HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARDAN RİEMANN MANİFOLDLAR ÜZERİNE RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Ayşe BERİ

T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARDAN RİEMANN MANİFOLDLAR ÜZERİNE RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Ayşe BERİ

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2016

TEZ ONAYI

Ayşe BERİ tarafından hazırlanan "HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARDAN RİEMANN MANİFOLDLAR ÜZERİNE RİEMANN SUBMERSİYONLAR" adlı tez çalışması jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Başkan : Prof. Dr. Kadri ARSLAN İmza

Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,

Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN İmza

Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,

Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof.Dr. Ahmet YILDIZ İmza

İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi,

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

20/05/2016

U.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

20/05/2016

Ayşe BERİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARDAN RİEMANNIAN MANİFOLDLAR ÜZERİNE RİEMANNİAN SUBMERSİYONLAR

Ayşe BERİ

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Cengizhan MURATHAN

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmıdır ve bu bölümde konuyla ilgili daha önce yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak temel tanım, teorem ve önermeler yer almaktadır.

Üçüncü bölümde submersiyonlar çalışılmıştır. Submersiyonun ve Riemann submersiyonun tanımları ve örnekleri verilmiştir. Ayrıca Riemann submersiyonlar için temel denklemler tanımlanmış ve bu denklemlerin özellikleri ile teoremleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde hemen hemen değme metrik manifoldlar çalışılmıştır. Hemen hemen değme metrik yapı ve hemen hemen manifoldlar incelenmiştir. Özellikle bu tezde çalışılan Kenmotsu manifoldun tanımı ve örnekleri yer almıştır.

Beşinci bölüm Kenmotsu manifoldlardan Riemann manifoldlara anti-invariant Riemann submersiyonlar tanıtılıp bu submersiyonların özellikleri araştırılmıştır. Bu bölüm tamamen orijinal sonuçlardan oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Riemannian submersiyon, Konformal submersiyon, Katlı Çarpım, Kenmotsu manifold, Anti-invariant submersiyon

2016, vi+44 sayfa

ABSTRACT

MSe Thesis

RIEMANNIAN SUBMERSIONS FROM ALMOST CONTACT MANIFOLDS ONTO RIEMANNIAN MANIFOLDS

Ayşe BERİ

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematic

Supervisor: Cengizhan MURATHAN

This study which is designed as master science thesis covers five chapter sections.

The first section is the introduction section and in this chapter studies about the subject which were done previously were told of.

The second section contains basic definitions, theorems and propositions which will be used in the other sections.

In the third section the submersions were studied. Definitions and examples of submersions and Riemannian submersions were given. Also the basic equations for Riemannian submersions were defined and properties of this equations were given.

In the fourth section, Almost contact metric manifolds were studied. Almost contact metric structure and almost contact manifolds were examined. Especially the definitions and examples of Kenmotsu manifold which is be studied in this thesis take apart.

In the fifth section Anti-invariant Riemannian submersions from Kenmotsu manifolds onto Riemannian manifolds were introduced and the properties of this submersions were given. This section contains completely the original studies.

Key Words: Riemannian submersions, conformal submersions, Warped Product, Kenmotsu Manifolds, Anti-invariant submersions

2016, vi+44 paper

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimin konusunun belirlenmesinde, araştırma aşamasında, yön tayininde ve tamamlanmasında bana destek olan değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN' a bana ayırdığı değerli zamanı ve sağladığı destek için minnettarım.

Tezimin başlangıcından bitimine kadar benden yardımlarını esirgemeyen, bildiklerini paylaşan ve bildiklerimizi paylaşmamızı öğreten Araş. Gör. İrem KÜPELİ ERKEN' e teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca bana ellerindeki her türlü imkanı veren, her koşulda ve her zaman maddi manevi yanımda olan aileme son olarak da her konuda bana sabırla yardımcı olan eşim Erdoğan BERİ'ye desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Ayşe BERİ

20/05/2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
T_pM	p noktasındaki teğet uzay
M	Manifold
g	Metrik tensör
$C^\infty(M,\mathbb{R})$	M den $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
∇	Afin konneksiyon
d	Dış türev operatörü
∂	Kısmi Türev
φ	Tensör alanı
ξ	Vektör alanı
π	Dik izdüşüm
η	1-form
Φ	Temel 2-form
R	M nin Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci tensörü
Q	Ricci operatörü
$[\,,]$	Lie parantez operatörü
$\otimes$	Tensör çarpımı
$\mathcal{D}$	Dağılım

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1.BÖLÜM GİRİŞ

Riemann manifoldlar arasında tanımlanan Riemann submersiyonlar O'Neill (1966) ve Gray (1967) tarafından tanımlanmıştır.

İmmersiyonların aksine Riemann submersiyonlar yüksek boyuttan daha küçük boyuta tanımlanan dönüşümlerdir. Bir manifold üzerinde C^{∞} yapı inşa etmek o kadar kolay değildir. Fakat submersiyonlar en azından $\mathbb{R}^n$ de $n-1$ boyutlu alt manifoldunun kolayca inşaasında yardımcı olur. Örneğin;

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$p \to f(p) = 0$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm ve $\nabla f|_p \neq 0$ olsun. Bu durumda f bir submersiyon olup $f^{-1}(0) = S^2$ fibresi $\mathbb{R}^3$ ün 2-boyutlu bir alt manifoldu olur. Bu alt manifold $\mathbb{R}^3$de bir yüzey olarak karşımıza çıkar (Brickell ve Clark 1970).

Submersiyonlar son 50 yılda oldukça çalışılan bir alandır. Başlıca submersiyon çeşitleri Semi-Riemannian submersiyonlar (Falcitelli ve ark 2004), Lorentzian submersiyonlar (Falcitelli ve ark 2004), Riemannian submersiyonlar (Gray 1967), Slant submersiyonlar (Chen 1990),(Şahin 2011), hemen hemen Hermitian submersiyonlar (Watson 1976), Değme-kompleks submersiyonlar (Ianus ve ark 2011), Quaternionic submersiyonlar (Ianus 2008), hemen hemen h-slant ve h-slant submersiyonlar (Park 2012a), Semi-invariant submersiyonlar(Şahin 2013), h-semi invariant submersiyonlar (Park 2012b) v.b. şeklindedir.

Şahin Hermitian manifoldlardan Riemann manifoldlara Riemann submersiyonları tanımladı (Şahin 2010). Daha sonra hemen hemen değme metrik manifoldlardan Riemann manifoldlara anti-invariant submersiyonların araştırmasını önerdi (Şahin 2012).

Küpeli Erken ve Murathan (2016) Sasakian manifoldlardan Riemann manifoldlara slant Riemannian submersiyonları ve (2014) Kosimplektik manifoldlardan Riemann manifoldlara slant Riemann submersiyonları çalışmışlardır. Ayrıca Küpeli Erken ve

Murathan (2015) Kosimplektik manifoldlardan Riemann manifoldlara anti-invariant submersiyonları çalışmışlardır.

Lee (2012) ile Küpeli Erken ve Murathan (2013) birbirinden bağımsız olarak Sasakian manifoldlardan Riemann manifoldlara anti-invariant submersiyonları çalışmışlardır.

Bu çalışmalar ışığında normal hemen hemen değme manifoldlardan birisi olan Kenmotsu manifoldlardan Riemann manifoldlara anti-invariant submersiyonlar çalışılmıştır.

2.BÖLÜM

2.1.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Riemann manifoldları ile ilgili bazı temel kavramlar verilip, ileriki kısımlarda kullanılacak gösterimler tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1: M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. $C^{\infty}(M, \mathbb{R}) = \{f | f: U \subset M \to \mathbb{R}, f\ türevlenebilir\}$

$$v_p: C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \to v_p(f)$$

dönüşümü her $f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için

i) $v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$; ($\mathbb{R}$ −lineer özelliği)

ii) $v_p(f.g) = v_p(f).g + f.v_p(g)$; (Leibnitz özelliği)

şartlarını sağlıyorsa v_p ye M nin bir $p \in M$ noktasındaki *tanjant vektörü* denir ve $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin cümlesi T_pM ile gösterilir (O’Neill 1983).

Tanım 2.1.2: M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun.

$$\oplus: T_pM \times T_pM \to T_pM$$
$$(v_p, w_p) \to (v_p \oplus w_p): C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \to \left(v_p(f) \oplus w_p(f)\right) = v_p(f) + w_p(f)$$

iç işlemi ve

$$\odot: \mathbb{R} \times T_pM \to T_pM$$
$$(a, v_p) \to (a \odot v_p): C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \to (a \odot v_p)(f) = a.v_p(f)$$

dış işlemi ile birlikte $(T_pM, (\mathbb{R}, +, .), \oplus, \odot)$ bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına M nin $p \in M$ noktasındaki *tanjant uzayı* denir (O’Neill 1983).

Önerme 2.1.3: M ve N diferensiyellenebilir iki manifold ve $p \in M$ olsun.

$$\phi: M \to N$$
$$p \to \phi(p)$$

türevlenebilir bir dönüşüm ve $v_p \in T_pM, f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$v_{p,\phi}: C^\infty(N, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$f \to (v_{p,\phi})(f) = v_p(f \circ \phi)$$

dönüşümü $\mathbb{R}$ −lineer ve Leibnitz özelliklerini sağlar (O'Neill 1983).

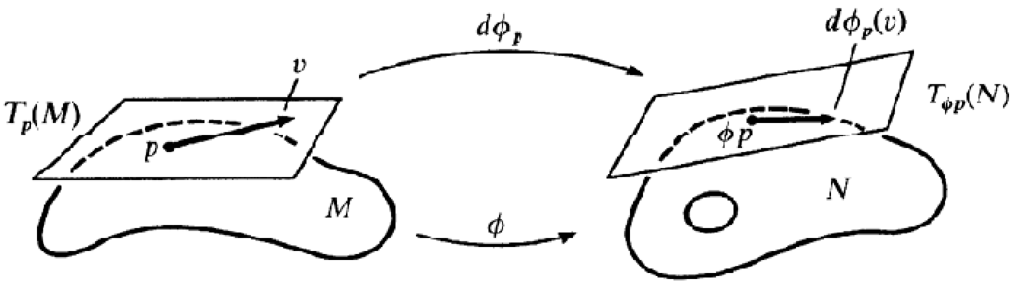
Tanım 2.1.4: M ve N diferensiyellenebilir iki manifold ve $p \in M$ olsun.

$$\phi: M \to N$$
$$p \to \phi(p)$$

türevlenebilir bir dönüşüm olmak üzere

$$d\phi_p: T_pM \to T_{\phi(p)}N$$
$$v_p \to d\phi_p(v_p) = v_{p,\phi}$$

dönüşümüne M nin $p \in M$ noktasındaki *türev dönüşümü* denir (O'Neill 1983).



Şekil 2.1.1

Tanım 2.1.5: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$X: C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$
$$f \to X(f): M \to \mathbb{R}$$
$$p \to X(f)(p) = X_p(f)$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne M nin $p \in M$ noktasındaki bir *vektör alanı* denir. M üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile temsil edilir (O'Neill 1983).

Böylece M üzerindeki bir X vektör alanı, M nin her $p \in M$ noktasını bir tanjant vektöre karşılık tutar.

Tanım 2.1.6: M ve N diferensiyellenebilir iki manifold ve $\phi: M \to N$ bir türevlenebilir dönüşüm olsun. M üzerindeki vektör alanı X ile N üzerindeki vektör alanı Y olmak üzere her $p \in M$ için

$$d\phi\left(X_p\right) = Y_{\phi(p)}$$

oluyorsa X ile Y, $\phi - bağlıdır$ denir (O'Neill 1983).

Yardımcı Teorem 2.1.7: $M, m-$boyutlu ve $N, n-$boyutlu diferensiyellenebilir iki manifold, $\phi: M^m \to N^n$ bir türevlenebilir dönüşüm, M nin $p \in M$ noktasındaki koordinat fonksiyonları $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ ve N nin $\phi(p) \in N$ noktasındaki koordinat fonksiyonları $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ olsun. M nin $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}(p)\right\}$ ve N nin $\phi(p) \in N$ noktasındaki $T_{\phi(p)}M$ tanjant uzayının bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}(\phi(p)), \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}(\phi(p))\right\}$ olmak üzere

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i|_p}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\left(y^j \circ \phi\right)}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}|_{\phi p}, \qquad (1 \le i \le m)$$

dir.

Böylece $d\phi_p$ türev dönüşümünün bu koordinat bazlarına göre matrisi

$$\left(\frac{\partial\left(y^j \circ \phi\right)}{\partial x^i}(p)\right)_{n\times m} \quad , 1 \le i \le m \, , 1 \le j \le n$$

şeklindedir ve bu matrise M nin p noktasındaki *Jakobiyen matrisi* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.8: $\phi: M \to N$ bir türevlenebilir dönüşüm ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı T_pM olsun. Eğer ϕ nin türev dönüşümü $d\phi(T_pM)$ nin boyutu r ise ϕ dönüşümünün rankı r dir denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.9: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, Y) \to \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

fonksiyonu her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $f \in C^\infty(M)$ için

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$
ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$
iii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$
iv) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir *afin konneksiyonu* denir (O'Neill 1983).

Burada $(Xf), f$ fonksiyonunun X vektör alanına göre yöne göre türevidir. Bundan sonra $X(f)$ yerine Xf yazılımı kullanılacaktır.

Tanım 2.1.10: M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifoldlar üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[\,,]: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X, Y) \to [X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

ile tanımlanan dönüşüme X ve Y vektör alanlarının *Lie (parantez) operatörü* denir (O'Neill 1983).

2.2.RİEMANN MANİFOLDLARI

Tanım 2.2.1: M bir diferensiyellenebilir manifold ve manifoldlar üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}M$$

ile tanımlı g dönüşümü 2-lineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani her $X, Y, Z \in \chi(M)$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için

i) $g(aX + bY, Z) = ag(X, Y) + bg(Y, Z)$
   $g(X, aY + bZ) = ag(X, Y) + bg(X, Z)$
ii) $g(X, Y) = g(Y, X)$
iii) $g(X, X) \geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartları sağlanıyorsa g dönüşümüne *Riemann metriği* veya *metrik tensör* adı verilir ve (M, g) ikilisine *Riemann manifoldu* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.2: M n-boyutlu bir manifold ve ∇, M de bir afin konneksiyon olsun. M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$
ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir *Riemann konneksiyonu* denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.3: (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun.

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \to R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \qquad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlı (1,3) tipindeki tensör alanına M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.4: (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve

$X,Y,Z,V,W \in \chi(M)$olsun. O zaman

i) $R(X,Y) = -R(Y,X)$
ii) $g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V)$
iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
iv) $g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$

özellikleri sağlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.5: $(M,g), n$-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları $\chi(M)$ nin bir bazı olmak üzere

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty M$$

$$(X,Y) \to S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i)\ ,\ X,Y\,\chi(M)$$

şeklinde tanımlı (0,2)-tipindeki S tensör alanına, M üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir. Ayrıca Q Ricci operatörü

$$g(QX,Y) = S(X,Y)$$

biçiminde tanımlanır (O'Neill 1983).

$(M_1,g_1),(M_2,g_2)$ Riemann manifoldları ve $M, M_1 \times M_2$ çarpım manifoldu olsunlar. $i = 1,2$ için

$$\pi_i: M \to M_i$$

kanonik izdüşümü göstersin.

Tanım 2.2.6: $f: M_1 \to \mathbb{R}^+$ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Her $X,Y \in \chi(M)$ için M üzerinde

$$g(X,Y) = g_1((\pi_1)_*X,(\pi_1)_*Y) + (f \circ \pi_1)^2 g_2((\pi_2)_*X,(\pi_2)_*Y)$$

Şeklinde tanımlı g Riemann metriği ile belli (M,g) ikilisine $(M_1,g_1),(M_2,g_2)$ nin *katlı çarpımı (warped product)* denir, $M_1 \times_f M_2$ şeklinde gösterilir. f fonksiyonu *katlama* *(warping) fonksiyonu* olarak adlandırılır ve g ye M nin *katlı metriği* denir (O'Neill 1983).

Örnek 2.2.7: $M_0, \dots, M_k$ nın çok iyi bilinen Riemann çarpımı $M_0, \dots, M_k$ nın bir katlı çarpımıdır. Burada $p_0, \dots, p_k$ katlama fonksiyonları sabit ve bir değerlidir.

Örnek 2.2.8: $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ ın nir katlı temsili:

$\mathbb{R}^3 - \{0\}$ da $\{r, \theta, \varphi\}$ küresel koordinat sistemini göz önüne alalım. Bu halde ds^2 metrik tensörü için,

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$

dir. $r = 1$ için S^2 birim küresi üzerindeki metrik elde edilir. Böylece $\mathbb{R}^3 - \{0\}$;

$$p_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$t \to p_1(t) = t$$

$(\mathbb{R}^+, g)$ ve $(S^2, ds^2|_{r=1})$ olmak üzere $\mathbb{R}^+ \times_{p_1} S^2$ katlı çarpımdır.

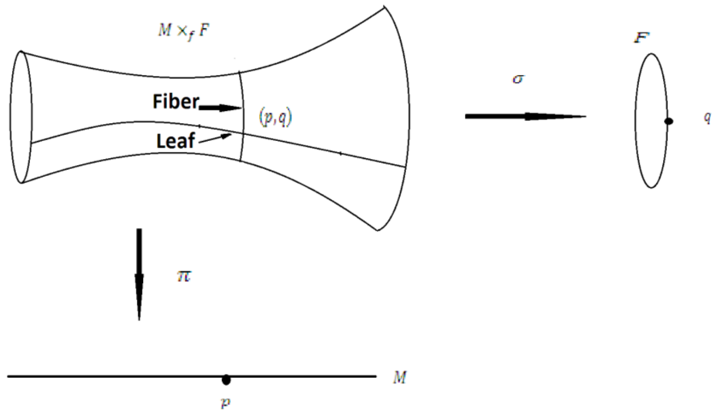
Tanım 2.2.9: $(M, g_m), (N, g_n)$ iki Riemann manifold ve bunların katlı çarpımı

$B = M \times_p F$ olsun. M ye B nin *baz manifodu* ve F ye B nin *fiber manifoldu* denir (O'Neill 1983).

$$\pi_0 : B \to M, \pi_1 : B \to F$$

kanonik izdüşümlerini gözönüne alalım. Riemann çarpım durumunda

${\pi^{-1}}_0(p) = \{p\} \times F$; (veya kısaca $p \times F$) ya B nin *fiberi*, ${\pi^{-1}}_1(q) = M \times \{q\}$ (veya kısaca $M \times q$) ya da B nin *yaprakları* denir. Yaprakların teğet vektör alanları yatay alanlar, fibere teğet olan vektör alanları da düşey alanlar olarak adlandırılır (O'Neill 1983).



Şekil 2.2.1

Tanım 2.2.10: (M^m, g_M) ve (N^n, g_N) Riemann manifoldları ve $\pi: (M, g_M) \to (N, g_N)$ bir diferensiyellenebilir submersiyon olsun. Her $X, Y \in \chi((Çekd\pi_*)^{\perp})$ için

$$\lambda^2 g_M(X, Y) = g_N(d\pi_*(X), d\pi_*(Y))$$

olacak şekilde bir pozitif λ fonksiyonu varsa π submersiyonuna *yatay konformal submersiyon* denir (Baird ve Wood 2003).

$\lambda = 1$ seçildiğinde yatay konformal submersiyonunun Riemann submersiyon olduğu açıktır.

Önerme 2.2.11: $M = M_1 \times_f M_2,\ M_1$ üzerindeki f katlama (warping) fonksiyonu ile bir katlı Riemann çarpım manifoldu ayrıca $\mathcal{L}(M_1)$ ve $\mathcal{L}(M_2)$ sırasıyla M_1 ve M_2 de $M_1 \times_f M_2$ ye vektör alanlarının liftlerinin kümeleri olsun. Eğer $X_1, Y_1 \in \mathcal{L}(M_1)$ ve $X_2, Y_2 \in \mathcal{L}(M_2)$ ise o zaman ∇^1 ve ∇^2 sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde Riemann konneksiyonları olmak üzere

i) $\nabla_{X_1} Y_1$, $\nabla^1_{X_1} Y_1$ nin liftidir,

ii) $\nabla_{X_1} X_2 = \nabla_{X_2} X_1 = (X_1 f / f) X_2$,

iii) nor$\nabla_{X_2} Y_2 = -(g(X_2, Y_2)/f) gradf$,

iv) $tan\nabla_{X_2} Y_2 \in \mathcal{L}(M_2)$, $\nabla^2_{X_2} Y_2$ nin liftidir (O'Neill 1983).

3.BÖLÜM

3.1.SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde Riemann submersiyonları ve özellikleri tanıtılacaktır.

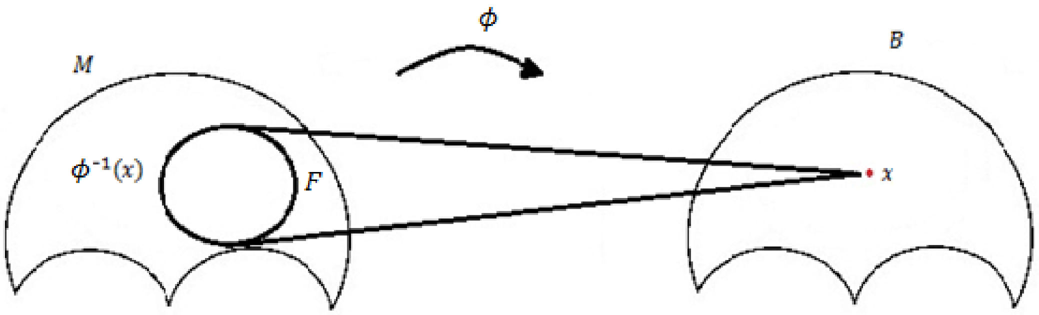
Tanım 3.1.1: M ve B diferensiyellenebilir iki manifold ve $\phi: M \to B$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $rank\, \phi = boy\, B$ ise ϕ ye bir *submersiyon (sığdırma)* denir (Brickell ve Clark 1970).

Örnek 3.1.2: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \to f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

olsun. Bu durumda $rankf = 1 = boy\, \mathbb{R}$ dir. $S = f^{-1}(0)$ bir 2 −boyutlu manifolddur. Bu manifold $\mathbb{R}^3$ de orjin merkezli birim küredir.

Tanım 3.1.3: M ve B diferensiyellenebilir iki manifold ve $\phi: M \to B$ bir dönüşüm olsun. $x \in B$ olmak üzere $\phi^{-1}(x) = \{p \in M |\ \phi(p) = x\}$ cümlesine ϕ nin bir *lifi(fibre)* denir (Brickell ve Clark 1970).



Şekil 3.1.1

Tanım 3.1.4: $\psi: M' \to M$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $rank\, \psi = boy\, M'$ ise ψ ye bir *immersiyon* denir (Brickell ve Clark 1970).

Örnek 3.1.5: $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$s \to \alpha(s) = (\sin 2s\, , \sin s)$$

bir immersiyondur (Brickell ve Clark 1970).

Bu fonksiyonun grafiği $\mathbb{R}^2$ de sekiz eğrisidir.

Önerme 3.1.6:(M, g) ve (B, g') sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve $\phi: M \to B$ bir submersiyon olsun. O zaman M nin her lifi $m - n$ boyutlu regüler alt manifoldudur (Brickell ve Clark 1970).

Tanım 3.1.7: M^n bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p \in M^n$ noktası için T_pM^n nin $r-$boyutlu altuzayı $(r \leq n)$ ve $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p | \, p \in M^n\}$ olmak üzere p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞ sınıfından lineer bağımsız $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ vektör alanları U nun her $q \in M^n$ noktasında hala $\mathcal{D}_p$ nin bir bazı oluyorsa $\mathcal{D}$ ye M^n üzerinde bir r *−boyutlu dağılım(distribüsyon)* ve $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ cümlesine U üzerinde $\mathcal{D}$ için bir *lokal baz* denir (Sharpe 1997).

Tanım 3.1.8: M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r −boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. M^n nin bir koordinat sistemi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ cümlesi $\mathcal{D}$ dağılımı için bir baz oluşturuyorsa x koordinat sistemine $\mathcal{D}$ dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan $\mathcal{D}$ dağılımı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa $\mathcal{D}$ *dağılımına integrallenebilirdir* denir (Sharpe 1997).

Tanım 3.1.9: M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r −boyutlu altmanifoldu N ve M^n nin bir r −boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. Her $p \in N$ için $\mathcal{D}_p = T_pN$ ise N ve M^n nin r *−boyutlu integral altmanifoldu* denir (Sharpe 1997).

Teorem 3.1.10: (Frobenius teoremi) M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r −boyutlu dağılımı $\mathcal{D}$ olsun. $\mathcal{D}$ dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \mathcal{D}$ için $[X, Y] \in \mathcal{D}$ olmasıdır (Sharpe 1997).

3.2.RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Teorem 3.2.1: (M, g) ve (N, g') sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold, $\phi: M \to B\ , p \to \phi(p)$ bir submersiyon ve $p \in M$ noktasındaki türev dönüşümünün çekirdek uzayı $\mathcal{V}_p = Çek(d\phi)(p)$ olsun. Bu durumda $\phi(p) = x$, $x \in B$ için $\phi^{-1}(x)$ in p noktasındaki tanjant uzayı $\mathcal{V}_p$ ile çakışır (Falcitelli ve ark. 2004).

İspat: $T_p\phi^{-1}(x)$ de bir v vektörü ve

$$c(0) = p, \quad c'(0) = v$$

olacak şekilde

$$c: [0,1] \to \phi^{-1}(x)$$

eğrisi seçilebilir, bu durumda $(\phi \circ c)(t) = x$, $\quad t \in [0,1]$ için

$$d\phi\big(c'(0)\big) = d(\phi \circ c)\frac{d}{dt} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$v = c'(0) \in \mathcal{V}_p$$

dır. O halde $T_{\boldsymbol{p}}\phi^{-1}(x)$, $\mathcal{V}_p$ nin $r = (m - n)$ −boyutlu altuzayı olur. Boyutların eşitliğinden

$$\mathcal{V}_p = T_{\boldsymbol{p}}\phi^{-1}(x)$$

olur.

Böylece $p \in M$ noktasındaki M Riemann manifoldunun tanjant uzayı

$$T_pM = \mathcal{V}_p \oplus \mathcal{V}_p^{\perp}$$

ortogonal ayrışımına sahiptir.

Bundan sonra $\mathcal{V}_p$ uzayı $p \in M$ noktasındaki dikey uzay olarak adlandırılacaktır.

Böylece her $p \in M$ noktasını, T_pM nin bir $m-n-$boyutlu alt uzayına taşıyan $m-n-$boyutlu $\mathcal{V}$ distribüsyonu tanımlanabilir. Böylece aşağıdaki tanıma ulaşılır.

Tanım 3.2.2: $\phi: M \to B$ submersiyonunun $p \in M$ için (M, g) deki $\mathcal{V}$ integrallenebilir distribüsyonuna

$$\mathcal{V}_p = çek(d\phi)$$

ile tanımlanır ve $\mathcal{V}_p$ ye submersiyonun *dikey distribüsyonu* denir.

$$\mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_p)^{\perp}$$

ile tanımlanan distribüsyona ise submersiyonun *yatay distribüsyonu* denir (Falcitelli ve ark. 2004).

M üzerindeki bir X vektör alanı yatay distribüsyona ait ise yatay vektör alanı olarak adlandırılır ve $\chi^h(M)$ şeklinde gösterilir.

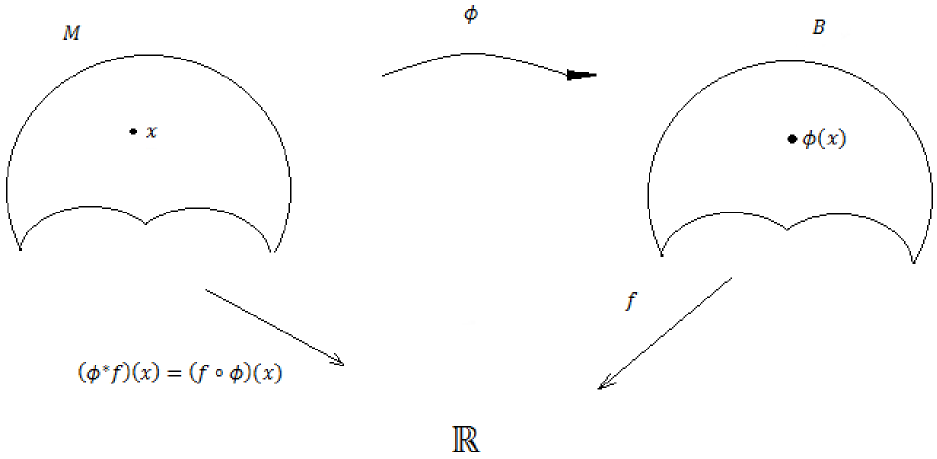
M üzerindeki bir X vektör alanı dikey distribüsyona ait ise dikey vektör alanı olarak adlandırılır ve $\chi^v(M)$ şeklinde gösterilir.

Böylece herhangi bir $E \in \chi(M)$ vektör alanı için E'nin dikey ve yatay birleşenleri sırasıyla vE ve hE ile gösterilir.

Tanım 3.2.3: M ve B diferensiyellenebilir iki manifoldu $\phi: M \longrightarrow B$, M ile B arasında diferensiyellenebilir bir dönüşüm ve $f: B \longrightarrow \mathbb{R}$, B üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman M üzerinde $x \in M$ olmak üzere

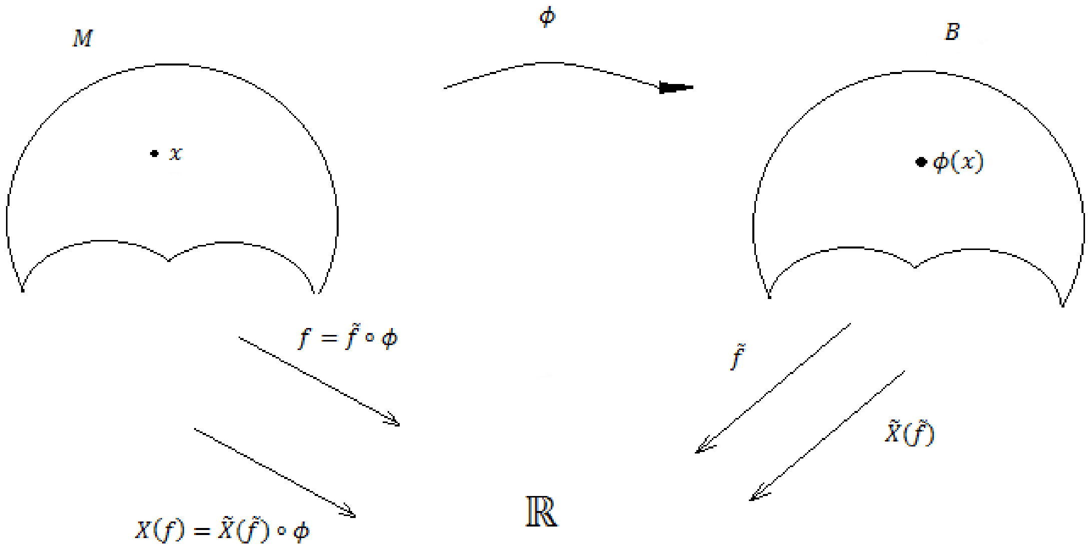
$$(\phi^* f)(x) = f(\phi(x))$$

ile tanımlanan diferensiyellenebilir dönüşüme f nin ϕ ye göre *geri dönüşüm (pullback, geri çekim)* denir (O'Neill 1983).



Şekil 3.2.1

Tanım 3.2.4: $\pi: M \longrightarrow B$ bir submersiyon olsun. Eğer her $\tilde{f} \in C^{\infty}(B)$ için $X\big(\phi(\tilde{f})\big) = \phi\left(\tilde{X}(\tilde{f})\right)$ olacak şekilde bir $\tilde{X} \in \chi(B)$ vektör alanı var ise $X \in \chi(M)$ vektör alanına *izdüşürelebilirdir* denir (Mnev 2012).



Şekil 3.2.2

Örnek 3.2.5: $\pi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longrightarrow x$

dönüşümünün Jakobiyen matrisi

$$d\pi = [1 \quad 0]$$

dır.

Böylece,

$$X = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \in \chi(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2$$

vektör alanı için,

$$d\pi(X_p) = f(x,y)|_p \, d\pi\left(\frac{\partial}{\partial x}|_p\right) + g(x,y)|_p d\pi\left(\frac{\partial}{\partial y}|_p\right)$$

$$= f(x,y)|_p \frac{\partial}{\partial x} \in \mathbb{R}$$

dir. O halde $X \in \chi(\mathbb{R}^2\,)$ nin izdüşürülebilir olması için $f(x,y) = f(x)$ şeklinde olmalıdır. Böylece

$$X = f(x)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

vektör alanı $\mathbb{R}^2$ de izdüşürülebilirdir.

Örnek 3.2.6: $F: M = \mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow B = (0,\infty) = \mathbb{R}^+$

$$(x,y) \longrightarrow F(x,y) = x^2 + y^2$$

F nin Jakobiyen matrisi

$dF = [2x \quad 2y]$

$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \in \chi(M\,)$ vektör alanını göz önüne alalım.

$$dF(X) = [2x \quad 2y]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= [2x^2 + 2y^2] = [2(x^2 + y^2)]$$

$dF(X) = 2(x^2 + y^2)\frac{\partial}{\partial x} \qquad ((x^2 + y^2) > 0)$

Böylece

X, $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ de izdüşürülebilir bir vektör alanıdır.

Eğer $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ olursa

$$F_*(Y) = [2x \quad 2y] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [2y] = 2y \frac{\partial}{\partial y}$$

olur ki bu da $y \in \mathbb{R}^+$ ile çelişir bu nedenle $Y, \mathbb{R}^2 - \{0\}$ üzerinde izdüşürülebilir bir vektör alanı değildir.

$\pi: M \longrightarrow B$ bir submersiyon olsun. M üzerinde izdüşürülebilir (projectable) vektör alanlarının uzayı $\chi^c(M)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.7: M ve B Riemann manifoldları olsun. $\phi: M \longrightarrow B$ bir submersiyon olsun. Eğer X yatay vektör alanı, B üzerindeki X' vektör alanına $\phi - bağlı$ ise X vektör alanına *temel (basic) vektör alanı* denir (Falcitelli ve ark. 2004).

Temel vektör alanlarının uzayı $\chi^b = \chi^c \cap \chi^h$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.8: (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları olsun.

$\phi: (M, g) \longrightarrow (B, g')$ submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa ϕ'ye bir *Riemann submersiyonu* denir.

S1) ϕ dönüşümü maksimal ranka sahiptir. $(rank\ (d\phi) = boy\ B)$

S2) $\forall\ p \in M$ noktasında $(d\phi)_p$ dönüşümü yatay vektörlerin uzunluğunu korur. Yani

$$g_p(u, v) = g'\big((d\phi)_p u, (d\phi)_p v\big) \ \ ; \ \ \forall u, v \in \mathcal{H}_p, p \in M$$

(O'Neill 1966).

Not 3.2.9: S2 aksiyomunun anlamı, bir $p \in M$ noktasında $d\phi$ türev dönüşümünün $\mathcal{H}_p$ yatay uzayında bir $T_{\phi(p)}B$ üzerinde bir lineer izometri olduğunu gösterir.

Örnek 3.2.10: $\phi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (\frac{x_1+x_3}{\sqrt{2}}, \frac{x_2+x_4}{\sqrt{2}})$ dönüşümü verilsin.

$$d\phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Longrightarrow \ rank\ d\phi = 2 = boy\ \mathbb{R}^2$$

$\Longrightarrow \phi$ bir submersiyondur ve maksimal ranka sahiptir

Böylece S1 sağlanır.

$$çek\ d\phi = \mathcal{V} = \mathcal{S}_p\{\mathcal{V}_1(-1,0,1,0), \mathcal{V}_2(0,-1,0,1)\};\ \ d\phi(\mathcal{V}_1) = 0\ , d\phi(\mathcal{V}_2) = 0$$

$\mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{H} = \mathcal{S}_p\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})\right\}$

$d\phi(x_1) = (1,0),\ d\phi(x_2) = (0,1)$

$g_{\mathcal{H}}(x_1, x_1) = 1\ \ ,\qquad g_{\mathbb{R}^2}\big((1,0),(1,0)\big) = 1$

$g_{\mathcal{H}}(x_1, x_2) = 0\ \ ,\qquad g_{\mathbb{R}^2}\big((1,0),(0,1)\big) = 0$

$g_{\mathcal{H}}(x_2, x_2) = 1\ \ ,\qquad g_{\mathbb{R}^2}\big((0,1),(0,1)\big) = 1$

Böylece S2 sağlanır.

O halde ϕ bir Riemann submersiyonudur.

Örnek 3.2.11: (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları olsun. Bu durumda $M \times B$ çarpım manifoldu ve

$\phi_1 : M \times B \longrightarrow M$

$\phi_2 : M \times B \longrightarrow B$ izdüşüm fonksiyonları olsun.

$X, Y \in \chi(M \times B)$ için

$$g_{(M\times B)}(X, Y) = g\left(\phi_{1_*}(X), \phi_{1_*}(Y)\right) + g^{'}\left(\phi_{2_*}(X), \phi_{2_*}(Y)\right)$$

şeklinde tanımlı dönüşüm $M \times B$ üzerinde bir iç çarpım tanımlar.

Bu durumda $\phi_1 : (M \times B, g_{M\times B}) \longrightarrow (M, g)$

$$(x, y) \longrightarrow x$$

$$\phi_2 : (M \times B, g_{M\times B}) \longrightarrow (B, g^{'})$$

$$(x, y) \longrightarrow y$$

birer Riemann submersiyonudur.

$X^{'} \in \chi(B)$ temel vektör alanı, X'e $\phi - bağlı$ ise bu temel vektör alanına $X^{'}$ nün yatay lifti denir.

Önerme 3.2.12: (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları, $\phi: (M, g) \longrightarrow (B, g^{'})$ submersiyonu, ∇ ve $\nabla^{'}$ sırasıyla $M\, ve\, B$'nin Levi-civita konneksiyonları olsun. M üzerindeki X, Y temel vektör alanları $X^{'}, Y^{'}$ vektör alanlarına $\phi - bağl$□ olsun. Bu durumda

i) $g(X, Y) = g'(X', Y') \circ \phi$,

ii) $h[X, Y]$ temel vektör alanı $[X', Y']$ vektör alanına $\phi - bağlı$dır,

iii) $h(\nabla_X Y)$ temel vektör alanı $\nabla'_{X'} Y'$ 'ye $\phi - bağlı$dır,

iv) Herhangi bir $V \in \chi^V(M)$ için $[X, V]$ dikey vektör alanıdır

(Falcitelli ve ark. 2004).

3.3.RİEMANN SUBMERSİYONLARI İÇİN TEMEL DENKLEMLER

Bilindiği üzere Riemann alt manifoldlarda Gauss ve Weingarten denklemleri önemli yer tutar. Riemann submersiyonlarda bu rolü ise O'Neill temel tensörleri olarak tanıtılan aşağıdaki tensör alanları alacaktır.

Tanım 3.3.1: (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları ve ∇, M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun.

Bu durumda T *tensör alanı* her $E,F \in \chi(M)$ için

$$T: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(E,F) \to T(E,F) = T_E F = h(\nabla_{vE} vF) + v(\nabla_{vE} hF) \tag{3.3.1}$$

ile tanımlanır (O'Neill 1966).

T nin tanımı yardımıyla aşağıdaki özellikler kolayca görülebilir.

i) $E \in \chi(M)$ için T_E anti-simetrik bir lineer operatördür.
$$g(T_E F, G) + g(T_E G, F) = 0, \ (\nabla g = 0) \tag{3.3.2}$$
ii) $T_E = T_{vE}$
iii) $E \in \chi(M)$ için T_E'yi yatay ve dikey alt uzayların rollerini değiştirir.
iv) $\forall \ V, W \in \chi^v(M)$ için $T_V W = T_W V$ (O'Neill 1966).

Diğer bir O'Neill tensör alanı olan A ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.3.2: (M,g) ve $(B,g^{'})$ Riemann manifoldları ve ∇, M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun.

$$A: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(E,F) \to A(E,F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF \tag{3.3.3}$$

ile tanımlanır (O'Neill 1966).

A nın tanımı kullanılarak aşağıdaki özellikler kolayca elde edilebilir.

i) $E \in \chi(M)$ için A_E anti simetrik bir lineer operatördür.
$$g(A_E F, G) + g(A_E G, F) = 0 \tag{3.3.4}$$

ii) $E \in \chi(M)$ için A_E yatay ve dikey alt uzayların rollerini değiştirir.

iii) A yatay tensör alanıdır, yani $E \in \chi(M)$ için $A_E = A_h E$ dir.

iv) A yatay tensör alanı alterneyendir. Yani $X, Y \in \chi^b(M)$ için $A_X Y = -A_Y X$ dir

(O'Neill 1966).

Önerme 3.3.4: $X, Y \in \chi^h(M) \Longrightarrow A_X Y = \frac{1}{2} v[X, Y]$ dir (3.3.5)

(O'Neill 1966).

Yardımcı Teorem 3.3.5: (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve $\phi: (M, g) \longrightarrow (B, g^{'})$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere $X, Y \in \chi^h(M)$ ve $V, W \in \chi^v(M)$ için

i) $\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W,$ (3.3.6)

ii) $\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X,$ (3.3.7)

iii) $\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V,$ (3.3.8)

iv) $\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y$ (3.3.9)

sağlanır. Burada $\hat{\nabla}_V W = v\nabla_V W$ dir. Ayrıca X temel vektör alanı ise $[X, Y]$ dikey vektör alanı olduğundan

$$h\nabla_V X = h\nabla_X V = A_X V$$

dir (O'Neill 1966).

Teorem 3.3.6: $\phi: (M, g) \longrightarrow (B, g^{'})$ bir Riemann submersiyonu ve (M, g) üzerindeki yatay distribüsyon $\mathcal{H}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır (O'Neill 1966).

Tanım 3.3.7: (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve $\phi: (M, g) \longrightarrow (B, g^{'})$ bir Riemann submersiyonu olsun. (M, g) manifoldunun dikey distribüsyonu $\mathcal{V}$, yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ üzerine olan projeksiyonları v ve h olmak üzere

$$\overline{\nabla}_E F = v(\nabla_E vF) + h(\nabla_E hF) \quad , \qquad E, F \in \chi(M)$$

ile tanımlı konneksiyona *Schouten konneksiyonu* denir (O'Neill 1966).

Yardımcı Teorem 3.3.8: (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve $\phi: (M, g) \longrightarrow (B, g^{'})$ bir Riemann submersiyonu olsun.

Bu durumda her $E, F \in \chi(M)$ için

$$\nabla_E F = \overline{\nabla}_E F + T_E F + A_E F \text{ dir.}$$

Önerme 3.3.9: (M^m, g) ve $(B^n, g^{'})$ Riemann manifoldları ve $\phi: (M^m, g) \longrightarrow (B^n, g^{'})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $x \in B$ için $B^{-1}(x)$ lifi üzerinde $\overline{\nabla}$ Schouten konneksiyonu, g metrik tensöründen indirgenen metrik tarafından belirlenen Levi-civita konneksiyonu ile çakışır (Falcitelli ve ark. 2004).

Tanım 3.3.10: (M, g) ve (B, g') Riemann manifoldları ve $\phi: (M, g) \longrightarrow (B, g')$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda eğer T tensör alanı sıfır ise ϕ nin herhangi bir lifine M nin *total geodezik altmanifoldu* denir.

Tanım 3.3.11: (M, g) bir Riemann manifoldu ve $E, F, H \in \chi(M)$ olsun.

$(A(E, F) = A_E F)$

$$(\nabla_E A)_F H = (\nabla_E A)(F, H) = \nabla_E A(F, H) - A(\nabla_E F, H) - A(F, \nabla_E H)$$

$$= \nabla_E A_F H - A_{\nabla_E F} H - A_F \nabla_E H$$

$$(\nabla_E T)_F H = (\nabla_E T)(F, H) = \nabla_E T(F, H) - T(\nabla_E F, H) - T(F, \nabla_E H)$$

$$= \nabla_E T_F H - T_{\nabla_E F} H - T_F \nabla_E H$$ dir (Falcitelli ve ark. 2004).

Yardımcı Teorem 3.3.12: (M, g) ve $(B, g^{'})$ Riemann manifoldları ve $\phi: (M, g) \longrightarrow (B, g^{'})$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi^h(M)$ ve $V, W \in \chi^v(M)$ için

i) $(\nabla_V A)_W = -A_{T_V W}$,
ii) $(\nabla_X T)_Y = -T_{A_X Y}$s,
iii) $(\nabla_X A)_W = -A_{A_X W}$,
iv) $(\nabla_V T)_Y = -T_{T_V Y}$ dir (Falcitelli ve ark. 2004).

Teorem 3.3.13: (M,g) ve (B,g') Riemann manifoldları ve $\phi:(M,g)\longrightarrow(B,g')$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $E\in\chi(M), X,Y\in\chi^h(M)$ ve $U,V,W\in\chi^v(M)$ için

i) $g((\nabla_U A)_V,W)=g(T_U V,A_X W)-g(T_U W,A_X V)$,
ii) $g((\nabla_E T)_V W,X)=g((\nabla_E T)_W V,X)$; ∇T $simetrik$,
iii) $g((\nabla_E A)_X Y,V)=-g((\nabla_E A)_Y X,V)$; ∇A $antisimetrik$ dir (Falcitelli ve ark. 2004).

Yardımcı Teorem 3.3.14: (M,g) ve (B,g') Riemann manifoldları ve $\phi:(M,g)\longrightarrow(B,g')$ bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $X,Y,Z\in\chi^h(M)$, $V\in\chi^v(M)$ ve σ,devir toplam fonksiyonu (cycle) olmak üzere

$\sigma g((\nabla_Z A)_X Y,V=\sigma g(A_X Y,T_V Z)$ dir (Falcitelli ve ark. 2004).

Önerme 3.3.15: (M,g) ve (B,g') Riemann manifoldları ve $\phi:(M,g)\longrightarrow(B,g')$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere

i) $\nabla A=0$ ise $A=0$,
ii) $\nabla T=0$ ise $T=0$ dir (Falcitelli ve ark. 2004).

Tanım 3.3.16: (M,g_m) ve (N,g_n) iki Riemann manifoldu ve $\phi:M\longrightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. O zaman ϕ nin diferensiyeli ϕ_*, $p\in M$ ve $\phi^{-1}TN,(\phi^{-1}TN)_p=T_{\phi(p)}N$ fiberlerine sahip pullback demeti olmak üzere $Hom(TM,\phi^{-1}TN)\longrightarrow M$ demetinin bir kesiti olarak gösterilebilir. $Hom(TM,\phi^{-1}TN)\longrightarrow M$, Levi-civita konneksiyonu ∇^m den indirgenen bir ∇ konneksiyonuna ve pullback konneksiyonuna sahiptir. Bu durumda ikinci temel form ϕ $X,Y\in\chi(TM)$ için ∇^ϕ pullback konneksiyonu olmak üzere

$$(\nabla\phi_*)(X,Y)=\nabla_X^\phi\phi_*(Y)-\phi_*(\nabla_X^M Y) \qquad (3.3.10)$$

ile tanımlanır (Baird and Wood 2003).

4.BÖLÜM

4.1. HEMEN HEMEN DEĞME METRİK MANİFOLDLARI

Tanım 4.1.1: M, $(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve φ, (1,1)-tipinden bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı, η M üzerinde bir diferensiyel $1-$form olsun. Eğer her $X \in \chi(M)$ ve φ, ξ, η için

$$\eta(\xi) = 1 \text{ ve } \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{4.1.1}$$

şartları sağlanıyor ise (φ, ξ, η) üçlüsüne bir *hemen hemen değme yapı*, (M, φ, ξ, η) dörtlüsüne de bir *hemen hemen değme manifoldu* adı verilir (Blair 2002).

(φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısında ξ vektör alanına özel olarak karakteristik vektör alanı denir.

Önerme 4.1.2: (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için

$$\varphi(\xi) = 0, \qquad \eta(\varphi X) = 0, \qquad rank\varphi = 2n$$

dir (Blair 2002).

Önerme 4.1.3: Her hemen hemen değme metrik manifoldu M ve her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\eta(X) = g(X, \xi),$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{4.1.2}$$

olacak şekilde bir tek g Riemann metriği vardır (Blair 2002).

Örnek 4.1.4: M, 3-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Her (x, y, z) noktası komşuluğunda

$$\eta = coszdx + sinzdy$$

diferensiyel 1-formu ve

$$\xi = cosz\frac{\partial}{\partial x} + sinz\frac{\partial}{\partial y}$$

ξ vektör alanı verilsin. Buradan

$$d\eta = sinzdx \wedge dz + coszdz \wedge dy$$

olup 1-formun dış türevi yardımıyla

$$d\eta(X, \xi) = 0$$

ve

$$\eta(\xi) = 1$$

bulunur.

Tanım 4.1.5: M nin (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı normaldir ancak ve ancak

$$N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

dır burada N_{φ}, φ yardımıyla belirlenmiş Nijenhuis tensör alanıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 4.1.6: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlanan

$$\Phi: \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

2-formuna M nin *temel* 2-*formu* denir (Yano ve Kon 1984).

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifoldunun temel 2-formu Φ

$$\eta \wedge (\Phi)^n \neq 0$$

özelliğini sağlar. Bunun geometrik anlamı bir hemen hemen değme metrik manifoldunun yönlendirilebilir olmasıdır.

Önerme 4.1.2 ve Tanım 4.1.1 yardımıyla aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.7: $(2n + 1)$-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu verilmiş olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \tag{4.1.4}$$

dir. Bu da φ nin g ye göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir (Yano ve Kon 1984).

i) Eğer $d\Phi = 0, d\eta = 0$ ise hemen hemen değme metrik yapıya hemen hemen kosimplektik yapı denir,
ii) Eğer hemen hemen kosimplektik yapı normal ise yapı kosimplektik yapı olarak adlandırılır,
iii) $d\eta = 0,\ d\Phi = \frac{2}{3}\eta \wedge \Phi$ ise hemen hemen yapıya hemen hemen değme Kenmotsu yapı denir,
iv) Hemen hemen değme Kenmotsu yapı normal ise yapı Kenmotsu yapı olarak adlandırılır,
v) $\Phi = d\eta$ ise hemen hemen yapı değme yapı olarak adlandırılır,
vi) Değme yapı normal ise bu yapı Sasakian olarak adlandırılır (Chinea ve Gonzalez 1990).

Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.1.8: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifold olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için,

i) M Sasakian $\Leftrightarrow (\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X,$ (4.1.5)
ii) M kosimplektik$\Leftrightarrow \nabla\varphi = 0,$ (4.1.6)
iii) M Kenmotsu $\Leftrightarrow (\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X$ (4.1.7)

(Chinea ve Gonzalez 1990).

Sonuç 4.1.9: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifold ve her $X, Y \in \chi(M)$ için

i) M Sasakian $\Leftrightarrow \nabla_X \xi = -\varphi X,$
ii) M kosimplektik $\Leftrightarrow \nabla_X \xi = 0,$
iii) M Kenmotsu $\Leftrightarrow \nabla_X \xi = -\varphi^2 X$ (Chinea ve Gonzalez 1990).

Örnek 4.1.10: $\mathbb{R}^5$ te kartezyen koordinatlar $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ile ve Riemann metriği g, $\tau = \sin(x_1 + x_3)$ olmak üzere

$$g=\begin{pmatrix}1+\tau^2 & 0 & \tau^2 & 0 & -\tau\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \tau^2 & 0 & 1+\tau^2 & 0 & -\tau\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -\tau & 0 & -\tau & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ile gösterilsin. $\mathbb{R}^5$ üzerinde bir hemen hemen değme yapı (ϕ,ξ,η),

$$\phi=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\tau & 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}, \eta=-\tau dx_1-\tau dx_3+dx_5, \xi=\frac{\partial}{\partial x_5}$$

İle tanımlanır.

Temel 2-form ϕ

$$\phi=-(dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4)$$

formuna sahiptir.

Bu $\mathbb{R}^5$ üzerinde bir kosimplektik yapı verir. Eğer $E_1=\frac{\partial}{\partial x_1}+\tau\frac{\partial}{\partial x_5}$, $E_2=\frac{\partial}{\partial x_3}+\tau\frac{\partial}{\partial x_5}$, $\phi E_1=E_3=\frac{\partial}{\partial x_2}$, $\phi E_2=E_4=\frac{\partial}{\partial x_4}$ ve $E_5=\frac{\partial}{\partial x_5}$ vektör alanları alınırsa bu vektör alanları $\mathbb{R}^5$ te bir çatı alanı belirtir.

Örnek 4.1.11: $\mathbb{R}^{2n+1}$ de kartezyen koordinatlar (x_1,y_1,z) $(i=1,\dots,n)$ ve normal değme yapı

$$\eta=\frac{1}{2}(d_z-\sum_{i=1}^{n}y_i dx_i)$$

olsun. Karakteristik vektör alanı ξ ile, $2\frac{\partial}{\partial z}$ ve Riemann metriği g ile tensör alanı φ,

$$g=\frac{1}{4}\left(\eta\otimes\eta+\sum_{i=1}^{n}((dx_i)^2+(dy_i)^2\right), \qquad \varphi=\begin{pmatrix}0 & \delta_{ij} & 0\\ -\delta_{ij} & 0 & 0\\ 0 & y_i & 0\end{pmatrix}, \qquad i=1,\dots,n$$

ile verilir. Bu bize $\mathbb{R}^{2n+1}$ de bir değme metrik yapı verir. $E_i = 2\frac{\partial}{\partial y_i}, E_{n+1} = 2\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i\frac{\partial}{\partial z}\right), \xi$ vektör alanları değme metrik yapı için bir $\varphi - baz$ oluşturur. Bununla birlikte $\mathbb{R}^{2n+1}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin bir Sasakian manifold olduğu gösterilebilir.

4.2.KENMOTSU MANİFOLDLARI

Tanım 4.2.1: M, (φ,ξ,η,g) yapısı ile verilmiş $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu olsun. Eğer M hemen hemen değme metrik manifoldu üzerinde

$$d\eta=0, \qquad d\Phi=2\eta\wedge\Phi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, M ye bir *hemen hemen Kenmotsu manifold* adı verilir (Pastore ve Dileo 2007).

Tanım 4.2.2: M, (φ,ξ,η,g) yapısı ile verilmiş $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu olsun. Eğer M hemen hemen kenmotsu manifoldu üzerinde her $X,Y\in\chi(M)$ için,

$$(\nabla_X\varphi)Y=g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X \tag{4.2.1}$$

koşulu sağlanıyorsa M ye *Kenmotsu manifoldu* adı verilir.

Bir M, Kenmotsu manifoldu üzerinde her $X,Y\in\chi(M)$ için,

$$\nabla_X\xi=X-\eta(X)\xi \tag{4.2.2}$$

ve

$$(\nabla_X\eta)Y=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{4.2.3}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

Bir Kenmotsu manifoldun R eğrilik tensörünün (2.2.1) denkleminde $Z=\xi$ alındığında

$$R(X,Y)\xi=\eta(X)Y-\eta(Y)X$$

eşitliğini sağladığı görülmektedir.

Ayrıca bir Kenmotsu manifoldun Ricci tensörünün

$$S(X,\xi)=-2n\eta(X)$$

denklemini sağladığı görülmektedir.

Örnek 4.2.3: $M = \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^5 : z \neq 0\}$ ele alalım. η, $\eta = dz$ ile tanımlanan bir 1-form olsun.

Karakteristik vektör alanı ξ , $\frac{\partial}{\partial z}$ ile ve Riemann metriği g ile tensör alanı φ,

$$g = e^{2z}\left(\sum_{i=1}^{2}(dx_i)^2 + (dy_i)^2\right) + (dz)^2 , \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ile verilir. Bu da M üzerinde bir Kenmotsu manifold verir. $E_1 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial y_1}$, $E_2 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial y_2}$, $E_3 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x_1}$, $E_4 = e^{-z}\frac{\partial}{\partial x_2}$ ve $E_4 = \xi$ vektör alanları Kenmotsu yapı için bir φ-baz oluşturur. Bununla birlikte $M(\varphi, \xi, \eta, g)$ nın bir Kenmotsu manifoldu olduğu gösterilebilir (Kenmotsu 1972).

5.BÖLÜM

5.1. KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RİEMANN MANİFOLDLARA ANTİ-İNVARİANT RİEMANNIAN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde Kenmotsu manifoldlardan Riemann manifoldlara anti-invariant riemannian submersiyonları tanımlayacağız ve bu submersiyonların geometrisini araştıracağız. Bu bölüm tamamen orijinal sonuçlardan oluşur.

Tanım 5.1.1: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifold, (N, g_N) bir Riemann manifold olsun. $F: (M, \varphi, \xi, \eta, g) \to (N, g_N)$ bir submersiyon olmak üzere $\varphi(\text{Ç}ekF_*) \subseteq (\text{Ç}ekF_*)^{\perp}$ ise F ye bir *anti-invariant submersiyon* denir (Şahin 2010).

$F: (M, \varphi, \xi, \eta, g) \to (N, g_N)$ Kenmotsu manifoldundan Riemann manifolduna bir anti-invariant Riemann submersiyonu olsun. İlk olarak tanımdan $\varphi(\text{Ç}ekF_*) \cap (\text{Ç}ekF_*)^{\perp} \neq \{0\}$ elde edilir. $(\text{Ç}ekF_*)^{\perp}$ de $\varphi(\text{Ç}ekF_*)$ a dik distribüsyonu μ ile ifade ederiz. O zaman

$$(\text{Ç}ekF_*)^{\perp} = \varphi(\text{Ç}ekF_*) \oplus \mu \tag{5.1.1}$$

elde edilir.

5.2. KARAKTERİSTİK VEKTÖR ALANI YATAY OLAN ANTİ-İNVARİANT RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Bu alt bölümde bir Kenmotsu manifoldundan karakteristik vektör alanı ξ yatay olan Riemann manifoldu üzerine anti-invariant Riemann submersiyonları çalışacağız. (5.1.1) i kullanarak $\mu = \varphi\mu \oplus \{\xi\}$ elde ederiz. Böylece X yatay vektör alanı için $BX \in \chi(\text{Ç}ekF_*)$ ve $CX \in \chi(\mu)$ olmak üzere

$$\varphi X = BX + CX \tag{5.2.1}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi V dikey ve X yatay vektör alanı olsun. Yukarıdaki bağıntıyı ve (4.1.2) yi kullanarak

$$g_M(CX, \varphi V) = 0 \tag{5.2.2}$$

buluruz.

(4.1.2) ve (5.2.2) nin sonucu olarak

$g_M(CX,\varphi U) = g_M(\varphi X - BX, \varphi U)$

$$= g_M(X,U) - \eta(X)\eta(U) - g_M(BX,\varphi U) \qquad (5.2.3)$$

elde ederiz.

$\varphi U \in \chi((ÇekF_*)^\perp)$ ve $\xi \in \chi(ÇekF_*)^\perp$ olduğundan (5.2.3), (5.2.2) i belirtir. Bu son bağıntıdan $g_N\big(F_*(\varphi V), F_*(CX)\big) = 0$ elde ederiz. Buradan

$$TN = F_*(\varphi ÇekF_*) \oplus F_*(\mu) \qquad (5.2.4)$$

dir.

Teorem 5.2.1: $(M,\varphi,\xi,\eta,g), 2m+1$-boyutlu bir Kenmotsu manifold ve $(N,g_N), n$-boyutlu bir Riemann manifold olmak üzere $F: M \to N$ bir anti-invariant submersiyon olsun öyle ki $(ÇekF_*)^\perp = \varphi(ÇekF_*) \oplus \{\xi\}$ dir. O zaman $m+1=n$ dir (Beri ve ark. 2016).

İspat: $\chi(ÇekF_*)^\perp$ nin bir ortonormal çatısı $U_1,\dots,U_k$, $k = 2m-n+1$ olsun. $(ÇekF_*)^\perp = \varphi ÇekF_* \oplus \{\xi\}$ olduğundan $\varphi U_1,\dots,\varphi U_k,\xi$, $\chi((ÇekF_*)^\perp)$ in ortonormal bi çatısıdır. Böylece (5.2.4) yardımıyla $k = n-1$ olur bu da gösterir ki $m+1=n$ dir.

Not 5.2.2: Belirtelim ki örnek 5.3.6 teorem 5.2.1. i sağlamaktadır.

Yardımcı Teorem 5.2.3: F, (M,φ,ξ,η,g) Kenmotsu manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna bir anti-invariant Riemann submersiyon olsun. O zaman $X,Y \in \chi((ÇekF_*)^\perp)$ ve $U \in \chi(ÇekF_*)$ için

$$A_X\xi = 0, \qquad (5.2.5)$$

$$T_U\xi = U, \qquad (5.2.6)$$

$$g_M(\nabla_Y CX, \varphi U) = -g_M(CX, \varphi A_Y U) \qquad (5.2.7)$$

elde ederiz (Beri ve ark. 2016).

İspat: (3.3.9) ve (4.2.2) i kullanarak (5.2.5) yı elde ederiz. (3.3.7) ve (4.2.2) i kullanarak (5.2.6) yi buluruz.

Şimdi (5.2.2) kullanarak $X, Y \in \chi((ÇekF_*)^{\perp})$ ve $U \in \chi(ÇekF_*)$ için

$$g_M(\nabla_Y CX, \varphi U) = -g_M(CX, \nabla_Y \varphi U) \tag{5.2.8}$$

dir. Ayrıca (3.3.8) ve (4.1.7) gösterir ki

$$g_M(\nabla_Y CX, \varphi U) = -g_M(CX, \varphi A_Y U) - g_M(CX, \varphi(\mathcal{V}\nabla_Y U))$$

dir. $\varphi(\mathcal{V}\nabla_Y U) \in \chi((ÇekF_*)^{\perp})$ olduğundan (5.2.7) i buluruz.

Şimdi $(ÇekF_*)$ distribüsyonunun integrallenebilmesi üzerine çalışacağız ve $ÇekF_*$ ile $(ÇekF_*)^{\perp}$ nin liflerinin geometrisini araştıracağız.

Teorem 5.2.4: F, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Kenmotsu manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna bir anti-invariant Riemann submersiyon olsun. O zaman $X, Y \in \chi((ÇekF_*)^{\perp})$ ve $V \in \chi(ÇekF_*)$ için aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

i) $(ÇekF_*)^{\perp}$ integrallebilirdir,

ii) $g_N\big((\nabla F_*)(Y, BX), F_*\varphi V\big) =$
$g_N\big((\nabla F_*)(X, BY), F_*\varphi V\big) + g_M(CY, \varphi A_X V) - g_M(CX, \varphi A_Y V)$,

iii) $g_M(A_X BY - A_Y BX, \varphi V) = g_M(CY, \varphi A_X V) - g_M(CX, \varphi A_Y V)$(Beri ve ark. 2016).

İspat: (4.1.2) ve (4.1.7) ten $X, Y \in \chi((ÇekF_*)^{\perp})$ ve $V \in \chi(ÇekF_*)$ için

$$g_M([X, Y], V) = g_M(\nabla_X Y, V) - g_M(\nabla_Y X, V)$$

$$= g_M(\nabla_X \varphi Y, \varphi V) - g_M(\nabla_Y \varphi X, \varphi V)$$

i) kolaylıkla bulunur. Ayrıca (5.2.1) den

$$g_M([X, Y], V) = g_M(\nabla_X BY, \varphi V) + g_M(\nabla_X CY, \varphi V) - g_M(\nabla_Y BX, \varphi V) - g_M(\nabla_Y CX, \varphi V)$$

dir.

F Riemann submersiyonu göz önüne alınırsa (3.3.3), (3.3.8) ve (5.2.7) kullanılarak

$$g_M([X, Y], V) = g_N(F_*\nabla_X BY, F_*\varphi V) - g_M(CY, \varphi A_X V)$$

$$- g_N(F_*\nabla_Y BX, F_*\varphi V) + g_M(CX, \varphi A_Y V)$$

buluruz.

Böylece (3.3.10) dan

$$g_M([X,Y],V) = g_N(-(\nabla F_*)(X,BY) + (\nabla F_*)(Y,BX), F_*\varphi V)$$
$$+g_M(CX, \varphi A_Y V) - g_M(CY, \varphi A_X V)$$

elde ederiz ki bu da $(i) \Leftrightarrow (ii)$ yi ispatlar. Diğer yandan (3.3.10) dan

$$(\nabla F_*)(Y,BX) - (\nabla F_*)(X,BY) = -F_*(\nabla_Y BX - \nabla_X BY)$$

buluruz. O halde (3.3.8) gösterir ki

$$(\nabla F_*)(Y,BX) - (\nabla F_*)(X,BY) = -F_*(\mathrm{A}_Y BX - \mathrm{A}_X BY)$$

dir. (3.3.3) den $\mathrm{A}_Y BX - \mathrm{A}_X BY \in \chi((ÇekF_*)^\perp)$ olduğu sonucu çıkar ki bu da $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ yi ıspatlar.

Not 5.2.5: $(ÇekF_*)^\perp = \varphi(ÇekF_*) \oplus \{\xi\}$ olduğunu kabul edelim. (5.2.1) kullanılarak her $X \in \chi((ÇekF_*)^\perp)$ için $CX = 0$ olduğu ispatlanabilir.

Bunun sonucu olarak da aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 5.2.6: $(M,\varphi,\xi,\eta,g), 2m+1$-boyutlu bir Kenmotsu manifold ve $(N,g_N), n$-boyutlu bir Riemann manifold olsun. $(ÇekF_*)^\perp = \varphi(ÇekF_*) \oplus \{\xi\}$ olmak üzere $F: M \to N$ bir anti-invariant submersiyon olsun. O halde aşağıdaki önermeler birbirine denktir (Beri ve ark. 2016).

i) $(ÇekF_*)^\perp$ integrallenebilirdir,
ii) Her $X,Y \in \chi((ÇekF_*)^\perp)$ için $(\nabla F_*)(X,\varphi Y) = (\nabla F_*)(\varphi X, Y)$,
iii) $\mathrm{A}_X\varphi Y$=$\mathrm{A}_Y\varphi X$.

Teorem 5.2.7: $(M,\varphi,\xi,\eta,g), 2m+1$-boyutlu bir Kenmotsu manifold ve $(N,g_N), n$-boyutlu bir Riemann manifold olmak üzere $F: M \to N$ bir anti-invariant submersiyon olsun. O halde aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

i) $(ÇekF_*)^\perp$, M üzerinde bir total geodezik foliasyon tanımlar,
ii) $g_M(\mathrm{A}_X BY, \varphi V) = g_M(CY, \varphi \mathrm{A}_X V)$,

iii) Her $X, Y \in \chi((ÇekF_*)^\perp)$ ve $V \in \chi(ÇekF_*)$ için

$g_N\big((\nabla F_*)(X, \varphi Y), F_*\varphi V\big) = -g_M(CY, \varphi \mathrm{A}_X V)$ (Beri ve ark. 2016).

İspat: (4.1.2) ve (4.1.7) den her $X, Y \in \chi((ÇekF_*)^\perp)$ ve $V \in \chi(ÇekF_*)$ için

$$g_M(\nabla_X Y, V) = g_M(\nabla_X \varphi Y, \varphi V)$$

buluruz. (5.2.1) den dolayı

$$g_M(\nabla_X Y, V) = g_M(\nabla_X BY + \nabla_X CY, \varphi V)$$

dir. (3.3.8) ve (5.2.7) i kullanarak

$$g_M(\nabla_X Y, V) = g_M(\mathrm{A}_X BY + \mathcal{V}\nabla_X BY, \varphi V) - g_M(CY, \varphi \mathrm{A}_X V)$$

elde ederiz. Son eşitlik de $(i) \Leftrightarrow (ii)$ yi gösterir.

$X, Y \in \chi((ÇekF_*)^\perp)$ ve $V \in (ÇekF_*)$ için

$$g_M(\mathrm{A}_X BY, \varphi V) = g_M(CY, \varphi \mathrm{A}_X V) \tag{5.2.9}$$

dir.

Diferensiyel F_*, yatay vektörlerin boylarını koruduğu için (5.2.9) bağıntısından

$$g_M(CY, \varphi \mathrm{A}_X V) = g_N(F_*\mathrm{A}_X BY, F_*\varphi V) \tag{5.2.10}$$

elde ederiz.

(3.3.8) ve (3.3.10) u (5.2.10) da kullanırsak

$$g_M(CY, \varphi \mathrm{A}_X V) = g_N(-(\nabla F_*)(X, \varphi Y), F_*\varphi V)$$

buluruz bu da bize $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ yi gösterir.

Sonuç 5.2.8: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir Kenmotsu manifold ve (N, g_N), bir Riemann manifold ve $(ÇekF_*)^\perp = \varphi(ÇekF_*) \oplus \{\xi\}$ olmak üzere $F: M \to N$ bir anti-invariant submersiyon olsun. O halde aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

i) $(ÇekF_*)^\perp$, M üzerinde bir total geodezik foliasyon tanımlar,

ii) $\mathrm{A}_X \varphi Y = 0$,

iii) $X, Y \in \chi((ÇekF_*)^{\perp})$ ve $V \in \chi(ÇekF_*)$ için $(\nabla F_*)(X, \varphi Y) = 0$ (Beri ve ark. 2016).

Aşağıdaki sonuç (3.3.6) ve (5.2.6) nin bir sonucudur.

Teorem 5.2.9: F, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ Kenmotsu manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna bir anti-invariant Riemann submersiyon olsun. O halde $ÇekF_*$, M üzerinde bir total geodezik foliasyon tanımlamaz (Beri ve ark. 2016).

Teorem 5.2.9 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 5.2.10: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir Kenmotsu manifold ve (N, g_N), bir Riemann manifold olmak üzere $F: M \to N$ bir anti-invariant submersiyon olsun. O zaman F bir total geodezik dönüşüm değildir (Beri ve ark. 2016).

Not 5.2.11: $\chi(ÇekF_*)$ nin bir yerel ortonormal çatısı $\{e_1, \dots, e_m\}$ olsun.

$H = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathcal{T}_{e_i} e_i$, (3.3.6) ve (3.3.2) den

$$\begin{aligned} mg(H, \xi) &= g(\mathcal{T}_{e_1} e_1, \xi) + g(\mathcal{T}_{e_2} e_2, \xi) + \cdots + g(\mathcal{T}_{e_m} e_m, \xi) \\ &= -g(\mathcal{T}_{e_1} \xi, e_1) - g(\mathcal{T}_{e_2} \xi, e_2) - \cdots - g(\mathcal{T}_{e_m} \xi, e_m) \\ &= -g(e_1, e_1) - g(e_2, e_2) - \cdots - g(e_m, e_m) \\ &= -m \end{aligned}$$

$g(H, \xi) = -1$ elde ederiz. Dolayısıyla $ÇekF_*$ minimal fiberlere sahip değildir (Beri ve ark. 2016).

Not 5.2.11 sayesinde aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 5.2.12: $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, bir Kenmotsu manifold ve (N, g_N), bir Riemann manifold olmak üzere $F: M \to N$ bir anti-invariant submersiyon olsun. O zaman F harmonik değildir (Beri ve ark. 2016).

5.3. KARAKTERİSTİK VEKTÖR ALANI DİKEY OLAN ANTİ-İNVARİANT SUBMERSİYONLAR

Bu alt bölümde Kenmotsu manifoldundan Riemann manifolduna karakteristik vektör alanı dikey olan Riemann submersiyonların olmadığını ispatlayacağız. Ayrıca katlı çarpım (warped product) manifoldundan Riemann manifoldu üzerine yatay konformal submersiyon örnekleri elde etmenin metodunu da vereceğiz.

φ endomorfizmi altında μ nün $(ÇekF_*)^{\perp}$ in bir anti-invariant distribüsyonu olduğunu göstermek kolaydır. Böylece $X \in \chi(ÇekF_*)^{\perp}$ için $BX \in \chi(ÇekF_*)$ ve $CX \in \chi(\mu)$ olmak üzere

$$\varphi X = BX + CX$$

şeklinde yazılır. Diğer yandan $F_*((ÇekF_*)^{\perp}) = TN$ ve F bir Riemann submersiyon olduğundan (5.2.1) i kullanarak her $X \in \chi(ÇekF_*)^{\perp}$ ve $V \in \chi(ÇekF_*)$ için $g_N\big(F_*(\varphi V), F_*(CX)\big) = 0$ elde ederiz. Buradan

$$TN = F_*(\varphi ÇekF_*) \oplus F_*(\mu) \tag{5.3.1}$$

dir.

Teorem 5.3.1: $(M^{m+1} = I \times_f L^m, g_M = dt^2 + f^2 g_L)$ bir invertal I nin ve L Riemann manifoldunun bir katlı çarpım (warped product) manifoldu olsun. Eğer $F: (M^{m+1}, g_M) \to (N^n, g_N)$ dikey vektör alanı $\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t$ ile bir Riemann submersiyon ise o zaman katlı çarpım (warped product) manifoldu bir Riemann çarpım manifoldudur (Beri ve ark. 2016).

İspat: $\sigma = (t, x_1, x_2, \dots x_m)$, M için $p \in M$ noktasında bir koordinat sistemi ve $(y_1, y_2, \dots y_n)$, N için $F(p) \in N$ noktasında bir koordinat sistemi olsun. ∂_t dikey vektör alanı olduğundan

$$0 = F_*(\partial_t)_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y_i \circ F)}{\partial_t}(p) \frac{\partial}{\partial y_i}|F(p)$$

elde ederiz.

Dolayısıyla F nin bileşke fonksiyonu $y_i \circ F = f_i$, t parametresini içermez. Yani $x = (x_1, x_2, \dots x_m)$ ve ayrıca $p = (t, x) \in M$ noktasında $(ÇekF_*)^{\perp}|_{(t,x)} \subseteq T_{(t,x)}(\{t\} \times L) \cong T_x L$ olmak üzere

$$F: I \times_f L \to N, (t, x) \to F(t, x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

dir. Yani eğer $\tilde{X} \in (ÇekF_*)^{\perp}$ ise her $p \in M$ noktası için X in $I \times L$ ye lifti $\tilde{X}$ vektör alanı $\pi_{2*}(\tilde{X}_p) = X_{\pi_2(p)}$ olmak üzere bir $X \in \chi(TN)$ vektör alanı vardır. Sadeleştirmeler daha iyi anlaşılsın diye vektör alanları ve liftleri için aynı gösterimi kullanıyoruz.

Önerme 2.2.11 deki (ii) i kullanarak $X \in \chi \in (ÇekF_*)^{\perp}$ için

$$\nabla_X \partial_t = \frac{f'}{f} X \tag{5.3.2}$$

buluruz. (3.3.8) ve (5.3.2) den $X \in \chi \in (ÇekF_*)^{\perp}$ için

$$\mathrm{A}_X \partial_t = \frac{f'}{f} X \tag{5.3.3}$$

elde ederiz.

(3.3.5), (3.3.4) ve (5.3.3) yardımıyla $X, Y \in \chi \in (ÇekF_*)^{\perp}$ için

$$g_M(\mathrm{A}_X Y, \partial_t) = -\frac{f'}{f} g_M(X, Y) = -\frac{f'}{f} g_M(Y, X) = g_M(\mathrm{A}_Y X, \partial_t) = -g_M(\mathrm{A}_X Y, \partial_t)$$

buluruz. Böylece

$$g_M(\mathrm{A}_X Y, \partial_t) = -\frac{f'}{f} g_M(X, Y) = 0 \tag{5.3.4}$$

dır.

(5.3.4) den anlaşılacağı üzere $f' = 0$ dır. Bunun sonucu olarak da katlama (warping) fonksiyonu f sabittir. Bundan dolayı ölçekteki değişime göre M bir Riemann çarpım manifoldudur.

Teorem 5.3.2: $(M, \varphi, \xi, \eta, g), 2m+1$-boyutlu bir Kenmotsu manifold ve $(N, g_N), n$-boyutlu bir Riemann manifold olsun. Karakteristik vektör alanı ξ dikey vektör alanı olan bir $F: M \rightarrow N$ Riemann submersiyonu yoktur (Beri ve ark. 2016).

İspat: (Kenmotsu 1972) den biliyoruz ki lokal olarak bir Kenmotsu manifoldu $I \times_f L$, bir interval I ve bir Kaehler manifoldu L nin $g_M = dt^2 + f^2 g_L$ metriği ve s pozitif bir sabit olmak üzere $f(t) = se^t$ katlama (warping) fonksiyonu ile bir katlı çarpımdır. $\xi = \frac{\partial}{\partial t} = \partial_t$ bir dikey vektör alanı olsun. Teorem 5.3.1. den de anlaşılacağı üzere M bir Riemann çarpım manifoldudur. $f(t) = se^t$ fonksiyonu sabit olmadığından M bir Riemann çarpım manifold olamaz. Bu da teoremin ispatını tamamlayan bir çelişkidir.

Teorem 5.3.3: $M = M_1 \times_f M_2$, $g = g_1 \times f^2 g_2$ metriği ile bir katlı çarpım (warped product) manifoldu, $\pi_2: M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ ikinci standart izdüşüm ve (M_3, g_3) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer f_1, M_2 den M_3 e bir Riemann submersiyon ise $f_2 = f_1 \circ \pi_2: M \rightarrow M_3$ bir yatay konformal submersiyondur (Beri ve ark. 2016).

İspat: f_1 bir Riemann submersiyon olduğundan $rank\, f_1 = boy\, M_3$ dir. Tanım 3.1.1 kullanarak $(p,q) \in M$ noktası için $rank\, f_{2|_{(p,q)}} = rank\, f_1|_{f_{1(q)}} = boy\ M_3$ buluruz. Sonuç olarak f_2 bir submersiyondur. π_2 bir katlı çarpım (warped product) manifoldu için bir doğal yatay konformal submersiyon olduğundan

$$Çek\ \pi_{2*|_{(p,q)}} = T_{(p,q)}M_1 = T_{(p,q)}(M_1 \times \{q\}) \cong T_p M_1$$

elde ederiz. Yani

$$Çek\, \pi_{2*|_{(p,q)}} \cong T_p M_1 \times Çek\, f_{1*q}$$

ve

$$(Çek f_{2*})^{\perp}{}_{|(p,q)} = \{p\} \times (Çek f_{1*})^{\perp}{}_{|q} \cong (Çek f_{1*})^{\perp}{}_{|q}$$

dir. Böylece $X, Y \in \chi(Çek f_{2*})^{\perp}$ için

$$g(X,Y) = f^2(p) g_2\big(\pi_{2*}(X), \pi_{2*}(Y)\big)$$

$$= f^2(p) g_3(f_{1*}\big(\pi_{2*}(X)\big), f_{1*}\big(\pi_{2*}(Y)\big))$$

$$= f^2(p)g_3(f_{2*}(X), f_{2*}(Y))$$

dir. Böylece istenen sonucu elde ederiz.

Not 5.3.4: Teorem 5.3.3 yatay konformal submersiyonlar örneği üretmek için bir şans vermektedir.

Şimdi Kenmotsu manifoldundan anti-invariant submersiyon ve anti-invariant yatay konformal submersiyondan bazı örnekler vereceğiz.

Örnek 5.3.5: $M = \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^5 : z \neq 0\}$ bir Kenmotsu manifold ve $g_N = (du \otimes du + dv \otimes dv)$ ile tanımlanan Riemann metrik tensör alanı g_N olmak üzere $N\ \mathbb{R} \times_{e^z} \mathbb{R}^2$ olsun.

$F(x_1, x_2, y_1, y_2, t) = \left(\frac{x_1+y_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_2+y_1}{\sqrt{2}}, z\right)$ ile tanımlanan $F: M \to N$ dönüşümünü ele alalım. Bunun üzerine basit bir hesaplamayla

$$Çek\, F_* = span\left\{V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_2 - E_3), V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - E_4)\right\}$$

ve

$$(Çek\, F_*)^\perp = span\left\{H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + E_4), H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_2 + E_3), H_3 = E_5 = \xi\right\}$$

elde edilir.

Böylelikle F nin bir Riemann submersiyon olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca $\varphi V_1 = -H_1,\ \varphi V_2 = -H_2$ gösterir ki $\varphi(Çek\, F_*) \subset (Çek)^\perp = \varphi(Çek\, F_*) \oplus \{\xi\}$ dir. Böylece F , ξ yatay bir vektör alanı olmak üzere bir anti-invariant Riemann submersiyondur.

Örnek 5.3.6: $M = \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in \mathbb{R}^5 : z \neq 0\}$ bir Kenmotsu manifold ve $N, \mathbb{R}^2$ olsun. N üzerindeki Riemann metrik tensör alanı $g_N = e^{2z}(du \otimes du + dv \otimes dv)$ ile tanımlanır.

$F(x_1, x_2, y_1, y_2, t) = \left(\frac{x_1+y_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_2+y_1}{\sqrt{2}}\right)$ ile tanımlanan $F: M \to N$ dönüşümünü ele alalım. Bunun üzerine açık bir hesaplamayla

$$Çek\, F_* = span\left\{V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_3 - E_2), V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_4 - E_1), V_3 = E_5 = \xi = \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

ve

$$(ÇekF_*)^{\perp} = span\left\{H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_3 + E_2), H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_4 + E_1)\right\}$$

elde ederiz.

Böylelikle F nin bir yatay konformal submersiyon olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca $\varphi V_1 = H_2,\ \varphi V_2 = H_1, \varphi V_3 = 0$ gösterir ki $\varphi(Çek\, F_*) = (Çek\, F_*)^{\perp}$ dir. Sonuç olarak ξ dikey bir vektör alanı olmak üzere F bir anti-invariant yatay konformal submersiyondur.

KAYNAKLAR

Baird, P. Wood, J.C. 2003. Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds. London Mathematical Society Monographs, Oxford University Press, Clarendon Press, Oxford.

Beri, A. Küpeli Erken, İ. Murathan, C. 2016. Anti-invariant Submersions from Kenmotsu Manifolds onto Riemannian Manifolds. Turkish Journal of Mathematics, (40): 540-552.

Blair, D.E. 2002. Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics, Birkhauser Boston.

Brickell, F. Clark, R.S. 1970. Differential Manifolds. Van Nostrand Reinhold Co., Londra.

Chen, B.Y. 1990. Geometry of Slant Submanifolds. Katholieke Universiteit Leuven, Leuven Belgium.

Chinea, D. Gonzalez, C. 1990. A Classification of Almost Contact Metric Manifolds, Annali di Matematica Pura ed Applicata, İspanya.

Falcitelli, M. Ianus, S. Pastore, A. M. 2004. Riemannian Submersions and Related Topics. World Scientific, River Edge, NJ.

Gray, A. 1967. Pseudo-Riemannian Almost Product Manifolds and Submersions. J. Math, (16): 715-737.

Ianus, S. Mazzocco, R. Vilcu, G.E. 2008. Riemannian Submersions from Quaternionic Manifolds. Acta Appl Math, (104): 83-89.

Ianus, S. Ionescu, A.M. Mazzocco, R. Vilcu, G.E. 2011. Riemannian Submersions from Almost Contact Metric Manifolds. Abh Math Semin Univ Hambg, (81): 101-114.

Kenmotsu, K. 1972. A Class of Almost Contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., (24): 93-103.

Küpeli Erken, İ. Murathan, C. 2013. Anti-invariant Riemannian Submersions from Sasakian Manifolds. arXiv:1302.4906v1[math.DG], 20.02.2013.

Küpeli Erken, İ. Murathan, C. 2014. On Slant Riemannian Submersions for Cosymplectic Manifolds. Bull. Korean Math. Soc., (51): 1749-1771.

Küpeli Erken, İ. Murathan, C. 2016. Slant Riemannian Submersions form Sasakian Manifolds. Arab Journal of Mathematical Science,(2016):1319-5166.

Küpeli Erken, İ. Murathan, C. 2015. Anti-invariant Riemannian Submersions from Cosymplectic Manifolds onto Riemannian Manifolds. Filomat, (29):1429-1444.

Lee, J.W. 2012. Anti-invariant $\xi^{\perp}$-Riemannian Submersions from Almost Contact Manifolds, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, (42):231-241.

Mnev, P. 2012. Differentiable Manifolds. Almanya, https://www.math.uzh.ch/index.php?file&key1=20105.

O'Neill, B. 1966. The Fundamental Equations of Submersion. Michigan Math J, (13): 459-469.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry. Academic press, New York.

Park, K.S. 2012a. H-Slant Submersions. Bull Korean Math Soc. (49): 329-338.

Park, K.S. 2012b. H-Semi-invariant Submersions. Taiwanese J Math, (16): 1865-1878.

Pastore, A.M. Dileo, G. 2007. Almost Kenmotsu Manifolds and Local Symmetry. Bull. Berg. Math. Soc., (14): 343-354.

Sharpe, R.W. 1997. Differential Geometry. Graduate Text in Math, Springer.

Şahin, B. 2010. Anti-invariant Riemannian Submersions from Almost Hermitian Manifolds. Cent Eur J Math., (8): 437-447.

Şahin, B. 2011. Slant Submersions from Almost Hermitian Manifolds. Bull Math Soc Sci Math Roumanie Tome, (54): 93-105.

Şahin, B. 2012. Riemannian Submersions from Almost Hermitian Manifolds. Taiwanese J Math., (17): 629-689.

Şahin, B. 2013. Semi-invariant Submersions from Almost Hermitian Manifolds. Canada Math Bull, (56): 173-183.

Yano, K. Kon, M. 1984. Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corp., Singapore.

Watson, B. 1976. Almost Hermitian Submersions. J Diferential Geom, (11): 147-165.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayşe BERİ

Doğum Yeri ve Tarihi : İnegöl/ 10.03.1989

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : İnegöl Turgutalp Anadolu Lisesi 2003-2007

Lisans : Sakarya Üniversitesi 2007-2011

Yüksek lisans : Uludağ Üniversitesi 2012-2016

Çalıştığı Kurum: Milli Eğitim Bakanlığında 2013 den beri kadrolu matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

İletişim : ayseyilmazsoyberi@gmail.com

Yayınları:

Beri, A. Küpeli Erken, İ. Murathan, C. 2016. Anti-invariant Submersiyons from Kenmotsu Manifolds onto Riemann Manifolds. Turkish Journal of Mathematics, (40): 540-552.