = 1$ ve $1^{a_1} = 1$ olur. Tablodan görüleceği gibi bu örnekte alınan her $\mathrm{x} \in \mathbf{X}$ ve $y \in \mathbf{X}$ için $\mathrm{x}^g = y$ olacak biçimde iki farklı $g \in \mathbf{G}$ elemanı vardır. Bu nedenle **G** etkisi düzenli bir etki değildir.

$\mathbf{X} = \{1,2,3,4\}$ kümesinin tüm 3 elemanlı altkümeleri $\mathbf{A} = \{1,2,3\}$, $\mathrm{B} = \{1,2,4\}$, $\mathbf{C} = \{2,3,4\}$, $\mathbf{D} = \{1,3,4\}$ olur. Bu durumda;

x_1	x_2	g
A	**A**	a_0
A	**B**	a_2
A	**C**	a_6
A	**D**	a_1
B	**A**	a_3
B	**B**	a_0
B	**C**	a_4
B	**D**	a_6
D	**A**	a_4
D	**B**	a_6
D	**C**	a_5
D	**D**	a_0
C	**A**	a_5
C	**B**	a_4
C	**C**	a_0
C	**D**	a_4

Tablo 3.18. Üç elemanlı kümeler üzerinde geçişlilik

tablosu dikkate alındığında **X** in 3 elemanlı her X_1, X_2 altkümesi için $\mathrm{X}_1^{\mathrm{g}} = \mathrm{X}_2$ olacak biçimde bir g ∈**G** elemanı vardır. Bu **G** nin **X** in tüm 3 elemanlı altkümeleri üzerinde geçişli olduğunu yani ***3-homojen*** etki olduğunu gösterir.

$\mathbf{X} = \{1,2,3,4\}$ kümesinin tüm 2 elemanlı altkümereri $\boldsymbol{A} = \{1,2\}$, $\boldsymbol{B} = \{1,3\}$, $\boldsymbol{C} = \{1,4\}$, $\boldsymbol{D} = \{2,3\}$, $\boldsymbol{E} = \{2,4\}$, $\boldsymbol{F} = \{3,4\}$ olur. ***A*** kümesini ***B*** kümesine dönüştüren hiç bir g ∈**G** elemanı olmadığından **G** grubu **X** in hiçbir iki elemanlı altkümeleri üzerinde geçişli değildir. Bu α nın **G** üzerinde ***2- homojen*** etki olmadığını gösterir.

X in her bir elemanının stabilizerini bulalım:

$$\mathbf{G}_y = \{g \in \mathbf{G} |\ y^g = y\}$$
$$\mathbf{G_1} = \{g \in \mathbf{G} |\ 1^g = 1\} = \{a_0, a_1\}$$
$$\mathbf{G}_2 = \{g \in \mathbf{G} |\ 2^g = 2\} = \{a_0, a_5\}$$
$$\mathbf{G}_3 = \{g \in \mathbf{G} |\ 3^g = 3\} = \{a_0, a_1\}$$
$$\mathbf{G}_4 = \{g \in \mathbf{G} |\ 4^g = 4\} = \{a_0, a_5\}$$

G grubun eleman sayısı 8, her bir yörüngenin eleman sayısı 4 ve her $y \in$ A için $\left|\mathbf{G}_y\right| = 2$ olduğundan (3.14) ile verilen

$$|y^g| = \frac{|\mathbf{G}|}{|\mathbf{G}_y|} \Longrightarrow 4 = \frac{8}{2}$$

formülünün sağlandığı görülür.

3.3.7. Örnek. **X** $= \{1,2,3,4\}$ olsun. **G** $= \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ grubu aşağıdaki işlem tablosu ile verilsin.

•	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2	a_5	a_4
a_2	a_2	a_4	a_0	a_5	a_1	a_3
a_3	a_3	a_5	a_1	a_4	a_0	a_2
a_4	a_4	a_2	a_5	a_0	a_3	a_1
a_5	a_5	a_3	a_4	a_1	a_2	a_0

Tablo 3.19. G $= \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ için grup işlem tablosu

Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\alpha_6 : \mathbf{G} &\to S_{\mathbf{X}} \\
a_0 &\longmapsto f_1 \\
a_1 &\longmapsto f_{17} \\
a_2 &\longmapsto f_{22} \\
a_3 &\longmapsto f_{18} \\
a_4 &\longmapsto f_{21} \\
a_5 &\longmapsto f_2
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanan α_5 fonksiyonu birebirdir ve bu nedenle α_5 güvenilir bir temsildir.

Her x ∈ **X** elemanı için $\mathrm{x}^G := \{\mathrm{x}^g | g \in \mathbf{G}\}$ yörüngeleri bulalım.

$$
\begin{aligned}
1^G &= \{1^{a_0}, 1^{a_1}, 1^{a_2}, 1^{a_3}, 1^{a_4}, 1^{a_5}\} = \{1,3,4\} \\
2^G &= \{2^{a_0}, 2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}, 2^{a_5}\} = \{2\} \\
3^G &= \{3^{a_0}, 3^{a_1}, 3^{a_2}, 3^{a_3}, 3^{a_4}, 3^{a_5}\} = \{1,3,4\} \\
4^G &= \{4^{a_0}, 4^{a_1}, 4^{a_2}, 4^{a_3}, 4^{a_4}, 4^{a_5}\} = \{1,3,4\}
\end{aligned}
$$

olduğundan **X** in kendisi bir yörünge olmadığından **G**, **X** üzerinde geçişli bir etki değildir.

X in tüm noktalarının stabilizelerin araştıralım ve (3.14) formülünü uygulayalım.

$\mathbf{G}_1 = \{g \in \mathbf{G} |\ 1^g = 1\} = \{a_0, a_5\}$ için $|1^g| = \frac{|\mathbf{G}|}{|\mathbf{G}_1|} = \frac{6}{2} = 3,$

$\mathbf{G}_2 = \{g \in \mathbf{G} |\ 2^g = 2\} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ için $|2^g| = \frac{|\mathbf{G}|}{|\mathbf{G}_2|} = \frac{6}{6} = 1,$

$\mathbf{G}_3 = \{g \in \mathbf{G} |\ 3^g = 3\} = \{a_0, a_2\}$ için $|3^g| = \frac{|\mathbf{G}|}{|\mathbf{G}_3|} = \frac{6}{2} = 3,$

$\mathbf{G}_4 = \{g \in \mathbf{G} |\ 4^g = 4\} = \{a_0, a_1\}$ için $|4^g| = \frac{|\mathbf{G}|}{|\mathbf{G}_2|} = \frac{6}{2} = 3,$

olduğu görülür.

KAYNAKLAR

Bayraktar. M. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Bursa 1997.

Çelik. B. Soyut Matematik. Bursa, Ekim 2015.

Demirtola. A. Matematiksel Dizayn Teori Üzerinde. Bursa. 58p. 2000.

Havlicek. H. Divisible Designs, Laguerre Geometri, and Beyond, 2004, Brescia, İtaly.

Hughes D. R and Piper. F. C. Design Theory. Cambridge Universitü Press, Cambridge, second edition, 1985

Kaya. R. Projektif Geometri. Ankara 1987.

Jacobson. N. Basıc algebra 1. Freman, Freeman, New York, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Eolita SELMANAJ
Doğum Yeri ve Tarihi	: ARNAVUTLUK/TİRANE, 26/06/1990
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise	:Petro Nini Luarasi, 2004-2008
Lisans	: Tirane Üniversitesi, 2008-2011
Yüksek Lisans	: Bursa Uludağ Üniversitesi, 2014-…
İletişim (e–posta)	: eolita_90@hotmail.com