



GRAFLARIN TOPOLOJİK İNDEKSLERİ

ŞEYMA ÖZÖN YILDIRIM



T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAFLARIN TOPOLOJİK İNDEKSLERİ

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2016
Her Hakkı Saklıdır

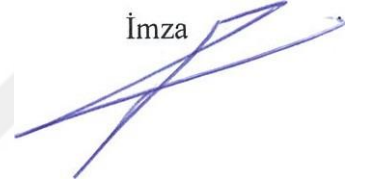
TEZ ONAYI

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM tarafından hazırlanan "Grafların Topolojik İndeksleri" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Üye: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza



Üye: Prof. Dr. Recep ŞAHİN
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza



Üye: Doç. Dr. Musa DEMİRCİ
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR Enstitü
Müdürü

U. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01/07/2016

İmza

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRAFLARIN TOPOLOJİK İNDEKSLERİ

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Topolojik indeksler başta kimyasal graflar olmak üzere birçok uygulamaya sahip olan sabit sayılardır. İlk olarak 1940lı yılların başlarında tanımlanmaya başlanan bu indeksler son yıllarda işlemci hızlarındaki gelişmelere paralel olarak hesaplamaların da hızlanmasıyla daha önceleri kullanılmakta olan yöntemlerin önüne geçmeye başlamıştır. Bu amaçla bir çok topolojik graf indeksleri tanımlanmıştır. Bu indeksler çoğunlukla köşe derecelerine, köşeler arasındaki uzaklıklara ya da grafların matrislerine bağlı olarak tanımlanmaktadır.

Bu çalışmanın amacı sık kullanılan ve köşe derecelerine ve de uzaklığa bağlı olarak tanımlanan 11 adet topolojik graf indeksini ele alarak belli graf sınıfları için bu indeksleri hesaplamak, bunlarla ilgili formüller elde etmek ve de bu indekslerin tamsayı ve asal sayı değerlerini belirlemektir. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. Grafın tanımı, tarihçesi, bazı özel graflar ve özellikleri, kullanılacak olan graf indeksleri ve daha önce literatürde olmayan yeni isimlendirilmiş bazı graf türleri verilmiştir. Bu bilgiler, tez boyunca kullanılacaktır. İkinci bölümde literatürde sık kullanılan bazı graf sınıfları için 11 adet topolojik graf indeksi hesaplanmıştır. Üçüncü bölümde de bu indekslerin tamsayı ve asal sayı değerleri belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Graf, Topolojik İndeks, Birinci, İkinci, Üçüncü Geometrik-Aritmetik İndeksler, ABC İndeksi, Birinci ve İkinci Zagreb İndeksleri, Birinci ve İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksleri, Wiener İndeksi, Harary İndeksi ve Narumi-Katayama İndeksi

2016, ix + 79 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

TOPOLOGICAL INDICES IN GRAPHS

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM

Uludag University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL (Uludag University)

Topological indices are constants which have a lot of applications mainly in Chemistry. For the first time, they were started to be defined in 1940s, and by the technological advances in computer technology they are now preferred to previously used methods. A lot of topological indices are defined for this reason. These indices are mostly defined in terms of vertex degrees, distances or matrices corresponding to graphs.

The aim of this work is to consider 11 frequently used topological indices and calculate these indices for some well-known graph classes, to obtain formulae for them and to find the integer and prime values of these indices.

This thesis consists of three chapters. The first chapter is the Introduction. Here, we give the definition of a graph, their history, some special graphs and their properties, the graph indices under consideration, and some newly defined graph types. These will be used throughout the thesis. In the second chapter, calculations of 11 graph indices for some widely-used graph classes are given. Finally in the third chapter, the integer and prime values of these indices are determined.

Key Words: Graph, Topologic Index, First, Second and Third Geometric–Arithmetic Index, ABC Index, First and Second Zagreb Index, First and Second Multiplicative Zagreb Index, Wiener Index, Harary Index ve Narumi-Katayama Index

2016, ix + 79 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Eğitim hayatımda bana yol gösteren öğrenme yolunda hiçbir fedakarlıktan geri durmayan kendime örnek aldığım değerli hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e,

Uzun ve yorucu eğitim serüvenimde karşılaştığım her zorlukta sığındığım liman dara düştüğümde bana can simidi olan sevgili aileme ve bu zorlu serüvende her zaman beni teşvik ve motive edip her zaman yanımda olan değerli eşime,

sonsuz teşekkürler...

Şeyma ÖZÖN YILDIRIM
01/07/2016

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Giriş ve Temel Kavramlar	3
1.2. Grafların Topolojik İndeksleri	8
2. GRAFLARIN TOPOLOJİK İNDEKSLERİNİN HESAPLANMASI	19
2.1. Giriş	19
2.2. G Grafının Geometrik-Aritmetik Birinci İndeksi	19
2.3. G Grafının Geometrik-Aritmetik İkinci İndeksi	23
2.4. G Grafının Geometrik-Aritmetik Üçüncü İndeksi	28
2.5. G Grafının Atom-Bağ Bağlantılılığı (Atom-Bond Connectivity) İndeksi	31
2.6. G Grafının Birinci Toplam Zagreb İndeksi	35
2.7. G Grafının İkinci Toplam Zagreb İndeksi	38
2.8. G Grafının Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi	40
2.9. G Grafının İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksi	43
2.10. G Grafının Wiener İndeksi	45
2.11. G Grafının Harary İndeksi	46

2.12. G Grafının Narumi-Katayama İndeksi	47
3. GRAF İNDEKSLERİNİN TAMSAYI VE ASAL SAYI DEĞERLERİ	
3.1. Giriş	61
3.2. G Grafının Geometrik-Aritmetik Birinci İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	61
3.3. G Grafının Geometrik-Aritmetik İkinci İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	63
3.4. G Grafının Geometrik-Aritmetik Üçüncü İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	64
3.5. G Grafının Atom-Bağ Bağlantılığı (Atom-Bond Connectivity) İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	65
3.6. G Grafının Birinci Toplam Zagreb İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	67
3.7. G Grafının İkinci Toplam Zagreb İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	68
3.8. G Grafının Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	69
3.9. G Grafının İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	70
3.10. G Grafının Wiener İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	71
3.11. G Grafının Harary İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	73
3.12. G Grafının Narumi-Katayama İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri	76
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	79

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
G	Graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
K_n	n köşeli tam grafi
C_n	n köşeli devir grafi
P_n	n köşeli yol grafi
S_n	n köşeli yıldız grafi
T_n	n köşeli ağaç grafi
$K_{r,s}$	Tam iki parçalı grafi
$T_{r,s}$	$r+s$ köşeli larva grafi
$d(i)$	i köşesinin derecesi
$GA_1(G)$	G grafının Geometrik-Aritmetik birinci indeksi
$n_i(e)= N(e, i, G) $	ij kenarının kendi dâhil tüm köşelere olan en kısa uzaklığı
$GA_2(G)$	G grafının Geometrik-Aritmetik ikinci indeksi
m_i	ij kenarının kendi dâhil tüm kenarlara olan en kısa uzaklığı
$GA_3(G)$	G grafının Geometrik-Aritmetik üçüncü indeksi
$ABC(G)$	G grafının Atom-Bağ bağlantılığı(Atom-Bond Connectivity)
$M_1(G)$	G grafının birinci toplam Zagreb indeksi
$M_2(G)$	G grafının ikinci toplam Zagreb indeksi
$\Pi_1(G)$	G grafının birinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\Pi_2(G)$	G grafının ikinci çarpımsal Zagreb indeksi
$W(G)$	G grafının Wiener indeksi
$H(G)$	G grafının Harary indeksi
$NK(G)$	G grafının Narumi-Katayama indeksi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Pregel Nehri	1
Şekil 1.2. Königsberg Köprü grafi	2
Şekil 1.3. 5 köşeli ve 6 kenarlı graf örneği	3
Şekil 1.4. Düzenli graf	4
Şekil 1.5. P_7 yol grafi	4
Şekil 1.6. C_3 devir grafi	4
Şekil 1.7. S_5 yıldız grafi	5
Şekil 1.8. K_4 tam grafi	5
Şekil 1.9. $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafi	6
Şekil 1.10. $T_{3,2}$ larva grafi	7
Şekil 1.11. P_5 yol grafinin derecelendirilmesi	8
Şekil 1.12. S_4 grafinin numaralandırılması	9
Şekil 1.13. C_6 grafinin numaralandırılması	11
Şekil 1.14. $K_{2,3}$ grafinin derecelendirilmesi	12
Şekil 1.15. $T_{3,2}$ grafinin derecelendirilmesi	13
Şekil 1.16. S_6 grafinin derecelendirilmesi	14
Şekil 1.17. C_5 grafinin derecelendirilmesi	15
Şekil 1.18. P_6 grafinin derecelendirilmesi	15
Şekil 1.19. P_5 grafinin numaralandırılması	16
Şekil 1.20. S_5 grafinin numaralandırılması	17
Şekil 1.21. $T_{3,3}$ grafinin derecelendirilmesi	18
Şekil 2.1. P_2 ve P_n yol grafinin derecelendirilmesi	20
Şekil 2.2. C_n devir grafinin derecelendirilmesi	20
Şekil 2.3. S_n yıldız grafinin derecelendirilmesi	21
Şekil 2.4. K_n tam grafinin derecelendirilmesi	21
Şekil 2.5. $K_{r,s}$ tam iki parçalı grafinin derecelendirilmesi	22
Şekil 2.6. $T_{r,s}$ larva grafinin derecelendirilmesi	22

Şekil 2.7. P_n yol grafinin numaralandırılması	24
Şekil 2.8. C_n devir grafinin numaralandırılması	24
Şekil 2.9. S_n yıldız grafinin numaralandırılması	26
Şekil 2.10. K_n tam grafinin numaralandırılması	26
Şekil 2.11. $K_{r,s}$ tam iki parçalı grafinin numaralandırılması	27
Şekil 2.12. P_2, P_3, P_4 ve P_n yol grafinin derecelendirilmesi	36
Şekil 2.13. P_{n+1} yol grafinin numaralandırılması	48
Şekil 2.14. C_3 devir grafinin derecelendirilmesi	49
Şekil 2.15. C_{n+1} devir grafinin numaralandırılması	49
Şekil 2.16. S_4 yıldız grafinin derecelendirilmesi	50
Şekil 2.17. S_{n+1} yıldız grafinin numaralandırılması	51
Şekil 2.18. K_4 tam grafinin derecelendirilmesi	51
Şekil 2.19. K_{n+1} tam grafinin numaralandırılması	52
Şekil 2.20. $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafinin derecelendirilmesi	53
Şekil 2.21. $K_{r+1,s+1}$ tam iki parçalı grafinin numaralandırılması	53
Şekil 2.22. $T_{3,2}$ larva grafinin derecelendirilmesi	54
Şekil 2.23. $T_{r,s}$ larva grafinin numaralandırılması	55
Şekil 2.24. $T_{r+1,s+1}$ larva grafinin numaralandırılması	55

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 3.1. $P_n, C_n, S_n, K_n, K_{r,s}$ graf çeşitlerinin GA_1, GA_2, GA_3 indeksi	57
Çizelge 3.2. $T_{r,s}$ grafının GA_1, GA_2, GA_3 indeksi	58
Çizelge 3.3. $P_n, C_n, S_n, K_n, K_{r,s}$ graf çeşitlerinin ABC, M_1 indeksi	59
Çizelge 3.4. $P_n, C_n, S_n, K_n, K_{r,s}$ graf çeşitlerinin $M_2, \Pi_1, \Pi_2, W, H, NK$ indeksi	59
Çizelge 3.5. $T_{r,s}$ grafının $ABC, M_1, M_2, \Pi_1, \Pi_2, W, NK$ indeksi	60

1. GİRİŞ

18. yüzyılda Rusya'nın kara bağlantısı olmayan Königsberg Şehri, Pregel Nehri'nin iki tarafı ve nehirdeki biri büyük biri küçük adalarda kurulmuştur. Büyük olan ada şehrin iki yakasına ikişer köprü; küçük olan ada ise birer köprü ile bağlanmış olup iki ada arasında, bu adaları birleştiren bir köprü bulunmaktadır.

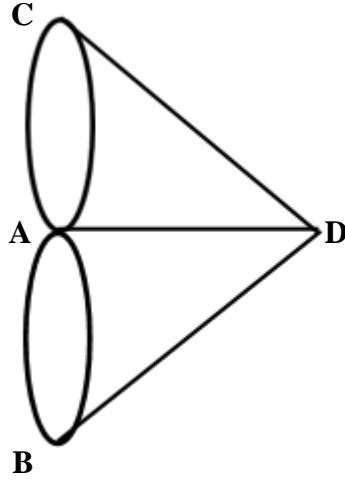


Şekil 1.1. Pregel Nehri

Bölge halkının aklına aşağıdaki soru takılmış ve bunun cevabını aramışlardır. Bu soru halkta hem merak uyandırmış hem de kendi aralarında bir eğlence haline gelmiştir.

“Herhangi bir yerden başlayarak, yedi köprünün hepsinden sadece birer kez geçip Königsberg şehrinin tüm bölümlerine uğradıktan sonra yolculuğun başladığı noktaya ulaşılabilir mi?”

Zamanın önde gelen matematikçilerinden Leonhard EULER (1707-1783) bu sorunun çözümünün olmadığını 1736 yılında “Königsberg Köprü Problemi” makalesini yayımlayarak cevaplamıştır. Bunun sonucunda Graf Teori ortaya çıkmıştır. Örnek olarak yukarıdaki soru aşağıdaki graf gösterimine sahiptir:



Şekil 1.2. Königsberg Köprü grafi

Günümüze kadar graflar üzerine sayıuz çalışma yapılmış ve diğ er bilim dallarındaki birçok problem graf teoriden etkin şekilde yararlanılarak çözü mü kavuşturulmuştur. Graf teorisinin kullanıldığı alanlara; pazarlamacı problemi, tesisat problemi; birçok benzeri optimizasyon problemleri, kimyasal atom ve moleküllerin çalışılması, dört renk problemi, kişilerin - toplumların aralarındaki ilişkilerin çalışılması örnek olarak verilebilir. Bu bölümde çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanıtılacak ve özellikler verilecektir.

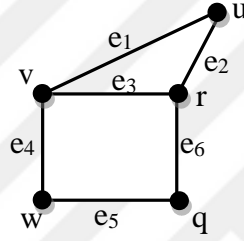
Aşağıdaki kısımda bu tezde kullanılacak olan bazı temel kavramları ele alacağız. Bu kavramlar hakkında daha kapsamlı bir bilgi istenirse şu kaynaklar yardımcı olabilir: Wilson, [Graph Theory 1736-1936, 1986], Chen, [Applied Graph Theory, 1976], West, Foulds, [Graph Theory Applications, 1992], Harary, [Graph Theory, 1994], Bollobas, [Modern Graph Theory, 1998], Berge, [The Theory of Graphs, 2001], Golumbic, Hartman, [Graph Theory, Combinatorics and Algorithms, 2005], Harris, Hirst, Mossinghoff, [Combinatorics and Graph Theory, 2008], Biggs, LLoyd, Bondy, Murty, [Graph Theory, 2008], Balakrishnan, Ranganathan, [A Textbook of Graph Theory, 2012] kaynaklarına başvurulabilir.

1.1. Giriş ve Temel Kavramlar

1.1.1. Tanım. Herhangi bir G *grafi (graph)* elemanlarına *köşeler (vertex)* adı verilen sonlu bir V kümesi ve köşelerin sıralanmamış çiftlerini eleman kabul eden (*kenar (edge)*) sonlu bir E kümesinden oluşur.

$$G = (V, E)$$

ile gösterilir.



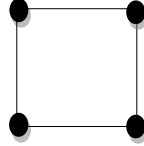
Şekil 1.3. 5 köşeli ve 6 kenarlı graf örneği

Şekil 1.3.'deki graf örneğinin köşe kümesi $V(G) = \{ u, v, w, q, r \}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \}$ 'dir.

1.1.2. Tanım. Herhangi bir i köşesini uç kabul eden kenarların sayısı i köşesinin *derecesini (degree)* gösterir ve $d(i)$ olarak gösterimi yapılır. Örnek olarak Şekil 1.3.'de $d(r) = 3$ ve $d(w) = 2$ 'dir.

1.1.3. Tanım. Herhangibir köşenin derecesi bir ise o köşeye *asılı köşe (pendant vertex)*; bu köşeye bitişik olan kenara *asılı kenar (pendant edge)* adı verilir.

1.1.4. Tanım. *düzenli (regular) graf* Herhangi bir G grafindaki tüm köşelerin derecesinin aynı olması durumudur, bu G grafinın tüm köşelerinin derecesi n ise grafa *n-düzenli (n-regular) graf* adı verilir.



Şekil 1.4. Düzenli ve iki-regüler graf

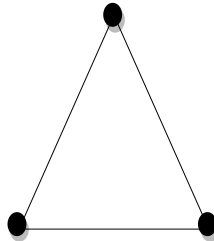
1.1.5. Tanım. Herhagi bir G grafinda v_1, v_2, \dots, v_k köşelerine $i = 1, 2, \dots, k$ için $v_i v_{i+1} \in E$ dizisine G grafinın *yolu* ad verilir. Eğer bir yolun tüm köşeleri farklı ise bu yola *patika (path)* adı verilir. n köşeli patika P_n şeklinde gösterilir.



Şekil 1.5. P_7 yol grafi

Çalışma boyunca patika için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 2$ alınacaktır.

1.1.6. Tanım. n köşeye sahip olan bir G grafi kapalı bir patikaysa bu grafa *devir (cycle) graf* adı verilir ve C_n şeklinde gösterilir.

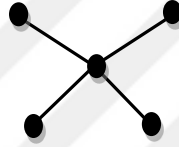


Şekil 1.6. C_3 devir grafi

Çalışma boyunca devir graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 3$ alınacaktır. Bunun sebebi $n = 1$ ve $n = 2$ için $C_n = P_n$ 'dir.

1.1.7. Tanım. Merkezde bulunan bir köşenin diğer bütün köşelere bağlandığı grafa **yıldız (star) graf** adı verilir ve S_n şeklinde gösterilir.

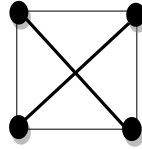
S_n grafında merkezde bulunan bir köşenin derecesi $n-1$, diğer köşelerin dereceleri ise 1 olur.



Şekil 1.7. S_5 yıldız grafi

Çalışma boyunca yıldız graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 4$ alınacaktır. Bunun sebebi $n = 1, 2, 3$ için $S_n = P_n$ 'dir.

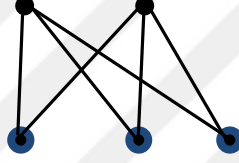
1.1.8. Tanım. Herhangi bir G grafındaki n köşelerin hepsi diğer köşeler ile bir kenar oluşturuyorsa bu grafa **tam (complete) graf** adı verilir ve K_n şeklinde gösterilir.



Şekil 1.8. K_4 tam grafi

Çalışma boyunca tam graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 4$ alınacaktır. Bunun sebebi $n = 1, 2$ için $K_n = P_n$ ve $n = 3$ için $K_n = C_n$ 'dir.

1.1.9. Tanım. Herhangi bir G grafının köşe kümesi A ve B benzeri alt köşe kümesine ayrılabilir ve A (B) kümesindeki bir köşe sadece B (A) kümesindeki bir köşe veya köşeler ile birleşebiliyorsa bu grafa **iki parçalı (bi-partite) graf** adı verilir. Eğer A kümesindeki bütün köşeler B kümesindeki köşeler ile birleşiyorsa bu grafa **tam iki parçalı (complete bi-partite) graf** adı verilir ve A kümesinin eleman sayısı r , B kümesindeki eleman sayısı s olmak üzere $K_{r,s}$ şeklinde gösterilir.



Şekil 1.9. $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafi

İki parçalı graflarda, A ve B kümelerinin köşeleri iki farklı renk ile gösterilmesi tercih edilen bir uygulamadır.

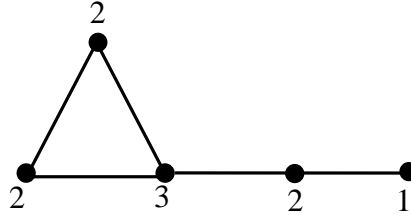
Çalışma boyunca r ve s köşe sayıları olmak üzere

$$s = \begin{cases} > 2, & r = 2 \\ \geq r, & r > 2 \end{cases}$$

olarak alınacaktır.

1.1.10. Tanım. Herhangi bir G grafının köşe kümesi A ve B benzeri iki alt köşe kümesine ayrılabilir ve A kümesindeki köşeler devir oluştururken, B kümesindeki köşeler patika oluşturuyorsa ve bu devir ile patikanın birer köşesi ortak ise bu grafa **larva**

(*tadpole*) *graf* adı verilir. Devir kısmındaki köşe sayısı r , patika kısmındaki köşe sayısı s olmak üzere larva graf $T_{r,s}$ şeklinde gösterilir.



Şekil 1.10. $T_{3,2}$ larva grafı

Çalışma boyunca $r \geq 3$ ve $s \geq 1$ alınacaktır. Bunun sebebi, diğer durumlarda $T_{r,s} = P_{r+s}$ olmasıdır.

Graf Teoreminin önemli uygulama alanlarından biri kimyasal uygulamalardır. Atom ve moleküllerin çeşitli özellikleri, graflar yardımı ile bu atom ve moleküllerin modellenmesi sonucunda teorik olarak elde edilebilir. Molekül ağırlığı, kaynama ve erime noktaları, atom yarıçapı gibi atom ve moleküllerin sınıflandırılmasında ve kimyasal birleşmelerinde kullanılan birçok sabit sayı, matematiksel formüller ile ifade edilebilir. Sabit sayılara, karşılık gelen graf modeller yardımı ile, literatürdek diğer yöntemlere kıyasla daha basit ve ekonomik bir şekilde ulaşılabilir. Bu hesaplamalarda, graf indeksleri ya da topolojik graf indeksleri adı verilen değişmeyen sayılardan yararlanılmaktadır. Bu indeksler vasıtasıyla farklı molekül sınıfları için ulaşılan sayısal değerler ile moleküllerin yukarıda bahsedilen kimyasal özelliklerini belirten sabit sayılar arasında bir bağıntı olması durumunda bu bağıntı yardımı ile hesaplanan matematiksel verilerden yararlanarak kimyasal özelliklere ulaşılabilir.

Bu çalışmada kullanacağımız topolojik graf indeksleri, **birinci**, **ikinci**, **üçüncü geometrik-aritmetik** indeksler, **ABC** indeksi, **birinci ve ikinci toplamsal Zagreb**

indeksleri, **birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb** indeksleri, *Wiener* indeksi, *Harary* indeksi ve *Narumi-Katayama* indeksidir.

Bu tezde patika, devir, yıldız, tam, iki parçalı tam ve larva graf türleri için **birinci, ikinci, üçüncü geometrik-aritmetik** indeks, *ABC* indeksi, **birinci ve ikinci toplamsal Zagreb** indeksleri, **birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb** indeksleri, *Wiener* indeksi, *Harary* indeksi ve *Narumi-Katayama* indeksi hesaplanmıştır. Ayrıca bu indekslerin tamsayı ve asal sayı değerleri belirlemiştir.

Tezin ikinci bölümündeki özel grafların 11 adet indeksin genelleştirilip ispatlanması bize aittir. Dördüncü bölümdeki teoremler ve ispatları bizim bulduğumuz orijinal sonuçlardır.

1.2. Grafların Topolojik İndeksleri

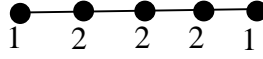
Burada ele alacağımız topolojik graf indeksleri, **birinci, ikinci, üçüncü geometrik-aritmetik** indeksler, *ABC* indeksi, **birinci ve ikinci toplamsal Zagreb** indeksleri, **birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb** indeksleri, *Wiener* indeksi, *Harary* indeksi ve *Narumi-Katayama* indeksidir.

1.2.1. Tanım. Bir G grafında belirli bir i köşesinin derecesi d_i ve i köşesine komşu olan diğer belirli bir j köşenin derecesi d_j olmak üzere;

$$GA_1(G) = \sum_{v_i, v_j \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i + d_j}$$

dir. Buna G grafının *geometrik-aritmetik indeksi* denilir.

Örneğin,



Şekil 1.11. P_5 yol grafinin derecelendirilmesi

$$\begin{aligned}
 GA_1(P_5) &= \sum_{v_i, v_j \in E(G)} \frac{2\sqrt{d_i d_j}}{d_i + d_j} \\
 &= 2 \left(\frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 1}}{2+1} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \\
 &= \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2
 \end{aligned}$$

bulunur.

1.2.2. Tanım. Bir G grafında belirli bir ij kenarının kendi dâhil tüm köşelere olan en kısa uzaklığı n_i ve belirli bir ji kenarının kendi dahil tüm köşelere olan en kısa uzaklığı n_j olmak üzere

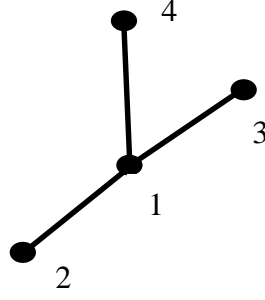
$$\begin{aligned}
 n_i(e) &= n_i(e, G) = |N(e, i, G)| = |\{ x \in V(G) \mid d(x, i) < d(x, j) \}| \\
 n_j(e) &= n_j(e, G) = |N(e, j, G)| = |\{ x \in V(G) \mid d(x, j) < d(x, i) \}|
 \end{aligned}$$

için

$$GA_2(G) = \sum_{ij \in E(G)} \frac{2\sqrt{n_i n_j}}{n_i + n_j}$$

dir. Buna G grafinin *geometrik-aritmetik ikinci indeksi* denilir.

Örneğin,



Şekil 1.12. S_4 grafının numaralandırılması

$$|N(e_{12}, 1)| = |\{ x \in V(G) \mid d(x,1) < d(x,2) \}| = |\{ 1, 3, 4 \}| = 3;$$

$$|N(e_{12}, 2)| = |\{ x \in V(G) \mid d(x,2) < d(x,1) \}| = |\{ 2 \}| = 1$$

$$|N(e_{13}, 1)| = |\{ x \in V(G) \mid d(x,1) < d(x,3) \}| = |\{ 1, 2, 4 \}| = 3;$$

$$|N(e_{13}, 3)| = |\{ x \in V(G) \mid d(x,3) < d(x,1) \}| = |\{ 3 \}| = 1$$

$$|N(e_{14}, 1)| = |\{ x \in V(G) \mid d(x,1) < d(x,4) \}| = |\{ 1, 2, 3 \}| = 3;$$

$$|N(e_{14}, 4)| = |\{ x \in V(G) \mid d(x,4) < d(x,1) \}| = |\{ 4 \}| = 1$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} GA_2(S_4) &= \sum_{ij \in E(G)} \frac{2\sqrt{n_i n_j}}{n_i + n_j} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3 \cdot 1}}{3+1} + \frac{\sqrt{3 \cdot 1}}{3+1} + \frac{\sqrt{3 \cdot 1}}{3+1} \right) \\ &= \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

1.2.3. Tanım. Bir G grafında belirli bir ij kenarının kendi dâhil tüm kenarlara olan en kısa uzaklığı m_i olmak üzere;

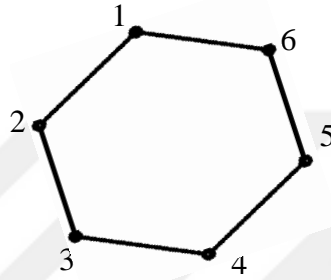
$$m_i = |\{ f \in E(G) \mid d(i,f) < d(j,f) \}|$$

için

$$GA_3(G) = \sum_{ij \in E(G)} \frac{2\sqrt{m_i m_j}}{m_i + m_j}$$

şeklinde tanımlanır. Buna *G* grafinin *geometrik-aritmetik üçüncü indeksi* denilir.

Örneğin,



Şekil 1.13. C_6 grafinin numaralandırılması

e_{12} kenarı için

$$m_1 = |\{ f \in E(G) \mid d(1,f) < d(2,f) \}| = |\{ f_{16}, f_{65} \}| = 2;$$

$$m_2 = |\{ f \in E(G) \mid d(2,f) < d(1,f) \}| = |\{ f_{23}, f_{34} \}| = 2$$

e_{23} kenarı için

$$m_2 = |\{ f \in E(G) \mid d(2,f) < d(3,f) \}| = |\{ f_{21}, f_{16} \}| = 2;$$

$$m_3 = |\{ f \in E(G) \mid d(3,f) < d(2,f) \}| = |\{ f_{34}, f_{45} \}| = 2$$

e_{34} kenarı için

$$m_3 = |\{ f \in E(G) \mid d(3,f) < d(4,f) \}| = |\{ f_{32}, f_{21} \}| = 2;$$

$$m_4 = |\{ f \in E(G) \mid d(4,f) < d(3,f) \}| = |\{ f_{45}, f_{56} \}| = 2$$

e_{45} kenarı için

$$m_4 = |\{ f \in E(G) \mid d(4,f) < d(5,f) \}| = |\{ f_{43}, f_{32} \}| = 2;$$

$$m_5 = |\{ f \in E(G) \mid d(5,f) < d(4,f) \}| = |\{ f_{56}, f_{61} \}| = 2$$

e_{56} kenarı için

$$m_5 = |\{ f \in E(G) \mid d(5,f) < d(6,f) \}| = |\{ f_{54}, f_{43} \}| = 2;$$

$$m_6 = |\{ f \in E(G) \mid d(6,f) < d(5,f) \}| = |\{ f_{61}, f_{12} \}| = 2$$

e_{61} kenarı için

$$m_6 = |\{ f \in E(G) \mid d(6,f) < d(1,f) \}| = |\{ f_{65}, f_{54} \}| = 2;$$

$$m_1 = |\{ f \in E(G) \mid d(1,f) < d(6,f) \}| = |\{ f_{12}, f_{23} \}| = 2$$

olur. Dolayısıyla

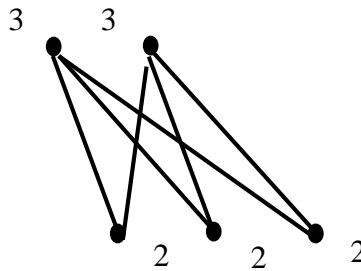
$$\begin{aligned} GA_3(C_6) &= \sum_{ij \in E(G)} \frac{2\sqrt{m_i m_j}}{m_i + m_j} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} + \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} \right) \\ &= 2 \left(6 \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

bulunur.

1.2.4. Tanım. Bir G grafında belirli bir i köşesinin derecesi d_i ve i köşesine komşu olan diğer belirli bir j köşenin derecesi d_j olmak üzere;

$$ABC(G) = \sum_{ij \in E(G)} \sqrt{\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} - \frac{2}{d_i d_j}}$$

dir. Buna G grafının *atom-bağ bağlantılılığı* (*atom-bond connectivity*) denilir. Örneğin,



Şekil 1.14. $K_{2,3}$ grafının derecelendirilmesi

$$\begin{aligned}
ABC(K_{2,3}) &= \sum_{ij \in E(G)} \sqrt{\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j} - \frac{2}{d_i d_j}} \\
&= 2 \cdot 3 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{2 \cdot 3}} \\
&= \frac{6}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

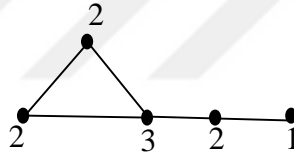
bulunur.

1.2.5. Tanım. Bir G grafında belirli bir i köşesinin derecesi d_i olmak üzere;

$$M_1(G) = \sum_{i \in V(G)} d_i^2$$

dir. Buna G grafının *birinci Zagreb indeksi* denilir.

Örneğin,



Şekil 1.15. $T_{3,2}$ grafının derecelendirilmesi

$$\begin{aligned}
M_1(T_{3,2}) &= \sum_{i \in V(G)} d_i^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 \\
&= 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 3^2 \\
&= 3 \cdot 4 + 9 + 1 \\
&= 22
\end{aligned}$$

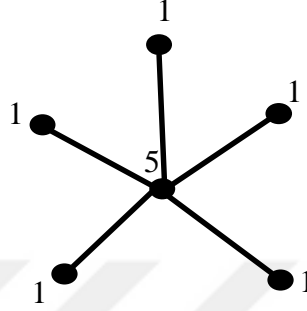
bulunur.

1.2.6. Tanım. Bir G grafında belirli bir i köşesinin derecesi d_i ve i köşesine komşu olan diğer belirli bir j köşenin derecesi d_j olmak üzere;

$$M_2(G) = \sum_{ij \in E(G)} d_i \cdot d_j$$

dir. Buna *G* grafinın ikinci Zagreb indeksi denilir.

Örneğin,



Şekil 1.16. S_6 grafinın derecelendirilmesi

$$\begin{aligned} M_2(S_6) &= \sum_{ij \in E(G)} d_i \cdot d_j \\ &= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \\ &= 25 \\ &= 5^2 \end{aligned}$$

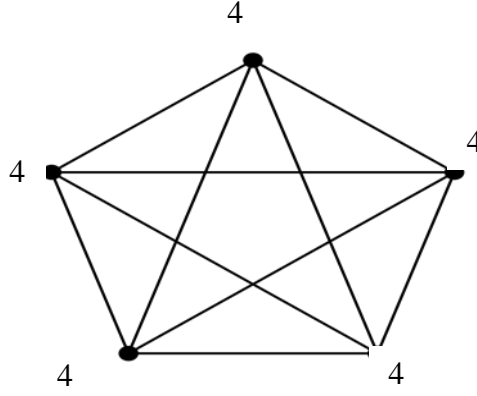
bulunur.

1.2.7. Tanım. Bir G grafinında belirli bir i köşesinin derecesi d_i olmak üzere;

$$\Pi_1(G) = \prod_{i \in V(G)} d_i^2$$

dir. Buna *G* grafinın birinci çarpımsal Zagreb indeksi denilir.

Örneğin,



Şekil 1.17. C_5 grafının derecelendirilmesi

$$\begin{aligned}
 \Pi_1(C_5) &= \prod_{i \in V(G)} d_i^2 \\
 &= 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \\
 &= 4^{10}
 \end{aligned}$$

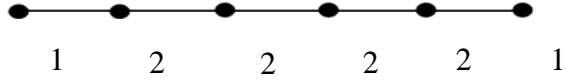
bulunur.

1.2.8. Tanım. Bir G grafında belirli bir i köşesinin derecesi d_i ve i köşesine komşu olan diğer belirli bir j köşenin derecesi d_j olmak üzere;

$$\Pi_2(G) = \prod_{ij \in E(G)} d_i \cdot d_j$$

dir. Buna G grafının ikinci çarpımsal Zagreb indeksi denilir

Örneğin,



Şekil 1.18. P_6 grafinin derecelendirilmesi

$$\begin{aligned}\Pi_2(P_6) &= \prod_{ij \in E(G)} d_i \cdot d_j \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2^8\end{aligned}$$

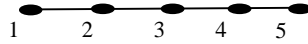
bulunur.

1.2.9. Tanım. Bir G grafinde belirli bir i köşesinin farklı diğer tüm köşelere uzaklıkları toplamı $d_G(i, j)$ olmak üzere;

$$W(G) = \sum_{i, j \in V(G)} d_G(i, j)$$

dir. Buna G grafinin *Wiener indeksi* denilir.

Örneğin,



Şekil 1.19. P_5 grafinin numaralandırılması

$$\begin{aligned}W(P_5) &= \sum_{i, j \in V(G)} d_G(i, j) \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 1 \\ &= 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \\ &= 20\end{aligned}$$

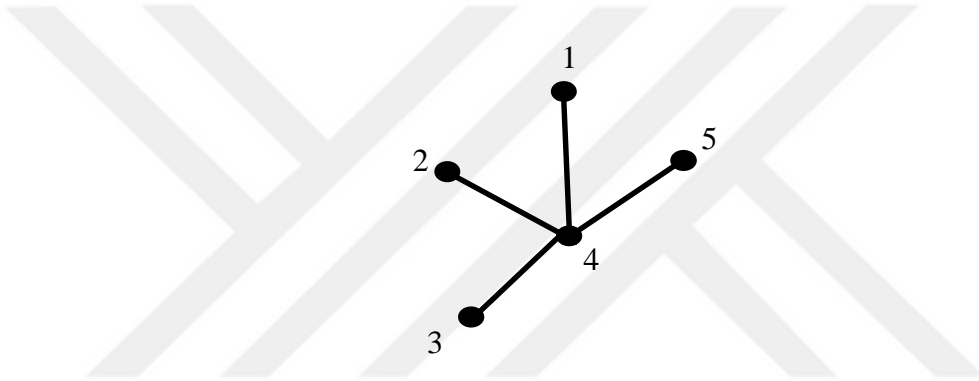
bulunur.

1.2.10. Tanım. Bir G grafında belirli i, j köşeleri arasındaki uzaklık $d_G(i, j)$ olmak üzere

$$H(G) = \sum_{i,j \in V(G)} \frac{1}{d_G(i, j)}$$

dir. Buna G grafının *Harary indeksi* denilir.

Örneğin,



Şekil 1.20. S_5 grafının numaralandırılması

$$\begin{aligned} H(S_5) &= \sum_{i,j \in V(G)} \frac{1}{d_G(i, j)} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \\ &= 4 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

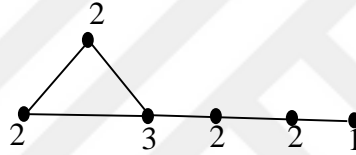
bulunur.

1.2.11. Tanım. G herhangi bir basit graf; döngü ve katlı kenarlar içermeyen bir graf olsun. G grafi için tüm köşelerinin ve derecelerinin çarpılmasıyla oluşan sayıya **G grafının Narumi-Katayama indeksi** denilir ve $NK(G)$ ile şekilde gösterilir. Yani

$$NK(G) = \prod_{u \in V(G)} d(u)$$

şeklindedir.

Örneğin,



Şekil 1.21. $T_{3,3}$ grafının derecelendirilmesi

$$NK(G) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2^2 \cdot 2^2$$

bulunur.

2. GRAFLARIN TOPOLOJİK İNDEKSLERİNİN HESAPLANMASI

2.1. Giriş. $P_n, C_n, S_n, K_n, K_{r,s}, T_{r,s}$ graflarının incelemekte olduğumuz topolojik indeksleri aşağıdaki şekildedir.

2.2. G Grafının Geometrik-Aritmetik Birinci İndeksi

2.2.1. Teorem. a) $GA_1(P_n) = \begin{cases} 1 & , n = 2 \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} + (n-3) & , n \geq 3 \end{cases}$

b) $GA_1(C_n) = n$

c) $GA_1(S_n) = 2 \frac{\sqrt{(n-1)^3}}{n}$

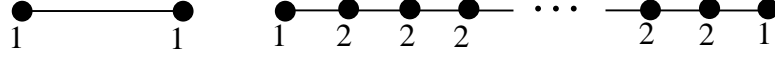
d) $GA_1(K_n) = \binom{n}{2}$

e) $GA_1(K_{r,s}) = 2 \frac{rs\sqrt{rs}}{r+s}$

f) $GA_1(T_{r,s}) = 2 \left[\frac{1}{2} \cdot (r+s-4) + 3 \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right]$

şeklindedir.

İspat. a) P_n 'de $n=2$ için şekilden de görüldüğü gibi $GA_1(P_2) = \frac{2\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} = 1$ olur.



P_2 yol grafi

P_n yol grafi

Şekil 2.1. P_2 ve P_n yol grafinin derecelendirilmesi

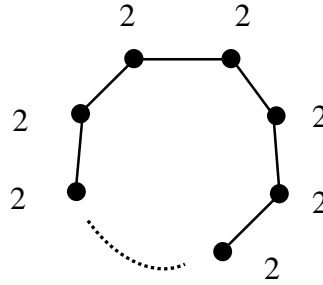
$n \geq 3$ ise iki uç kenar ve $(n-3)$ tane ara kenar bulunduğundan köşe dereceleri sayılarak

$$GA_1(P_n) = 2 \left(2 \frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{1+2} \right) + (n-3) \left(2 \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} \right)$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} + (n-3)$$

bulunur.

b) C_n , iki-regüler bir graf olduğundan;

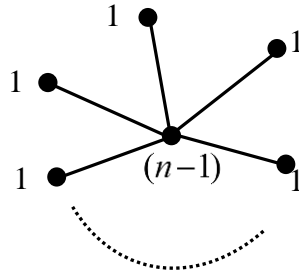


Şekil 2.2. C_n devir grafinin derecelendirilmesi

$$GA_1(C_n) = n \frac{2\sqrt{2 \cdot 2}}{2+2} = n$$

bulunur.

c) S_n 'de uç dereceli 1 ve $(n-1)$ olan $(n-1)$ tane kenar olduğundan;



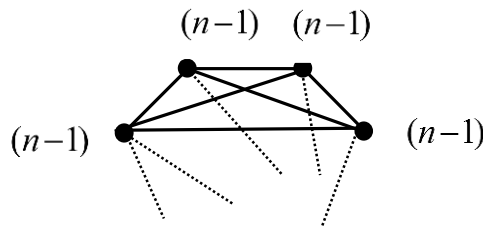
Şekil 2.3. S_n yıldız grafının derecelendirilmesi

$$GA_1(S_n) = (n-1) \frac{2\sqrt{1 \cdot (n-1)}}{1 + (n-1)}$$

$$= 2 \frac{\sqrt{(n-1)^3}}{n}$$

bulunur.

d) K_n 'de $\binom{n}{2}$ tane kenar olup K_n , $(n-1)$ -regüler olduğundan her bir kenarının uç derecelerinin $(n-1)$ olduğu hatırlanırsa;



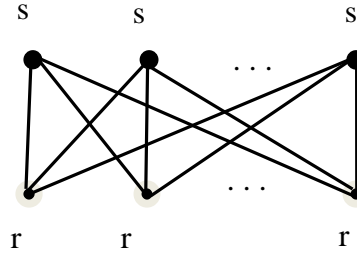
Şekil 2.4. K_n tam grafının derecelendirilmesi

$$GA_1(K_n) = \binom{n}{2} \cdot \frac{2\sqrt{(n-1) \cdot (n-1)}}{(n-1) + (n-1)}$$

$$= (n-1)$$

bulunur.

e) $K_{r,s}$ 'de uç dereceleri r ve s olan $r \cdot s$ tane kenar olduğundan

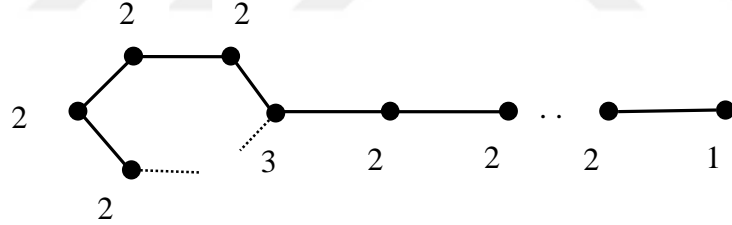


Şekil 2.5. $K_{r,s}$ tam iki parçalı grafının derecelendirilmesi

$$GA_1(K_{r,s}) = r \cdot s \frac{2\sqrt{r \cdot s}}{r + s}$$

bulunur.

f) $T_{r,s}$ 'de uç dereceleri 1 ve 2 olan 1 tane, 2 ve 2 olan $(r + s - 4)$ tane, 2 ve 3 olan 3 tane kenar olduğundan;



Şekil 2.6. $T_{r,s}$ larva grafının derecelendirilmesi

$$\begin{aligned} GA_1(T_{r,s}) &= 2 \left[(r + s - 4) \frac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2 + 2} + 3 \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \cdot (r + s - 4) + 3 \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right] \end{aligned}$$

bulunur.

2.3. G Grafının Geometrik-Aritmetik İkinci İndeksi

2.3.1. Teorem. a) $GA_2(P_n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k \cdot (n-k)}$

b) $GA_2(C_n) = n$

c) $GA_2(S_n) = 2 \frac{\sqrt{(n-1)^3}}{n}$

d) $GA_2(K_n) = \binom{n}{2}$

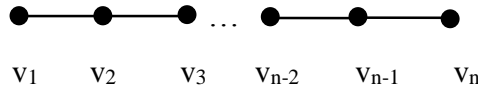
e) $GA_2(K_{r,s}) = 2 \frac{r \cdot s \sqrt{rs}}{r+s}$

f)

$$GA_2(T_{r,s}) = \begin{cases} 2 \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{r-1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{r-1}{2}\right)}{\frac{r-1}{2} + \frac{r-1}{2}} + (r-1) \frac{\sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right) \cdot \left(s + \frac{r-1}{2}\right)}}{\frac{r-1}{2} + s + \frac{r-1}{2}} + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sqrt{(r+k) \cdot (s-k)}}{(r+k) + (s-k)} \right] & , r \text{ tek} \\ 2 \left[r \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \left(s + \frac{r}{2}\right)}}{\frac{r}{2} + s + \frac{r}{2}} + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sqrt{(r+k) \cdot (s-k)}}{r+k+s-k} \right] & , r \text{ çift} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. a) P_n yol grafi verilsin.



Şekil 2.7. P_n yol grafinin numaralandırılması

P_n 'de herhangi bir uv kenarı için $(1 \leq u \leq n-1, 2 \leq v \leq n)$ $|N(e_{uv}, u)|, |N(e_{uv}, v)|$ sayıları

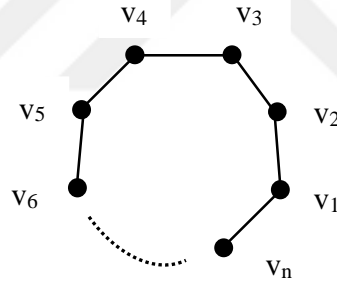
$$\begin{aligned}
|N(e_{12}, 1)| &= 1 & , |N(e_{12}, 2)| &= (n-1) \\
|N(e_{23}, 2)| &= 2 & , |N(e_{23}, 3)| &= (n-2) \\
|N(e_{34}, 3)| &= 3 & , |N(e_{34}, 4)| &= (n-3) \\
&\vdots & & \vdots \\
|N(e_{(n-1)n}, (n-1))| &= (n-1) & , |N(e_{(n-1)n}, n)| &= 1
\end{aligned}$$

şeklinde olduğundan

$$\begin{aligned}
GA_2(P_n) &= 2 \left[\frac{\sqrt{1 \cdot (n-1)}}{1+(n-1)} + \frac{\sqrt{2 \cdot (n-2)}}{2+(n-2)} + \frac{\sqrt{3 \cdot (n-3)}}{3+(n-3)} + \dots + \frac{\sqrt{(n-1) \cdot n}}{(n-1)+n} \right] \\
&= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k \cdot (n-k)}
\end{aligned}$$

bulunur.

b) C_n 'de herhangi uv kenarı için;



Şekil 2.8. C_n devir grafının numaralandırılması

n tek ise $|N(e_{uv}, u)| = \frac{(n-1)}{2}$, $|N(e_{uv}, v)| = \frac{(n-1)}{2}$ ve n tane kenarı olduğundan;

$$\begin{aligned}
GA_2(C_n) &= 2 \cdot n \frac{\sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right)} \\
&= 2 \cdot n \frac{\frac{n-1}{2}}{n-1} \\
&= n
\end{aligned}$$

olur.

n çift ise $|N(e_{uv}, u)| = \frac{n}{2}$, $|N(e_{uv}, v)| = \frac{n}{2}$ ve n tane kenarı olduğundan;

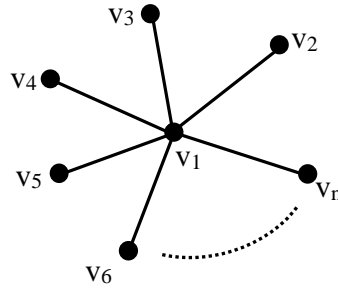
$$\begin{aligned} GA_2(C_n) &= 2 \cdot n \frac{\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{2}\right)}}{\frac{n}{2} + \frac{n}{2}} \\ &= 2 \cdot n \frac{\frac{n}{2}}{n} \\ &= n \end{aligned}$$

olur. Böylelikle

$$GA_2(C_n) = n$$

bulunur.

c) S_n 'de $n \geq 4$ için;



Şekil 2.9. S_n yıldız grafının numaralandırılması

$$|N(e_{12}, 1)| = (n-1)$$

$$|N(e_{12}, 2)| = (n-1)$$

$$|N(e_{13}, 1)| = (n-1)$$

$$|N(e_{13}, 3)| = (n-2)$$

$$|N(e_{14}, 1)| = (n-1)$$

$$|N(e_{14}, 4)| = (n-3)$$

⋮

⋮

$$|N(e_{1n}, 1)| = (n-1)$$

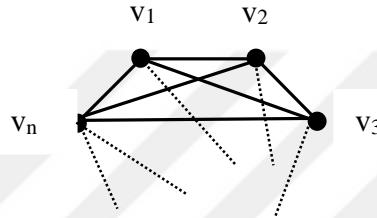
$$|N(e_{1n}, n)| = 1$$

olur. Dolayısıyla $(n-1)$ tane kenar olduğundan

$$\begin{aligned} GA_2(S_n) &= (n-1) \frac{2\sqrt{(n-1) \cdot 1}}{(n-1)+1} \\ &= 2 \frac{\sqrt{(n-1)^3}}{n} \end{aligned}$$

bulunur.

d) K_n 'de $n \geq 4$ için;



Şekil 2.10. K_n tam grafının numaralandırılması

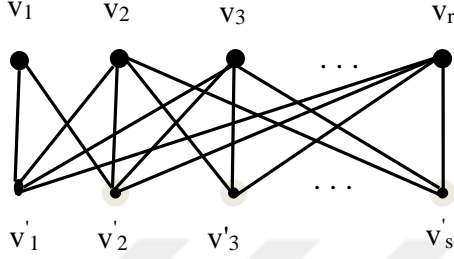
$$\begin{array}{ll} |N(e_{12}, 1)| = 1 & |N(e_{12}, 2)| = 1 \\ |N(e_{23}, 2)| = 1 & |N(e_{23}, 3)| = 1 \\ |N(e_{34}, 3)| = 1 & |N(e_{34}, 4)| = 1 \\ \vdots & \vdots \\ |N(e_{(n-1)n}, n)| = 1 & |N(e_{(n-1)n}, n)| = 1 \end{array}$$

olur. K_n 'de kenar sayısı köşegen ile kenar sayısının toplamıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} GA_2(K_n) &= 2 \left[\left(\frac{n \cdot (n-3)}{2} + n \right) \cdot \frac{\sqrt{1 \cdot 1}}{1+1} \right] \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ &= \binom{n}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

e) $K_{r,s}$ 'de herhangi bir uv kenarı için $|N(e_{uv}, u)| = r$, $|N(e_{uv}, v)| = s$ olup $r \cdot s$ tane kenar olduğundan;



Şekil 2.11. $K_{r,s}$ tam iki parçalı grafının numaralandırılması

$$GA_2(K_{r,s}) = 2 \frac{r \cdot s \sqrt{rs}}{r + s}$$

bulunur.

f) Teoremin bu şikkının ispatı yukarıdaki teoremlerin ispatlarına benzer şekilde görülür.

2.4. G Grafının Geometrik-Aritmetik Üçüncü İndeksi

2.4.1. Teorem. a) $GA_3(P_n) = \frac{2}{n-2} \sum_{i=0}^{n-2} \sqrt{i \cdot (n-2-i)}$

b) $GA_3(C_n) = n$

c) $GA_3(S_n) = 0$

d) $GA_3(K_n) = \binom{n}{2}$

$$e) GA_3(K_{r,s}) = 2 \frac{rs\sqrt{(r-1) \cdot (s-1)}}{r+s-2}$$

f)

$$GA_3(T_{r,s}) = \begin{cases} 2 \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{r-1}{2}\right)} + (r-1) \frac{\sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right) \cdot \left(s + \frac{r-1}{2}\right)}}{\frac{r-1}{2} + s + \frac{r-1}{2}} + \sum_{k=0}^{s-1} \sqrt{(r+k) \cdot (s-k-1)} \right] & , r \text{ tek} \\ 2 \cdot r \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \left(s + \frac{r}{2}\right)}}{\frac{r}{2} + s + \frac{r}{2}} + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sqrt{(r+k) \cdot (s-k)}}{r+k+s-k} & , r \text{ çift} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. a) P_n yol grafında $n=2$ için GA_3 indeksinin tanımı gereği $GA_3(P_2)$ ifadesi tanımsızdır. (Çünkü en az iki tane kenar yoktur.) $n \geq 3$ için Şekil 2.7. göz önüne alınırsa;

$$e_{12} \text{ kenarı için } m_1 = 0; \quad m_2 = (n-2)$$

$$e_{23} \text{ kenarı için } m_2 = 1; \quad m_3 = (n-2-1)$$

$$e_{34} \text{ kenarı için } m_3 = 2; \quad m_4 = (n-2-2)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$e_{(n-1)n} \text{ kenarı için } m_{(n-1)} = (n-2); \quad m_n = (n-2-(n-2))$$

olur. Dolayısıyla

$$GA_3(P_n) = 2 \left[\frac{\sqrt{0 \cdot (n-2)}}{0 + (n-2)} + \frac{\sqrt{1 \cdot (n-2-1)}}{1 + (n-2-1)} + \frac{\sqrt{2 \cdot (n-2-2)}}{2 + (n-2-2)} + \dots + \frac{\sqrt{(n-2) \cdot (n-2-(n-2))}}{(n-2) + (n-2-(n-2))} \right]$$

$$= \frac{2}{n-2} \sum_{i=0}^{n-2} \sqrt{i \cdot (n-2-i)}$$

bulunur.

b) C_n 'de herhangi bir uv kenarı için ve n tane kenar olduğundan ve Şekil 2.8. göz önüne alınırsa;

n tek ise $m_u = m_v = \frac{(n-2)}{2}$ ise

$$GA_3(C_n) = 2 \cdot n \frac{\sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)}}{\left(\frac{n-2}{2}\right) + \left(\frac{n-2}{2}\right)}$$

$$= 2 \cdot n \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)}{n-2}$$

$$= n$$

olur.

n çift ise $m_u = m_v = \frac{(n-1)}{2}$ ise

$$GA_3(C_n) = 2 \cdot n \frac{\sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\left(\frac{n-1}{2}\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

$$= 2 \cdot n \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)}{n-1}$$

$$= n$$

olur. Böylelikle

$$GA_3(C_n) = n$$

bulunur.

c) S_n 'de Şekil 2.9. göz önüne alınır;

$$e_{12} \text{ kenarı için } m_1 = (n-2); \quad m_2 = 0$$

$$e_{23} \text{ kenarı için } m_2 = (n-2); \quad m_3 = 0$$

$$e_{34} \text{ kenarı için } m_3 = (n-2); \quad m_4 = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$e_{(n-1)n} \text{ kenarı için } m_{(n-1)} = (n-2); \quad m_n = 0$$

olur. O halde $(n-1)$ tane kenar olduğundan

$$\begin{aligned} GA_3(S_n) &= 2 \cdot (n-1) \frac{(n-2) \cdot 0}{n-2+0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

d) K_n 'de Şekil 2.10. göz önüne alınır; herhangi bir uv kenarı için $m_i = m_j$ olur. K_n 'de kenar sayısı; köşegen ve kenar sayısının toplamıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} GA_3(K_n) &= 2 \cdot \left[\left(\frac{n \cdot (n-3)}{2} + n \right) \left(\frac{\sqrt{m_i \cdot m_i}}{m_i + m_i} \right) \right] \\ &= 2 \cdot \left(\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ &= \binom{n}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

e) $K_{r,s}$ 'de Şekil 2.11. göz önüne alınırsa; herhangi bir uv kenarı için $m_u = (r-1)$, $m_v = (s-1)$ olup $r \cdot s$ tane kenar olduğundan;

$$GA_3(K_{r,s}) = 2 \frac{r \cdot s \sqrt{(r-1)(s-1)}}{r+s-2}$$

bulunur.

f) Teoremin bu şıkkının ispatı yukarıdaki teoremlerin ispatlarına benzer şekilde görülür.

2.5. G Grafının Atom-Bağ Bağlantılığı (Atom-Bond Connectivity) İndeksi

2.5.1. Teorem. a) $ABC(P_n) = \begin{cases} 0 & , n = 2 \\ \frac{n-1}{\sqrt{2}} & , n \geq 3 \end{cases}$

b) $ABC(C_n) = \frac{n}{\sqrt{2}}$

c) $ABC(S_n) = \sqrt{(n-1) \cdot (n-2)}$

d) $ABC(K_n) = \frac{\sqrt{2}}{2} n \sqrt{n-2}$

e) $ABC(K_{r,s}) = \begin{cases} 0 & , r = s \\ rs \sqrt{\frac{r+s-2}{rs}} & , r \neq s, r \geq 2 \end{cases}$

f) $ABC(T_{r,s}) = \frac{r+s}{\sqrt{2}}$

şeklindedir.

İspat. a) P_n 'de Şekil 2.1. göz önüne alınır; $n=2$ için $ABC(P_2)=\sqrt{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{2}{1\cdot 1}}=0$

olur. $n\geq 3$ ise iki uç kenar ve $(n-3)$ tane ara kenar bulunduğundan

$$\begin{aligned} ABC(P_n) &= 2\sqrt{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{2}{1\cdot 2}} + (n-3)\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{2\cdot 2}} \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{2}} + (n-3)\sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(n-1)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

bulunur.

b) C_n 'de Şekil 2.2. göz önüne alınır ve C_n iki-regüler bir graf olduğundan;

$$\begin{aligned} ABC(C_n) &= n\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{2\cdot 2}} \\ &= n\sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

bulunur.

c) S_n 'de Şekil 2.3. göz önüne alınır ve S_n 'de uç dereceli 1 ve $(n-1)$ olan $(n-1)$ tane kenar olduğundan;

$$\begin{aligned} ABC(C_n) &= (n-1)\sqrt{\frac{1}{1}+\frac{1}{(n-1)}-\frac{2}{1\cdot (n-1)}} \\ &= (n-1)\sqrt{1-\frac{1}{(n-1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n-1)\sqrt{\frac{(n-2)}{(n-1)}} \\
&= (n-1)\sqrt{(n-1)\cdot(n-2)}
\end{aligned}$$

bulunur.

d) K_n 'de Şekil 2.4. göz önüne alınırsa ve K_n 'de $\binom{n}{2}$ tane kenar olup; K_n , $(n-1)$ -regüler olduğundan her bir kenarının uç derecelerinin $(n-1)$ olduğu hatırlanırsa;

$$\begin{aligned}
ABC(K_n) &= \binom{n}{2} \sqrt{\frac{1}{(n-1)} + \frac{1}{(n-1)} - \frac{2}{(n-1)\cdot(n-1)}} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)}{2} \sqrt{\frac{2}{(n-1)} - \frac{2}{(n-1)^2}} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)}{2} \sqrt{\frac{2}{(n-1)} - \frac{2}{(n-1)^2}} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)}{2} \sqrt{\frac{2n-2-2}{(n-1)^2}} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)}{2} \sqrt{\frac{2n-4}{(n-1)^2}} \\
&= \frac{n}{2} \sqrt{2n-4} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot n \cdot \sqrt{n-2}
\end{aligned}$$

bulunur.

e) $K_{r,s}$ 'de Şekil 2.5. göz önüne alınırsa $K_{r,s}$ 'de uç dereceleri r ve s olan $r \cdot s$ tane kenar olduğundan;

$$\begin{aligned} r \neq s \text{ ve } r \geq 2 \text{ için } ABC(K_{r,s}) &= r \cdot s \sqrt{\frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{2}{r \cdot s}} \\ &= r \cdot s \sqrt{\frac{s+r-2}{r \cdot s}} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} r = s \text{ için } ABC(K_{r,r}) &= r \cdot r \sqrt{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{2}{r \cdot r}} \\ &= r^2 \sqrt{\frac{r+r-2}{r^2}} \\ &= r \sqrt{2r-2} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$ABC(K_{r,s}) = \begin{cases} 0 & , r = s \\ rs \sqrt{\frac{r+s-2}{rs}} & , r \neq s, r \geq 2 \end{cases}$$

bulunur.

f) $T_{r,s}$ 'de Şekil 2.5. göz önüne alınırsa $T_{r,s}$ 'de uç dereceleri 1 ve 2 olan 1 tane, 2 ve 2 olan $(r+s-4)$ tane, 2 ve 3 olan 3 tane kenar olduğundan;

$$ABC(T_{r,s}) = \sqrt{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{2}{1 \cdot 2}} + 3 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{2 \cdot 3}} + (r+s-4) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{2 \cdot 2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1 + \frac{1}{2} - 1} + 3\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}} + (r+s-4)\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\frac{1}{\sqrt{2}} + (r+s-4)\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{r+s}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

bulunur.

2.6. G Grafının Birinci Zagreb İndeksi

2.6.1. Teorem. a) $M_1(P_n) = 4n - 6$

b) $M_1(C_n) = 4n$

c) $M_1(S_n) = n(n-1)$

d) $M_1(K_n) = n(n-1)^2$

e) $M_1(K_{r,s}) = rs(r+s)$

f) $M_1(T_{r,s}) = 1 \cdot 1^2 + (r+s-2) \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2$

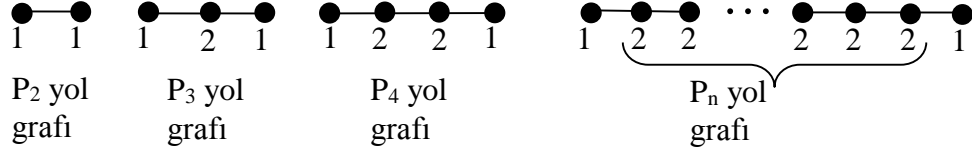
şeklindedir.

İspat. a) P_n 'de şekilden de görüldüğü gibi

$$n = 2 \text{ için } M_1(P_2) = 1^2 + 1^2 ,$$

$$n = 3 \text{ için } M_1(P_3) = 1^2 + 2^2 + 1^2 ,$$

$$n = 4 \text{ için } M_1(P_4) = 1^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 \text{ olup}$$



Şekil 2.12. P_2 , P_3 , P_4 ve P_n yol grafinin derecelendirilmesi

$n \geq 2$ için P_n derecesi bir olan iki tane köşe, derecesi iki olan $(n-2)$ tane köşe bulunduğundan;

$$\begin{aligned} M_1(P_n) &= 2 \cdot 1 + (n-2) \cdot 2^2 \\ &= 4n-6 \end{aligned}$$

bulunur.

b) C_n 'de Şekil 2.2'den görüldüğü gibi ve C_n iki-regüler bir graf olduğundan;

$$\begin{aligned} M_1(C_n) &= n \cdot 2^2 \\ &= 4n \end{aligned}$$

bulunur.

c) S_n 'de Şekil 2.3'den görüldüğü gibi uç derecesi bir olan $(n-1)$ tane köşe, derecesi $(n-1)$ olan bir tane köşe olduğundan;

$$\begin{aligned} M_1(S_n) &= (n-1) \cdot 1^2 + 1 \cdot (n-1)^2 \\ &= n \cdot (n-1) \end{aligned}$$

bulunur.

d) K_n 'de Şekil 2.4'den görüldüğü gibi derecesi $(n-1)$ olan n tane köşe olduğundan;

$$M_1(K_n) = n \cdot (n-1)^2$$

bulunur.

e) $K_{r,s}$ 'de Şekil 2.5'den görüldüğü gibi derecesi r olan s tane köşe, derecesi s olan r tane köşe olduğundan;

$$\begin{aligned} M_1(K_{r,s}) &= s \cdot r^2 + r \cdot s^2 \\ &= r \cdot s + (r+s) \end{aligned}$$

bulunur.

f) $T_{r,s}$ 'de Şekil 2.6'dan görüldüğü gibi derecesi bir olan bir tane köşe, derecesi iki olan $(r+s-2)$ tane köşe, derecesi 3 olan bir tane köşe olduğundan;

$$M_1(T_{r,s}) = 1 \cdot 3^2 + (r+s-2) \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^2$$

bulunur.

2.7. G Grafının İkinci Zagreb İndeksi

$$\mathbf{2.7.1. Teorem. a) } M_2(P_n) = \begin{cases} 1 & , n = 2 \\ 4n - 8 & , n \geq 3 \end{cases}$$

$$\mathbf{b) } M_2(C_n) = 4n$$

$$\text{c) } M_2(S_n) = (n-1)^2$$

$$\text{d) } M_2(K_n) = \frac{n(n-1)^3}{2}$$

$$\text{e) } M_2(K_{r,s}) = (rs)^2$$

$$\text{f) } M_2(T_{r,s}) = 3(2 \cdot 3) + (r+s-4)(2 \cdot 2) + 1(2 \cdot 1)$$

şeklindedir.

İspat. a) P_n 'de Şekil 2.12'den görüldüğü gibi

$$n = 2 \text{ için } M_2(P_2) = 1 \cdot 1 = 1 ,$$

$$n = 3 \text{ için } M_2(P_3) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4 ,$$

$$n = 4 \text{ için } M_2(P_4) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 4 + 2 = 8 \text{ olup}$$

$n \geq 3$ için P_n 'de iki uç kenar ve $(n-3)$ tane ara kenar bulunduğu;

$$\begin{aligned} M_2(P_n) &= 1 \cdot 2 + \underbrace{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot 2}_{(n-3) \text{ tane}} + 2 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 2 + (n-3) \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ &= 4n-8 \end{aligned}$$

bulunur.

b) C_n 'de Şekil 2.2 göz önüne alınırsa ve C_n iki-regüler bir graf olduğundan;

$$\begin{aligned} M_2(C_n) &= n \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 4n \end{aligned}$$

bulunur.

c) S_n 'de Şekil 2.3'den görüldüğü gibi uç derecesi bir ve $(n-1)$ olan $(n-1)$ tane kenar olduğundan;

$$\begin{aligned} M_2(S_n) &= 1 \cdot (n-1) \cdot (n-1) \\ &= (n-1)^2 \end{aligned}$$

bulunur.

d) K_n 'de Şekil 2.4'den görüldüğü gibi $\binom{n}{2}$ tane kenar olup; K_n $(n-1)$ -regüler bir graf olduğundan her bir kenarının uç derecelerinin $(n-1)$ olduğu hatırlanırsa,

$$\begin{aligned} M_2(K_n) &= \binom{n}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-1) \\ &= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot (n-1) \cdot (n-1) \\ &= \frac{n \cdot (n-1)^3}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

e) $K_{r,s}$ 'de Şekil 2.5'den görüldüğü gibi uç dereceleri r ve s olan $r \cdot s$ tane kenar olduğundan;

$$\begin{aligned} M_2(K_{r,s}) &= r \cdot s \cdot (r \cdot s) \\ &= (r \cdot s)^2 \end{aligned}$$

bulunur.

f) $T_{r,s}$ 'de Şekil 2.6'dan görüldüğü gibi derecesi bir ve iki olan kenar sayısı bir tane, derecesi iki ve iki olan $(r+s-4)$ tane, derecesi 3 ve 2 olan kenar sayısı üç tane olduğundan;

$$M_2(T_{r,s}) = 1 \cdot (1 \cdot 2) + (r+s-4) \cdot (2 \cdot 2) + 3 \cdot (3 \cdot 2)$$

bulunur.

2.8. G Grafının Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksi

2.8.1. Teorem. a) $\Pi_1(P_n) = (2^2)^{n-2}$

b) $\Pi_1(C_n) = 2^{2n}$

c) $\Pi_1(S_n) = (n-1)^2$

d) $\Pi_1(K_n) = (n-1)^{2n}$

e) $\Pi_1(K_{r,s}) = (r^s s^r)^2$

f) $\Pi_1(T_{r,s}) = (2^{(r+s-2)} \cdot 3)^2$

şeklindedir.

İspat. a) P_n 'de Şekil 2.12'den görüldüğü gibi

$$n = 2 \text{ için } \Pi_1(P_2) = 1^2 \cdot 1^2 = 1 ,$$

$$n = 3 \text{ için } \Pi_1(P_3) = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = 4 ,$$

$$n = 4 \text{ için } \Pi_1(P_4) = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = 16 \text{ olup}$$

$n \geq 2$ için P_n 'de derecesi bir olan iki tane , derecesi iki olan $(n - 2)$ tane köşe bulunduğundan;

$$\begin{aligned} \Pi_1(P_n) &= 1^2 \cdot \underbrace{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^2}_{(n-2) \text{ tane}} \cdot 1^2 \\ &= (2^2)^{n-2} \end{aligned}$$

bulunur.

b) C_n 'de Şekil 2.2 göz önüne alınırsa ve C_n iki-regüler bir graf olduğundan;

$$\begin{aligned} \Pi_1(C_n) &= \underbrace{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^2}_{n \text{ tane}} \\ &= (2^2)^n \\ &= 2^{2n} \end{aligned}$$

bulunur.

c) S_n 'de Şekil 2.3'den görüldüğü gibi derecesi bir olan $(n - 1)$ tane köşe, derecesi $(n - 1)$ olan bir tane köşe bulunduğundan;

$$\begin{aligned} \Pi_1(S_n) &= \underbrace{1^2 \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot \dots \cdot 1^2}_{(n-1) \text{ tane}} \cdot (n-1)^2 \\ &= (n-1)^2 \end{aligned}$$

bulunur.

d) K_n 'de Şekil 2.5'den görüldüğü gibi derecesi bir olan $(n-1)$ tane köşe, derecesi $(n-1)$ olan bir tane köşe bulunduğundan,

$$\begin{aligned}\Pi_1(K_n) &= ((n-1)^2)^n \\ &= (n-1)^{2n}\end{aligned}$$

bulunur.

e) $K_{r,s}$ 'de Şekil 2.5'den görüldüğü gibi derecesi r olan s tane köşe, derecesi s olan r tane köşe bulunduğundan;

$$\begin{aligned}\Pi_1(K_{r,s}) &= (r^2)^s \cdot (s^2)^r \\ &= (r^s \cdot s^r)^2\end{aligned}$$

bulunur.

f) $T_{r,s}$ 'de Şekil 2.6'dan görüldüğü gibi derecesi bir olan bir tane köşe, derecesi iki olan $(r+s-2)$ tane köşe, derecesi 3 olan bir tane köşe bulunduğundan;

$$\begin{aligned}\Pi_1(T_{r,s}) &= (2^2)^{(r+s-2)} \cdot 3^2 \cdot 1^2 \\ &= (2^{(r+s-2)} \cdot 3)^2\end{aligned}$$

bulunur.

2.9. G Grafının İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksi

2.9.1. Teorem. a) $\Pi_2(P_n) = (2^2)^{n-2}$

$$\text{b) } \Pi_2(C_n) = 2^{2n}$$

$$\text{c) } \Pi_2(S_n) = (n-1)^{(n-1)}$$

$$\text{d) } \Pi_2(K_n) = \left[(n-1)^2 \right]^{\binom{n}{2}}$$

$$\text{e) } \Pi_2(K_{r,s}) = (r \cdot s)^{rs}$$

$$\text{f) } \Pi_2(T_{r,s}) = 2^{2r+2s-4} \cdot 3^3$$

şeklindedir.

İspat. a) P_n 'de Şekil 2.12'den görüldüğü gibi

$$n = 2 \text{ için } \Pi_2(P_2) = 1 \cdot 1 = 1 = 2^0 ,$$

$$n = 3 \text{ için } \Pi_2(P_3) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^2 ,$$

$$n = 4 \text{ için } \Pi_2(P_4) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 2^4 \text{ olup}$$

$n \geq 2$ için P_n 'de iki uç kenar ve $(n-3)$ tane ara kenar bulunduğu;

$$\Pi_2(P_n) = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{2 \cdot (n-2) \text{ tane}} \cdot 1$$

$$= 2^{2n-4}$$

bulunur.

b) C_n 'de Şekil 2.2 göz önüne alınırsa ve C_n iki-regüler bir graf olduğundan;

$$\Pi_2(C_n) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{2n \text{ tane}}$$

$$= 2^{2n}$$

bulunur.

c) S_n 'de Şekil 2.3'den görüldüğü gibi uç derecesi bir ve $(n-1)$ olan $(n-1)$ tane kenar olduğundan;

$$\Pi_2(S_n) = (n-1)^{(n-1)}$$

bulunur.

d) K_n 'de Şekil 2.5'den görüldüğü gibi $\binom{n}{2}$ tane kenar olup; K_n $(n-1)$ -regüler bir graf olduğundan her bir kenarının uç derecelerinin $(n-1)$ olduğu hatırlanırsa,

$$\Pi_2(K_n) = [(n-1)^2]^{\binom{n}{2}}$$

bulunur.

e) $K_{r,s}$ 'de Şekil 2.5'den görüldüğü gibi uç dereceleri r ve s olan $r \cdot s$ tane kenar olduğundan;

$$\Pi_2(K_{r,s}) = (r \cdot s)^{rs}$$

bulunur.

f) $T_{r,s}$ 'de Şekil 2.6'dan görüldüğü gibi derecesi bir ve iki olan kenar sayısı bir tane, derecesi iki ve iki olan kenar sayısı $(r+s-4)$ tane, derecesi 3 ve 2 olan kenar sayısı üç tane olduğundan;

$$\begin{aligned} \Pi_2(T_{r,s}) &= (2^2)^{(r-2)} \cdot (2 \cdot 3)^3 \cdot (2^2)^{s-2} \cdot (2 \cdot 1)^1 \\ &= 2^{2r+2s-8} \cdot 3^3 \cdot 2^3 \cdot 2^1 \end{aligned}$$

$$=2^{2r+2s-4} \cdot 3^3$$

bulunur.

2.10. G Grafının Wiener İndeksi

2.10.1. Teorem. a) $W(P_n) = \frac{1}{6}n(n^2 - 1) = \sum_{i=1}^{n-1} T_i$

b) $W(C_n) = \begin{cases} \frac{n^3 - n}{8} & , n \text{ tek} \\ \frac{n^3}{8} & , n \text{ çift} \end{cases}$

c) $W(S_n) = (n-1)^2$

d) $W(K_n) = \binom{n}{2}$

e) $W(K_{r,s}) = 1 \cdot r \cdot s + \binom{r}{2} \cdot 2 + \binom{s}{2} \cdot 2$

f) $n = r + s$ olmak üzere

$$W(T_{r,s}) = \begin{cases} \frac{r^3 - r}{8} + \sum_{i=1}^{r-1} T_i + \frac{3n^2 - 11n + 6}{2} & , r = 3 \\ \frac{r^3 - r}{8} + \sum_{i=1}^{r-1} T_i + \frac{s}{4}(2r + r^2 + 2rs - 1) & , r \text{ tek ve } r > 3 \\ \frac{rs}{4}(r + 2s + 2) & , r \text{ çift} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. Bu teoremin ispatı yukarıdaki teoremlerin ispatlarına benzer şekilde görülür.

2.11. G Grafının Harary İndeksi

2.11.Teorem. n-inci harmonik sayı $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ olmak üzere

$$\mathbf{a)} H(P_n) = n \cdot (H_n - 1)$$

$$\mathbf{b)} H(C_n) = \begin{cases} 1 + n \cdot H_{(n-2)/2} & , n \text{ çift ise} \\ n \cdot H_{(n-1)/2} & , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$\mathbf{c)} H(S_n) = \frac{1}{4} \cdot (n+2) \cdot (n-1)$$

$$\mathbf{d)} H(K_n) = \frac{1}{2} n \cdot (n-1) = \binom{n}{2}$$

$$\mathbf{e)} H(K_{r,s}) = 1 \cdot r \cdot s + \frac{1}{2} \left(\binom{r}{2} + \binom{s}{2} \right)$$

şeklindedir.

İspat. Bu teoremin ispatı yukarıdaki teoremlerin ispatlarına benzer şekilde görülür.

2.12. G Grafının Narumi-Katayama İndeksi

2.12.1.Teorem. a) $NK(P_n) = 2^{n-2}$

b) $NK(C_n) = 2^n$

c) $NK(S_n) = n - 1$

d) $NK(K_n) = (n - 1)^n$

e) $NK(K_{r,s}) = r^s \cdot s^r$

f) $NK(T_{r,s}) = 3 \cdot 2^{r-1} \cdot 2^{s-1}$

şeklindedir.

İspat. a) Tümevarım ispat yöntemini kullanacağız. Şekil.2.1 göz önüne alınarak

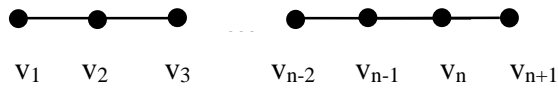
$n = 2$ ise $NK(P_2) = 2^{2-2} = 2^0 = 1$ doğru mudur?

Narumi-Katayama indeksinin tanımı gereği

$$NK(P_2) = 1 \cdot 1 = 1 = 2^0 = 2^{2-2}$$

olur. $n = 2$ için doğrudur.

n için $NK(P_n) = 2^{n-2}$ doğru olsun. $n+1$ için $NK(P_{n+1}) = 2^{n+1-2} = 2^{n-1}$ eşitliği doğru mudur?



Şekil 2.13. P_{n+1} yol grafinin numaralandırılması

Her $2 \leq i \leq n$ için $d(v_i) = 2$ ve $d(v_1) = d(v_{n+1}) = 1$ bulunur. Narumi-Katayama indeksinin tanımından

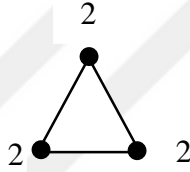
$$NK(P_{n+1}) = 1 \cdot \underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}_{(n-1) \text{ tane}} = 2^{n-1}$$

olur. O halde önerme her n için doğrudur ve

$$NK(P_n) = 2^{n-2}$$

elde edilir.

b) Tümevarım ispat yöntemini kullanacağız. n = 3 ise $NK(C_3) = 2^3$ doğru mudur?



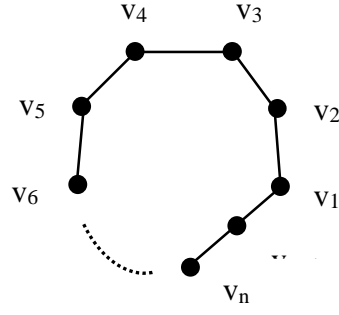
Şekil 2.14. C_3 devir grafının derecelendirilmesi

Narumi-Katayama indeksinin tanım gereği

$$NK(C_3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

olur. n = 3 için doğrudur.

Şekil.2.8 göz önüne alınarak n için $NK(C_n) = 2^n$ doğru olsun. n+1 için $NK(C_{n+1}) = 2^{n+1}$ eşitliği doğru mudur



Şekil 2.15. C_{n+1} devir grafının numaralandırılması

Her $1 \leq i \leq n+1$ için $d(v_i) = 2$ 'dir. Narumi-Katayama indeksinin tanımından

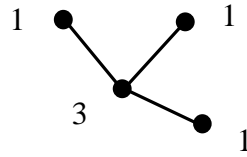
$$NK(C_{n+1}) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{(n+1) \text{ tane}} = 2^{n+1}$$

olur. O halde önerme her n için doğrudur ve

$$NK(C_n) = 2^n$$

bulunur.

c) Tümevarım ispat yöntemini kullanacağız. $n = 4$ ise $NK(S_4) = 4 - 1 = 3$ doğru mudur?



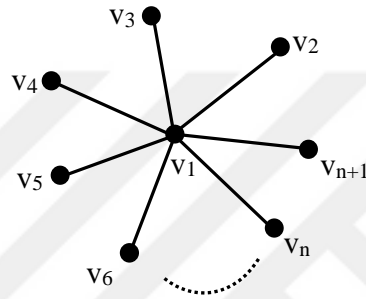
Şekil 2.16. S_4 yıldız grafının derecelendirilmesi

Narumi-Katayama indeksinin tanımı gereği

$$NK(S_4) = 1.1.1.3 = 3$$

olur. $n = 4$ için doğrudur.

Şekil.2.9. göz önüne alınarak n için $NK(S_n) = n-1$ doğru olsun. $n+1$ için $NK(S_{n+1})=n-1+1 = n$ eşitliği doğru mudur?



Şekil 2.17. S_{n+1} yıldız grafının numaralandırılması

Her $2 \leq i \leq n+1$ için $d(v_i) = 1$ ve $d(v_1) = n$ 'dir. Narumi-Katayama indeksinin tanımından

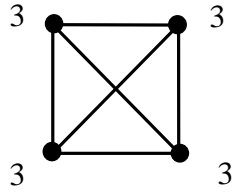
$$NK(S_{n+1}) = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot n = n$$

olur. O halde önerme her n için doğrudur ve

$$NK(S_n) = n - 1$$

bulunur.

d) Tümevarım ispat yöntemini kullanacağız. $n = 4$ ise $NK(K_4) = (4-1)^4 = 3^4$ doğru mudur?



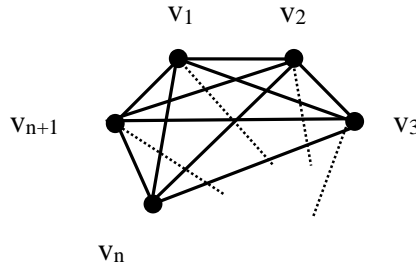
Şekil 2.18. K_4 tam grafinin derecelendirilmesi

Narumi-Katayama indeksinin tanımı gereği

$$NK(K_4) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$$

olur. $n = 4$ için doğrudur.

Şekil.2.10 göz önüne alınarak n için $NK(K_n) = (n-1)^n$ doğru olsun. $n+1$ için $NK(K_{n+1}) = n^{n+1}$ eşitliği doğru mudur?



Şekil 2.19. K_{n+1} tam grafinin numaralandırılması

Her $1 \leq i \leq n+1$ için $d(v_i) = n$ 'dir. Narumi-Katayama indeksinin tanımından

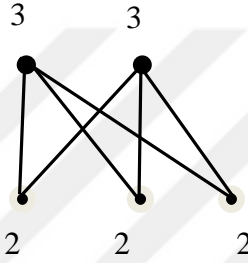
$$NK(K_{n+1}) = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{(n+1) \text{ tane}} = n^{n+1}$$

olur. O halde önerme her n için doğrudur ve

$$NK(K_n) = (n-1)^n$$

bulunur.

e) Tümevarım ispat yöntemini kullanacağız. $r = 2$ ve $s = 3$ ise $NK(K_{2,3}) = 2^3 \cdot 3^2$ doğru mudur?



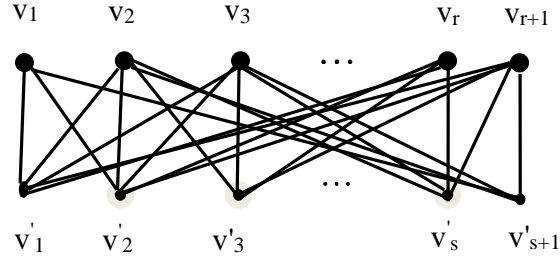
Şekil 2.20. $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafının derecelendirilmesi

Narumi-Katayama indeksinin tanımı gereği

$$NK(K_{2,3}) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 3^2$$

olur. $r = 2$ ve $s = 3$ için doğrudur. Şekil.2.11 göz önüne alınarak n için $NK(K_{r,s}) = s^r \cdot r^s$

doğru olsun. $n+1$ için $NK(K_{r,s}) = (s+1)^{r+1} \cdot (r+1)^{s+1}$ eşitliği doğru mudur?



Şekil 2.21. $K_{r+1,s+1}$ tam iki parçalı grafının numaralandırılması

Her $1 \leq i \leq r+1$ için $d(v_i) = s+1$ ve her $1 \leq j \leq s+1$ için $d(v'_j) = r+1$ 'dir. Narumi-Katayama indeksinin tanımından

$$NK(K_{r+1,s+1}) = \underbrace{(s+1) \cdot (s+1) \cdots (s+1)}_{(r+1) \text{ tane}} \cdot \underbrace{(r+1) \cdot (r+1) \cdots (r+1)}_{(s+1) \text{ tane}}$$

$$= (s+1)^{r+1} \cdot (r+1)^{s+1}$$

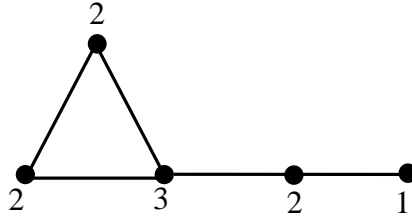
olur. O halde önerme her r, s için doğrudur ve

$$NK(K_{r,s}) = r^s \cdot s^r$$

bulunur.

f) Tümevarım ispat yöntemini kullanacağız. $r=3$ ve $s=2$ için

$$NK(T_{r,s}) = 3 \cdot 2^{3-1} \cdot 2^{2-1} = 3 \cdot 2^3 \text{ doğru mudur?}$$

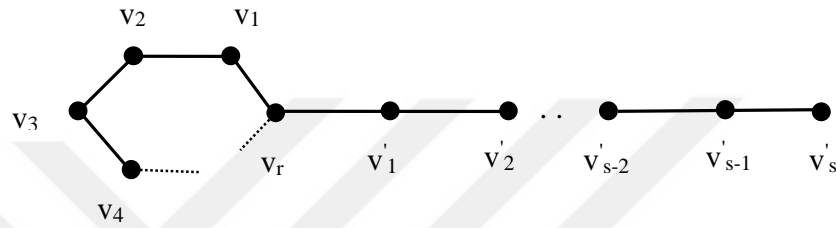


Şekil 2.22. $T_{3,2}$ larva grafının derecelendirilmesi

Narumi-Katayama indeksinin tanımı gereği

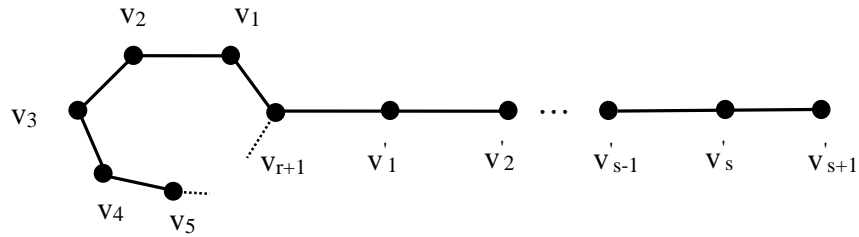
$$NK(T_{r,s}) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

olur $r = 3$ ve $s = 2$ için doğrudur. n için $NK(T_{r,s}) = 3 \cdot 2^{r-1} \cdot 2^{s-1}$ doğru olsun.



Şekil 2.23. $T_{r,s}$ larva grafının numaralandırılması

$n+1$ için $NK(T_{r+1,s+1}) = 3 \cdot 2^{(s+1-1)} \cdot 2^{(r+1-1)} = 3 \cdot 2^s \cdot 2^r = 3 \cdot 2^{r+s}$ eşitliği doğru mudur?



Şekil 2.24. $T_{r+1,s+1}$ larva grafının numaralandırılması

Her $1 \leq i \leq r$ için $d(v_i) = 2$, $d(v_{r+1}) = 3$ ve her $1 \leq j \leq s$ için $d(v'_j) = 2$ ve $d(v'_{s+1}) = 1$ bulunur.
Narumi-Katayama indeksi tanımından

$$\begin{aligned}
NK(T_{r+1,s+1}) &= 3 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2}_{r \text{ tane}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2}_{s \text{ tane}} \cdot 1 \\
&= 3 \cdot 2^r \cdot 2^s \\
&= 3 \cdot 2^{r+s}
\end{aligned}$$

olur. O halde önerme her r,s için doğrudur ve

$$NK(T_{r,s}) = 3 \cdot 2^{r-1} \cdot 2^{s-1}$$

olur.



Aşağıdaki tablolarda belirli grafların topolojik indeksleri toplu halde görülmektedir.

	P_n	C_n	S_n	K_n	$K_{r,s}$
GA_1	$1, n=2$ $\frac{4\sqrt{2}}{3} + (n-3), n \geq 3$	n	$2 \frac{\sqrt{(n-1)^3}}{n}$	$\binom{n}{2}$	$2 \frac{rs\sqrt{rs}}{r+s}$
GA_2	$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k \cdot (n-k)}$	n	$2 \frac{\sqrt{(n-1)^3}}{n}$	$\binom{n}{2}$	$2 \frac{rs\sqrt{rs}}{r+s}$
GA_3	$\frac{2}{n-2} \sum_{i=0}^{n-2} \sqrt{i \cdot (n-2-i)}$	n	0	$\binom{n}{2}$	$2 \frac{rs\sqrt{(r-1) \cdot (s-1)}}{r+s-2}$

Çizelge 3.1. $P_n, C_n, S_n, K_n, K_{r,s}$ graf çeşitlerinin GA_1, GA_2, GA_3 indeksi

	$T_{r,s}$
GA ₁	$2 \left[\frac{1}{2} \cdot (r+s-4) + 3 \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right]$
GA ₂	$2 \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{r-1}{2}\right)}}{\frac{r-1}{2} + \frac{r-1}{2}} + (r-1) \frac{\sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right) \cdot \left(s + \frac{r-1}{2}\right)}}{\frac{r-1}{2} + s + \frac{r-1}{2}} + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sqrt{(r+k) \cdot (s-k)}}{(r+k) + (s-k)} \right], r$ <p>tek</p> $2 \left[r \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \left(s + \frac{r}{2}\right)}}{\frac{r}{2} + s + \frac{r}{2}} + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sqrt{(r+k) \cdot (s-k)}}{r+k+s-k} \right], r \text{ çift}$
GA ₃	$2 \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{r-1}{2}\right)}}{\frac{r-1}{2} + \frac{r-1}{2}} + (r-1) \frac{\sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right) \cdot \left(s + \frac{r-1}{2}\right)}}{\frac{r-1}{2} + s + \frac{r-1}{2}} + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sqrt{(r+k) \cdot (s-k-1)}}{(r+k) + (s-k-1)} \right], r$ <p>tek</p> $2 \left[r \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \left(s + \frac{r}{2}\right)}}{\frac{r}{2} + s + \frac{r}{2}} + \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sqrt{(r+k) \cdot (s-k)}}{r+k+s-k} \right], r \text{ çift}$

Çizelge 3.2. $T_{r,s}$ grafının GA₁, GA₂, GA₃ indeksi

	P_n	C_n	S_n	K_n	$K_{r,s}$
ABC	$0, n=2$ $\frac{n-1}{\sqrt{2}}, n \geq 3$	$\frac{n}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{(n-1) \cdot (n-2)}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} n \sqrt{n-2}$	$0, r=s$ $\frac{rs}{\sqrt{2}}, r \neq s$ ve $r=2$ $rs \sqrt{\frac{r+s-2}{rs}}, r \neq s$ ve $r > 2$
M_1	$4n-6, n \geq 2$	$4n$	$n \cdot (n-1)$	$n \cdot (n-1)^2$	$rs(r+s)$

Çizelge 3.3. $P_n, C_n, S_n, K_n, K_{r,s}$ graf çeşitlerinin ABC, M_1 indeksi

M_2	$1, n=2$ $4n-8, n \geq 3$	$4n$	$(n-1)^2$	$\frac{n \cdot (n-1)3}{2}$	$(rs)^2$
Π_1	$(2^2)^{n-2}, n \geq 2$	2^{2n}	$(n-1)^2$	$(n-1)^{2n}$	$(r^s s^r)^2$
Π_2	$(2^2)^{n-2}$	2^{2n}	$(n-1)^{(n-1)}$	$[(n-1)^2]^{\binom{n}{2}}$	$(r \cdot s)^{r \cdot s}$
W	$\sum_{i=1}^{n-1} T_i$	$\frac{n^3-n}{8}, n$ tek $\frac{n^3}{8}, n$ çift	$(n-1)^2$	$\binom{n}{2}$	$1 \cdot r \cdot s + \binom{r}{2} \cdot 2 + \binom{s}{2} \cdot 2$
H	$n \cdot (H_n - 1)$	$1 + n \cdot H_{(n-2)/2}, n$ çift $n \cdot H_{(n-1)/2}, n$ tek	$\frac{1}{4} \cdot (n+2) \cdot (n-1)$	$\frac{1}{2} n \cdot (n-1) = \binom{n}{2}$	$1 \cdot r \cdot s + \frac{1}{2} \left(\binom{r}{2} + \binom{s}{2} \right)$
NK	2^{n-2}	2^n	$n-1$	$(n-1)^n$	$r^s \cdot s^r$

Çizelge 3.4. $P_n, C_n, S_n, K_n, K_{r,s}$ graf çeşitlerinin $M_2, \Pi_1, \Pi_2, W, H, NK$ indeksi

	$T_{r,s}$
ABC	$\frac{r+s}{\sqrt{2}}$
M_1	$1 \cdot 1^2 + (r+s-2) \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2$
M_2	$3(2 \cdot 3) + (r+s-4)(2 \cdot 2) + 1(2 \cdot 1)$
Π_1	$(2^{(r+s-2)} \cdot 3)^2$
Π_2	$2^{2r+2s-4} \cdot 3^3$
W	<p>$n = r + s$ olmak üzere</p> $\begin{cases} \frac{r^3 - r}{8} + \sum_{i=1}^{r-1} T_i + \frac{3n^2 - 11n + 6}{2} & , r = 3 \\ \frac{r^3 - r}{8} + \sum_{i=1}^{r-1} T_i + \frac{s}{4}(2r + r^2 + 2rs - 1) & , r \text{ tek ve } r > 3 \\ \frac{rs}{4}(r + 2s + 2) & , r \text{ çift} \end{cases}$
NK	$3 \cdot 2^{r-1} \cdot 2^{s-1}$

Çizelge 3.5. $T_{r,s}$ grafının ABC, M_1 , M_2 , Π_1 , Π_2 , W, NK indeksi

3. GRAF İNDEKSLERİNİN TAMSAYI VE ASAL SAYI DEĞERLERİ

3.1. Giriş

Aşağıda verilen teoremler daha önce literatürde olmayan kendi bulduğumuz orijinal sonuçlardır:

3.2. G Grafının Geometrik-Aritmetik Birinci İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.2.1. Teorem. a) $GA_1(P_n)$, sadece $n = 2$ için bir tamsayıdır.

b) $GA_1(C_n)$, her n tamsayısı için bir tamsayıdır ve $n=p$ alınırca $GA_1(C_p)$ asal sayı olur.

c) $GA_1(S_n)$, her n için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

d) $GA_1(K_n)$, her n için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

e) $GA_1(K_{r,s})$ sadece $r = s$ için bir tamsayıdır.

f) $GA_1(T_{r,s})$ her r,s için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

İspat. a) $n=2$ için $GA_1(P_2) = 1 \in \mathbb{Z}$ olduğu veriliyor. $n \geq 3$ ise $GA_1(P_n) = \frac{4\sqrt{2}}{3} + (n-3)$

olduğundan bu değer tamsayı ve dolayısıyla asal sayı olamaz.

b) $GA_1(C_n)$, her n için bir tamsayı olduğu veriliyor. Graf regüler ise $\forall i, j$ için $d_i = d_j$

ise $GA_1(G) = \sum_{i=1}^n \frac{2d_i}{2d_i} = \sum_{i=1}^n 1 = n$ dir. $GA_1(C_n) = n \in \mathbb{Z}$ olur ve $n=p$ alınırsa $GA_1(C_p) = p$

olur.

c) i) $n-1 = k^2$ ise $\frac{2 \cdot (n-1)^{3/2}}{n} = \frac{2k^3}{n} \in \mathbb{Q}$

$$= \frac{2k^3}{k^2 + 1}$$

$$= \frac{2k(k^2 + 1) - 2k}{k^2 + 1}$$

$$= \underbrace{2k}_{\in \mathbb{Z}} - \frac{2k}{k^2 + 1} \quad (n \geq 4 \text{ ise } k \geq \sqrt{3})$$

$$2k < k^2 + 1$$

$$k^2 - 2k + 1 > 0$$

$$n \geq 4 \text{ ise } k \geq \sqrt{3} \text{ ise } (k-1)^2 > 0 \text{ ise } k^2 - 2k + 1 > 0 \text{ ise } k^2 + 1 > 2k$$

$$\text{ise } \frac{2k}{k^2 + 1} < 1$$

$$\text{ise } \frac{2k}{k^2 + 1} \notin \mathbb{Z}$$

olur.

ii) $(n-1)$ tam kare değilse;

$$\frac{2 \cdot (n-1)^{3/2}}{n} = \frac{2 \cdot (n-1) \cdot \sqrt{n-1}}{n}$$

ve $\frac{2 \cdot (n-1)}{n} \in \mathbb{Q}$ olduğundan $\frac{2 \cdot (n-1)^{3/2}}{n} \in \mathbb{Q}'$ olur. ($\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$)

Dolayısıyla $\frac{2 \cdot (n-1)^{3/2}}{n} \notin \mathbb{Z}$ dir.

d) i) $n = 2k + 1$ için $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = (2k+1) \cdot k$ olur.

$n = 3$ ise $k = 1$ ise $3 \cdot 1 = 3$ asalı gelir ancak $K_3 = C_3$ dir. #

ii) $n = 2k$ için $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = k \cdot (2k-1)$ değeri bir asal sayı olamaz.

Dolayısıyla $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ değeri bir asal sayı olamaz.

$n \geq 4$ için $GA_1(K_n) = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \notin \mathbb{Z}$ dir.

e) i) $r = s$ ise $GA_1(K_{r,r}) = \frac{2(r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r} = \frac{r^3}{r} = r^2 \in \mathbb{Z}$

p asal olmak üzere $r^2 \neq p$ dir.

ii) $r \neq s$ ise $GA_1(K_{r,s}) = \frac{2(rs)^{\frac{3}{2}}}{r+s} \notin \mathbb{Z}$ dir.

f) i) $r = s$ ise $GA_1(T_{r,r}) = 2 \left[r - 2 + 3 \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right] \notin \mathbb{Z}$ olur.

p asal olmak üzere $GA_1(T_{r,r}) \neq p$ dir.

ii) $r \neq s$ ise $GA_1(T_{r,s}) = 2 \left[\frac{1}{2} \cdot (r+s-4) + 3 \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right] \notin \mathbb{Z}$ ve asal sayı olamayacağı

aşikardır.

3.3. G Grafının Geometrik-Aritmetik İkinci İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.3.1. Teorem. a) $GA_2(P_n)$, sadece $n = 2$ için bir tamsayıdır.

b) $GA_2(C_n)$, her n tamsayısı için bir tamsayıdır ve $n=p$ alınırsa $GA_2(C_p)$ asal sayı olur.

c) $GA_2(S_n)$, her n için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

d) $GA_2(K_n)$, her n için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

e) $GA_2(K_{r,s})$ sadece $r = s$ için bir tamsayıdır.

f) $GA_2(T_{r,s})$ her r,s için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

İspat. a) i) $n = 2$ ise $GA_2(P_2) = 1 \in \mathbb{Z}$ dir. p bir asal sayı olmak üzere $GA_2(P_2) = 1 \neq p$ dir.

ii) $n \geq 3$ ise $GA_2(P_n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k \cdot (n-k)} \notin \mathbb{Z}$ olduğu aşikardır.

b) Teorem 3.1'in b) şikkında açıklanmıştır.

c) Teorem 3.1'in c) şikkında açıklanmıştır.

d) Teorem 3.1'in d) şikkında açıklanmıştır.

e) Teorem 3.1'in e) şikkında açıklanmıştır.

f) Her iki durumda da toplam sembolünün içi rasyonel olduğundan $GA_2(T_{r,s})$ 'nin asal ve tamsayı olamayacağı aşikardır.

3.4. G Grafının Geometrik-Aritmetik Üçüncü İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.4.1. Teorem. a) $GA_3(P_n)$, her n için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

b) $GA_3(C_n)$, her n tamsayısı için bir tamsayıdır ve $n=p$ alınırca $GA_3(C_p)$ asal sayı olur.

c) $GA_3(S_n)$, her n için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

d) $GA_3(K_n)$, her n için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

e) $GA_3(K_{r,s})$ sadece $r = s$ için bir tamsayıdır.

f) $GA_3(T_{r,s})$ her r,s için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

İspat. a) $GA_3(P_n)$ 'nin değeri asal ve tamsayı olamaz. Çünkü pozitif köklü sayıların toplamından oluşur ve kökler sadeleşmeyeceğinden $GA_3(P_n) \notin \mathbb{Z}$ dir.

b) Teorem 3.1'in b) şıkında açıklanmıştır.

c) Teorem 3.1'in c) şıkında açıklanmıştır.

d) Teorem 3.1'in d) şıkında açıklanmıştır.

e) i) $r = s$ ise

$$\begin{aligned} GA_3(K_{r,r}) &= \frac{2r^2(r-1)}{2r-2} \\ &= \frac{2r^2(r-1)}{2(r-1)} \\ &= r^2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

dir.

p asal olmak üzere $r^2 \neq p$ dir.

ii) $r \neq s$ ise $GA_3(K_{r,s}) = 2 \frac{rs\sqrt{(r-1) \cdot (s-1)}}{r+s-2} \notin \mathbb{Z}$ dir.

f) Her iki durumda toplam sembolünğn içi rasyonel olduğundan $GA_3(T_{r,s})$ 'nin asal ve tamsayı olamayacağı aşikardır.

3.5. G Grafının Atom-Bağ Bağlantılığı (Atom-Bond Connectivity) İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.5.1. Teorem. a) $ABC(P_n)$, sadece $n = 2$ için bir tamsayıdır.

b) $ABC(C_n)$, her n için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

c) $ABC(S_n)$, her n için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

d) $ABC(K_n)$, $n - 2 = 2t^2$ ($t \in \mathbb{Z}$) için bir tamsayıdır.

e) $ABC(K_{r,s})$ sadece $r = s$ için bir tamsayıdır.

f) $ABC(T_{r,s})$ her r,s için bir tamsayı ve asal sayı olamaz.

İspat. a) $ABC(P_2) = 0$ olup bir tamsayıdır ancak asal sayı değildir.

$ABC(P_n) = \frac{n-1}{\sqrt{2}}$, $n \geq 3$ olup bu değer asal ve tamsayı olamaz. Çünkü paydası bir irrasyonel sayıdır.

b) Bu değer asal ve tamsayı olamaz. Çünkü paydası bir irrasyonel sayıdır.

c) $(n-1) \cdot (n-2) = k^2$ olsun. ($k \in \mathbb{Z}$)

$$n^2 - 3n + 2 - k^2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - k^2) = 0 \text{ olmalı.}$$

$$4k^2 = -1 \text{ olmalı. \#}$$

Dolayısıyla $ABC(S_n) = \sqrt{(n-1) \cdot (n-2)} \notin \mathbb{Z}$ dir.

d) $n - 2 = 2t^2$ ($t \in \mathbb{Z}$) olsun. $ABC(K_n) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2t^2 + 2) \cdot \sqrt{2}t^2$
 $= 2 \cdot t^2 \cdot (t^2 + 1) \in \mathbb{Z}$ dir.

Diğer durumlarda ise bir tamsayı ve asal sayı olmayacağı aşikardır.

e) i) $r = s$ ise $ABC(K_{r,r}) = 0 \in \mathbb{Z}$ olup p bir asal sayı olmak üzere $0 \neq p$ dir.

ii) $r \neq s$ ve $r \geq 2$ ise $ABC(K_{r,s}) = rs\sqrt{\frac{r+s-2}{rs}} \notin \mathbb{Z}$ olup paydası irrasyonel bir sayı ve

$r, s \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $rs\sqrt{\frac{r+s-2}{rs}} \notin \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerın asal sayı olamayacağı aşikardır.

f) $\frac{r+s}{\sqrt{2}}$ 'nin paydası irrasyonel bir sayı ve $r, s \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $\frac{r+s}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerın asal sayı olamayacağı aşikardır.

3.6. G Grafının Birinci Toplam Zagreb İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.6.1. Teorem. a) $M_1(P_n)$, her n için bir tamsayıdır.

b) $M_1(C_n)$, her n için bir tamsayıdır.

c) $M_1(S_n)$, her n için bir tamsayıdır.

d) $M_1(K_n)$, her n için bir tamsayıdır.

e) $M_1(K_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

f) $M_1(T_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

İspat. a) $M_1(P_n) = 4n - 6 \quad (n \geq 2)$

$$= 2(n-3) \in \mathbb{Z}$$

dir. Ancak en az iki çarpanı olduğundan $M_1(P_n) \neq p$ dir.

b) $4n \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşıkardır.

c) Ardışık iki sayının çarpımı olduğundan $M_1(S_n) = n \cdot (n-1) \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşıkardır.

d) $n \cdot (n-1)^2 \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşıkardır.

e) $rs(r+s) \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşıkardır.

f) $[(r+s-2) \cdot 4 + 10] \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşıkardır.

3.7. G Grafının İkinci Toplam Zagreb İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.7.1. Teorem. a) $M_2(P_n)$, sadece $n = 2$ için bir tamsayıdır. Diğer durumlarda ise bir tamsayı ve asal sayı değildir.

b) $M_2(C_n)$, her n için bir tamsayıdır.

c) $M_2(S_n)$, her n için bir tamsayıdır.

d) $M_2(K_n)$, her n için bir tamsayıdır.

e) $M_2(K_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

f) $M_2(T_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

İspat. a) $4(n-2) \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşıkardır.

b) $4n \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşıkardır.

c) $(n-1)^2 \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşıkardır..

d) $n = 2k + 1$ olsun. ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{n \cdot (n-1)^3}{2} = \frac{(2k+1) \cdot (2k)^3}{2} \\ = (2k+1) \cdot 4k^3 \in \mathbb{Z}$$

olur.

$n = 2k$ olsun. ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{n \cdot (n-1)^3}{2} = \frac{(2k) \cdot (2k-1)^3}{2} \\ = 2k \cdot (2k-1)^3 \in \mathbb{Z}$$

olur. Bu değerlerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

e) $(n-1)^2 \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değer in asal sayı olamayacağı aşikardır.

f) $3 \cdot (2 \cdot 3) + (r+s-4) \cdot (2 \cdot 2) + 1 \cdot (2 \cdot 1) \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değer in asal sayı olamayacağı aşikardır.

3.8. G Grafının Birinci Çarpımsal Zagreb İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.8.1. Teorem. a) $\Pi_1(P_n)$, sadece $n = 2$ için bir tamsayıdır. Diğer durumlarda ise bir tamsayı ve asal sayı değildir.

b) $\Pi_1(C_n)$, her n tamsayısı için bir tamsayıdır.

c) $\Pi_1(S_n)$, her n için bir tamsayıdır.

d) $\Pi_1(K_n)$, her n için bir tamsayıdır.

e) $\Pi_1(K_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

f) $\Pi_1(T_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

İspat. a) $(2^2)^{n-2} \in \mathbb{Z}$ dir . Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

b) $2^{2n} \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

c) $(n-1)^2 \in \mathbb{Z}$ 'dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

d) $(n-1)^{2n} \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

e) $(r^s s^r)^2 \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

f) $(2^{(r+s-2)} \cdot 3)^2 \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

3.9. G Grafının İkinci Çarpımsal Zagreb İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.9.1.Teorem. a) $\Pi_2(P_n)$, her n için bir tamsayıdır.

b) $\Pi_2(C_n)$, her n için bir tamsayıdır.

c) $\Pi_2(S_n)$, her n için bir tamsayıdır.

d) $\Pi_2(K_n)$, her n için bir tamsayıdır.

e) $\Pi_2(K_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

f) $\Pi_2(T_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

İspat. a) $(2^2)^{n-2} \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

b) $2^{2n} \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

c) $(n-1)^{(n-1)} \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

d) $\left[(n-1)^2 \right]^{\binom{n}{2}} \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

e) $(rs)^{rs} \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

f) $(2^{2r+2s-4} \cdot 3^3) \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

3.10. G Grafının Wiener İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.10.1. Teorem. a) $W(P_n)$, her n için bir tamsayıdır.

b) $W(C_n)$, her n için bir tamsayıdır.

c) $W(S_n)$, her n için bir tamsayıdır.

d) $W(K_n)$, her n için bir tamsayıdır.

e) $W(K_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

f) $W(T_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

İspat. a) $n = 6k \Rightarrow \frac{1}{6}n(n^2 - 1) = \frac{1}{6}6k(36k^2 - 1) \in \mathbb{Z} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}
n = 6k + 1 \text{ ise } \frac{1}{6}n(n^2 - 1) &= \frac{1}{6}(6k + 1)(36k^2 + 12k + 1 - 1) \\
&= \frac{1}{6}(6k + 1)12k(3k + 1) \\
&= 2k(6k + 1)(3k + 1) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = 6k + 2 \text{ ise } \frac{1}{6}n(n^2 - 1) &= \frac{1}{6}(6k + 2)(36k^2 + 24k + 4 - 1) \\
&= \frac{1}{6}6(3k + 1)(12k^2 + 8k + 1) \\
&= (3k + 1)(12k^2 + 8k + 1) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = 6k + 3 \text{ ise } \frac{1}{6}n(n^2 - 1) &= \frac{1}{6}(6k + 3)(36k^2 + 36k + 9 - 1) \\
&= \frac{1}{6}12(2k + 1)(9k^2 + 9k + 2) \\
&= 2(2k + 1)(9k^2 + 9k + 2) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = 6k + 4 \text{ ise } \frac{1}{6}n(n^2 - 1) &= \frac{1}{6}(6k + 4)(36k^2 + 48k + 16 - 1) \\
&= \frac{1}{6}6(3k + 2)(12k^2 + 16k + 5) \\
&= (3k + 2)(12k^2 + 16k + 5) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = 6k + 5 \text{ ise } \frac{1}{6}n(n^2 - 1) &= \frac{1}{6}(6k + 5)(36k^2 + 60k + 25 - 1) \\
&= \frac{1}{6}6(6k + 5)(6k^2 + 10k + 4) \\
&= (6k + 5)(6k^2 + 10k + 4) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $W(P_n) = \frac{1}{6}n(n^2 - 1) = \sum_{i=1}^{n-1} T_i \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı

olamayacağı aşikardır.

b) $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
n = 2k + 1 \text{ ise } \frac{(2k + 1)(4k^2 + 4k + 1 - 1)}{8} &= \frac{(2k + 1)(4k^2 + 4k)}{8} \\
&= \frac{4k(2k + 1)(k + 1)}{8} \\
&= \frac{k(2k + 1)(k + 1)}{2}
\end{aligned}$$

olur.

$$k = 2t \text{ ise } \frac{2t(4t+1)(2t+1)}{2} = t(4t+1)(2t+1) \in \mathbb{Z} \quad (t \in \mathbb{Z})$$

$$k = 2t + 1 \text{ ise } \frac{(2t+1)(4t+2+1)(2t+1+1)}{2} = (2t+1)(4t+3)(t+1) \in \mathbb{Z}$$

olur.

O halde n tek tamsayı ise $W(C_n) = \frac{n^3 - n}{8} \in \mathbb{Z}$ 'dir. Ancak bu değerin asal sayı

olamayacağı aşikardır.

$$n = 2k \text{ ise } \frac{n^3}{8} = \frac{(2k)^3}{8} = k^3 \in \mathbb{Z} \text{ olur.}$$

O halde n çift tamsayı ise $W(C_n) = \frac{n^3}{8} \in \mathbb{Z}$ 'dir. Ancak bu değerin asal sayı

olamayacağı aşikardır.

c) $(n-1)^2 \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

d) $\binom{n}{2} \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

e) $\left[1 \cdot r \cdot s + \binom{r}{2} \cdot 2 + \binom{s}{2} \cdot 2\right] \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

f) Bu değer bir tamsayıdır. Ancak bu değerin asal sayı olamayacağı aşikardır.

3.11. G Grafının Harary İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.11.1. Teorem. n -inci harmonik sayı $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ olmak üzere

a) $H(P_n)$, sadece $n = 2$ için bir tamsayıdır.

b) $H(C_n)$, $n = 3$ ve $n = 4$ için bir asal sayıdır.

c) $H(S_n)$ 'de $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $n = 4k + 1$ ve $n = 4k + 2$ için bir tamsayıdır. $H(S_5)$ bir asal sayıdır.

d) $H(K_n)$, her n için bir tamsayıdır.

e) $H(K_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

İspat. a) $H(P_2) = 1 \in \mathbb{Z}$ olur. Diğer durumlarda $H(P_n) = n \cdot (H_n - 1) \notin \mathbb{Z}$ ve asal sayı değildir.

b) $H(C_3) = 3 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $H(C_3)$ asal sayıdır.

$H(C_4) = 5 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $H(C_4)$ asal sayıdır.

$H(C_6) = 10 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $H(C_6)$ bir asal sayı değildir.

Diğer durumlarda $H(C_n) \notin \mathbb{Z}$ olur.

c) $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$n = 4k \text{ ise } \frac{1}{4} \cdot (n+2) \cdot (n-1) = \frac{1}{4} \cdot (4k+2) \cdot (4k-1) \notin \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} n = 4k + 1 \text{ ise } \frac{1}{4} (n+2)(n-1) &= \frac{1}{4} 4k(4k+3) \\ &= k(4k+3) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 4k + 2 \text{ ise } \frac{1}{4} \cdot (n+2) \cdot (n-1) &= \frac{1}{4} 4(k+1)(4k+1) \\ &= (k+1)(4k+1) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$n = 4k + 3 \text{ ise } \frac{1}{4} \cdot (n+2) \cdot (n-1) = \frac{1}{4} \cdot (4k+5) \cdot (4k+2) \notin \mathbb{Z}$$

olur. $H(S_5) = 7$ olduğundan $H(S_5)$ bir asal sayıdır.

d) $\binom{n}{2} \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak asal sayı olamaz.

e) i) $r = 2k$ ve $s = 2t$ olsun. $(k, t \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}
H(K_{r,s}) &= rs + \frac{1}{2} \left(\binom{r}{2} + \binom{s}{2} \right) \\
&= 4kt + \frac{1}{2} \left(\binom{2k}{2} + \binom{2t}{2} \right) \\
&= 4kt + \frac{1}{2} \left(\frac{2k(2k-1)}{2} + \frac{2t(2t-1)}{2} \right) \\
&= 4kt + \frac{1}{2} (k(2k-1) + t(2t-1)) \\
&= 4kt + \frac{1}{2} (2k^2 - k + 2t^2 - t)
\end{aligned}$$

k ve t tek tamsayı olmak üzere $4kt + (k^2 + t^2) - \frac{1}{2}(k+t)$ sonucu bir tamsayıdır.

k ve t çift tamsayı olmak üzere $4kt + (k^2 + t^2) - \frac{1}{2}(k+t)$ sonucu bir tamsayıdır.

ii) $r = 2k+1$ ve $s = 2t$ olsun.

$$\begin{aligned}
H(K_{r,s}) &= rs + \frac{1}{2} \left(\binom{r}{2} + \binom{s}{2} \right) \\
&= 4kt + 2t + \frac{1}{2} \left(\binom{2k+1}{2} + \binom{2t}{2} \right) \\
&= 4kt + 2t + \frac{1}{2} \left(\frac{(2k+1)2k}{2} + \frac{2t(2t-1)}{2} \right) \\
&= 4kt + 2t + \frac{1}{2} ((2k+1)k + t(2t-1)) \\
&= 4kt + 2t + \frac{1}{2} (2k^2 + k + 2t^2 - t) \\
&= 4kt + 2t + k^2 + t^2 + \frac{1}{2}(k-t)
\end{aligned}$$

k ve t tek tamsayı olmak üzere $4kt + 2t + k^2 + t^2 + \frac{1}{2}(k-t)$ sonucu bir tamsayıdır.

k ve t çift tamsayı olmak üzere $4kt + 2t + k^2 + t^2 + \frac{1}{2}(k-t)$ sonucu bir tamsayıdır.

iii) $r = 2k+1$ ve $s = 2t+1$ olsun.

$$\begin{aligned}
H(K_{r,s}) &= rs + \frac{1}{2} \left(\binom{r}{2} + \binom{s}{2} \right) = (2k+1)(2t+1) + \frac{1}{2} \left(\binom{2k+1}{2} + \binom{2t+1}{2} \right) \\
&= (2k+1)(2t+1) + \frac{1}{2} \left(\frac{(2k+1)2k}{2} + \frac{(2t+1)2t}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2k+1)(2t+1) + \frac{1}{2}((2k+1)k + (2t+1)t) \\
&= (2k+1)(2t+1) + \frac{1}{2}(2k^2 + 2k + 2t^2 + 2t) \\
&= \left[(2k+1)(2t+1) + (k^2 + k + t^2 + t) \right] \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

olur. Yani $H(K_{r,s}) = rs + \frac{1}{2} \left(\binom{r}{2} + \binom{s}{2} \right)$ asal sayı olamaz.

3.12. G Grafının Narumi-Katayama İndeksinin Tamsayı ve Asal Sayı Değerleri

3.12.1. Teorem. a) $NK(P_n)$, her n için bir tamsayıdır ve sadece $n=3$ için bir asal sayıdır.

b) $NK(C_n)$, her n için bir tamsayıdır

c) $NK(S_n)$, her n için bir tamsayı ve $p \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n=p+1$ için bir asal sayıdır.

d) $NK(K_n)$, her n için bir tamsayıdır.

e) $NK(K_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır. $s=1$ ve r nin asal sayı olması halinde sonuç bir asal sayıdır.

f) $NK(T_{r,s})$ her r,s için bir tamsayıdır.

İspat. a) $NK(P_n) = 2^{n-2} \in \mathbb{Z}$ dir. $n=3$ için $NK(P_3) = 2^{3-2} = 2$ olduğundan $NK(P_3)$ bir asal sayıdır. Diğer durumlarda asal olamayacağı açıktır.

b) $NK(C_n) = 2^n \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değer in asal sayı olamayacağı aşıkardır

c) $NK(S_n) = n - 1 \in \mathbb{Z}$ dir. $p \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = p + 1$ için $NK(S_{p+1}) = p$ olduğundan $NK(S_{p+1})$ bir asal sayıdır.

d) $NK(K_n) = (n - 1)^n \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değer in asal sayı olamayacağı aşıkardır

e) $NK(K_{r,s}) = r^s \cdot s^r \in \mathbb{Z}$ dir. $s = 1$ ve r nin asal sayı olması halinde $NK(K_{r,s})$ bir asal sayıdır. Diğer durumlarda ise asal sayı olamaz.

f) $NK(T_{r,s}) = 3 \cdot 2^{r-1} \cdot 2^{s-1} \in \mathbb{Z}$ dir. Ancak bu değer in asal sayı olamayacağı aşıkardır.



KAYNAKLAR

Azari, M., 2014. Sharp lower bounds on the Narumi-Katayama index of graph operations, Applied Mathematics and Computation, 239 (2014), 409-421.

Balakrishnan, R., Ranganathan, K. 2012. A Textbook of Graph Theory (Second Edition), Springer, New York.

Berge, C., 2001. The Theory of Graphs, Fletcher & Son Ltd., UK.

Biggs, N. L., Lloyd, E. K., Wilson, R. J. 1986. Graph Theory 1736-1936, Oxford University Press, London.

Bollobas, B., 1998. Modern Graph Theory, Springer, New York.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 2008. Graph Theory, Springer, New York.

Chen, W., 1976. Applied Graph Theory, North-Holland Publishing Company, New York.

Das, K. C., Gutman, I. and Furtula, B., 2010. On Second Geometric-Arithmetic Index of Graphs, Iranian Journal of Mathematical Chemistry, 1 (2) (2010), 17-28.

Das, K. C., Gutman, I. and Boris Furtula, 2010. On Third Geometric-Arithmetic Index of Graphs, Iranian Journal of Mathematical Chemistry, 1 (2) (2010), 29-36.

Das, K. C., Gutman, I., Boris Furtula, 2011. Survey on Geometric–Arithmetic Indices of Graphs, 65 (2011), 595-644.

Das, K. C., N. Trinajstić, 2010. Comparison Between First Geometric-Arithmetic Index and Atom-Bond Connectivity Index, Chemical Physics Letters 497. 149-151.

Das, K. C., 2010. On Geometric-Arithmetic Index of Graphs, MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 64 (2010), 619-630.

Das, K. C., 2010. Atom-Bond Connectivity Index of Graphs, Discrete Applied Mathematics, 158 (2010) 1181-1188.

Das, K. C., Gutman, I., Furtula, B., 2010. On the first Geometric-Arithmetic Index of Graphs, Discrete Applied Mathematics, 159 (2010), 2030-2037.

Fath-Tabar, G. H., Vaez-Zadeh, B., Ashrafi, A. R., Graovac, A., 2010. Some inequalities for the atom-bond connectivity index of graph operations, Discrete Applied Mathematics, 159 (2010), 1323-1330.

Foulds, L. R. 1992. Graph Theory Applications. Springer, New York.

Golumbic, M. C., Hartman, I. B., 2005. Graph Theory, Combinatorics and Algorithms, Springer, New York.

Harary, F. 1994. Graph Theory. Addison-Wesley, USA.

Harris, J. M., Hirst, J. L., Mossinghoff, M. J., 2008. Combinatorics and Graph Theory, Springer, New York.

Ilic, A., Stevanovic, D., 2009. On Comparing Zagreb Indices, MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 62 (3) (2009), 681-687.

Xu, K., Das, K. C., 2011. On Harary Index of Graphs, Discrete Applied Mathematics (159) 1631-1640.

West, D. B. 1996. Introduction to Graph Theory, Upper Saddle River, Prentice Hall.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şeyma ÖZÖN YILDIRIM

Doğum Yeri ve Tarihi : Osmangazi /BURSA, 09/01/1992

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Çelebi Mehmet Lisesi, 2005-2009

Lisans : Uludağ Üniversitesi, 2009-2013

Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi, 2014-...

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Bursa Özel Final Okulları 2016-

İletişim (e-posta) : seymazon@hotmail.com