T.C.
Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

YALINKAT MEROMORF FONKSİYONLAR ÜZERİNE

FEYYAZ KALMAZ

YALINKAT MEROMORF FONKSİYONLAR ÜZERİNE

FEYYAZ KALMAZ

T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YALINKAT MEROMORF FONKSİYONLAR ÜZERİNE

FEYYAZ KALMAZ

PROF. DR. METİN ÖZTÜRK

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA, 2016

TEZ ONAYI

Feyyaz KALMAZ tarafından hazırlanan "Yalınkat Meromorf Fonksiyonlar Üzerine" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

Başkan : Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

U.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

U.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ

Karabük Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü
01 /08/**2016**

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgile eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

29/07/2016

Feyyaz KALMAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YALINKAT MEROMORF FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Feyyaz KALMAZ

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan analitik yalınkat fonksiyon sınıflarına ait temel kavramlar ve sonuçlar verildi.

Tezin ana bölümünü oluşturan ikinci bölümde, birim dairenin dışında tanımlı sonsuzda veya orijinde basit kutba sahip meromorf yalınkat fonksiyonların sınıfı ve bu sınıfın yıldızıl, konveks, konvekse yakın, $\alpha-$ mertebeden yıldızıl ve konveks gibi alt sınıfları tanımlandı. Bütün bu sınıflara ait fonksiyonların katsayı problemleri, distorsiyon ve büyüme sonuçları, integral temsilleri verildi. Ayrıca, bu sınıflar arasında mümkün olan geçişler üzerinde duruldu.

Tezin son bölümünde ise, kutbu orijin olmayan ancak birim dairede bir noktada basit kutba sahip meromorf yalınkat fonksiyonların sınıfı ile bu sınıfın çeşitli alt sınıfları tanımlandı. Önceki bölümde fonksiyon sınıfları için incelenen bütün özellikler, bu bölümde, bu sınıflar için de incelendi.

Anahtar Kelimeler: Meromorf yalınkat fonksiyonlar, Meromorf yıldızıl fonksiyonlar, Meromorf konveks fonksiyonlar.

2016, vii+92 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

ON MEROMORPHIC UNIVALENT FUNCTIONS

Feyyaz KALMAZ

Uludağ University

Graduade School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

This thesis consists of three parts. In the first section, the basic concepts and results belong to classes of analytic univalent functions that will be used in other sections were given.

In the second section which forms the main part of thesis, the class of meromorphic univalent functions defined out of the unit disc or have the simple pole at origin and the subclass of this class as starlike, convex, close-to-convex, starlike of order α and convex were identified. The coefficient problems, distortion, growth results and integral representation of the functions belong to all these classes were given. Furthermore, there was focused on possible transitions between these classes.

On the final part of the thesis, the class of meromorphic univalent functions which do not have a pole but have a simple pole on unit disc and some subclass of this class were described. The features examined for function classes in the previous section were examined for these classes as well in this section.

Key Words: Meromorphic univalent functions, Meromorphic starlike functions, Meromorphic convex functions

2016, vii+92 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi esnasında büyük bir sabır ile desteğini esirgemeyen, tezin ortaya çıkması aşamasında araştırmalarıma yön veren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK'e sonsuz teşekkür ederim.

Hayatımın bütün evrelerinde her türlü kararıma saygı gösteren ve destek veren başta babam Ahmet KALMAZ olmak üzere tüm aileme şükranlarımı sunarım.

Feyyaz KALMAZ

29/07/2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
D_r	Orijin merkezli r yarıçaplı açık daire
$\mathbb{D}$	Açık birim daire
$\mathbb{D}^*$	Orijin çıkarılmış açık birim daire
$\mathbb{D}^x$	Birim dairenin dışı
$D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık daire
$\overline{D}(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı dairenin kapanışı
$\partial D(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı dairenin sınırı
$C_r = \partial D(z_0, r)$	Orijin merkezli r yarıçaplı çember
$f(D)$	D dairesinin f fonksiyonu altındaki görüntü kümesi
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna sabordinedir
$f \circ g$	f ile g fonksiyonlarının bileşkesi
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
$k_p(z)$	p noktasında bir kutba sahip Koebe fonksiyonu
$\mathrm{Re}\, f$	f fonksiyonunun reel kısmı
$\mathrm{Im}\, f$	f fonksiyonunun imajiner kısmı
$r^*(S)$	S sınıfının yıldızıllık yarıçapı
$r_K(S)$	S sınıfının konvekslik yarıçapı
P	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
S	Normalize edilmiş yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı
M	$\mathbb{D}^x$ bölgesinde tanımlı analitik ve yalınkat foksiyonların sınıfı
M_0	M sınıfında ait sıfır değerini almayan fonksiyonların sınıfı
$A(\mathbb{D})$	Birim dairede tanımlı analitik fonksiyonların sınıfı
PR	Reel kısmı pozitif ve reel katsayılı fonksiyonların sınıfı
$S^{(k)}$	Yalınkat k −katlı simetrik fonksiyonların sınıfı
$S^{(2)}$	Çift yalınkat fonksiyonların sınıfı
ST	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$ST(\alpha)$	α mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı
CV	Konveks fonksiyonların sınıfı
$CV(\alpha)$	α mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı
$\alpha - CV$	α −konveks fonksiyonların sınıfı
CC	Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$CV(p)$	$S(p)$ sınıfına ait konveks fonksiyonların sınıfı
$ST(p, w_0)$	$S(p)$ sınıfına ait yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\widetilde{CV}(p)$	$S(p)$ sınıfına ait $-\phi \in P$ özelliğindeki fonksiyonların sınıfı
$\widetilde{ST}(p, w_0)$	$S(p)$ sınıfına ait $p \in P$ özelliğindeki fonksiyonların sınıfı

MCC	$\mathbb{D}^x$ bölgesinde konvekse yakın meromorf fonksiyonların sınıfı
MST	Meromorf yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$MST(\alpha)$	α −mertebeli meromorf yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\widetilde{MST}(\alpha)$	$MST(\alpha)$ sınıfına ait $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların sınıfı
MCV	Meromorf konveks fonksiyonların sınıfı
$MCV(\alpha)$	α −mertebeli meromorf konveks fonksiyonların sınıfı
$\widetilde{MCV}(\alpha)$	$MCV(\alpha)$ sınıfına ait $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların sınıfı
$SP(\alpha)$	α −spiral fonksiyonların sınıfı
$MSP(\alpha)$	α −spiral meromorf fonksiyonların sınıfı
$BM(m)$	Alttan sınırlı meromorf fonksiyonların sınıfı
$\widetilde{BM}(m)$	$BM(m)$ sınıfına ait $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların sınıfı
$BMS(m)$	$BM(m)$ sınıfına ait yalınkat fonksiyonların sınıfı
$\widetilde{BMS}(m)$	$\widetilde{BM}(m)$ sınıfına yalınkat fonksiyonların sınıfı
TR	Tipik reel fonksiyonların sınıfı
MTR	Tipik reel meromorf fonksiyonların sınıfı
MTR^*	Orijinde normalize edilmiş tipik reel meromorf fonksiyonların sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, gelecek bölümlerde benzerleri tanımlanacak olan, birim dairede analitik ve yalınkat olan fonksiyonların sınıfları üzerinde duruldu. Bu sınıflara ait fonksiyonların integral temsilleri, katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon ve büyüme özellikleri verildi. Ayrıca, yine ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan belli bazı eşitsizlikler ifade edildi.

1.1 Analitik Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri

U kompleks düzlemde açık bir küme, $f: U \to \mathbb{C}$ kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $z_0 \in U$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında **diferansiyellenebilir,** limit değerine f fonksiyonunun z_0 noktasındaki **türevi** denir. f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi $f'(z_0)$ biçiminde gösterilir. Eğer f fonksiyonu U açık kümesinin bütün noktalarında diferansiyellenebilirse f fonksiyonuna U kümesinde **analitik** denir. Buna göre analitik fonksiyon, açık kümede tanımlı diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı bir kümeye **bölge** denir. D kompleks düzlemde bir bölge ve $f: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bire-bir ise, f fonksiyonuna D'de **yalınkat** veya **üni-valent** adı verilir. Başka bir ifadeyle, f fonksiyonunun D bölgesinde yalınkat olması, $z_1 \neq z_2$ özelliğinde bütün $z_1, z_2 \in D$ noktaları için $f(z_1) \neq f(z_2)$ olmasını gerektirir. Geometrik olarak bu: $f(D)$ görüntü bölgesinin katlı bölge olmaması anlamına gelir.

1.1.1 Teorem. f fonksiyonu kompleks düzlemin bir D bölgesinde analitik ve $z_0 \in D$ olsun. Eğer $f'(z_0) \neq 0$ ise uygun bir $r > 0$ sayısı için f fonksiyonu $D(z_0, r) \subset D$ dairesinde yalınkattır (Palka 1991, s:348).

Genelde, 1.1.1 Teoreminin tersi doğru olmadığı gibi, karşıt tersi de doğru değildir. Ancak 1.4.6 Teoreminde görülebileceği gibi, f fonksiyonu kompleks düzlemin konveks bir D bölgesinde analitik ve her $z \in D$ için $\mathrm{Re} f'(z) \neq 0$ ise f fonksiyonu D'de yalınkat olur. Bununla birlikte, D bölgesinde yalınkat bir fonksiyon D'nin bütün alt bölgelerinde de yalınkattır.

$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı $z = g(t)$ sürekli fonksiyonuna kompleks düzlemde bir **eğri**, $g([a, b])$ görüntü kümesine eğrinin **izi** veya **yörüngesi** denir. g eğrisinin izini $C = g([a, b])$ ile göstereceğiz ve C eğrisi denildiğinde eğrinin izinin kastedildiği anlaşılacak. $g(a)$ noktasına eğrinin **başlangıç noktası**, $g(b)$ noktasına ise, eğrinin **bitiş noktası** adı verilir. Başlangıç noktasından bitiş noktasına giden yön, eğrinin yönünü gösterir. Böyle bir eğri yönlendirilmiş olur. Her $t \in [a, b]$ için $g'(t)$ mevcut ve $g'(t) \neq 0$ ise eğriye **düzgün eğri**, $[a, b]$ aralığının sonlu sayıda alt aralıklarında düzgün olan eğriye de **parçalı düzgün eğri** denilir. Kendi kendini kesmeyen eğriye **basit eğri**, $g(a)$ ve $g(b)$ **uç noktaları** eşit eğriye **kapalı eğri**, sadece uç noktalarında kesişen eğriye **basit kapalı eğri** veya **Jordan eğrisi** ve Jordon eğrisinin sınırladığı bölgeye de **Jordon bölgesi** denir. Kompleks düzlemin bir D bölgesinde her basit kapalı eğrinin iç kısmı sadece D bölgesinin noktalarından oluşmuş ise D'ye **basit bağlantılı bölge** adı verilir.

D kompleks düzlemde bir bölge, $f: D \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in D$ olsun. z_0 noktasında kesişen D'de yönlendirilmiş her C_1 ve C_2 düzgün eğri çiftinin z_0 noktasında aralarındaki açı, $f(C_1)$ ve $f(C_2)$ görüntü eğrilerinin $f(z_0)$ noktasındaki açıya büyüklük olarak eşit, yön olarak aynı ise f fonksiyonuna z_0 **noktasında konform** denir.

Aşağıda, bir fonksiyonun bir noktada ve bir bölgede konform olmasını test eden iki tane sonuç verilecektir.

1.1.2 Teorem. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ve $z_0 \in D$ olsun. Eğer $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu z_0 noktasında konformdur (Zill 2003, s:354).

1.1.3 Teorem. D kompleks düzlemde bir bölge ve $f: D \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun D bölgesinde konform olması için gerek ve yeter şart, f fonksiyonunun D'de analitik ve yalınkat olmasıdır (Palka 1991, s:382).

Yerel yalınkatlık genel yalınkatlılığı gerektirmediğinden 1.1.3 Teoremi gereği yerel konformluk da genel konformluğu gerektirmez.

Yalınkat fonksiyon teorisinde kullanılan önemli sonuçlardan biri Riemann dönüşüm teoremidir. Bu teorem, kompleks düzlemin kendisi olmayan basit bağlantılı bir alt bölgesinin $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ açık birim dairesi üzerine bire-bir ve analitik olarak dönüştüren bir dönüşümün varlığından bahseder.

1.1.4 Teorem. (Riemann Dönüşüm Teoremi) D, kompleks düzleminin basit bağlantılı bir alt bölgesi ve $D \neq \mathbb{C}$ olsun. D bölgesini $\mathbb{D}$ birim dairesi üzerine, bire-bir ve analitik (konform) olarak resmeden, $z_0 \in D$ noktası için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliğinde bir tek f fonksiyonu vardır (Palka 1991, s:420).

Riemann dönüşüm teoremi gereği, basit bağlantılı bir bölgede konform dönüşümlerle ilgili bir çok problemi çözmek için, bu bölge yerine ona konform olarak denk olan $\mathbb{D}$ birim dairesini almak uygundur. Böylece, $\mathbb{D}$'de elde edilen sonuçlar ona konform olarak denk olan bölgeye taşınabileceğinden, kolaylık açısından çalışmamızı birim daire veya birim dairenin dışı üzerinde yoğunlaştıracağız.

Çoğu zaman basit bağlantılı bir bölgenin, özellikle de birim dairenin konform dönüşüm altındaki görüntü kümesiyle ilgilenmek gerekli olacaktır. Aşağıdaki teorem görüntü kümesinin bulunmasında kolaylık sağlar.

1.1.5 Teorem. f fonksiyonu bir D Jordan bölgesinde analitik, $C = \partial D$ üzerinde sürekli ve bire-bir olsun. Bu durumda, f fonksiyonu D bölgesini $f(C)$ Jordan eğrisinin sınırladığı bölge üzerine konform olarak resmeder (Pommerenke 1975, s:282).

Birim dairede tanımlı fonksiyonların modülüyle ilgili bir çok eşitsizliğin elde edilmesinde Schwarz lemması denilen aşağıdaki teorem önemli rol oynar.

1.1.6 Teorem. (Schwarz Lemma) f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik ve $f(0) = 0$, $|f(z)| < 1$ özelliklerini sağlasın. Bu durumda, her $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Eşitlik, θ reel sayı olmak üzere, $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.2 Analitik Yalınkat Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri

$\mathbb{D}$ birim dairesinde analitik, yalınkat, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ bağıntısını sağlayan ve orijin civarında

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

biçiminde seri açılımına sahip bir fonksiyona **normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyon** denir. $\mathbb{D}$'de normalize edilmiş bütün analitik yalınkat fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Aşağıda, S sınıfına ait fonksiyonların belli başlı bazı temel özellikleri üzerinde durulacaktır. Bunlardan birincisi S sınıfının bazı elementer dönüşümler altında değişmez kaldığıdır.

1.2.1 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ ve $f \in S$ olsun. Bu durumda aşağıda tanımlanan g fonksiyonu da S sınıfına aittir.

(i) $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n$ rotasyonu,

(ii) $0 < r < 1$ için $g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n$ genleşmesi,

(iii) $|\alpha| < 1$ ve $\varphi(z) = (z + \alpha)/(1 + \bar{\alpha} z)$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{f(\varphi(z)) - f(\alpha)}{(1 - |\alpha|^2) f'(\alpha)} = z + \frac{(1 - |\alpha|^2) f''(\alpha) - 2\bar{\alpha} f'(\alpha)}{2f'(\alpha)} z^2 + \cdots$$

disk otomorfizmi,

(iv) $k = 2,3, \dots$ için

$$g(z) = [f(z^k)]^{\frac{1}{k}} = z \left[\frac{f(z^k)}{z^k}\right]^{\frac{1}{k}}$$

$$= z + \frac{a_2}{k} z^{k+1} + \frac{1}{2k^2} [2ka_3 - (k-1){a_2}^2] z^{2k+1} + \cdots$$

n. kök dönüşümü

(v) $w \notin f(\mathbb{D})$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)} = z + (a_2 + 1/w) z^2 + \cdots$$

atlanmış değer dönüşümü,

(vi) φ, f fonksiyonunun değer kümesi üzerinde yalınkat ve analitik bir fonksiyon olmak üzere $g = \varphi \circ f$ bileşke dönüşümü (Goodman 1983, vol. I, s:18).

S sınıfına ait önemli fonksiyonlardan biri; $z \in \mathbb{D}$ için $k(z) = z/(1-z)^2$ **Koebe fonksiyonu**dur. Bu fonksiyon açık birim daireyi $\mathbb{C}\backslash\{w: -\infty < w \leq -1/4\}$ bölgesi üzerine bire-bir olarak dönüştürür. Koebe fonksiyonunun rotasyonu, $k_\theta(z) = z/\left(1 - e^{i\theta}z\right)^2$ fonksiyonu açık birim daireyi orijinden çıkan ışının $-e^{-i\theta}/4$ noktasından ∞'a uzanan parçası hariç, bütün kompleks düzlem üzerine bire-bir olarak resmeder. $z \in \mathbb{D}$ ve $\alpha \in (0,2]$ olmak üzere, $f(z) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha - 1\right]$ **genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu** S sınıfına ait önemli fonksiyonlardan bir diğeridir.

(1.1) açılımıyla verilen S sınıfına ait fonksiyonların a_n katsayıları için $|a_n| \leq n$ $(n = 2,3,\ldots)$ eşitsizliği **Bieberbach tahmini** olarak bilinir. Bieberbach (1916) tarafından verilen bu tahmin ancak De Branges (1985) tarafından ispatlanabilmiştir. Aşağıdaki teorem bu tahmini ifade eder.

1.2.2 Teorem. (Bieberbach Tahmini) $f \in S$ fonksiyonu (1.1) açılımı ile verilmiş olsun. Bu durumda her $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik $f(z) = k_\theta(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Aşağıda S sınıfına ait fonksiyonlar altında kompakt dairelerin görüntü bölgesinin alanı ile ilgili bir sonuç verilecektir. Teoremin ispatı, 2.bölümde verilecek olan Alan teoreminin ispatında kullanılacağından burada verilecektir.

1.2.3 Teorem. $f \in S$ ve $\overline{D}_r = \{z: |z| \leq r < 1\}$ olsun. Bu durumda $f(\overline{D}_r)$ bölgesinin alanı

$$A(r) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n} \tag{1.2}$$

dir.

İspat. $z = x + iy \in \overline{D}_r$ ve $w = f(z) = u(z) + iv(z)$ olsun. $f(\overline{D}_r)$ bölgesinin alanı

$$A(r) = \iint_{f(\overline{D}_r)} dudv = \iint_{\overline{D}_r} \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy$$

eşitliği ile verilir. $f = u + iv$ fonksiyonu analitik olduğundan,

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = {u_x}^2 + {v_x}^2 = |f'(z)|^2$$

ve $z = \rho e^{i\theta}$ için

$$A(r) = \iint_{\overline{D}_r} |f'(z)|^2 dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^r \left|f'(\rho e^{i\theta})\right|^2 \rho \, d\rho \, d\theta \qquad (1.3)$$

olur. (1.1) bağıntısı gereği

$$f'(\rho e^{i\theta}) = 1 + 2a_2\rho e^{i\theta} + \ldots + na_n\rho^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + \cdots$$

olduğundan,

$$\left|f'(\rho e^{i\theta})\right|^2 = f'(\rho e^{i\theta})\overline{f'(\rho e^{i\theta})} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|^2 \rho^{2n-2} + \sum_{k\neq 0} c_k e^{ik\theta}$$

olarak yazılabilir. Burada c_k katsayıları a_n ve ρ'ya bağlıdır. Bu ifade (1.3) bağıntısında yerine yazılır, düzgün yakınsaklıktan dolayı terim terime integrali alınır ve $k \neq 0$ için $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\, d\theta = 0$ olduğuna dikkat edilirse (1.2) eşitliği elde edilir. ■

1.2.4 Açıklama. (i) Eğer $0 < r < 1$ için $A(r) \leq m < \infty$ ise, $N = 1,2, \ldots$ olmak üzere,

$$S_N(r) = \pi \sum_{n=1}^{N} n\,|a_n|^2 r^{2n} \leq m$$

dir. $(S_N(r))$ kısmi toplamlar dizisi monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi olduğundan, $r \to 1^-$ iken limiti mevcuttur. O halde,

$$S_N = S_N(1) = \pi \sum_{n=1}^{N} n\,|a_n|^2 \leq m$$

elde edilir. (S_N) kısmi toplamlar dizisi sınırlı ve $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2$ serisi yakınsak olduğundan $N \to \infty$ için

$$A = \lim_{r \to 1^-} A(r) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \tag{1.4}$$

elde edilir.

(ii) $A = \pi(1 + 2|a_2|^2 + \cdots) \geq \pi$ olduğundan $f(z) = z$ fonksiyonu için $A = \pi$ olup, diğer bütün $f \in S$ fonksiyonlar için $A \geq \pi$ dir.

(iii) Eğer $A(r)$ sınırlı değilse $r \to 1^-$ iken (1.4) bağıntısındaki seri ıraksak ve $A = \infty$ olur.

1.3 *S* Sınıfına Ait Fonksiyonların Özellikleri

$|a_2| \leq 2$ eşitsizliği, S sınıfına ait fonksiyonlarla ilgili bazı sonuçların elde edilmesinde önemli rol oynar. Bu sonuçlar yalınkat fonksiyonlar teorisinin temel teoremleri olarak bilinir. Bunlardan birincisi, Koebe $1/4$ –teoremi olarak adlandırılan aşağıdaki teoremdir. Bu teorem S sınıfına ait fonksiyonların görüntü bölgesinin daima $1/4$ yarıçaplı merkezi açık bir daireyi bulundurduğunu ifade eder.

1.3.1 Teorem. $f \in S$ ise $f(\mathbb{D}) \supset D_{1/4}$ dür. Eşitlik $f(z) = k_\theta(z)$ fonksiyonu için sağlanır. Üstelik, $\bigcap_{f \in S} f(\mathbb{D}) = D_{1/4}$ dür (Duren 1983, s:31).

S sınıfına ait fonksiyonlar için önemli sonuçlardan biri de aşağıda verilen distorsiyon ve büyüme sonucudur.

1.3.2 Teorem. $f \in S$ ve $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2},$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3},$$

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

dir. Her üç bağıntıda eşitlik, $f(z) = k_\theta(z)$ fonksiyonu için geçerlidir (Bieberbach 1916).

S sınıfına ait fonksiyonlar için yukarıda verilen özelliklerin yanında aşağıdaki özellikler de verilebilir.

1.3.3 Teorem. $f \in S$ ve $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2} \quad , \qquad |f''(z)| \leq \frac{2(2+r)}{(1-r)^4},$$

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} z\frac{f''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2+4}{1-r^2}$$

dir. Her üç bağıntıda eşitlik, $f(z) = k_\theta(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Aşağıdaki sonuç, birim dairede analitik fonksiyonlar için yalınkatlık kriteri olarak kullanılabilir.

1.3.4 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olsun. Eğer $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ ise f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde yalınkattır.

İspat. $z, w \in \mathbb{D}$ ve $z \neq w$ için

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= \left|z - w + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(z^k - w^k)\right| \\ &\geq |z-w|\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|(|z|^{k-1} + \cdots + |w|^{k-1})\right) \\ &\geq |z-w|\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k|\right) > 0 \end{aligned}$$

olur. Yani $f(z) \neq f(w)$ dır. Dolayısıyla, f fonksiyonu $\mathbb{D}$'de yalınkat olur.■

S sınıfının önemli bir topolojik özelliğinden bahsederek bu kısmı tamamlayalım.

1.3.5 Teorem. S sınıfı, $\mathbb{D}$ dairesinde tanımlı analitik fonksiyonların sınıfının kompakt alt kümesidir (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:18).

1.4 Reel Kısmı Pozitif Analitik Fonksiyonlar ve Özellikleri

$\mathbb{D}$ dairesinde analitik, $f(0) = 1$ ve $z \in \mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}\{f(z)\} > 0$ özelliklerini sağlayan

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \tag{1.5}$$

açılımına sahip fonksiyonlara **reel kısmı pozitif analitik fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir. $z \in \mathbb{D}$ için,

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z} \tag{1.6}$$

fonksiyonu P sınıfına ait önemli bir fonksiyon olup, birim daireyi $H = \{w : \mathrm{Re}\, w > 0\}$ sağ yarı düzlem üzerine konform olarak resmeder. S sınıfında Koebe fonksiyonunun oynadığı rolü, p fonksiyonu P sınıfında oynar.

P sınıfına ait fonksiyonların yalınkat olması gerekmez. Örneğin, $n \geq 2$ tamsayısı için, $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait olmasına rağmen $\mathbb{D}$ dairesinde yalınkat değildir. Bununla birlikte, P sınıfı konveks ve kompakttır (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:32).

1.4.1 Tanım f ve g fonksiyonları $\mathbb{D}$ dairesinde analitik olsun. Her $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = g(w(z))$ olacak biçimde $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ özelliğinde $\mathbb{D}$ dairesinde analitik bir w fonksiyonu varsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna **sabordine** denir ve bu durum $f \prec g$ biçiminde gösterilir.

Tanımda verilen w fonksiyonunun Schwarz lemmasının şartlarını sağladığı açıktır. Aşağıdaki teorem sabordine fonksiyonların geometrik yorumunu vermektedir.

1.4.2 Teorem. f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik, g fonksiyonu da analitik ve yalınkat olsun. Bu durumda,

$$f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0) \text{ ve } f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$$

dir. Genelde $f \prec g$ ise her bir $r \in (0,1)$ için $D_r = \{z: |z| < r\}$ olmak üzere, $f(D_r) \subset g(D_r)$ dir (Goodman 1983, vol: I s:86).

P sınıfına ait fonksiyonlar (1.6) ile verilen p fonksiyonuna sabordinedir. Bunun tersi de doğrudur. Yani, $f \in P \Leftrightarrow f \prec p$ dir (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:28).

P sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini elde etmek mümkündür. Herglotz (1911)'un temsil teoremi bununla ilgilidir.

1.4.3 Teorem. (Herglotz temsil teoremi) f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik, $f(0) = 1$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$f \in P \Leftrightarrow f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} d\mu(\theta) \tag{1.7}$$

olacak biçimde $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ özelliğinde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonu vardır (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:31).

Herglotz temsil teoremi P sınıfına ait fonksiyonların büyüklük ve distorsiyon sonuçlarının elde edilmesinde oldukça kullanışlıdır.

1.4.4 Teorem. $f \in P$ ve $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1-r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{1+r}{1-r},$$

$$|f'(z)| \leq \frac{2}{(1-r)^2}$$

dir. Eşitlik, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(z) = p(e^{i\alpha}z)$ fonksiyonu için geçerlidir (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:31).

1.4.5 Teorem. $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in P$ ise $|p_n| \leq 2$ dir. Eşitlik, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = p(e^{i\alpha}z)$ fonksiyonu için geçerlidir (Duren 1983, s:41).

Aşağıda konveks bölgeler ile ilgili iki yalınkatlık testi verilmiştir.

1.4.6 Teorem. D kompleks düzlemde konveks bir bölge ve her $z \in D$ olsun. Belli bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için,

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\alpha}f'(z)\right] > 0$$

ise f fonksiyonu D'de yalınkattır (Noshiro, 1935) ve (Warchawski, 1935).

1.4.7 Teorem. D kompleks düzlemde bir bölge, f ve φ fonksiyonları D bölgesinde analitik, φ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ve $\varphi(D)$ konveks bir bölge olsun. Bu durumda her $z \in D$ için,

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}\right] > 0$$

ise, f fonksiyonu D'de yalınkattır (Ozaki, 1935) ve (Kaplan, 1952).

1.4.8 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ ve $P(\alpha) = \{f \in P : \mathrm{Re}[f(z)] > \alpha, 0 \leq \alpha < 1\}$ olsun. Bu durumda $f \in P(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 + (1 - 2\alpha)ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}\, d\mu(\theta)$$

olacak biçimde $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 2\pi$ özelliğinde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonunun mevcut olmasıdır. Üstelik, $f \in P(\alpha)$ fonksiyonu (1.5) açılımına sahip ise $|p_n| \leq 2(1 - \alpha)$ dır. Eşitlik θ reel sayı olmak üzere $f(z) = \left[1 + (1 - 2\alpha)ze^{-i\theta}\right]/\left(1 - ze^{-i\theta}\right)$ fonksiyonu için sağlanır (Goodman 1983, vol: I s:105).

P sınıfına ait reel katsayılı fonksiyonların sınıfı PR ile gösterilirse, Herlogtz temsil teoremi ile verilen integral temsili, PR sınıfına ait fonksiyonlar için de verilebilir.

1.4.9 Teorem. Bir g fonksiyonunun PR sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos\theta + z^2} d\mu(\theta) \tag{1.7a}$$

olacak şekilde $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 2\pi$ özelliğinde, reel değerli, azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonu vardır.

1.5 Yıldızıl ve Konveks Analitik Yalınkat Fonksiyonlar

Bu kısımda S sınıfına ait fonksiyonların görüntü bölgelerinin yıldızıl veya konveks olması durumunda oluşan alt sınıflar tanımlanıp, bu sınıflara ait fonksiyonların integral temsilleri, katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon ve büyüme özellikleri verilecektir.

Kompleks düzlemde herhangi w_0 ve w noktalarını birleştiren doğru parçası $[w_0, w] = \{(1-t)w_0 + tw : 0 \le t \le 1\}$ biçiminde tanımlanır. A kompleks düzlemde bir küme ve $w_0 \in A$ sabit noktası verilmiş olsun. Eğer her $w \in A$ noktası için $[w_0, w] \subset A$ ise A kümesine w_0 **noktasına göre yıldızıl** ve her $w_1, w_2 \in A$ noktaları için $[w_1, w_2] \subset A$ ise A kümesine **konveks** denir. Buna göre konveks küme, her bir noktaya göre yıldızıl olan kümedir.

f fonksiyonu $D_r = \{z : |z| < r, 0 < r \le 1\}$ bölgesinde analitik, yalınkat ve $z_0 \in D_r$ olsun. Eğer $f(D_r)$ görüntü bölgesi $w_0 = f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl ise f fonksiyonuna D_r bölgesinde z_0 **noktasına göre yıldızıl** denir. Orijine göre yıldızıl bir fonksiyona **yıldızıl fonksiyon** adı verilir. Eğer $f(D_r)$ bölgesi konveks ise f fonksiyonuna D_r de **konveks fonksiyon** denir. D_r dairesinde yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfları sırasıyla, $ST(D_r)$ ve $CV(D_r)$ ile gösterilir. Özel olarak, $\mathbb{D} = D_1$ de (1.1) biçiminde bir Taylor açılımına sahip yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfları sırasıyla, ST ve CV ile gösterilir.

γ, $\mathbb{C}$ de $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$ parametrik ifadesi ile verilmiş düzgün bir eğri ve f fonksiyonu γ eğrisini bulunduran bir bölgede analitik olsun. $f(\gamma) = \Gamma$, $w_0 \notin \Gamma$ ve $w \in \Gamma$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\arg(w - w_0)$, t değişkeninin azalmayan tek değişkenli bir fonksiyonu, yani $a \le t \le b$ için

$$\frac{d}{dt}\arg(w - w_0) \ge 0$$

ise, Γ eğrisine w_0 **noktasına göre yıldızıl eğri** denir. Eğer Γ eğrisine teğet olan doğrunun τ argümenti t değişkeninin azalmayan bir fonksiyonu, yani $a \leq t \leq b$ için

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}\arg[f'(z)z'(t)] \geq 0$$

ise Γ eğrisi **konveks eğri** olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teorem yıldızıl ve konveks fonksiyonların analitik ifadesini verir.

1.5.1 Teorem. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda,

(i) $$f \in ST \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

(ii) $$f \in CV \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$$

dır (Goodman 1983, vol: I s:111).

Konvekslik için başka çift gerektirmeli sonuçlar Sheil–Small (1969) ve Suffridge (1970) tarafından verilmiştir.

1.5.2 Teorem. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $\zeta, z \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda,

$$f \in CV \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right] \geq 0$$

dır.

1.5.2 Teoreminin bir sonucu, aşağıda verilen konvekslik kriteridir.

1.5.3 Sonuç. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve $|\zeta| < |z| < 1$ olsun. Bu durumda

$$f \in CV \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z) - f(\zeta)}\right] > 0$$

dır.

1.5.1 Teoreminden ST ve CV sınıfları arasında oldukça kullanışlı olan aşağıdaki bağıntıyı elde etmek mümkündür. Bu bağıntı ilk olarak Alexander (1915) tarafından elde edilmiştir.

1.5.4 Teorem. $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik olsun. Bu durumda,

$$f \in CV \Leftrightarrow zf' \in ST$$

ve

$$f \in ST \Leftrightarrow \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \in CV$$

dir.

Koebe fonksiyonu ve rotasyonları ST sınıfına ait olduğundan 1.3.2 Teoreminde verilen S sınıfı için büyüme ve distorsiyon sonuçları ST sınıfı için de geçerlidir.

1.5.5 Teorem. $f \in ST$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

dür. Eşitlik hali, Koebe fonksiyonu ve onun uygun bir rotasyonu için geçerlidir (Goodman 1983, vol: I s:117).

Aşağıdaki teorem konveks fonksiyonlar için büyüme ve distorsiyon sonucunu verir.

1.5.6 Teorem. $f \in CV$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$$

dir. Ayrıca, $f(\mathbb{D}) \supset \{w : |w| < 1/2\}$ olup, θ reel sayı olmak üzere, eşitlik $f(z) = z/(1 - e^{i\theta}z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

ST ve CV sınıflarına ait fonksiyonlar için Nevanlinna (1920) ve Loewner (1923)'e ait katsayı sınırları aşağıdaki teoremde verilmiştir.

1.5.7 Teorem. f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik ve (1.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda,

(i) $f \in ST$ ise $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik, Koebe fonksiyonu ve rotasyonları için geçerlidir.

(ii) $f \in CV$ ise $|a_n| \leq 1$ dir. Eşitlik, $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = z/(1 - e^{i\theta}z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Konveks fonksiyonlar için kullanışlı bir katsayı tahmini Hummel (1957) ve Trimble (1975) tarafından verilmiştir.

1.5.8 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olsun.

(i) $f \in S$ ise $|a_3 - a_2{}^2| \leq 1$ dir.

(ii) $f \in CV$ ise $|a_3 - a_2{}^2| \leq (1 - |a_2|^2)/3$ dür.

1.3.4 Teoreminde olduğu gibi, belli katsayı bağıntısını sağlayan fonksiyon sınıfları yıldızıl ve konveks olabilir.

1.5.9 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olsun. Bu durumda,

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ ise $f \in ST$ dir.

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| \leq 1$ ise $f \in CV$ dir.

Aşağıdaki teorem, yıldızıl fonksiyonlar altında $\mathbb{D}$ dairesinin görüntü bölgesinin alanı ile fonksiyonun katsayıları arasındaki bağıntıyı verir.

1.5.10 Teorem. $f \in ST$ fonksiyonu (1.1) açılımına sahip ve $f(\mathbb{D})$ bölgesinin alanı A olsun. Bu durumda $n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq \frac{2}{n-1}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2}$$

dir.

1.5.11 Tanım. F, S sınıfının boş olmayan bir alt sınıfı olsun. F sınıfındaki her bir fonksiyon $D_{r^*(F)}$ dairesinde yıldızıl olacak biçimdeki en büyük $r^*(F)$ pozitif sayısına, F sınıfının **yıldızıllık yarıçapı** ve F sınıfındaki her bir fonksiyon $D_{r_K(F)}$ dairesinde konveks olacak şekilde en büyük $r_K(F)$ pozitif sayısına da F sınıfının **konvekslik yarıçapı** denir.

Nevanlinna (1920) ve H. Grunsky (1933) S sınıfına ait fonksiyonlar için konvekslik ve yıldızıllık yarıçapının $r_K(S) = 2 - \sqrt{3}$ ve $r^*(S) = \tanh(\pi/4)$ olduğunu göstermişlerdir.

1.6 k −Katlı Simetrik Fonksiyonlar

1.2.1 Teoreminden, $f \in S$ ve $k = 2,3,\dots$ için

$$g(z) = [f(z^k)]^{1/k} \tag{1.8}$$

fonksiyonunun S sınıfına ait olduğu biliniyor. (1.8) eşitliğinde $\mathbb{D}$ dairesini kendi üzerine k defa resmeden $u = z^k$ dönüşümü yapılırsa $f(u)$ fonksiyonu bu bölgeyi, $w = 0$ noktasında uygun bir dalı ile birleşen $f(\mathbb{D})$ bölgesi üzerine k defa resmeder. k. kökü ise, bu k −katlı yüzeyi tek katlı bir yüzeye dönüştürmüş olur.

1.6.1 Tanım. k pozitif bir tamsayı olsun. Eğer D bölgesinin orijin etrafında $2\pi/k$ açılık bir dönmesi D'yi kendi üzerine dönüştürüyorsa, D bölgesine k **−katlı simetrik bölge** denir. Eğer her $z \in \mathbb{D}$ için

$$e^{-2\pi i/k} f\left(e^{2\pi i/k} z\right) = f(z)$$

ise f fonksiyonuna $\mathbb{D}$ dairesinde k **−katlı simetrik fonksiyon** adı verilir.

Gronwall (1916), $\mathbb{D}$ dairesinde k −katlı simetrik analitik bir fonksiyonun seri açılımını aşağıdaki biçimde elde etmiştir.

1.6.2 Teorem. f fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde analitik ve k −katlı simetrik bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $z \in \mathbb{D}$ için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{nk+1} z^{nk+1} \tag{1.9}$$

biçiminde bir seri açılımına sahiptir. Tersine, (1.9) açılımı ile verilen f fonksiyonu, serinin $\mathbb{D}$ yakınsaklık dairesinde k −katlı simetrik bir fonksiyondur.

Tanıma dikkat edilirse, k −katlı simetrik fonksiyonların yalınkat olması gerekli değildir. Çalışmamızda yalınkat k −katlı simetrik fonksiyonlar üzerinde duracağız. Bu yüzden birim dairede k −katlı simetrik yalınkat fonksiyonların sınıfını çalışmak kaçınılmaz olmuştur. Her $z \in \mathbb{D}$ için

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nk+1} z^{nk+1} \tag{1.10}$$

biçiminde bir açılıma sahip k −katlı simetrik yalınkat fonksiyonların sınıfı $S^{(k)}$ ile gösterilir. Özel olarak, $k = 2$ için $S^{(2)}$, **çift yalınkat fonksiyonların** sınıfı olarak adlandırılır.

Graham ve Varolin (1996) $S^{(k)}$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıda verilen katsayı tahmini ve örtme sonuçlarını elde etmişlerdir.

1.6.3 Teorem. $f \in S^{(k)}$ fonksiyonu (1.10) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$|b_{k+1}| \le \frac{2}{k}$$

dır. Üstelik $\rho_k = 4^{-1/k}$ olmak üzere, $f(\mathbb{D}) \supseteq D_{\rho_k}$ dır. Eşitlik, $g(z) = [k(z^k)]^{1/k} = z/(1 - z^k)^{2/k}$, k −katlı simetrik Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir.

Graham ve Varolin (1996) konveks fonksiyonlar için $a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0$ şartı altında k −katlı simetrikten daha zayıf olan aşağıdaki distorsiyon sonucunu elde etmişlerdir.

1.6.4 Teorem. $\mathbb{D}$ dairesinde analitik $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \cdots$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda

(i) $f \in CV$ ise $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{1}{(1+|z|^k)^{2/k}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|^k)^{2/k}}$$

dır.

(ii) $f \in ST$ ise $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{|z|}{(1+|z|^k)^{2/k}} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|^k)^{2/k}}$$

dır. Birinci bağıntı için eşitlik: $k = 1$ iken $f_1(z) = z/(1-z)$, $k = 2$ için $f_2(z) = 2^{-1}\log[(1+z)/(1-z)]$ ve $k \geq 3$ için $f_k(z) = \int_0^z (1-w^k)^{-2/k}\,dw$ fonksiyonları için geçerlidir. İkinci bağıntı için eşitlik: $k \geq 1$ iken $g_k(z) = zf_k'(z)$ için geçerlidir.

1.7 α Mertebeli Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

$f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu, $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ şartlarını sağlasın. Bu durumda, $0 \leq \alpha < 1$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha$$

ise f fonksiyonuna α **mertebeli yıldızıl fonksiyon,**

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha$$

ise f fonksiyonuna α **mertebeli konveks fonksiyon** denir (Robertson 1936).

$z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde normalize edilmiş α mertebeli yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfı, sırasıyla $ST(\alpha)$ ve $CV(\alpha)$ ile gösterilir. $ST(0) = ST$ ve $CV(0) = CV$ olduğu açıktır. 1.5.4 Teoreminde verilen ST ile CV arasındaki ilişki, $ST(\alpha)$ ve $CV(\alpha)$ sınıfları arasında da mevcuttur.

1.7.1 Teorem. f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik olsun. Bu durumda $\beta = \left(2\alpha - 1 + \sqrt{(2\alpha-1)^2 + 8}\right)/4$ olmak üzere

$$f \in CV(\alpha) \Leftrightarrow zf'(z) \in ST(\alpha)$$

ve

$$f \in CV(\alpha) \Leftrightarrow f \in ST(\beta)$$

dir (Miller ve Mocanu, 2000).

CV ile $ST(\alpha)$ sınıfları arasındaki önemli sonuçlardan biri Suffridge (1970)'ye ait olan aşağıdaki sonuçtur.

1.7.2 Teorem. $f \in CV$ ise $f \in ST(1/2)$ dir. Üstelik, $f \in CV$ ise $z \in \mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}[f(z)/z] > 1/2$ dir. Sonuçlar kesin olup $1/2$ sabiti büyütülemez.

1.7.3 Teorem. f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik, $\alpha \in [0,1)$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda $[f(z)/z]^{1/(1-\alpha)}\big|_{z=0} = 1$ ve $[f'(z)]^{1/(1-\alpha)}\big|_{z=0} = 1$ olmak üzere,

$$f \in ST(\alpha) \Leftrightarrow z[f(z)/z]^{1/(1-\alpha)} \in S$$

ve

$$f \in CV(\alpha) \Leftrightarrow z[f'(z)]^{1/(1-\alpha)} \in S$$

dir (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:56).

1.7.3 Teoremi kullanılarak α mertebeli konveks fonksiyonlar için Robertson (1936)'a ait olan büyüme ve distorsiyon özellikleri verilebilir.

1.7.4 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ için $f \in CV(\alpha)$ olsun. Bu durumda, $|z| = r < 1$ için

$$\frac{1}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^{2(1-\alpha)}} \tag{1.11}$$

dır. Eğer $\alpha \neq 1/2$ ise,

$$\frac{(1+r)^{2\alpha-1}-1}{2\alpha-1} \leq |f(z)| \leq \frac{1-(1-r)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}$$

ve $\alpha = 1/2$ ise,

$$\log(1+r) \leq |f(z)| \leq -\log(1-r)$$

dir. Eşitsizlikler kesin olup, eşitlik hali

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1-(1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}, & \alpha \neq 1/2 \\ -\log(1-z), & \alpha = 1/2 \end{cases} \tag{1.12}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

1.7.3 Teoremi ve (1.11) bağıntısından $ST(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki büyüme teoremi elde edilebilir.

1.7.5 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ için $f \in ST(\alpha)$ olsun. $|z| = r < 1$ olmak üzere,

$$\frac{r}{(1+r)^{2(1-\alpha)}} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^{2(1-\alpha)}}$$

dır. Sınırlar kesin olup, eşitlik $f(z,\alpha) = z(1-z)^{-2(1-\alpha)}$ fonksiyonu için geçerlidir.

α mertebeli konveks fonksiyonlar için gerek ve yeter şartı ifade eden aşağıdaki teorem, Brown (1989) tarafından elde edilmiştir. Bu sonuç, $|\zeta| < 1$ için $\mathbb{D}$'de konveks bir fonksiyonun her $|z-\zeta| < r < 1 - |\zeta|$ dairesini konveks bir bölge üzerine dönüştürdüğünü gösterir.

1.7.6 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. $|\zeta| < 1$ ve $|z-\zeta| < r < 1 - |\zeta|$ olmak üzere

$$f \in CV(\alpha) \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{(z-\zeta)f''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

dır.

Son olarak, $ST(\alpha)$ ve $CV(\alpha)$ sınıflarına ait fonksiyonlar için Robertson (1936)'a ait katsayı tahminlerini verelim.

1.7.7 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun.

(i) $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in ST(\alpha)$ ise, $n = 2,3,\dots$ için

$$|a_n| \le \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=2}^{\infty}(k-2\alpha)$$

dır. Eşitlik, $f(z,\alpha) = z(1-z)^{-2(1-\alpha)}$ fonksiyonu için geçerlidir.

(ii) $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \in CV(\alpha)$ ise, $n = 2,3,\dots$ için

$$|b_n| \le \frac{1}{n!}\prod_{k=2}^{\infty}(k-2\alpha)$$

dır. Eşitlik (1.12)' de verilen fonksiyonlar için geçerlidir.

Aşağıdaki teorem, $ST(\alpha)$ ve $CV(\alpha)$ sınıfınlarının integral temsilini vermektedir.

1.7.8 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere,

$$f \in ST(\alpha) \Leftrightarrow f(z) = z \exp\left[-\frac{(1-\alpha)}{\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(1 - ze^{-i\theta}\right) d\mu(\theta)\right]$$

ve

$$f \in CV(\alpha) \Leftrightarrow f(z) = \int_0^{z} \exp\left[-\frac{(1-\alpha)}{\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(1 - ze^{-i\theta}\right) d\mu(\theta)\right]$$

olacak biçimde, $\mu(2\pi) - \mu(0) = 2\pi$ özelliğinde, azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonu vardır.

1.7.9 Teorem. $z \in \mathbb{D}, 0 < \alpha < 1$ ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha)|a_n| \leq 1 - \alpha$$

ise, $f \in ST(\alpha)$ dır. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n - \alpha)|a_n| \leq 1 - \alpha$$

ise $f \in CV(\alpha)$ dır.

1.8 Konvekse Yakın Fonksiyonlar

f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik olsun. Her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\text{Re}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0 \tag{1.13}$$

olacak biçimde $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı g konveks fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna $\mathbb{D}$ üzerinde **konvekse yakın fonksiyon** denir.

1.5.4 Teoremi kullanılarak, (1.13) bağıntısı, $\mathbb{D}$ üzerinde tanımlı yıldızıl bir h fonksiyonu için

$$\text{Re}\left[\frac{zf'(z)}{h(z)}\right] > 0 \tag{1.14}$$

biçiminde verilebilir. Böylece, $\mathbb{D}$ dairesinde yıldızıl olan bir f fonksiyonu aynı zamanda konvekse yakındır. $\mathbb{D}$ dairesinde tanımlı (1.1) seri açılımına sahip konvekse yakın fonksiyonların sınıfı CC ile gösterilir. Böylece önceki sınıflar da göz önüne alınarak $CV \subset ST \subset CC \subset S$ olduğu görülür. Reade (1955-56), konvekse yakın fonksiyonların katsayılarının Bieberbach tahminini sağladığını göstermiştir.

1.8.1 Teorem. $\mathbb{D}$ dairesinde konvekse yakın f fonksiyonu (1.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. Bu durumda, her $n \geq 2$ için, $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik Koebe fonksiyonu ve onun bir rotasyonu olması durumunda geçerlidir.

Aşağıdaki teoremde konvekse yakın fonksiyonların analitik temsili verilmiştir.

1.8.2 Teorem. f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. $f \in CC$ olması için gerek ve yeter şart, her bir $r \in (0,1)$, $z = re^{i\theta}$ ve $2\pi > \theta_2 - \theta_1 \geq 0$ şartını sağlayan her θ_1 ve θ_2 çifti için

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{Re}\left(1 + re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right) d\theta > -\pi \tag{1.15}$$

olmasıdır.

1.9 Alfa Spiral Fonksiyonlar

f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik ve (1.1) açılımına sahip bir fonksiyon olsun. $|\alpha| < \pi/2$ özelliğindeki α sayısı ve her $z \in \mathbb{D}$ için, f fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \tag{1.16}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna $\mathbb{D}$ dairesinde **α −spiral fonksiyon denir.** α −spiral fonksiyonların sınıfı $SP(\alpha)$ ile gösterilir. Spacek (1932), $SP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların yalınkat olduğunu göstermiştir.

Aşağıdaki iki sonuç Spacek (1932)'e ait olup, $SP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini verir.

1.9.1 Teorem. $p \in P$ olmak üzere, $z \in \mathbb{D}$ için

$$f \in SP(\alpha) \Leftrightarrow f(z) = z\exp\left\{e^{-i\alpha}\cos\alpha \int_0^z \frac{p(\zeta) - 1}{\zeta} d\zeta\right\} \tag{1.17}$$

dır.

(1.17) bağıntısında p fonksiyonu $p(z) = (1 + z)/(1 - z)$ olarak alınırsa, $s = e^{-i\alpha}\cos\alpha$ olmak üzere, f fonksiyonu

$$f(z) = \frac{z}{(1 - z)^{2s}}$$

olarak bulunur. Bu fonksiyon α **−spiral Koebe fonksiyonu** olarak adlandırılır.

Zamorski (1960)'ye ait olan aşağıdaki sonuç, $SP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı bağıntısını ifade eder.

1.9.2 Teorem. $f \in SP(\alpha)$ fonksiyonu (1.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$|a_n| \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{|k+2s-1|}{k} = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} ((k-1)^2 + 4k\cos^2\alpha)^{1/2}$$

dir. Eşitsizlik $n \geq 2$ için kesin olup, eşitlik α −spiral Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir.

1.10 Tipik Reel Fonksiyonlar

f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitik ve (1.1) açılımına sahip olsun. $\mathbb{D}$'de reel olmayan her z değeri için

$$\operatorname{sgn}\big(\operatorname{Im} f(z)\big) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \text{ veya } \operatorname{Im} f(z)(\operatorname{Im} z) \geq 0 \qquad (1.18)$$

ise f fonksiyonuna $\mathbb{D}$ dairesinde **tipik reel fonksiyon** denir. $\mathbb{D}$ dairesinde tipik reel fonksiyonların sınıfı TR ile gösterilir.

PR sınıfı ile TR sınıfı arasındaki ilişki Rogosinski (1932) tarfından aşağıda verilmiştir.

1.10.1 Teorem. $g \in PR$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda,

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2} g(z) = z + p_1 z^2 + (p_2 + 1)z^3 + \cdots \qquad (1.19)$$

fonksiyonu TR sınıfına aittir. Tersine, $f \in TR$ ise

$$g(z) = \frac{1-z^2}{z} f(z) = 1 + a_2 z + (a_3 - 1)z^2 + \cdots$$

fonksiyonu PR sınıfına aittir.

(1.19) ve (1.7) bağıntıları kullanılarak TR sınıfına ait fonksiyonlar için integral temsili verilebilir.

1.10.2 Teorem. f fonksiyonunun TR sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z}{1 - 2z\cos\theta + z^2}\, d\mu(\theta) \tag{1.20}$$

olacak biçimde $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 2\pi$ özelliğinde, reel değerli, azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır (Robertson, 1935).

Rogosinski (1932), TR sınıfına ait fonksiyonların katsayı bağıntısını elde etmiştir.

1.10.3 Teorem. $f \in TR$ fonksiyonu (1.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda,

$$\min(\sin n\theta / \sin\theta) \le a_n \le n$$

dir. Eşitlik,

$$k(\theta, z) = \frac{z}{1 - 2z\cos\theta + z^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} z^n$$

fonksiyonu için geçerlidir.

1.11 Alfa Konveks Fonksiyonlar

İlk olarak Mocanu (1969), α −konveks fonksiyon kavramını tanımlamıştır.

f, $\mathbb{D}$ dairesinde (1.1) açılımına sahip analitik bir fonksiyon ve her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{f(z)}{z} f'(z) \neq 0$$

ve

$$\mathrm{Re}\left[\alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + (1 - \alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \ge 0 \tag{1.21}$$

ise f fonksiyonuna $\mathbb{D}$ dairesinde α **−konveks fonksiyon** denir. α −konveks fonksiyonların sınıfı $\alpha - CV$ ile gösterilir. Bu tanım, α sayısının kompleks olması durumunda da anlamlıdır. Ancak biz α sayısını reel alacağız. $1 - CV = CV$ ve $0 - CV = ST$ olduğu açıktır. Bu yüzden $\alpha - CV$ sınıfı konveks fonksiyonlardan yıldızıl fonksiyonlara "sürekli" bir geçişi verir. Bununla birlikte, α sayısını $[0,1]$ aralığına kısıtlamanın gerekli olmadığı görülecek.

1.11.1 Teorem. α reel sayı olmak üzere f fonksiyonu α −konveks olsun. Bu durumda,

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonu yıldızıldır. Yani $\alpha - CV \subseteq ST$ dir.

(ii) $\alpha \geq 1$ ise, f fonksiyonu konvekstir. Yani $\alpha - CV \subseteq CV$ dir.

(iii) $0 \leq \alpha < 1$ için $CV \subseteq \alpha - CV$ dir.

(iv) $z \in \mathbb{D}$ için $I(z) = z$ özdeşlik dönüşümü olmak üzere, $\bigcap_{\alpha=0}^{\infty}\{\alpha - CV\} = \{I\}$ dir.

(v) $\alpha \leq -1$ iken $g(z) = 1/f(1/z)$ fonksiyonu $|z| > 1$ bölgesinde konvekstir.

Bu teorem, $\alpha - CV$ sınıfının α sayısı negatif olması durumunda artan, pozitif olması durumunda azalan olduğunu gösterir. O halde en geniş sınıf, $0 - CV = S^*$ sınıfıdır. Bütün durumlar için $\alpha - CV$ sınıfı, S sınıfının bir alt sınıfı olur.

Aşağıdaki teorem, $\alpha \geq 0$ için $\alpha - CV$ ile ST sınıfı arasındaki geçişi vermektedir.

1.11.2 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ ve $\alpha \geq 0$ olsun. Bu durumda,

$$f \in \alpha - CV \Leftrightarrow g(z) = f(z)\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\alpha} \in ST$$

dir. Tersine,

$$g \in ST \Leftrightarrow f(z) = \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \frac{[g(\zeta)]^{1/\alpha}}{\zeta} d\zeta\right]^{\alpha} \in \alpha - CV$$

dir. Burada kuvvet fonksiyonunun dalı $\left.\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\alpha}\right|_{z=0} = 1$ olarak seçilmiştir.

$k(z) = z(1 - z^2)^{-2}$ Koebe fonksiyonunun ST sınıfı için ekstramal fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa, 1.11.2 Teoreminden

$$k(z,\alpha)=\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z \frac{\zeta^{1/\alpha}}{\zeta(1-\zeta)^{2/\alpha}}\right]^{\alpha}$$

fonksiyonu da $\alpha - CV$ sınıfı için bir ekstramal fonksiyon olup, bu fonksiyona α **−konveks Koebe fonksiyonu** adı verilir.

$\alpha > 0$ için $\alpha - CV$ sınıfına ait fonksiyonlar için Miller (1973)'e ait büyüme sonucu aşağıda verilmiştir.

1.11.3 Teorem. $f \in \alpha - CV$ ve $z = re^{i\theta}$ olsun.

(i) $\alpha > 0$ için

$$k(-r,\alpha) \leq |f(z)| \leq k(r,\alpha)$$

dır.

(ii) $\alpha \geq 1$ için

$$\frac{\partial}{\partial r}k(-r,\alpha) \leq |f'(z)| \leq \frac{\partial}{\partial r}k(r,\alpha)$$

dır. Her iki durumda da eşitsizlik kesindir.

1.12 Bazı İntegral Eşitsizlikleri

1.12.1 Teorem. $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = Re^{i\theta}$ fonsiyonu C_r eğrisi üzerinde analitik ve $\Gamma = f(C_r)$, bir D bölgesi üzerinde basit kapalı bir eğri olsun. Eğer D bölgesi orijini bulunduruyor ve $g(R)=RG'(R)$ olmak üzere, $g(R)$, R üzerinde sürekli, pozitif, kesin monoton bir fonksiyon ise

$$I=\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} G(R)d\theta > 0 \tag{1.22}$$

dır. Eğer orijin D bölgesinin dışında ve $RG'(R) > 0$ artan ise $I > 0$, azalan ise $I < 0$ dır (Goodman 1983, s:192).

1.12.2 Teorem. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) $z_1, z_2, \dots, z_n$ ve $w_1, w_2, \dots, w_n$ kompleks sayılar olmak üzere,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)$$

dir. Eşitlik, $i \in \{1,2, \dots, n\}$ için z_i ile $\overline{w}_i$ sayılarının orantılı olması durumunda geçerlidir.

1.12.3 Teorem. (Aritmetik, Geometrik ve Harmonik Eşitsizlikler) $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitif reel sayılar olmak üzere, bu sayıların aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaları sırasıyla

$$A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \ , \qquad G = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}, \qquad H = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n}(1/a_k)}$$

olsun. Bu durumda

$$H \leq G \leq A \tag{1.24}$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik, $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında alttan pozitif bir sayı ile sınırlı ve integrallenebilir bir fonksiyon ise, üstte toplamlar yerine integraller almak suretiyle (1.24) eşitsizliği yine geçerlidir. Yani,

$$A = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ , \qquad G = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,dx\right), \qquad H = \frac{b-a}{\int_a^b [1/f(x)]dx}$$

olmak üzere,

$$H \leq G \leq A$$

dir.

2. MEROMORF YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, birim dairenin dışını veya orijin çıkarılmış birim daireyi konform olarak resmeden, orijinde basit kutba sahip, meromorf fonksiyonların genel sınıfı ile bu sınıfın alt sınıfları tanımlandı. Bütün bu sınıflara ait fonksiyonların integral temsilleri, katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon ve genleşme özellikleri ile ilgili yapılan çalışmalar derli toplu olarak verildi.

2.1 Meromorf Yalınkat Fonksiyonların Temel Özellikleri

$\mathbb{D}^x = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ olmak üzere $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$f(\zeta) = \zeta + c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \cdots = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n} \tag{2.1}$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahip analitik yalınkat fonksiyonların sınıfını M ile gösterelim. $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için $f(\zeta) \neq 0$ özelliğindeki $f \in M$ fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıfı M_0 ile, $c_0 = 0$ özelliğindeki $f \in M$ fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıfı da $\widetilde{M}$ ile gösterelim. Buna göre $f \in \widetilde{M}$ fonksiyonu $\mathbb{D}^x$ bölgesinde

$$f(\zeta) = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \cdots = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n}$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahiptir.

Birçok araştırmacı $\mathbb{D}^x$ bölgesinde (2.1) açılımına sahip meromorf yalınkat fonksiyonları çalışmak yerine, $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$ delik birim dairesinde

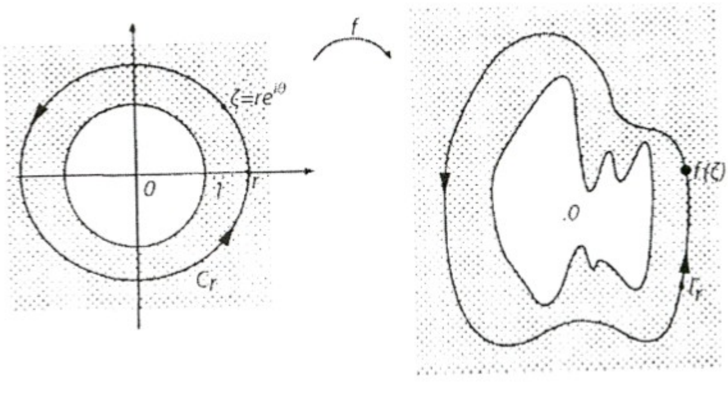
$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2.2}$$

biçiminde Laurent açılımına sahip analitik yalınkat fonksiyonların sınıfını çalışmıştır. Gerçekte, $\mathbb{D}^*$ da (2.2) açılımına sahip analitik yalınkat fonksiyonların sınıfı ile M sınıfı arasında $g(z) = f(1/z)$ eşitliği yardımıyla bire-bir bir bağıntı mevcuttur. Dolayısıyla bu sınıflardan birinde yapılan bir çalışmayı diğerine taşımak mümkündür. Bu çalışmamızda yerine göre her iki bölgeyi de kullanacağız. Çalışma açısından bazen birinin diğerine üstünlüğü söz konusudur. Örneğin, $\mathbb{D}^x$ bölgesinde saat yönünün tersinde pozitif olarak yönlendirilmiş bir $C_r = \{\zeta : |\zeta| = r > 1\}$ çemberinin M sınıfına ait bir f fonksiyonu altındaki resmi olan $f(C_r) = \Gamma_r$ eğrisi de aynı yönde yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri olmasına rağmen, $\mathbb{D}^*$ delik dairesinde verilen pozitif olarak yönlendirilmiş $|z| = \rho < 1$ çemberinin g fonksiyonu altındaki resmi negatif yönde yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri olur. Bu yüzden M sınıfındaki fonksiyonlar ile çalışmayı daha çok tercih edeceğiz.

M sınıfı ile ilgili vereceğimiz ilk sonuç, c_0 katsayısının integral temsili olacaktır. (2.1) bağıntısıyla verilen $f \in M$ fonksiyonu, $\zeta = re^{i\theta}$, $r > 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ çemberi üzerinde düzgün yakınsak olduğundan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-1}^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{c_n}{r^n e^{in\theta}} d\theta = c_0 \tag{2.3}$$

eşitliği yazılabilir. $f(C_r) = \Gamma_r$ denirse c_0 katsayısı, (2.3) integralinin basit kapalı Γ_r eğrisi üzerinde kütle dağılımının bir ortalaması olduğu görülür. Bu yüzden Γ_r konveks bir eğri olmak üzere, $w = c_0$ noktası Γ_r ile sınırlı bölgenin içinde kalır. Eğer $f \in M_0$ ise her bir Γ_r eğrisi $w = 0$ noktasını iç nokta kabul eden bir bölge sınırlar (Şekil 2.1).



Şekil 2.1

Birim dairede normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyonların S sınıfı ile M_0 sınıfı arasında bire-bir bir geçiş mevcuttur. Gerçekten, $g \in S$ ise $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$f(\zeta) = \frac{1}{g(1/\zeta)} = \zeta - c_2 + (c_2{}^2 - c_3)\frac{1}{\zeta} + \cdots \tag{2.4}$$

fonksiyonu M_0 sınıfına aittir. Tersine, $f \in M_0$ ise $z \in \mathbb{D}$ için

$$g(z) = \frac{1}{f(1/z)} = z - c_0 z^2 + (c_0{}^2 - c_1)z^3 + \cdots \tag{2.5}$$

fonksiyonu da S sınıfına aittir. S sınıfında Koebe fonksiyonuna karşılık gelen M_0 sınıfına ait fonksiyon

$$g(\zeta) = \frac{1}{k(1/\zeta)} = \zeta - 2 + \frac{1}{\zeta}$$

dır. Bu fonksiyon $\mathbb{D}^x$ bölgesini $\mathbb{C}\backslash[-4,0]$ bölgesi üzerine konform olarak resmeder.

Hemen belirtelim ki M_0 sınıfı ile S sınıfı arasında yukarda verilen geçiş, M sınıfı ile S sınıfı arasında geçeli değildir. Bu yüzden S sınıfına ait fonksiyonların sahip olduğu özellikleri doğrudan M sınıfına taşımak mümkün olmayacaktır.

M sınıfına ait her bir fonksiyon $\mathbb{D}^x$ bölgesini kompakt bir bölgenin tümleyeni üzerine dönüştürdüğü açıktır. Şekil 2.1 de temsili olarak gösterilen bu kompakt bölgenin alanının tahmini "Alan teoremi" olarak bilinir. Gronwall (1914) tarafından verilen bu teorem, kompakt kümenin alanının M sınıfına ait fonksiyonların katsayıları yardımıyla belirlenebileceğini ifade eder.

2.1.1 Teorem. (Alan Teoremi) $f \in M$ fonksiyonu (2.1) bağıntısıyla verilmiş olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|c_n|^2 \leq 1 \tag{2.6}$$

dir. Eşitlik ancak ve yalnız $f(\mathbb{D}^x)$ görüntü kümesinin sıfır alanlı bir küme hariç kompleks düzlemi örtmesi durumunda geçerlidir.

İspat. $E = \mathbb{C}\backslash f(\mathbb{D}^x)$ diyelim. Belli bir $\rho > 1$ değeri için $D_\rho = \{\zeta : |\zeta| < \rho\}$, $C_\rho = \partial D_\rho$ ve $f(C_\rho) = \Gamma_\rho$ olsun. f fonksiyonu $\mathbb{D}^x$ bölgesinde yalınkat olduğundan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için Γ_ρ eğrisi

$$w = g(\rho e^{i\theta}) = w(\theta) = u(\theta) + iv(\theta)$$

biçiminde parmetrik olarak verilmiş, pozitif yönlendirilmiş bir Jordan eğrisidir. Γ_ρ tarafından çevrelenen bölgeye E_ρ denirse $E_\rho \supset E$ olur (Şekil 2.2). Green teoreminden, E_ρ bölgesinin $A(\rho)$ alanı

$$A(\rho) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\rho}(udv - vdu) = \frac{1}{2i}\int_{\Gamma_\rho}\overline{w}dw = \frac{1}{2i}\int_{\partial D_\rho}\overline{f(\zeta)}f'(\zeta)d\zeta$$

eşitliği ile verilir. f fonksiyonunu $\mathbb{D}^x$ bölgesindeki Laurent açılımı ve $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ olmak üzere $\int_{|\zeta|=\rho}\zeta^k d\zeta = 0$, $k = -1$ için $\int_{|\zeta|=\rho}\zeta^k d\zeta = 2\pi i$ olduğu dikkate alınırsa, düzgün yakınsaklık gereği

$$A(\rho) = \frac{1}{2i}\int_{|\zeta|=\rho}\left\{\bar{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{c_n}}{\overline{\zeta^n}}\right\}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nc_n}{\zeta^{n+1}}\right\}d\zeta$$

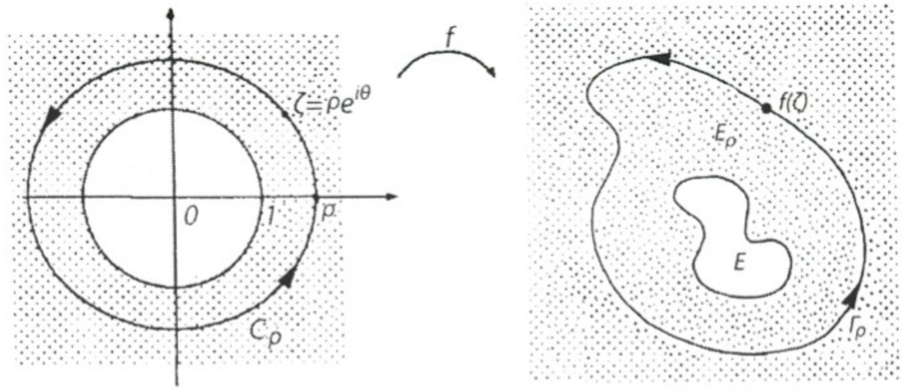
$$= \frac{1}{2i}\int_{|\zeta|=\rho}\left\{\frac{\rho^2}{\zeta} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{c_n}\zeta^n}{\rho^{2n}}\right\}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nc_n}{\zeta^{n+1}}\right\}d\zeta$$

$$= \pi\left(\rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|c_n|^2}{\rho^{2n}}\right)$$

olur. $A(\rho) \geq 0$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|c_n|^2}{\rho^{2n}} \leq \rho^2$$

bulunur. $\rho \to 1$ iken limite geçilirse $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2$ serisi yakınsak ve toplamının 1'den büyük olmadığı görülür. Böylece (2.6) bağıntısı elde edilir. ■



Şekil 2.2

2.1.2 Açıklama. 2.1.1 Teoreminin ispatında geçen E_ρ bölgesinin alanı

$$A(\rho) = \pi\left(\rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|c_n|^2}{\rho^{2n}}\right)$$

olduğundan, $\rho \to 1$ iken E_ρ bölgesi daralır ve $E = \bigcap_{\rho>1} E_\rho$ olur. Böylece, E bölgesinin alanı A ile gösterilirse,

$$A = A(1) = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2\right)$$

bulunur. $A \geq 0$ olduğundan (2.6) bağıntısı elde edilir. $A = 0$ olması durumunda (2.6) bağıntısı için eşitlik sağlanır. Bu eşitlik ve (2.6) bağıntısı birlikte düşünülürse

$$0 \leq A \leq \pi$$

olduğu görülür.

Şimdi M sınıfına ait bir fonksiyonun distorsiyon özelliğini vererek devam edelim.

2.1.3 Teorem. $f \in M$ ve $|\zeta| = r > 1$ olsun. Bu durumda

$$1 - \frac{1}{r^2} \leq |f'(\zeta)| \leq \frac{r^2}{r^2 - 1} \tag{2.7}$$

dir. Eşitsizliğin sol tarafı için eşitlik, $|\eta| = 1$ olmak üzere, ancak ve yalnız

$$f(\zeta) = \zeta + c_0 + \frac{1}{\eta\zeta} \tag{2.8}$$

fonksiyonu, eşitsizliğin sağ tarafı için ise eşitlik, $\zeta = r$ olmak üzere

$$f_r(\zeta) = \zeta + c_0 - \frac{r^2 - 1}{r}\frac{1}{r\zeta - 1} \tag{2.9}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ diyelim. u ve v kompleks değişkenler olmak üzere $v = g(u)$ fonksiyonu G bölgesinde analitik ve yalınkat olsun. Her bir $t > 0$ için

$$v = g\left(t\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right) = h(z)$$

fonksiyonu da $\mathbb{D}$ dairesinde analitik ve yalınkattır. Böylece, 1.3.2 Teoreminden $R = |z| > 0$ için

$$\left|\frac{h'(z)}{h'(0)}\right| = \left|\frac{g'\left(t\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right) 2t \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\frac{1}{(1-\zeta)^2}}{4tg'(t)}\right| \leq \frac{1+R}{(1-R)^3} \tag{2.10}$$

elde edilir. $z = R > 0$ ve $s = t(1+R)^2/(1-R)^2 > t$ konumu yapılırsa (2.10) eşitsizliğinden $|g'(s)|/|g'(t)| \leq 1$ elde edilir. O halde, $s > t > 0$ özelliğinde her s ve t çifti için $|g'(s)| \leq |g'(t)|$ olur.

$f \in M$ için $u = \zeta + 1/\zeta$ bağıntısında ζ değeri çekilirse $\zeta = \left(u + \sqrt{u^2 - 4}\right)/2$ olarak bulunur. Bu dönüşüm altında ζ −düzlemindeki $\mathbb{D}^x$ bölgesi u −düzleminden $-2 \leq u \leq 2$ aralığı çıkarılmış G_1 bölgesi üzerine dönüşür. $g(u) = f\left(\zeta(u)\right)$ olarak tanımlanırsa, g fonksiyonu G_1 bölgesinde yalınkat ve $g(\infty) = \infty$ olur. Loewner (1919), $|g'(u)|$ fonksiyonu $(2, \infty)$ aralığı üzerinde artmayan olduğunu göstermiştir. O halde, $|g'(r)| \geq |g'(\infty)|$ bulunur.

$$g'(u) = f'(\zeta)\zeta'(u) = \frac{f'(\zeta)}{1 - 1/\zeta^2}$$

ve $f'(\infty) = 1$ olduğundan, $|f'(r)| \geq 1 - 1/r^2$ olduğu görülür. $\mathbb{D}^x$ bölgesinde herhangi bir ζ_o noktası uygun bir rotasyonla $|\zeta_o| = r$ noktasına getirilebilir. Bu (2.7) eşitsizliğinin birinci tarafını verir. Eşitlik ancak ve yalnız $A \neq 0$ olmak üzere $g(u) = Au + B$ fonksiyonu için geçerlidir.

Şimdi (2.7) ifadesinin sağ tarafındaki eşitsizliğinin doğruluğunu gösterelim. (2.1) açılımı ile verilen $f \in M$ fonksiyonu için Couchy-Schwarz eşitsizliği gereği, $|\zeta| = r > 1$ olmak üzere

$$|f'(\zeta)| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|c_n|}{r^{n+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{r^{n+1}} \sqrt{n}|c_n| \tag{2.11}$$

$$\leq 1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r^{2n+2}}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2\right)^{1/2}$$

olur. Alan teoremi gereği, $\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 \leq 1$ olduğundan

$$|f'(\zeta)| \leq 1 + \left(\frac{1}{r^4}\frac{1}{(1 - 1/r^2)^2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{r^2 - 1} = \frac{r^2}{r^2 - 1} \tag{2.12}$$

elde edilir. Bu ise (2.7) ifadesinin ikinci yanının doğruluğunu gösterir.

Couchy-Schwarz eşitsizliğindeki eşitlik ancak ve yalnız, A sabit olmak üzere, her $n \geq 1$ için $A\sqrt{n}/r^{n+1} = \sqrt{n}|c_n|$ olması durumunda geçerlidir. Öte yandan (2.11) ifadesinde eşitlik her $n \geq 1$ için $\arg(-c_n) = \arg(\zeta^{n+1})$ olması durumunda sağlanır. Uygun bir dönüşümle $\zeta = r > 1$ alınabileceğinden, her n için $c_n \leq 0$ ve $A \geq 0$ olur. Bu durumda $c_n = -A/r^{n+1}$ dir. Böylece,

$$f(\zeta) = \zeta + c_0 - A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}\zeta^n} = \zeta + c_0 - \frac{A}{r}\frac{1}{r\zeta - 1} \tag{2.13}$$

olur. (2.12) ve (2.13) birlikte düşünülürse, $A = r^2 - 1 > 0$ olup, ikinci tarafın eşitliği için (2.9) fonksiyonu elde edilir.■

2.1.4 Açıklama (i) (2.7) eşitsizliğinin birinci denklemi yalınkatlık için gerek şarttır. Yeter şart için yalınkat olması gerekli değildir (Aksent'ev, 1958).

(ii) (2.9) ile verilen ekstremal fonksiyonunun r değişkeninede bağlı olduğuna dikkat ediniz. Eşitlik pozitif reel eksen üzerinde olmayan noktalar içinde sağlanabilir. Bu durumda $f_r(\zeta)$ fonksiyonuna uygun bir dönme ile eşitliği sağlayan noktalar reel eksen üzerine getirilebilir. Her ne kadar $f(\zeta) = \zeta + c_0 - 1/\zeta$ fonksiyonunun $\zeta = r$ deki türevi $f'(\zeta) = 1 + 1/r^2$ olsa bile, f fonksiyonunun ekstremal fonksiyon olmadığına dikkat ediniz.

Loewner (1919)'e ait aşağıdaki teorem $\widetilde{M}$ sınıfına ait fonksiyonların modülü için üst sınırı verir.

2.1.5 Teorem. $f \in \widetilde{M}$ ve $|\zeta| = r > 1$ olsun. Bu durumda

$$|f(\zeta)| \leq r + \frac{1}{r} \tag{2.14}$$

dir. Bu eşitsizlik her $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için kesindir.

İspat. Uygun bir döndürme yardımıyla $\zeta = r$ alabiliriz. $F(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$ olarak tanımlanırsa, F fonksiyonunun tersi $G(\zeta) = \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4}\right)/2$ olur. Bundan faydalanarak tanımlanan $H(\zeta) = G\left(tF(\zeta)\right)$ fonksiyonu, $t = (r + 1/r)/2$ için, $\mathbb{D}^x$ bölgesini $\mathbb{D}^x$ den $(1, r]$ ve $[-r, -1)$ doğru parçaları çıkarılmış bölge üzerine konform olarak resmeder. Ayrıca,

$$H(1) = G\left(tF(1)\right) = G(2t) = G(r + 1/r) = r$$

dir. Verilen $f \in \widetilde{M}$ fonksiyonu için J fonksiyonunu

$$J(\zeta) = \frac{f\left(H(\zeta)\right)}{t}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $J \in \widetilde{M}$ olup, $J(1) = f(r)/t$ noktası $J(\mathbb{D}^x)$ görüntü kümesinin bir sınır noktası ve $|J(1)| \leq 2$ dir. Böylece,

$$|f(r)| \leq 2t = \frac{2\left(r + \frac{1}{r}\right)}{2} = r + \frac{1}{r}$$

elde edilir. ■

M_0 sınıfına ait f fonksiyonu için $g(z) = 1/f(1/z)$ fonksiyonu S sınıfına ait olduğundan 1.3.2 Teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

2.1.6 Teorem. $f \in M_0$ ve $|\zeta| = r > 1$ olsun. Bu durumda

$$r - 2 + \frac{1}{r} \leq |f(\zeta)| \leq r + 2 + \frac{1}{r} \tag{2.15}$$

dir.

Şimdi (2.1) açılımına sahip $f \in M$ fonksiyonlarının c_n katsayılarının sınırları ile ilgilenelim. c_0 katsayısının sıfır olup olmamasının bu sınırlara bir etkisinin olmadığı görülecektir. Ancak bu durumun geçerli olmadığı alt sınıflarda mevcuttur. Aşağıdaki kesin sonuç M sınıfına ait fonksiyonların c_1 katsayısı için sınırın alan teoreminden elde edilebileceğini gösterir.

2.1.7 Teorem. $f \in M$ fonksiyonu (2.1) açılımı ile verilmiş olsun. Bu durumda $|c_1| \leq 1$ dir. Eşitlik $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(\zeta) = \zeta + c_0 + e^{i\theta}\zeta^{-1}$ fonksiyonu için geçerlidir. Üstelik, $f \in M_0$ ise, $|c_0| \leq 2$ dir. Eşitlik, $f(\zeta) = \zeta + 2e^{i\theta} + e^{2i\theta}\zeta^{-1}$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. (2.6) bağıntısından $|c_1| \leq 1$ olduğu hemen görülür. Ayrıca $|c_1| = 1$ ise, (2.6) bağıntısından $n \geq 2$ için $c_n = 0$ dır.

Şimdi, $f \in M_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.5) bağıntısından $z \in \mathbb{D}$ için $g(z) = 1/f(1/z)$ fonksiyonu S sınıfına ait olup, 1.2.1 Teoremi gereği, $h(z) = \sqrt{g(z^2)}$ fonksiyonu da S sınıfına aittir. Buradan

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{h(1/\zeta)} = \zeta\left(\frac{f(\zeta^2)}{\zeta^2}\right)^{1/2}$$

biçiminde tanımlanan ψ fonksiyonu M sınıfına ait ve $|\zeta| > 1$ için $[\psi(\zeta)]^2 = f(\zeta^2)$ dir. $|\zeta| > 1$ için ψ fonksiyonunun Laurent açılımının

$$\psi(\zeta) = \zeta + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta} + \cdots$$

biçiminde olduğunu kabul edelim. O halde,

$$[\psi(\zeta)]^2 = \zeta^2 + 2\beta_0\zeta + \left({\beta_0}^2 + 2\beta_1\right) + \cdots$$

ve

$$f(\zeta^2) = \zeta^2 + c_0 + \frac{c_1}{\zeta^2} + \cdots$$

olur. Katsayıların eşitliğinden, $\beta_0 = 0$ ve $c_0 = 2\beta_1$ olduğu görülür. $\psi \in M$olduğundan, $|c_0/2| \leq 1$ ve dolayısıyla $|c_0| \leq 2$ bulunur. $|c_0| = 2$ veya $|\beta_1| = 1$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart, $\theta \in \mathbb{R}$ için $\psi(\zeta) = \zeta + e^{i\theta}\zeta^{-1}$ olmasıdır. Bu durumda, $f(\zeta^2) = [\psi(\zeta)]^2 = \zeta^2 + e^{2i\theta}\zeta^{-2} + 2e^{i\theta}$ eşitliğinden $f(\zeta) = \zeta + 2e^{i\theta} + e^{2i\theta}\zeta^{-1}$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

2.1.8 Açıklama. Alan teoreminden her $n \geq 1$ için $|c_n| \leq 1/\sqrt{n}$ eşitsizliği de elde edilebilir. Ancak, $n > 1$ için eşitliği sağlayan $g(\zeta) = \zeta + 1/\sqrt{n}\zeta^n$ fonksiyonu $\mathbb{D}^x$ bölgesinde yalınkat değildir. Bu yüzden M sınıfına ait fonksiyonlarda $|c_n|$ için kesin üst sınır $1/\sqrt{n}$ den daha küçük olmalıdır. Doğru bir katsayı tahmini için M sınıfına ait

$$F(\zeta) = \zeta + 2 + \frac{1}{\zeta} \tag{2.16}$$

fonksiyonu önemli bir yere sahiptir. F fonksiyonu $\mathbb{D}^x$ bölgesini reel eksenden $[0,4]$ aralığı çıkarılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak resmeder. Böylece, $F \in M_0$ olduğu görülür. Ayrıca F fonksiyonu yardımıyla tanımlanan

$$G_n(\zeta) = F(\zeta^{n+1})^{\frac{1}{n+1}} = \left(\zeta^{n+1} + 2 + \frac{1}{\zeta^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}} \tag{2.17}$$

$$= \zeta\left(1 + \frac{2}{\zeta^{n+1}} + \frac{1}{\zeta^{2n+2}}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \zeta + \frac{2}{n+1}\frac{1}{\zeta^n} + \cdots$$

fonksiyonu $\mathbb{D}^x$ bölgesini, kompleks düzlemden birimin $(n+1)$.kökü yönünde ve $4^{1/(n+1)}$ uzunluğuna sahip $n+1$ doğru parçasının çıkarılmış bölge üzerine resmeder. G_n fonksiyonuna bakarak M sınıfındaki fonksiyonların c_n katsayısı için, $n \geq 1$olmak üzere

$$|c_n| \leq \frac{2}{n+1} \tag{2.18}$$

tahmini akla gelebilir. Schiffer (1938), $n = 2$ için (2.18) bağıntısının doğru ve eşitliğin $f(\zeta) = G_2(\zeta)$ fonksiyonu için geçerli olduğunu göstermiştir. Ancak, Garabedian ve Schiffer (1955), $|c_3|$ için $1/2$ olması beklenen üst sınır yerine bundan daha büyük olan

$$|c_3| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{e} \approx 0{,}50248 \tag{2.19}$$

kesin üst sınırını elde etmişlerdir. Böylece elli yıldan fazladır doğru olduğu tahmin edilen (2.18) eşitsizliğinin yanlış olduğu görülmüştür. Ancak bazı özel alt sınıflar için Duren (1971) ve Goluzin (1938), (2.18) eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermişlerdir.

2.1.9 Teorem. $f \in M$ fonksiyonu $k \geq 1$ için $\mathbb{D}^x$ bölgesinde

$$f(\zeta) = \zeta + \frac{c_k}{\zeta^k} + \frac{c_{k+1}}{\zeta^{k+1}} + \cdots \tag{2.20}$$

biçiminde bir açılıma sahip olsun. Bu durumda $n = k, k+1, \ldots, 2k$ için (2.18) bağıntısı sağlanır. Eşitlik ancak ve yalnız n sabit ve $|\eta| = 1$ olmak üzere $f(\zeta) = \eta G_n(\bar{\eta}\zeta)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Duren (1971)'e ait bu teoremin ispatı oldukça uzun ve karmaşıktır. Ancak Goluzin (1938), M_0 sınıfına ait fonksiyonlar için aynı katsayı sınırlarını daha kolay elde etmiştir.

2.1.10 Teorem. $f \in M_0$ fonksiyonu $k \geq 1$ için (2.20) açılımına sahip olsun. Bu durumda $n = k, k+1, \ldots, 2k$ için (2.18) eşitsizliği sağlanır.

İspat. M_0 sınıfına ait f fonksiyonuna 1.12.1 Teoremini uygulayalım. $\zeta = re^{i\theta}$ ve $R = |f(\zeta)|$ olmak üzere, her $r > 1$ sayısı ve uygun bir $G(R)$ fonsiyonu için

$$I = \frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} G(R)d\theta > 0 \tag{2.21}$$

olur. $\alpha > 0$ için $G(R) = R^{2\alpha}$ olarak tanımlanırsa, $RG'(R) = 2\alpha R^{2\alpha}$ ifadesi 1.12.1 Teoreminin şartlarını sağlar. Böylece, orijin $\Gamma = f(C_r)$ eğrisi üzerinde olmamak şartıyla,

$$\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} R^{2\alpha}d\theta > 0 \tag{2.22}$$

dır. Eğer 2α pozitif bir tamsayı ise

$$R^{2\alpha} = |f(\zeta)|^{2\alpha} = \left|\zeta^{\alpha}\left(1 + \frac{c_k}{\zeta^{k+1}} + \frac{c_{k+1}}{\zeta^{k+2}} + \cdots\right)^{\alpha}\right|^2$$

olur. b_n katsayıları c_m katsayılarıyla tanımlanmak üzere,

$$R^{2\alpha} = \left|\zeta^{\alpha}\left(1 + \frac{b_k}{\zeta^{k+1}} + \frac{b_{k+1}}{\zeta^{k+2}} + \cdots\right)\right|^2 \tag{2.23}$$

biçiminde yazılabilir. $n = k, k+1, \dots, 2k$ için $b_n = \alpha c_n$ olduğundan, (2.22) ve (2.23) bağıntılarından $\zeta = re^{i\theta}$ için

$$0 \leq \frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}\left|\zeta^{\alpha}\left(1 + \sum_{n=k}^{\infty}\frac{b_n}{\zeta^{n+1}}\right)\right|^2 d\theta \leq \frac{d}{dr}\left[r^{2\alpha} + \sum_{n=k}^{\infty}\frac{|b_n|^2}{r^{(n+1-\alpha)}}\right]$$

$$\leq 2\alpha r^{2\alpha-1} - \sum_{n=k}^{\infty}\frac{2(n+1-\alpha)|b_n|^2}{r^{2n+1-2\alpha}}$$

olur. $r \to 1^+$ için limite geçilirse

$$\sum_{n=k}^{\infty}(n+1-\alpha)|b_n|^2 \leq \alpha \tag{2.24}$$

biçiminde önemli bir eşitsizlik elde edilir. Eğer $\alpha \leq k + 1/2$ ise (2.24) bağıntısındaki serinin terimleri negatif değildir. Böylece $k \leq n \leq 2k$ şartını sağlayan herhangi bir n için

$$(n + 1 - \alpha)|b_n|^2 = (n + 1 - \alpha)^2|c_n|^2 \leq \alpha$$

olacak biçimde serinin sadece bir terimi seçilebilir. Eğer eşitlik sağlanırsa her $j \neq n$ için $b_j = 0$ dır. Böylece,

$$|c_n|^2 \leq \frac{1}{(n + 1 - \alpha)\alpha} \tag{2.25}$$

elde edilir. Eğer $\alpha = (n + 1)/2$ olarak seçilirse, (2.25) ifadesi $n = k, k + 1, \dots, 2k$ için (2.18) eşitsizliğini verir. (2.25) bağıntısında eşitlik, $\alpha = (n + 1)/2$ değeri (2.23) de yerine yazılırsa

$$R^{2\alpha} = R^{n+1} = \left|\zeta^{(n+1)/2}(1 + b_n/\zeta^{n+1})\right|^2$$

olup eşitliği sağlayan fonksiyonun

$$f(\zeta) = \zeta(1 + \eta/\zeta^{n+1})^{2/(n+1)}$$

olduğu görülür.■

2.1.11 Sonuç. $f(\zeta) = \zeta + c_1/\zeta + c_2/\zeta^2 + \cdots$ fonksiyonu M_0 sınıfına ait olsun. Bu durumda $|c_1| \leq 1$ ve $|c_2| \leq 2/3$ tür.

Bazilevic (1937) M sınıfının bir alt sınıfını tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonlar için kesin katsayı sınırlarını elde etmiştir.

2.1.12 Tanım. k bir pozitif tamsayı ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ olmak üzere,

$$f(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{nk-1}}{\zeta^{nk-1}} \tag{2.26}$$

açılımına sahip M sınıfına ait fonksiyonlara k **−katlı simetrik meromorf fonksiyon** denir ve bu fonksiyonların sınıfı $M^{(k)}$ ile gösterilir.

Bazilevic (1937)'e ait aşağıdaki teorem, $M^{(k)}$ sınıfına ait fonksiyonların c_{2k-1} katsayıları için kesin üst sınırı verir.

2.1.13 Teorem. $f \in M^{(k)}$ ise

$$|c_{2k-1}| \leq \frac{1}{k} + \frac{2}{ke^{2(k+1)/(k-1)}} \tag{2.27}$$

dir. Bu eşitsizlik her bir $k \geq 1$ için kesindir.

n tek iken (2.27) ifadesinin sağ tarafı $2/(n+1)$'den daha büyüktür. Bu ise her $n > 1$ tek sayıları için 2.1.13 Teoreminin geçerli olmadığını gösterir.

Jenkins (1960) daha geniş fonksiyon sınıfı için (2.27) eşitsizliğini elde etmiştir.

2.1.14 Teorem. $f \in M$ fonksiyonu $\mathbb{D}^x$ bölgesinde

$$f(\zeta) = \zeta + \sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n} \tag{2.28}$$

biçiminde bir açılıma sahip olsun. Bu durumda (2.27) eşitsizliği sağlanır.

2.1.14 Teoreminde $k-1$ yerine k yazılırsa, c_{2k+1} katsayısını bulunduran 2.1.10 Teoreminin genişletilmiş halini elde ederiz.

Çift katsayılar için tahmin bu kadar açık değildir. Kubota (1975), $f \in M$ ve $c_1 \geq 0$ için

$$\operatorname{Re} c_4 \leq \frac{2}{5} + \frac{729}{163840} \tag{2.29}$$

kesin sonucunu elde etmiştir. Ancak $c_1 \leq 0$ iken maks$|c_4| > 2/5$ kesin olmayan sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca, Kubota (1974), reel katsayılı $f \in M$ fonksiyonları için $c_5 \leq 1/3 + 4/507$ kesin eşitsizliğini de elde etmiştir.

2.2 Meromorf Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Bu kısımda meromorf fonksiyonların bazı alt sınıfları üzerinde durulacak

2.2.1 Tanım. (2.1) açılımına sahip $f \in M$ fonksiyonu için $f(\mathbb{D}^x)$ görüntü kümesinin tümleyeni orijine göre yıldızıl ise, f fonksiyonuna **meromorf yıldızıl fonksiyon** veya $\mathbb{D}^x$ bölgesinde **yıldızıl** denir. Meromorf yıldızıl fonksiyonların sınıfını MST ile gösterilir.

2.2.1 Tanımından, (2.4) ve (2.5) bağıntıları yardımıyla şu sonucu çıkarmak mümkündür: f fonksiyonunun $\mathbb{D}^x$ bölgesinde yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $\phi(z) = 1/f(1/z)$ fonksiyonunun $\mathbb{D}$ dairesinde yıldızıl olmasıdır. Yani, $z \in \mathbb{D}$ için

$$f \in MST \Leftrightarrow \phi(z) = 1/f(1/z) \in ST \tag{2.30}$$

dir. Burada f fonksiyonu sıfır değerini almaması gerektiğinden, $f \in MST$ için $f \in M_0$, yani $MST \subset M_0$ dır. Ancak, $f \in MST$ için (2.1) ifadesinde $c_0 \neq 0$ olabilir. 1.5.1 Teoremi ve (2.30) bağıntısı birlikte düşünüldüğünde; $f \in MST$ olması için gerek ve yeter şart, $\zeta \in \mathbb{D}^x$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$z\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{\zeta^n} = p(\zeta) \tag{2.31}$$

fonksiyonunun pozitif reel kısma sahip olmasıdır. Yani her $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$f \in MST \Leftrightarrow \mathrm{Re}\{p(\zeta)\} > 0$$

dır.

2.2.2 Tanım. $\mathbb{D}^x$ bölgesinde analitik ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$p(\zeta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{\zeta^n}$$

açılımına sahip $\mathrm{Re}\{p(\zeta)\} > 0$ özelliğindeki bir fonksiyona **reel kısmı pozitif meromorf fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların sınıfı MP ile gösterilir.

2.2.2 Tanımından her $z \in \mathbb{D}$ için

$$p \in MP \Leftrightarrow p(1/z) \in P \tag{2.32}$$

ve $MP \subset M_0$ olduğu görülür.

Bununla birlikte, $\zeta \in \mathbb{D}^x$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\mathrm{Re}[p(\zeta)] > \alpha$ özelliğindeki $p \in MP$ fonksiyonların sınıfı $MP(\alpha)$ ile gösterilir. $MP(\alpha)$ sınıfı ile 1.4.8 Teoreminde verilen $P(\alpha)$ sınıfı arasındaki geçiş (2.32) bağıntısına benzerlik gösterir. Yani, $z \in \mathbb{D}$ için

$$p \in MP(\alpha) \Leftrightarrow p(1/z) \in P(\alpha) \tag{2.33}$$

dır.

MP sınıfına ait fonksiyon sınıfları için integral temsilini vermek istiyoruz. Bunun için 1.4.3 Teoremi ve (2.31) bağıntısından faydalanarak aşağıdaki teorem elde edilir.

2.2.3 Teorem. $p \in MP$ olması için gerek ve yeter şart, $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$p(\zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-i\theta}/\zeta}{1 - e^{-i\theta}/\zeta} d\mu(\theta) \tag{2.34}$$

olacak biçimde $\mu(\theta + 2\pi) - \mu(\theta) = 1$ özelliğinde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonu vardır.

1.4.8 Teoreminde verilen $P(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsili ve (2.33) bağıntısından, $MP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için integral temsili elde edilebilir. Aşağıdaki teorem bununla ilgilidir.

2.2.4 Teorem. $p \in MP(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $\zeta \in \mathbb{D}^x$ ve

$$p(\zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + (1 - 2\alpha)e^{-i\theta}/\zeta}{1 - e^{-i\theta}/\zeta} d\mu(\theta) \tag{2.35}$$

olacak biçimde $\mu(\theta + 2\pi) - \mu(\theta) = 1$ özelliğinde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonu vardır.

(2.34) ve (2.35) bağıntılarında ζ yerine ζ^k yazılırsa, sırasıyla MP veya $MP(\alpha)$ sınıflarına ait k −katlı simetrik fonksiyonların integral temsili elde edilir.

Eğer (2.34)'de verilen p fonksiyonu (2.31) bağıntısında yerine yazılır, $\mathbb{D}^x$ bölgesinde her iki tarafın ζ_0 dan ζ ya integrali alınır ve $\zeta_0 \to \infty$ için limite geçilirse, MST sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki integral temsili elde edilir.

2.2.5 Teorem. $f \in MST$ olması için gerek ve yeter şart $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$f(\zeta) = \zeta \exp\left[2\int_0^{2\pi} \log\left(1 - e^{-i\theta}/\zeta\right) d\mu(\theta)\right] \tag{2.36}$$

olacak biçimde $\mu(\theta + 2\pi) - \mu(\theta) = 1$ özelliğinde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonu vardır.

Önceki kısımdan (2.1) açılımına sahip M sınıfına ait fonksiyonlar için $|c_n| \leq 2/(n+1)$ eşitsizliğinin genelde doğru olmadığı biliniyor. Aşağıdaki teoremde bu eşitsizliğin MST sınıfına ait fonksiyonlar için geçerli olduğu gösterilecek.

2.2.6 Teorem. $f \in MST$ fonksiyonu (2.1) tipindeki bir seri açılımına sahip olsun. Her n pozitif tamsayısı için $|c_n| \leq 2/(n+1)$ dir. Eşitlik, $G_n(\zeta)$ fonksiyonu (2.17) bağıntısıyla verilmek üzere her bir n ve $f(\zeta) = \eta G_n(\bar{\eta}\zeta)$ fonksiyonu için geçerlidir (Clunie, 1959).

İspat. $n = 1$ için teoremin doğruluğu 2.1.7 Teoreminde verilmiştir. Bu yüzden $n \geq 2$ kabul edelim. p fonksiyonu (2.31) eşitliği ile verilmiş olsun. Her $z \in \mathbb{D}$ için $g(z) = p(1/z)$ ve

$$b(z) = \frac{g(z) - 1}{g(z) + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{2.37}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda her $z \in \mathbb{D}$ için $|b(z)| \leq 1$ dir. (2.37) eşitliğinden $g(z) = \left(1 + b(z)\right)/\left(1 - b(z)\right)$ olur. g fonksiyonunun bu ifadesini (2.31) eşitliğinde kullanır ve ζ yerine $1/z$ yazılırsa

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{\zeta - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n/\zeta^n}{\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} c_n/\zeta^n} = \frac{1 - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n/\zeta^{n+1}}{1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n/\zeta^{n+1}}$$

$$= \frac{1 - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n+1}}{1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1}} = \frac{1 + b(z)}{1 - b(z)} \tag{2.38}$$

bulunur. (2.38) eşitliğinden

$$[1 - b(z)]\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n+1}\right) = [1 + b(z)]\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1}\right)$$

ve buradan

$$b(z)\left[-2 - c_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)c_n z^{n+1}\right] = c_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)c_n z^{n+1} \tag{2.39}$$

elde edilir. Aynı dereceli terimlerin katsayılarının eşitliğinden $c_0 = -2b_1$ bulunur. c_0 için bulunan bu sonucun 2.1.7 Teoreminde verilen sonuç ile uyuştuğu görülür.

$$\psi(z) = b(z)\left[-2 - c_0 z + \sum_{n=1}^{N-1} (n-1)c_n z^{n+1}\right]$$

denirse $N \geq 2$ için

$$\psi(z) = c_0 z + \sum_{n=1}^{N} (n+1)c_n z^{n+1} + \sum_{n=N+2}^{\infty} A_n z^n \tag{2.40}$$

biçiminde yazılabilir. Burada A_n katsayılarına ihtiyaç duyulmayacaktır. $z = re^{i\theta}, r < 1$ olmak üzere $\psi(z)$ fonksiyonu için

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(z)\overline{\psi(z)} d\theta$$

integralini (2.40) eşitliğinin her iki tarafı için hesaplayalım. $|b(z)| \leq 1$ olduğundan (2.40) eşitliği gereği

$$4 + |c_0|^2 r^2 + \sum_{n=1}^{N-1} (n-1)^2 |c_n|^2 r^{2n+2} \geq |c_0|^2 r^2 + \sum_{n=1}^{N} (n+1)^2 |c_n|^2 r^{2n+2}$$

elde edilir. $r \to 1^-$ için limite geçilirse

$$(N+1)^2 |c_n|^2 \leq 4 + \sum_{n=1}^{N-1} [(n-1)^2 - (n+1)^2] |c_n|^2 = 4 - \sum_{n=1}^{N-1} 4n|c_n|^2 \leq 4 \quad (2.41)$$

bulunur. Buradan her $N \geq 2$ için $|c_N| \leq 2/(N+1)$ elde edilir. (2.41) de eşitlik sağlanması durumunda $n = 1,2,\ldots,N-1$ için $c_n = 0$ olması gerektir. Eğer (2.39)'da z^{N+1} li terimlerin katsayıları eşitlenirse $|b_{N+1}| = 1$ ve diğer bütün b_j katsayıları sıfır bulunur. Böylece, (2.37) ve (2.38) bağıntılarından eşitliğin $f(\zeta) = \eta G_N(\bar{\eta}\zeta)$ fonksiyonu için sağlandığı görülür.■

2.2.7 Tanım. (2.1) açılımına sahip $f \in M$ fonksiyonu için $f(\mathbb{D}^x)$ görüntü kümesinin tümleyeni orijine göre konveks bir bölge ise f fonksiyonuna **meromorf konveks fonksiyon** veya $\mathbb{D}^x$ bölgesinde **konveks** denir. Meromorf konveks fonksiyonların sınıfı MCV ile gösterilir.

1.5.4 Teoreminde verilen CV ve ST sınıfları arasındaki ilişki, MCV ve MST sınıfları arasında da geçerlidir.

2.2.8 Teorem. $\zeta \in \mathbb{D}^x$ olsun.

$$g \in MCV \Leftrightarrow f(\zeta) = \zeta g'(\zeta) \in MST \quad (2.42)$$

dir. Tersine

$$f \in MST \Leftrightarrow g(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{f(w)}{w} dw \in MCV \quad (2.43)$$

dir. Burada integral $\mathbb{D}^x$ bölgesinde belli ζ_0 noktasını ζ noktasına birleştiren yol boyuncadır.

2.2.9 Açıklama. (2.43) bağıntısı ile verilen f fonksiyonunun c_0 katsayısı sıfır olmak zorundadır. Aksi takdirde (2.43) integrali $c_0 \log(\zeta/\zeta_0)$ gibi çok değerli terimini bulundurmak zorunda kalacaktır.

$f \in MST$ fonksiyonu sıfır değerini almadığından $g \in MCV$ fonksiyonu da sıfır değerini almaz. Bu yüzden $g \in M_0$, yani $MCV \subset M_0$ dır. Ancak $f \in MCV$ için (2.1) ifadesinde $c_0 \neq 0$ olabilir.

$\zeta \in \mathbb{D}^x$ olmak üzere, (2.1) biçiminde bir seri açılımına sahip $g \in MCV$ fonksiyonu için (2.30) ve (2.42) bağıntılarından

$$g \in MCV \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(1 + \zeta \frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\right) > 0$$

sonucu elde edilebilir.

Robertson (1963) MST sınıfına ait fonksiyonlar altında $\{\zeta : |\zeta| > \sqrt{3}\}$ bölgesinin resminin tümleyeninin konveks bir bölge olduğunu göstermiştir.

2.2.10 Teorem. $f \in M$ ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right) > 0$$

ise f fonksiyonu $|\zeta| > \sqrt{3}$ için konvekstir.

Aşağıdaki teorem MCVsınıfına ait fonksiyonların distorsiyon özelliğini verir.

2.2.11 Teorem. $g \in MCV$ olsun. Bu durumda $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$1 - \frac{1}{r^2} \leq |g'(\zeta)| \leq 1 + \frac{1}{r^2} \tag{2.44}$$

dir. Sağ taraf için eşitlik $G(\zeta) = \zeta + c_0 + 1/\zeta$ fonksiyonunda $\zeta = ir$ alınarak ve sol taraf için ise $\zeta = r$ alınarak görülür (Loewner, 1919).

İspat. (2.44) eşitsizliğinin sol tarafı 2.1.3 Teoreminde daha büyük M sınıfı için gösterilmiştir. Üstelik eşitliği sağlayan $G(\zeta) = \zeta + c_0 + 1/\zeta$ fonksiyonu konvekstir. Sağ taraftaki eşitsizliği göstermek için, $f(\zeta) = \zeta g'(\zeta)$ konumu yapılırsa $f \in MST$ olur. 2.2.9 Açıklama gereği $f \in \widetilde{M}$ dır. O halde, (2.14) eşitsizliğinden $|g'(\zeta)| \leq 1 + 1/r^2$ elde edilir.■

f fonksiyonu için eşitsizlikler elde etmede, $c_0 = 0$ olan sınıflarda çalışmak uygundur. MST sınıfında $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların oluşturduğu altsınıfı $\widetilde{MST}$ ile, MCV sınıfında $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların oluşturduğu altsınıfını da $\widetilde{MCV}$ ile gösterelim.

2.2.12 Teorem. $f \in \widetilde{MST}$ ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ olsun. Bu durumda

$$|f(\zeta) - \zeta| \leq \frac{1}{r} \tag{2.45}$$

dir. Eşitlik $F(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$ fonksiyonu için sağlanır (Goluzin,1938).

2.2.13 Teorem. $f \in \widetilde{MST}$ ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ olsun. Bu durumda

$$r - \frac{1}{r} \leq |f(\zeta)| \leq r + \frac{1}{r} \tag{2.46}$$

dir.

İspat. 2.1.5 Teoreminden sağ taraftaki eşitsizlik $\widetilde{M}$ sınıfında doğrudur. Böylece $\widetilde{MST}$ sınıfında (2.46) bağıntısının sağ tarafındaki eşitsizlik sağlanmış olur. (2.46) bağıntısının sol tarafındaki eşitsizlik için (2.45) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{r} \geq |f(\zeta) - \zeta| \geq r - |f(\zeta)|$$

elde edilir.■

Dikkat edilirse $F(\zeta) = \zeta + 1/\zeta \in \widetilde{MST}$ fonksiyonu için (2.46) eşitsizliği kesindir. Ayrıca $F \in \widetilde{MCV}$ olduğundan (2.46) eşitsizliği aynı zamanda $\widetilde{MCV}$ sınıfı için de geçerli olur.

2.3 α Mertebeli Meromorf Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

$\zeta \in \mathbb{D}^x$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} > \alpha$$

eşitsizliğini sağlayan (2.1) açılımına sahip $f \in M$ fonksiyona α **mertebeli meromorf yıldızıl fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların sınıfı $MST(\alpha)$ ile gösterilir. $MST(0) = MST$ ve $MST(\alpha) \subset M_0$ dır. $MST(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıda verilecek olan sonuçlar Pommerenke (1963)'ye aittir.

(2.35) bağıntısında $p(\zeta) = \zeta f'(\zeta)/f(\zeta)$ olarak alınır (2.31) ifadesinin sağında yerine yazılırsa elde edilecek eşitlikten $MST(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki integral temsili elde edilir.

2.3.1 Teorem. $f \in MST(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$f(\zeta) = \zeta \exp\left[2(1-\alpha)\int_0^{2\pi} \log\left(1 - e^{-i\theta}/\zeta\right) d\mu(\theta)\right] \tag{2.47}$$

olacak biçimde $\mu(\theta + 2\pi) - \mu(\theta) = 1$ özelliğinde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonu vardır. Üstelik, $r \to 1^+$ için $\arg f\left(re^{i\theta}\right) \to \pi\theta + 2\pi(1-\alpha)\mu(\theta)$ ve

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \alpha + (1-\alpha)\int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-i\theta}/\zeta}{1 - e^{-i\theta}/\zeta} d\mu(\theta) \tag{2.48}$$

dır.

2.3.2 Teorem. $f \in MST(\alpha)$ ve $|z| = r > 1$ olsun. Bu durumda $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| \leq \left(1 + \frac{|c_0|}{(1-\alpha)r} + \frac{1}{r^2}\right)^{1-\alpha} \leq \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{2(1-\alpha)} \tag{2.49}$$

ve

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| \geq \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{1-\alpha+|c_0|^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{1-\alpha-|c_0|^{1/2}} \geq \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{2(1-\alpha)} \tag{2.50}$$

dır. (2.49) bağıntısı için eşitlik $0 \leq c_0 \leq 2(1-\alpha)$ ve $z = r > 1$ olmak üzere,

$$f(\zeta) = \zeta\left(1 + \frac{c_0}{1-\alpha}\zeta^{-1} + \zeta^{-2}\right)^{1-\alpha} = \zeta + c_0 + \cdots$$

fonksiyonu için geçerlidir. (2.50) bağıntısı için eşitlik, $0 \leq c_0 \leq 2(1-\alpha)$ ve $z = r > 1$ olmak üzere,

$$f(\zeta) = \zeta(1-\zeta^{-1})^{1-\alpha+c_0/2} = \zeta - c_0 + \cdots$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $\alpha = 0$ olması durumu (2.15) eşitsizliğini verir. Bu yüzden $\alpha \neq 0$ için (2.49) eşitsizliğinin ispatı ile başlayalım. (2.47) integral temsili ve geometrik ortalamanın aritmetik ortalamadan daha büyük olmadığı gerçeği kullanılarak, $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right|^{1/(1-\alpha)} = \exp\left[\int_0^{2\pi} \log\left|1 - e^{-i\theta}\zeta^{-1}\right|^2 d\mu(\theta)\right] \leq \int_0^{2\pi} \left|1 - e^{-i\theta}\zeta^{-1}\right|^2 d\mu(\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + r^{-2})d\mu(\theta) - 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\zeta}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\mu(\theta)\right] \qquad (2.51)$$

bulunur. Ayrıca (2.47) bağıntısından

$$c_0 = -2(1-\alpha)\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}d\mu(\theta)$$

olduğu görülür. Böylece, $|c_0| \leq 2(1-\alpha)$ elde edilir. (2.51) bağıntısından

$$|\zeta^{-1}f(\zeta)|^{1/(1-\alpha)} \leq 1 + r^{-2} + |c_0|r^{-1}/(1-\alpha) \leq (1 + r^{-1})^2$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikten (2.49) eşitsizliğine ulaşılır.

Şimdi (2.50) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterelim. $f \in MST(\alpha)$ ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} = 1 - c_0\zeta^{-1} + \cdots \quad \text{ve} \quad \mathrm{Re}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \geq \alpha$$

olduğundan

$$\phi(\zeta) = \zeta \frac{[\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)] - 1}{[\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)] + (1 - 2\alpha)} = -\frac{c_0}{2(1-\alpha)} + \cdots \tag{2.52}$$

fonksiyonu $\mathbb{D}^x$ bölgesinde analitik ve $|\phi(\zeta)| < 1$ dir. $|\zeta| = r$ için

$$\frac{\partial}{\partial r} \log \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| = -\frac{1}{r} + \mathrm{Re}\left[\frac{\zeta}{r}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right] \leq 2(1-\alpha)\left|\frac{\zeta^{-1}\phi(\zeta)}{r\big(1 - \zeta^{-1}\phi(\zeta)\big)}\right| \tag{2.53}$$

olur. Eğer $b = |\phi(\infty)| = |c_0|/2(1-\alpha)$ olarak alınırsa, Golusin (1957, s:287) den

$$|\phi(\zeta)| \leq (br + 1)/(b + r)$$

dır. Böylece (2.53) eşitsizliğinden

$$\frac{\partial}{\partial r} \log|\zeta^{-1} f(\zeta)| \leq 2(1-\alpha)\frac{br + 1}{r(r^2 - 1)}$$

bulunur. $[r, \infty]$ üzerinden integral alınırsa

$$\log|\zeta^{-1} f(\zeta)| \geq (1-\alpha)(1+b)\log(1 - r^{-1}) + (1-\alpha)(1-b)\log(1 + r^{-1})$$

olur. $b = |c_0|/2(1-\alpha) = |\phi(\infty)| \leq 1$ olduğu dikkate alınırsa, (2.50) eşitsizliği elde edilir. ■

2.3.3 Teorem. $f \in MST(\alpha)$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$|f'(\zeta)| \geq \alpha\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| + (1-\alpha)\left|\frac{\zeta}{f(\zeta)}\right|^{\alpha/(1-\alpha)}\left(1 - \frac{1}{|\zeta|^2}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{|\zeta|^2}\right)^{1-\alpha} \tag{2.54}$$

dır. Eşitlik $\zeta = r > 1$ olmak üzere $f(\zeta) = \zeta(1 - 2r^{-1}\zeta^{-1} + \zeta^{-2})^{1-\alpha}$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $\mu(\theta)$, $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1$ özelliğinde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon olmak üzere (2.47) eşitliğinden

$$\left|\frac{\zeta}{f(\zeta)}\right|^{1/(1-\alpha)} = \exp\left[\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{|1 - e^{-i\theta}\zeta^{-1}|^2}\, d\mu(\theta)\right]$$

yazılabilir. Geometrik ortalama aritmetik ortalamadan büyük olmadığı dikkate alırsa

$$\left|\frac{\zeta}{f(\zeta)}\right|^{1/(1-\alpha)} \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-e^{-i\theta}\zeta^{-1}|^2} d\mu(\theta)$$

bulunur. Böylece (2.48) bağıntısından

$$\left|\frac{\zeta}{f(\zeta)}\right|^{1/(1-\alpha)} (1-|\zeta|^{-2}) \leq \int_0^{2\pi} \frac{1-|\zeta|^{-2}}{|1-e^{-i\theta}\zeta^{-1}|^2} d\mu(\theta) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\mathrm{Re}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \alpha\right)$$

olur. Buradan

$$\left|\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right| \geq \mathrm{Re}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \geq \alpha + (1-\alpha)\left|\frac{\zeta}{f(\zeta)}\right|^{1/(1-\alpha)} (1-|\zeta|^{-2})$$

elde edilir. Bu ise (2.54) ifadesinin kendisidir.■

2.3.4 Teorem. $f \in MST(\alpha)$ ve $\zeta = re^{i\theta} \in \mathbb{D}^x$ olsun. Bu durumda

(i) $0 \leq \alpha < 1/2$ ise

$$|f'(\zeta)| \geq k(1-r^{-1})^{1-2\alpha}$$

olacak biçimde $k = k(f) > 0$ sayısı vardır.

(ii) $1/2 \leq \alpha < 1$ ise her ε pozitif sayısı için

$$|f'(\zeta)| \geq k(\varepsilon)(1-r^{-1})^{\varepsilon}$$

olacak biçimde $k(\varepsilon) = k(f,\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

2.3.5 Teorem. $f \in MST(\alpha)$ fonksiyonu (2.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$(n+1)^2|c_n|^2 \leq 4(1-\alpha)^2 - 4(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}(k+\alpha)|c_k|^2$$

dir.

İspat. (2.52) bağıntısında olduğu gibi

$$\phi(\zeta) = \zeta \frac{\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta) + (1-2\alpha) f(\zeta)}$$

fonksiyonundan

$$-\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_k \zeta^{-k} = \phi(\zeta)\left[2(1-\alpha) - \sum_{k=0}^{\infty} (k-1+2\alpha) c_k \zeta^{-k-1}\right]$$

bulunur. Böylece, $n \geq 0$ için

$$-\sum_{k=0}^{n} (k+1) c_k \zeta^{-k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} (k+1) c_k \zeta^{-k} + \phi(\zeta) \sum_{k=n}^{\infty} (k-1+2\alpha) c_k \zeta^{-k-1}$$

$$= \phi(\zeta)\left[2(1-\alpha) - \sum_{k=0}^{n-1} (k-1+2\alpha) c_k \zeta^{-k-1}\right]$$

olur. Burada, sol taraftaki ifadede ikinci ve üçüncü terimler $m \geq n+1$ olmak üzere, sadece ζ^{-m} kuvvetlerinden oluştuğundan ve $|\phi(\zeta)| < 1$ olduğundan Parceval formülü gereği

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 |c_k|^2 \leq 4(1-\alpha)^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (k-1+2\alpha)^2 |c_k|^2$$

elde edilir. Buradan istenilen sonuca ulaşılır. ■

2.3.4 Teoreminden aşağıdaki sonucu elde etmek mümkündür.

2.3.6 Sonuç. $f \in MST(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ ve $\{f(\zeta): |\zeta| > 1\}$ görüntü bölgesinin tümleyeninin alanı A olsun. Bu durumda

$$\pi\alpha < A \leq \pi$$

dir. Bu eşitsizlikler kesindir.

İspat. $A \leq \pi$ olduğu 2.1.2 Açıklamasında gösterilmiştir. 2.3.5 Teoreminden

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)|a_k|^2 \leq 1-\alpha$$

dır. Bu eşitsizlik Alan Teoremi ile birlikte kullanılırsa

$$A = \pi\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2\right) \geq \pi\left(\alpha + \alpha\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2\right) \geq \pi\alpha$$

elde edilir. Eşitlik $k = 0,1,2,\dots$ olmak üzere sadece $a_k = 0$ için sağlanır. Bu durumda $A = \pi$ dir.

$A > \pi\alpha$ eşitsizliğinin mümkün en iyi eşitsizlik olduğunu göstermek için $MST(\alpha)$ sınıfına ait

$$f(\zeta) = \zeta\left(1 + \frac{1}{\zeta^{n+1}}\right)^{2(1-\alpha)/(n+1)} = \zeta + \frac{2(1-\alpha)}{n+1}\zeta^{-n} + \cdots \tag{2.55}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $w = f(\zeta)$ dönüşümü $|\zeta| = 1$ çemberini

$$K = \{w: |w| \leq 2^{2(1-\alpha)/(n+1)}, \ |\arg w - 2\pi k/(n+1)| \leq \pi\alpha/(n+1), k = 0,1,\dots,n\}$$

bölgesi içinde kalan bir küme üzerine resmeder. Dolayısıyla, A alanı, K kümenin alanının limiti olan $\lim_{n\to\infty} \pi\alpha 2^{2(1-\alpha)/(n+1)} = \pi\alpha$ sayısından daha küçüktür.■

2.3.5 Teoreminden $MST(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki katsayı sınırı hemen elde edilir.

2.3.7 Teorem. $0 \leq \alpha < 1$ için $f \in MST(\alpha)$ fonksiyonu (2.1) açılımıyla verilmiş olsun. Bu durumda, her $n \geq 0$ için

$$|c_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{(n+1)}$$

dir. Eşitlik (2.55) bağıntısıyla verilen f fonksiyonu için geçerlidir. Kaczmarski (1969), 2.3.6 Teoreminin aşağıda verilen daha genel halini elde etmiştir.

2.3.8 Teorem. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $f \in MST(\alpha)$ fonksiyonu (2.1) açılımında $c_0 = 0$ olarak verilmiş olsun. Ayrıca, $M \geq 1$ ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\mathrm{Re}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} > \alpha \quad \text{ve} \quad \left|\frac{\zeta f'(\zeta)/f(\zeta) - \alpha}{1-\alpha} - M\right| < M$$

eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda

$$|c_n| \leq \frac{[(2-1/M)(1-\alpha)]}{(n+1)}$$

dir. Eşitlik, $M = 1$ iken

$$f(\zeta) = \zeta \exp(\alpha - 1)/(n+1)\zeta^{n+1}$$

fonksiyonu için, $M > 1$ iken

$$f(\zeta) = \zeta\left(1 - \frac{M-1}{M\zeta^{n+1}}\right)^{\frac{(2M-1)(1-\alpha)}{(M-1)(n+1)}}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

2.3.9 Tanım $f \in M$ fonksiyonu (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer her $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\left|\arg\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right| < \alpha\frac{\pi}{2} \tag{2.56}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna α **mertebeden güçlü yıldızıl** denir. Eğer $g \in M$ fonksiyonu (2.2) tipinde bir seri açılımına sahipse (2.56) ifadesi $z \in \mathbb{D}^*$ için

$$\left|-\pi + \arg\frac{zg'(z)}{g(z)}\right| < \alpha\frac{\pi}{2}$$

biçimine gelir. Bu durumda g fonksiyonu α mertebeden güçlü yıldızıl olur. $\alpha = 1$ olması durumunda meremorf güçlü yıldızıl fonksiyonlar yıldızıl fonksiyon olur.

Aşağıdaki teorem Brannan ve ark. (1970) tarafından verilen α mertebeli güçlü yıldızıl fonksiyonların katsayı sınırıyla ilgilidir.

2.3.10 Teorem. α mertebeli güçlü yıldızıl f fonksiyonu (2.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$|c_n| \leq \frac{2\alpha}{n+1}$$

dir. Eşitlik, $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \left(\frac{1 + 1/\zeta^{n+1}}{1 - 1/\zeta^{n+1}}\right)^{\alpha}$$

diferansiyel denklemini sağlayan f fonksiyonları için geçerlidir.

2.3.11 Tanım. $\zeta \in \mathbb{D}^x$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, (2.1) tipinde seri açılımına sahip $g \in M$ fonksiyonu için

$$\mathrm{Re}\left(1 + \zeta \frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\right) > \alpha$$

eşitsizliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna α **mertebeli meromorf konveks fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların sınıfı $MCV(\alpha)$ ile gösterilir. $MCV(0) = MCV$ ve $MCV(\alpha) \subset M_0$ dır.

Alexander teoremi (1.5.4 Teoremi) $MCV(\alpha)$ ve $MST(\alpha)$ sınıfları arasında aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

2.3.12 Teorem. $\zeta \in \mathbb{D}^x$ olsun. Bu durumda

(i) $f \in MCV(\alpha) \Leftrightarrow \zeta f'(\zeta) \in MST(\alpha)$.

(ii) $c_0 = 0$ olmak üzere,

$$f \in MST(\alpha) \Leftrightarrow \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{f(t)}{t} dt \in MCV(\alpha) \tag{2.57}$$

dır.

Burada $c_0 \neq 0$ alınmış olsaydı (2.57) integrali $c_0 \ln(\zeta/\zeta_0)$ çok değerli terimini bulundurmuş olacaktı. Bu durum fonksiyonun bire-bir olmasını bozardı. (2.40) denkleminden

$$c_0 = -2(1-\alpha)\int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\, d\mu(\theta) \tag{2.58}$$

elde edilir. Böylece (2.40) ve (2.57) eşitliklerinden $c_0 = 0$ için $f \in MCV(\alpha)$ fonksiyonunun integral temsili

$$f(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \exp\left[2(1-\alpha)\int_0^{2\pi} \log\left(1 - e^{-i\theta}/t\right) d\mu(\theta)\right] dt \tag{2.59}$$

biçiminde olur.

Şimdi, Ruscheweyh türev operatörü yardımıyla $MST(\alpha)$ sınıfı tarafından kapsanan meromorf yalınkat fonksiyonların yeni bir sınıfı tanımlanıp, bu sınıfa ait fonksiyonların özellikleri incelenecek.

$\mathbb{D}^*$ delik dairesinde

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Laurent açılımına sahip $g \in M$ fonksiyonları için $z \in \mathbb{D}^*$ olmak üzere

$$D^0 g(z) = g(z)$$

$$D^1 g(z) = \frac{1}{z} + 2c_0 + 3c_1 z + 4c_2 z^2 + \cdots$$

$$D^2 g(z) = D\left(D^1 g(z)\right)$$

ve $n = 1,2, \dots$ için

$$D^n g(z) = D\left(D^{n-1} g(z)\right) = \frac{1}{z} + \sum_{m=2}^{\infty} m^n c_{m-2} z^{m-2} \tag{2.60}$$

biçiminde tanımlı D^n operatörü Ruscheweyh türev operatörü olarak adlandırılır.

$z \in \mathbb{D}^*$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{D^{n+1}g(z)}{D^n g(z)} - 2\right\} < -\alpha \tag{2.61}$$

eşitsizliğini sağlayan $g \in M$ fonksiyonların sınıfını $B_n(\alpha)$ ile gösterelim. Buna göre $B_0(\alpha) = MST(\alpha)$ olduğu açıktır. Bununla birlikte $B_n(\alpha)$ sınıfa ait fonksiyonların B. A. Uralegaddi ve C. Somanatha (1991) tarafından verilen diğer üç özelliği aşağıda verilmiştir.

2.3.13 Teorem. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için $B_{n+1}(\alpha) \subset B_n(\alpha)$ dır.

İspat. $g \in B_{n+1}(\alpha)$ olsun. Bu durumda $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re}\{D^{n+2}g(z)/D^{n+1}g(z) - 2\} < -\alpha \tag{2.62}$$

dir. Bu eşitsizlikten faydalanarak

$$\operatorname{Re}\{D^{n+1}g(z)/D^n g(z) - 2\} < -\alpha$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\frac{D^{n+1}g(z)}{D^n g(z)} - 2 = -\frac{1 + (2\alpha - 1)w(z)}{1 + w(z)} \tag{2.63}$$

olacak biçimde $\mathbb{D}$ birim dairesinde analitik $w(z)$ fonksiyonu tanımlayalım. Burada $w(0) = 0$ olduğu açıktır. Bu eşitlikten

$$\frac{D^{n+1}g(z)}{D^n g(z)} = \frac{1 + (3 - 2\alpha)w(z)}{1 + w(z)} \tag{2.64}$$

yazılabilir. (2.64) logaritmik türevi ve

$$z\big(D^n g(z)\big)' = D^{n+1}g(z) - 2D^n g(z) \tag{2.65}$$

özdeşliği kullanılarak

$$\frac{[D^{n+2}g(z)/D^{n+1}g(z)]-2+\alpha}{1-\alpha}$$

$$=\frac{2zw'(z)}{\big(1+w(z)\big)\big(1+(3-2\alpha)w(z)\big)}-\frac{1-w(z)}{1+w(z)} \tag{2.66}$$

elde edilir. $z\in\mathbb{D}$ için $|w(z)|<1$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksi durumda $\max_{|z|\le|z_0|}|w(z)|=|w(z_0)|=1$ olacak biçimde $z_0\in\mathbb{D}$ noktası vardır. Bu durumda Jack (1971) Lemması gereği

$$z_0w'(z_0)=kw(z_0) \tag{2.67}$$

olacak biçimde $k\ge 1$ reel sayısı bulunabilir. (2.64) ve (2.67) eşitliklerinden

$$\frac{[D^{n+2}g(z_0)/D^{n+1}g(z_0)]-2+\alpha}{1-\alpha}=\frac{2kw(z_0)}{\big(1+w(z_0)\big)\big(1+(3-2\alpha)w(z_0)\big)}-\frac{1-w(z_0)}{1+w(z_0)}$$

elde edilir. Böylece,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\big(D^{n+2}g(z_0)/D^{n+1}g(z_0)\big)-2+\alpha}{1-\alpha}\right\}\ge\frac{1}{2(2-\alpha)}>0$$

bulunur. Bu durum (2.62) ile çelişir. O halde her $z\in\mathbb{D}$ için $|w(z)|<1$ dir. Böylece (2.63) eşitliğinden $g\in B_n(\alpha)$ bulunur.■

2.3.13 Teoremi ve $B_0(\alpha)=MST(\alpha)$ eşitliğinden $B_n(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların yalınkat olduğu sonucu çıkarılabilir.

2.3.14 Teorem. $g\in M$, $n\in\mathbb{N}_0$ ve $c>0$ olmak üzere, g fonksiyonu $z\in\mathbb{D}$ için

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{D^{n+1}g(z)}{D^ng(z)}-2\right\}<-\alpha+\frac{1-\alpha}{2(1-\alpha+c)}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$F(z)=\frac{c}{z^{c+1}}\int_0^z t^c g(t)\,dt$$

fonksiyonu $B_n(\alpha)$ sınıfına aittir.

2.3.15 Teorem.

$$g \in B_n(\alpha) \Leftrightarrow F(z) = \frac{1}{z^2}\int_0^z tg(t)\,dt \in B_{n+1}(\alpha)$$

İspat. F fonksiyonunun tanımı gereği

$$D^n\big(zF'(z)\big) + 2D^nF(z) = D^ng(z)$$

dır. Yani

$$z\big(D^nF(z)\big)' + 2D^nF(z) = D^ng(z) \tag{2.68}$$

dir. (2.65) ve (2.67) beraber düşünülürse $D^ng(z) = D^{n+1}F(z)$ bulunur. Böylece $D^{n+1}f(z) = D^{n+2}F(z)$ sağlanır. Buradan da

$$D^{n+1}f(z)/D^nf(z) = D^{n+2}F(z)/D^{n+1}F(z)$$

sonucu elde edilir.■

2.4 Konvekse Yakın Meromorf Fonksiyonlar

f fonksiyonu $\mathbb{D}^x$ dairesinde (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. Eğer $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\mathrm{Re}\frac{e^{i\beta}\zeta f'(\zeta)}{g(\zeta)} > 0 \tag{2.69}$$

olacak biçimde bir $g \in MST$ fonksiyonu ve bir $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ sayısı varsa f fonksiyonuna $\mathbb{D}^x$ bölgesinde **konvekse yakın fonksiyon** denir. $\mathbb{D}^x$ bölgesinde konvekse yakın meromorf fonksiyonların sınıfı MCC ile gösterilir.

Analitik konvekse yakın fonksiyonlarda olduğu gibi, Alexander teoremi kullanılarak, $\phi \in MCV$ olmak üzere $\mathbb{D}^x$ bölgesinde konvekse yakın fonksiyonlar

$$\mathrm{Re}\frac{e^{i\beta}\zeta f'(\zeta)}{\phi'(\zeta)} > 0 \tag{2.70}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonları olarak akla gelebilirdi. Ancak (2.69) ve (2.70) eşitsizlikleri $\mathbb{D}^x$ bölgesinde denk değildir. Bunlardan (2.69) bağıntısını sağlayan fonksiyonlar daha geniş bir sınıfı tanımlar. 2.2.8 Teoreminden her bir $\phi \in MCV$ için $g(\zeta) = \zeta\phi'(\zeta) \in MST$ dir. Ancak, MST sınıfına ait bütün fonksiyonları bu şekilde elde etmek mümkün olmadığı 2.2.9 Açıklamasında belirtilmiştir. Ayrıca MCC sınıfına ait fonksiyonların $\mathbb{D}^x$ bölgesinde yalınkat olma zorunluluğu da yoktur. Örneğin, Libera ve Robertson (1961) (2.2) açılımına sahip f fonksiyonu ve $0 < |z| < 1$ için $g(z) = -z^{-1}$ ve

$$-z^2(1-z^2)f'(z) = 1 + z^2,\ f(z) = z - 2z - (2/3)z^3 + \cdots$$

olarak tanımlanan f fonksiyonu (2.69) bağıntısını sağlamasına rağmen $|c_1| > 1$ olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{D}^x$ bölgesinde yalınkat değildir.

Bazı yazarlar MCC sınıfındaki fonksiyonlara yalınkatlık şartını koyarak bu sınıfı çalışmışlardır. Ancak biz burada MCC sınıfına bu şartı koymayacağız.

Libera ve Robertson (1961) ve Pommerenke (1962), Kaplan (1952)'ın analitik konvekse yakın fonksiyonlar için kullandığı metodu kullanarak meromorf konvekse yakın fonksiyonlar için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

2.4.1 Teorem. f fonksiyonu (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. $f \in MCC$ olması için gerek ve yeter şart $r > 1$ ve $2\pi > \theta_2 - \theta_1 \geq 0$ şartını sağlayan her θ_1 ve θ_2 çifti için

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{Re}\left(1 + re^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right) \mathrm{d}\theta > -\pi \tag{2.71}$$

olmasıdır.

2.4.2 Teorem. $z \in \mathbb{D}^*$ için $f \in MCC$ yalınkat fonksiyonu (2.2) açılımına sahip ve $|b_{-1}| = 1$ olmak üzere, $g(z) = b_{-1}/z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ fonksiyonu meromorf yıldızıl olsun. Bu durumda $2 \leq c \leq 2\sqrt{2}$ için

$$n|c_n| + |b_n| \leq c \tag{2.72}$$

dir.

İspat. $f \in MCC$ yalınkat fonksiyonu (2.2) açılımına sahip ve $b_{-1} = e^{i\alpha}$ olsun. Bu durumda $\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > 0$ olur. Buradan $\mathbb{D}^*$ bölgesinde

$$-\sec\alpha \frac{zf'(z)}{g(z)} + i\tan\alpha = \frac{1+w(z)}{1-w(z)} \tag{2.73}$$

ve

$$w'(0) = -\frac{c_0}{2}e^{-2i\alpha}\sec\alpha, \quad -\cos\alpha > 0 \tag{2.74}$$

olacak biçimde $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ özelliğinde $\mathbb{D}$ dairesinde analitik w fonksiyonu vardır. (2.73) ve (2.74) eşitlikleri ve fonksiyonların seri açılımından

$$[z^2f'(z) - e^{i\alpha}zg(z)]w(z) = [z^2f'(z) + e^{-i\alpha}zg(z)],$$

$$\left[-2e^{i\alpha}\cos\alpha + \sum_{k=0}^{\infty}(kc_k - e^{i\alpha}b_k)z^{k+1}\right]w(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(kc_k + e^{-i\alpha}b_k)z^{k+1}$$

ve

$$\left[-2e^{i\alpha}\cos\alpha + \sum_{k=0}^{n-1}(kc_k - e^{i\alpha}b_k)z^{k+1}\right]w(z)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(kc_k + e^{-i\alpha}b_k)z^{k+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k z^k$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k z^k$ serisi $\mathbb{D}$ dairesinde yakınsaktır. $r < 1$ ve $z = re^{i\theta}$ için her iki tarafın integrali alınırsa

$$4\cos^2\alpha + \sum_{k=0}^{n-1}\left|kc_k - e^{i\alpha}b_k\right|^2 r^{2k+2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|-2e^{i\alpha}\cos\alpha + \sum_{k=0}^{n-1}(kc_k - e^{i\alpha}b_k)z^{k+1}\right|^2 d\theta$$

$$\geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|-2e^{i\alpha}\cos\alpha + \sum_{k=0}^{n-1}(kc_k - e^{i\alpha}b_k)z^{k+1}\right|^2 |w(z)|^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} (kc_k + e^{-i\alpha} b_k) z^{k+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k z^k \right|^2 d\theta$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n} \left| kc_k + e^{-i\alpha} b_k \right|^2 r^{2k+2}$$

olur. Buradan

$$4\cos^2\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \left| kc_k - e^{i\alpha} b_k \right|^2 \geq \sum_{k=0}^{n} \left| kc_k + e^{-i\alpha} b_k \right|^2$$

ve

$$\left| nc_n + e^{-i\alpha} b_n \right|^2 \leq 4\cos^2\alpha - \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left| kc_k + e^{-i\alpha} b_k \right|^2 - \left| kc_k - e^{i\alpha} b_k \right|^2 \right\}$$

$$= 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} kc_k \bar{b}_k \qquad (2.75)$$

bulunur. (2.75) eşitsizliğinin sol tarafının kare açılımı yapılıp, eşitsizlik yeniden düzenlenirse

$$n^2 |c_n|^2 + |b_n|^2 \leq 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} kc_k \bar{b}_k - 2\operatorname{Re}\left(nc_n \bar{b}_n e^{i\alpha}\right)$$

ve

$$(n|c_n| + |b_n|)^2 \leq 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha \sum_{k=1}^{n-1} k|c_k b_k| + 4n|c_n b_n|$$

$$\leq 4\left[1 + \sum_{k=1}^{n} k|c_k b_k|\right] \qquad (2.76)$$

eşitsizlikleri elde edilir. g fonksiyonu $\mathbb{D}^*$ bölgesinde yalınkat olduğundan alan teoremi gereği $|b_{-1}| = 1$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{n} k|b_k|^2 \leq 1$ dır. Alan teoreminden bilindiği gibi, f fonksiyonu $\mathbb{D}^*$ bölgesinde yalınkat iken $\sum_{k=1}^{n} k|c_k|^2 \leq 1$ olur. Böylece Couchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n} (kc_k + e^{-i\alpha} b_k) z^{k+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k z^k \right|^2 d\theta$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n} \left| kc_k + e^{-i\alpha} b_k \right|^2 r^{2k+2}$$

olur. Buradan

$$4\cos^2\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \left| kc_k - e^{i\alpha} b_k \right|^2 \geq \sum_{k=0}^{n} \left| kc_k + e^{-i\alpha} b_k \right|^2$$

ve

$$\left| nc_n + e^{-i\alpha} b_n \right|^2 \leq 4\cos^2\alpha - \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left| kc_k + e^{-i\alpha} b_k \right|^2 - \left| kc_k - e^{i\alpha} b_k \right|^2 \right\}$$

$$= 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} kc_k \bar{b}_k \tag{2.75}$$

bulunur. (2.75) eşitsizliğinin sol tarafının kare açılımı yapılıp, eşitsizlik yeniden düzenlenirse

$$n^2 |c_n|^2 + |b_n|^2 \leq 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} kc_k \bar{b}_k - 2\operatorname{Re}\left(nc_n \bar{b}_n e^{i\alpha}\right)$$

ve

$$(n|c_n| + |b_n|)^2 \leq 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha \sum_{k=1}^{n-1} k|c_k b_k| + 4n|c_n b_n|$$

$$\leq 4\left[1 + \sum_{k=1}^{n} k|c_k b_k|\right] \tag{2.76}$$

eşitsizlikleri elde edilir. g fonksiyonu $\mathbb{D}^*$ bölgesinde yalınkat olduğundan alan teoremi gereği $|b_{-1}| = 1$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{n} k|b_k|^2 \leq 1$ dır. Alan teoreminden bilindiği gibi, f fonksiyonu $\mathbb{D}^*$ bölgesinde yalınkat iken $\sum_{k=1}^{n} k|c_k|^2 \leq 1$ olur. Böylece Couchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum_{k=1}^{n} k|c_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k|c_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} k|b_k|^2\right)^{1/2} \leq 1 \tag{2.77}$$

olur. (2.76) ve (2.77) eşitsizliklerinden $n = 1,2,3,\ldots$ için

$$n|c_n| + |b_n| \leq 2\sqrt{2} \tag{2.78}$$

elde edilir. Burada (2.78) eşitsizliğine ulaşmak için f fonksiyonunun $\mathbb{D}^*$ bölgesinde yalınkat olması gerekli olmuştur.

2.4.3 Açıklama. 2.4.2 Teoreminde $f \in MST$ fonksiyonu (2.2) açılımına sahip ise $g(z) = -f(z)$ alınabileceğinden $|c_n| = |b_n|$ olup, (2.72) eşitsizliği $c = 2$ için

$$|c_n| \leq \frac{2}{n+1}$$

olur. Bu ise Clunie (1959) tarafından elde edilen eşitsizliğe indirgenmiş olur.

2.5 α −Spiral Meromorf Fonksiyonlar

(2.1) açılımına sahip $f \in M$ fonksiyonu ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} > 0 \tag{2.79}$$

olacak biçimde $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ sayısı varsa f fonksiyonuna $\mathbb{D}^x$ bölgesinde **α −spiral meromorf fonksiyon** denir. α −spiral meromorf fonksiyonların sınıfı $MSP(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanımdan hareketle $MSP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsilinin aşağıdaki biçimde verilebileceği kolaylıkla görülür.

2.5.1 Teorem. $f \in MSP(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$f(\zeta) = \zeta \exp\left(e^{-i\alpha} \cos\alpha \int_{\infty}^{\zeta} \frac{p(1/t) - 1}{t} dt\right)$$

olacak biçimde $p \in P$ fonksiyonu vardır.

Zamorski (1961), $MSP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı tahminini aşağıdaki gibi elde etmiştir.

2.5.2 Teorem. $f \in MSP(\alpha)$ ise her $n \geq 0$ için

$$|c_n| \leq \frac{2}{n+1}\cos\alpha$$

dır. Eşitlik her bir n ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$F_n(\zeta) = \zeta\left(1 + \frac{1}{\zeta^{n+1}}\right)^{(2e^{-i\alpha}\cos\alpha)/(n+1)}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

Kaczmarski (1969) bu sonucu aşağıdaki biçimde genelleştirmiştir.

2.5.3 Teorem. α, λ ve K keyfi sabitler olmak üzere, $0 \leq \alpha < 1$, $|\lambda| < \pi/2$ ve $K \geq 1$ olsun. Eğer f fonksiyonu (2.1) seri açılımına sahip $c_0 = 0$ özelliğinde ve her bir $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\left|\frac{e^{i\alpha}[\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)] - i\sin\alpha - \lambda\cos\alpha}{(1-\lambda)\cos\alpha} - K\right| < K$$

ise her $n \geq 1$ için

$$|c_n| \leq \frac{(2 - 1/K)(1-\lambda)}{n+1}\cos\alpha$$

dır. Eşitsizlik tüm değişkenler için kesin olup, Ekstremal fonksiyon; $K = 1$ iken

$$f(\zeta) = \zeta\exp\left(\frac{(\lambda - 1)e^{-i\alpha}\cos\alpha}{(n+1)\zeta^{n+1}}\right)$$

ve $K > 1$ iken

$$f(\zeta) = \zeta\left(1 - \frac{K-1}{K\zeta^{n+1}}\right)^{\frac{(2K-1)(1-\lambda)}{(K-1)(n+1)}e^{-i\alpha}\cos\alpha}$$

dır.

2.5.3 Teoreminin ispatı aşağıdaki iki ilginç sonucun ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

2.5.4 Teorem. f fonksiyonu (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. $\zeta \in \mathbb{D}^x$, $c_0 = 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, $\mathrm{Re}[\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)] > \alpha$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)|c_n|^2 \leq 1-\alpha$$

dır.

2.5.5 Teorem. f fonksiyonu (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. $\zeta \in \mathbb{D}^x$, $c_0 = 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, $|[\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)] - 1| < 1$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+\alpha)(n+2-\alpha)|c_n|^2 \leq (1-\alpha)^2$$

dır.

2.6 Sınırlı Meromorf Fonksiyonlar

f fonksiyonu (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. $\zeta \in \mathbb{D}^x$ olmak üzere $|f(\zeta)| > m$ olacak biçimde $m > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna **alttan sınırlı fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $BM(m)$ ile gösterilir. $BM(m)$ sınıfına ait fonksiyonların $w = 0$ değerini almadığı açıktır. $BM(m)$ sınıfına ait $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların altsınıfı $\widetilde{BM}(m)$ ile gösterilir. $BM(m)$ sınıfına ait meromorf yalınkat fonksiyonların sınıfı $BMS(m)$ ile, $\widetilde{BM}(m)$ sınıfına ait meromorf yalınkat fonksiyonların sınıfı ise $\widetilde{BMS}(m)$ ile gösterilir.

Aşağıda bu sınıflarla ilgili çeşitli eşitsizlikler verilmiştir. Bunlardan birincisi Alan teoreminin ispatından elde edilen aşağıdaki sonuçtur.

2.6.1 Teorem. $f \in BMS(m)$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 \leq 1-m^2$$

dir. Eğer $f \in BMS(m)$ ise $m \leq 1$ dir. Eğer $m = 1$ ise $f(\zeta) = \zeta$ dır.

2.6.1 Teoreminden $BM(m)$ sınıfında çalışırken daima $0 < m < 1$ olarak alınacaktır.

Pick (1917), $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| < K,\ K > 1$ özelliğindeki (1.1) açılımına sahip $f \in S$ fonksiyonları için $|a_2| \leq 2(1 - 1/M)$ olduğunu gösterdi. Bu eşitsizlikten faydalanarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

2.6.2 Teorem. $f \in BMS(m)$ ise

$$|c_0| \leq 2(1-m)$$

dır. Eşitlik $\zeta \in \mathbb{D}^x$ olmak üzere

$$F(\zeta) = \frac{\zeta}{2}\left[\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)^2 + \frac{2m}{\zeta} + \left(1-\frac{1}{\zeta}\right)^2\sqrt{1+\frac{4m\zeta}{(\zeta-1)^2}}\right] \tag{2.80}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $\zeta = 1/z$ ve $g(z) = 1/f(\zeta)$ denirse $g \in S$ sınırlı yalınkat fonksiyonu modül olarak $K = 1/m$ ile üstten sınırlanmış olur. Burada $a_2 = -c_0$ olduğundan Pick (1917)'in sonucu gereği $|c_0| = |a_2| \leq 2(1-m)$ elde edilir.

Zawadzki (1961), $BMS(m)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|c_1| \leq 1 - m^2$ kesin eşitsizliğini elde etmiştir. Ayrıca Janowski (1964), bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri üzerinde ilave çalışmalar yapmıştır.

2.6.3 Teorem. $k \geq 1$ olmak üzere

$$f(\zeta) = \zeta + \frac{c_k}{\zeta^k} + \cdots = \zeta + \sum_{n=k}^{\infty}\frac{c_n}{\zeta^n} \tag{2.81}$$

fonksiyonu $\widetilde{BMS}(m)$ sınıfına ait olsun. Bu durumda $k \leq n \leq 2k$ için

$$|c_n| \leq \frac{2}{n+1}(1 - m^{n+1})$$

olup, eşitlik, $F^{-1}(w)$ fonksiyonu

$$w = F(\zeta) = \zeta\left(1 - \frac{1}{\zeta^{n+1}}\right)^{2/(n+1)}$$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olmak üzere

$$mF^{-1}\left(\frac{F(\zeta)}{m}\right) = \zeta - \frac{2}{n+1}(1 - m^{n+1})\frac{1}{\zeta^n} + \cdots \tag{2.82}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $t \neq 0$ için $1/[f(\zeta)/t]^n$ ifadesi

$$\frac{1}{[f(\zeta)/t]^n} = \frac{t^n}{\zeta^n} - \frac{nc_k t^n}{\zeta^{n+k+1}} + \cdots \tag{2.83}$$

şeklinde bir seri açılımına sahiptir. Eğer $k \leq n \leq 2k$ ise (2.83) ifadesinde paydadaki üs için $n + k + 1 > 2k$ olması önemlidir. (2.81) ve (2.83) beraber düşünülürse $t \neq 0$ için

$$tf\left(\frac{f(\zeta)}{t}\right) = \zeta + \sum_{n=k}^{2k} \frac{c_n(1 + t^{n+1})}{\zeta^n} + \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{A_n}{\zeta^n} \tag{2.84}$$

elde edilir. $t = m, m^2, m^4, \dots, m^{2^N}, \dots$ için (2.84) fonksiyonu kullanarak

$$f_1(\zeta) = mf\left(\frac{f(\zeta)}{m}\right), f_2(\zeta) = m^2 f\left(\frac{f(\zeta)}{m^2}\right), \dots$$

biçiminde bir dizi oluşturabiliriz. Bu dizideki her bir fonksiyonunun M sınıfında olduğu açıktır. Üstelik her $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için $|F_N(\zeta)| \geq m^{2^N}$ dir. $F_N(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} c_n{}^{(N)}/\zeta^n$ biçiminde bir seri açılımına sahip ise (2.84) eşitliğinden her $n = 0,1,2, \dots, k-1$ için $c_n{}^{(N)} = 0$ ve $k \leq n \leq 2k$ için

$$\lim_{N\to\infty} c_n{}^{(N)} = c_n \prod_{j=0}^{\infty}\left[1 + (m^{n+1})^{2^j}\right] = c_n \sum_{j=0}^{\infty}(m^{n+1})^j = \frac{c_n}{1 - m^{n+1}}$$

olur. Her bir $f_N(\zeta)$ fonksiyonu 2.1.10 Teoreminin şartlarını sağlar. O halde

$$\frac{c_n}{1-m^{n+1}} \le \frac{2}{n+1} \quad \text{veya} \quad |c_n| \le \frac{2}{n+1}(1-m^{n+1})$$

elde edilir.

Eşitlik için, F fonksiyonu $\mathbb{D}^x$ bölgesini -1 in $(k+1)$. kuvvetten kökleri yönünde $k+1$ ışını çıkarılmış kompleks düzlem üzerine resmeder. Böylece $F(\zeta)$ yıldızıldır ve $F(\zeta)/m$ dönüşümüde $\mathbb{D}^x$ bölgesini $F(\mathbb{D}^x)$ görüntü bölgesi içinde bir bölge üzerine resmeder. (2.82) eşitliği ile tanımlı fonksiyon $\mathbb{D}^x$ bölgesinde yalınkattır ve $k \le n \le 2k$ için (2.82) bağıntısının sağ tarafındaki kuvvet serisi elde edilir.■

$\zeta = 1/z$ olmak üzere, $g(z) = 1/f(\zeta) \in S$ sınırlı yalınkat fonksiyonu için $|g(z)| \le K$ ise Pick (1917),

$$-k(-r,K) \le |g(z)| \le k(r,K)$$

eşitsizliğini elde etmiştir. Bu eşitsizlikten, $K = 1/m$ ve $f \in BMS(m)$ fonksiyonunun modülü için aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

2.6.4 Teorem F fonksiyonu (2.80) bağıntısıyla tanımlı fonksiyon olmak üzere, $f \in BMS(m)$ ise $\zeta \in \mathbb{D}^x$ ve $|\zeta| = r > 1$ için

$$F(r) \le |f(\zeta)| \le -F(-r)$$

dir.

2.6.5 Uyarı. $\zeta = 1/z$ ve $m = 1/K$ olmak üzere $F(\zeta) = 1/k(z,K)$ dır. $F(\zeta)$ fonksiyonu daha önce 2.6.2 Teoreminin ispatında hesap edilmişti.

2.7 Tipik Reel Meromorf Fonksiyonlar

Sabit olmayan f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde kutup noktaları hariç analitik ve kutup noktaları hariç her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\big(\operatorname{Im} f(z)\big)(\operatorname{Im} z) \ge 0 \tag{2.85}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna $\mathbb{D}$ dairesinde **tipik reel meromorf fonksiyon** denir. (2.85) bağıntısından $\mathbb{D}$ dairesinde her bir p_j kutbu $(-1,1)$ aralığında basit kutup olmalıdır. Üstelik p_j kutuplarında $-m_j$ rezidüsü negatif olmalıdır. Bu durumda her j için $m_j > 0$ olur.

Eğer f fonksiyonu orijin civarında analitik ise, $z = 0$ noktasının belli bir komşuluğunda f fonksiyonu

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2.86}$$

biçiminde normalize edilmiş bir kuvvet serisine açılabilir. (2.86) biçiminde açılıma sahip tipik reel meromorf fonksiyonların sınıfı MTR ile gösterilir. Eğer f fonksiyonu orijinde bir kutba sahip ise f fonksiyonunun $z = 0$ merkezli normalize edilmiş Laurent açılımı

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{2.87}$$

biçiminde olup, bu açılıma sahip tipik reel meromorf fonksiyonların fonksiyonların sınıfını MTR^* ile göstereceğiz. Hem MTR hemde MTR^* sınıflarına ait fonksiyonların yalınkat olması gerekmez. Bu fonksiyonlar Kısım 1.10'da verilen analitik tipik reel fonksiyonlar yardımıyla ifade edilebileceğini Goodman (1959) göstermiştir.

2.7.1 Teorem. $f \in MTR$ olsun.

$$f(z) = \lambda t(z) + \sum m_j \frac{1 - {p_j}^2}{{p_j}^2} \frac{z}{1 - (p_j + 1/p_j)z + z^2} \tag{2.88}$$

olacak biçimde $p_j \in (-1,1)$, $m_j > 0$ reel sayıları, bir $t \in TR$ fonksiyonu ve bir $\lambda \geq 0$ sayısı vardır. Buradaki toplam f fonksiyonunun bütün kutup noktaları üzerinden olup,

$$\lambda + \sum m_j \frac{1 - {p_j}^2}{{p_j}^2} = 1$$

bağıntısı sağlanır.

2.7.2 Teorem. $g \in MTR^{*}$ve $f \in MTR$ olsun. 2.7.1 Teoreminin gösterimleri altında

$$g(z) = -\frac{1}{z} + b_0 - z + f(z)$$

eşitliği geçerlidir.

Goodman (1959) ve Gel'fer (1954), MTR ve MTR^{*} sınıfları ve bunların alt sınıflarına ait fonksiyonları için katsayı sınırlarını ve diğer bazı özelliklerini elde etmişlerdir.

3. KUTBU ORİJİN OLMAYAN MEROMORF YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, $0 < p < 1$ ve $|z_0| = p$ olmak üzere, $\mathbb{D}$ birim dairesinde bir z_0 noktasında basit kutba sahip yalınkat fonksiyonların sınıfı üzerinde durulacak. Bu sınıfa ve alt sınıflarına ait fonksiyonların integral temsilleri, katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon ve genleşme özellikleri verildi.

3.1 $S(p)$ Sınıfı ve Özellikleri

$0 < p < 1$ ve $|z_0| = p$ olmak üzere, $z_0 \in \mathbb{D}$ noktasında bir kutba sahip ve $|z| < p$ dairesinde

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{3.1}$$

biçiminde seri açılımı olan yalınkat fonksiyonların kümesini $S(p)$ ile gösterelim. Bir rotasyonla $z_0 = p$ almak mümkün olduğundan, bundan sonra $S(p)$ ile reel eksen üzerinde p noktasında basit kutba sahip yalınkat fonksiyonların sınıfı gösterilecek. $S(p)$ sınıfına ait fonksiyonlardan

$$k_p(z) = \frac{z}{(1 - pz)(1 - z/p)} = z + \left(p + \frac{1}{p}\right) z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{p^n - 1/p^n}{p - 1/p} z^n \tag{3.2}$$

fonksiyonu özel bir öneme sahiptir. Bu fonksiyon $\mathbb{D}$ dairesini $\mathbb{C} \backslash [-p/(1-p)^2, -p/(1+p)^2]$ bölgesi üzerine konform olarak resmeder. Koebe fonksiyonunun S sınıfında oynadığı rolü $k_p(z)$ fonksiyonu $S(p)$ sınıfında oynar.

Birim dairede verilen bir f meromorf fonksiyonunun bu dairede başka açılımları da olabilir. Eğer f fonksiyonu $p \in \mathbb{D}$, $0 < p < 1$ noktasında basit kutba sahip ve rezidüsü m ise $z \in \mathbb{D} \backslash \{p\}$ için

$$f(z) = \frac{m}{z - p} + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \tag{3.3}$$

veya $0 < |z - p| < 1 - p$ için

$$f(z) = \frac{m}{z-p} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n \tag{3.4}$$

biçiminde iki açılıma sahiptir.

(3.1) ve (3.3) açılımına sahip f fonksiyonunun katsayılar arasındaki bağıntının aşağıdaki gibi olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

3.1.1 Teorem. f fonksiyonu (3.1) ve (3.3) açılımlarına sahip olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$b_n = a_n + \frac{m}{p^{m+1}} \tag{3.5}$$

dir.

Chichra (1969), $S(p)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki Alan Teoremini elde etmiştir.

3.1.2 Teorem. $f \in S(p)$ fonksiyonu (3.3) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq \frac{|m|^2}{(1-p^2)^2} \tag{3.6}$$

dir.

İspat. $p < |z| < 1$ bölgesinde (3.3) bağıntısıyla verilen f fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{mp^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

biçiminde yazılabilir. $r \in (p, 1)$ için $\Gamma_r = f(C_r)$ eğrisi saat yönünde yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri olup 2.1.1 Teoremin ispatındaki yol takip edilerek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n|mp^{n-1}|^2}{r^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} n|b_n|^2 r^{2n} \leq 0$$

elde edilir. $r \to 1^-$ için limit alınırsa (3.6) eşitsizliği bulunur. Eşitlik, $k_p(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.■

(3.6) bağıntısında $p = 0$ ve $m = 1$ olarak alınırsa Alan teoreminde geçen (2.6) bağıntısı elde edilir. (3.5) eşitliği (3.6) bağıntısında yerine yazılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

3.1.2 Sonuç. $f \in S(p)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left| a_n + \frac{m}{p^{n+1}} \right|^2 \leq \frac{|m|^2}{(1-p^2)^2} \tag{3.7}$$

dir. Özel olarak

$$|b_1| \leq \frac{|m|}{1-p^2}$$

dir.

3.1.3 Teorem. $f \in S(p)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda $|z| = r < 1$ özelliğindeki bütün z'ler için

$$|f(z)| \geq \frac{r}{1 + |a_2|r + r^2}$$

dir. Eğer $|a_2| > 2$ ise $r_0 = \left(|a_2| - \sqrt{|a_2|^2 - 4}\right)/2$ olmak üzere $r_0 < |z| = r < 1$ halka bölgedeki bütün z'ler için

$$|f(z)| \leq \frac{r}{-1 + |a_2|r - r^2} \tag{3.8}$$

dir. Her iki bağıntıda da eşitlik,

$$F(z) = z/(1 + |a_2|z + z^2)$$

fonksiyonu için geçerlidir (Fenchel, 1931).

3.1.3 Teoreminden $S(p)$ sınıfında (3.1) açılımına sahip fonksiyonlar için aşağıdaki örtme teoremi elde edilir.

3.1.4 Teorem. $f \in S(p)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda $f(\mathbb{D})$ bölgesi $\{w: |w| < 1/(2+|a_2|)\}$ veya $|w| < 1/\left(\sqrt{|a_3|+1}+2\right)$ dairesini örter. Eğer $|a_2| > 2$ ise $f(\mathbb{D})$ bölgesi $|w| > 1/(|a_2|-2)$ eşitsizliğini sağlayan bütün w değerlerini bulundurur (Fenchel, 1931). Eğer $|a_3| > 3$ ise $f(\mathbb{D})$ bölgesi $|w| > 1/\left(\sqrt{|a_3|+1}-2\right)$ şitsizliğini sağlayan bütün w değerlerini bulundurur (Kumato, 1945).

3.1.5 Teorem. $f \in S(p)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda $|a_2| > 2$ ise

$$p \leq r_0 = \frac{|a_2| - \sqrt{|a_2|^2-4}}{2} = \frac{2}{|a_2| + \sqrt{|a_2|^2-4}} \tag{3.9}$$

dır (Fenchel, 1931).

İspat. (3.8) eşitsizliğinden, eğer $|z| > r_0$ olması durumunda f fonksiyonu sonlu olduğundan $p \leq r_0$ olmak zorundadır. ■

(3.9) eşitsizliğinde $S(p)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|a_2| \leq p + 1/p$ olduğu görülür.

Ladegast (1953), $S(p)$ sınıfına ait fonsiyonlar için çok sayıda eşitsizlik elde etmiştir. Bunlardan biri aşağıdaki teoremde verilmiştir.

3.1.6 Teorem. f fonksiyonu S veya $S(p)$ sınıfında bir fonksiyon ve $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, hiçbiri f fonksiyonunun kutup noktası olmayan, farklı iki nokta olsun. $k = 1,2$ için $r_k = |z_k|$ olmak üzere

$$\left| \frac{f'(z_1)f'(z_2)}{\left(f(z_2)-f(z_1)\right)^2} - \frac{1}{(z_2-z_1)^2} \right| \leq \frac{1}{(1-r_1{}^2)(1-r_2{}^2)} \tag{3.10}$$

dir. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik $z_2 = \bar{z}_1$ ve $z_2 \neq z_1$ olmak üzere Koebe fonksiyonları için geçerlidir.

İspat. Eğer f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde yalınkat ise

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{f\left(\frac{z_1+\zeta}{1+\bar{z}_1\zeta}\right) - f(z_2)}$$

fonksiyonu da yalınkattır ve $(z_1+\zeta)/(1+\bar{z}_1\zeta)=z_2$ iken kesinlikle bir basit kutba sahiptir. Böylece $\zeta=z_0=(z_2-z_1)/(1-\bar{z}_1 z_2)$ noktasında bir basit kutba sahip olur. $|b_1|\le |m|/(1-p^2)$ eşitsizliğini kullanarak $\phi(\zeta)$ fonksiyonuna 3.1.2 Teoremi uygulanabilir. Teoremde geçen b_1, m ve $p=|z_0|$ sayılarını bulmaya ihtiyaç vardır. $r_1=|z_1|$ olmak üzere

$$m=\lim_{\zeta\to z_0}(\zeta-z_0)\phi(\zeta)=\frac{1-{r_1}^2}{f'(z_2)(1-\bar{z}_1 z_2)^2}$$

dır. b_1 katsayısını bulmak için

$$\phi(\zeta)=\frac{m}{\zeta-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n\zeta^n$$

fonksiyonunun türevi alınıp $\zeta=0$ konumu yapılırsa

$$b_1=\frac{-f'(z_1)(1-{r_1}^2)}{\big(f(z_2)-f(z_1)\big)^2}+\frac{1-{r_1}^2}{f'(z_2)(z_2-z_1)^2}$$

elde edilir. $r_2=|z_2|$ olmak üzere

$$1-p^2=1-|z_0|^2=1-\left|\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|^2$$

$$=\frac{(1-\bar{z}_1 z_2)(1-z_1\bar{z}_2)-(z_2-z_1)(\bar{z}_2-\bar{z}_1)}{|1-\bar{z}_1 z_2|^2}$$

$$=\frac{(1-{r_1}^2)(1-{r_2}^2)}{|1-\bar{z}_1 z_2|^2}$$

olur. Böylece $|b_1|\le |m|/(1-p^2)$ eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\frac{-f'(z_1)(1-{r_1}^2)}{\big(f(z_2)-f(z_1)\big)^2}+\frac{1-{r_1}^2}{f'(z_2)(z_2-z_1)^2}\right|\le\frac{1-{r_1}^2}{|f'(z_2)(1-\bar{z}_1 z_2)^2|}\frac{|1-\bar{z}_1 z_2|^2}{(1-{r_1}^2)(1-{r_2}^2)}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $f'(z_2)/(1-{r_1}^2)$ ile çarpılırsa, (3.10) bağıntısı elde edilir. ■

$A_1 \neq 0$ olmak üzere, (3.10) eşitsizliğinin sol tarafı $g(z) = A_0 + A_1 f(z)$ dönüşümü altında değişmez kalır. Bu yüzden bu teoremde bilinen normalizasyona ihtiyaç duyulmamıştır.

3.1.7 Teorem. $f \in S(p)$ ve $0 < r < 1$ olsun. Bu durumda her λ reel sayısı için

$$\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\lambda} d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left|k_p\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\lambda} d\theta \tag{3.11}$$

dır. Eşitlik, $r \neq p$ ve $\lambda \neq 0$ iken $f(z) = k_p(z)$ fonksiyonu için sağlanır (Kirwan ve Schober, 1976).

(3.11) eşitsizliğinde her iki tarafın $1/\lambda$ kuvveti alınır ve $\lambda \to \infty$ için limit alınırsa, Kirwan ve Schober (1976)'e ait aşağıdaki teorem elde edilir.

3.1.8 Teorem. $f \in S(p)$ olsun. Bu durumda

$$|f(z)| \leq \left|k_p(r)\right| \tag{3.12}$$

dir.

Her bir $f \in S(p)$ fonksiyonu için $|a_2| \leq p + 1/p$ olduğundan 3.1.3 Teoremi gereği

$$|f(z)| \geq \left|k_p(-r)\right| \tag{3.13}$$

olduğu görülür. $r \to 1^-$ iken limite geçilirse (3.12) ve (3.13) bağıntılarından aşağıdaki örtme sonucu elde edilir.

3.1.9 Teorem. $f \in S(p)$ ise $f(\mathbb{D})$ bölgesi $\{w: |w| < p/(1+p)^2\}$ kümesini kapsar. Üstelik $f(\mathbb{D})$ bölgesi $|w| > p/(1-p)^2$ bölgesini de içerir.

Jenkins (1962), $S(p)$ sınıfına ait (3.1) açılımına sahip fonksiyonlar için bazı katsayı eşitsizlikleri elde etmiştir.

3.1.10 Teorem. $f \in S(p)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda $n = 2, 3, 4, 5, 6$ için

$$|a_n| \leq \frac{1 + p^2 + p^4 + \cdots p^{2n-2}}{p^{n-1}} \tag{3.13}$$

dir. Eşitlik, (3.2) bağıntısıyla verilen $f(z) = k_p(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Her ne kadar Jenkins (1962), $S(p)$ sınıfına ait fonksiyonların bazı katsayıları için kesin üst sınır elde etmiş olsa da (3.13) bağıntısındaki eşitlik her bir n için $k_p(z) \in S(p)$ fonksiyonu için geçerlidir. Gerçekten $k_p(z)$ fonksiyonunun seri açılımındaki A_n katsayısının

$$A_n = \frac{p^n - 1/p^n}{p - 1/p^n} = \frac{1 - p^{2n}}{p^{n-1}(1 - p^2)} = \frac{1 + p^2 + p^4 + \cdots p^{2n-2}}{p^{n-1}} \tag{3.14}$$

olduğu görülür. Böylece (3.13) eşitsizliğinin $S(p)$ sınıfına ait fonksiyonların bütün $|a_n|$ katsayıları için doğru olduğu akla gelebilir. Gerçekte durum buna yakındır.

Kirwan ve Schober (1976), $S(p)$ sınıfına ait (3.1) açılımına sahip fonksiyonlar için katsayı eşitsizliğini elde etmişlerdir.

3.1.11 Teorem. $f \in S(p)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda her $n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq \min\left\{\frac{1 + p^n}{p^{n-1}(1 - p^2)}, \frac{en}{2p^{n-1}}\right\} \tag{3.15}$$

dır.

İspat. $|z| = r < p$ ise

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta$$

dır. Eğer $p < r < 1$ ise (3.3) ve (3.5) bağıntılarından

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta} d\theta - \frac{m}{p^{n+1}} \tag{3.16}$$

bulunur. $\lambda = 1$ ve $p < r < 1$ için 3.1.7 Teoremi ve Couchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left|\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, e^{-in\theta} d\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi r^{n-1}}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - pre^{i\theta}||1 - re^{i\theta}/p|}$$

$$\leq \frac{1}{r^{n-1}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - pre^{i\theta}|^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - re^{i\theta}/p|^2}\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{r^{n-1}}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{2n} r^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n}}{r^{2n}}\right)\frac{p^2}{r^2}\right]^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{r^{n-1}} \frac{p}{(1 - p^2 r^2)^{1/2}(r^2 - p^2)^{1/2}}$$

elde edilir. $r \to 1^-$ için limite geçilir ve (3.16) eşitliği $|m| \leq p^2/(1 - p^2)$ ile birlikte kullanılırsa (3.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk kısmı bulunur. İkinci kısım için $r = pe^{-1/n} < p$ denirse

$$|a_n| \leq \frac{p}{r^{n-1}(1 - p^2 r^2)^{1/2}(r^2 - p^2)^{1/2}}$$

$$\leq \frac{pe}{p^{n-1} e^{1/n}(1 - p^4 e^{-2/n})^{1/2}(p^2 - p^2 e^{-2/n})^{1/2}}$$

$$\leq \frac{e}{p^{n-1}(e^{1/n} - e^{-1/n})} \leq \frac{en}{2p^{n-1}}$$

elde edilir.■

Kirwan ve Schober (1976), FitzGerald'ın metodunu geliştirerek aşağıdaki Teoremi elde etmiştir.

3.1.12 Teorem. $f \in S(p)$ ise

$$|a_n| \leq \sqrt{7/6} A_n \quad \text{ve} \quad |a_n| \leq \sqrt{1 + 2p^{2n}} A_n \tag{3.17}$$

dir. Eğer $p = 1/2$ ve $n \geq 7$ ise, ikinci eşitsizlikten $|a_n| \leq 1{,}00007 A_n$ olur.

3.2 $S(p)$ Sınıfının Konveks ve Yıldızıl Alt Sınıfları

Bu kısımda, $\mathbb{D}$ dairesinde bir kutba sahip meromorf fonksiyonların $S(p)$ sınıfının konveks ve yıldızıl alt sınıfları üzerinde durulacak. $p < r < 1$ olmak üzere C_r eğrisinin $f(C_r)$ görüntü eğrisi negatif yönlendirilmiş olacağından konvekslik ve yıldızıllık için 1.5.1 Teoreminde verilen eşitsizlikler negatif olur. Üstelik $f(0) = 0$ ise orijin noktası $f(C_r)$ eğrisinin dış kısmında kalacaktır. Bu yüzden yıldızıllık belli bir $w_0 \neq 0$ noktasına göre olmalıdır.

3.2.1 Tanım. $\rho \in (p, 1)$ olmak üzere, $f \in S(p)$ fonksiyonu ve $H = \{z: \rho < |z| = r < 1\}$ bölgesine ait bütün z noktaları için

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < 0 \tag{3.18}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks denir. (3.18) eşitsizliğini sağlayan (3.1) seri açılımına sahip $f \in S(p)$ fonksiyonlarının alt sınıfı $CV(p)$ ile gösterilir.

Benzer biçimde $f \in S(p)$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z) - w_0}\right) < 0 \tag{3.19}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızıl denir. w_0 noktasına göre yıldızıl olan ve (3.1) seri açılımına sahip $f \in S(p)$ fonksiyonlarının alt sınıfı $ST(p, w_0)$ ile gösterilir.

Bir çok yazar p noktasında bir kutbu olan konveks ve yıldızıl fonksiyonların görüntü kümesinin tümleyeninin konveks ve yıldızıl bir bölge olması durumunu incelemiştir (Libera ve Livingston, 1975). Biz burada $f(C_r)$ eğrilerinin konveks ve yıldızıl olması üzerinde duracağız.

$f \in CV(p)$ fonksiyonu uygun bir rotasyonla $z = p > 0$ noktasında bir kutba sahip olabilir.

$$\phi(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{z+p}{z-p} - \frac{1+pz}{1-pz} \tag{3.20}$$

biçiminde tanımlı ϕ fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde analitiktir. Çünkü

$$A(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \quad \text{ve} \quad B(z) = \frac{z+p}{z-p} - \frac{1+pz}{1-pz}$$

fonksiyonları sadece $z = p$ noktasında basit kutba sahip olup rezidüleri sırasıyla $-2p$ ve $2p$ dir. Bu yüzden ϕ fonksiyonu $z = p$ noktasında diferansiyellenebilir olacak biçimde yeniden tanımlanabilir. Bununla birlikte $\mathrm{Re}B\left(e^{i\theta}\right) = 0$ ve $\phi(0) = -1$ dir. Eğer f fonksiyonu $\partial\mathbb{D}$ üzerinde analitik ise ϕ fonksiyonu da $\overline{\mathbb{D}}$ kümesinde analitik olup $\mathbb{D}$ dairesinde $z \in \mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}\phi(z) < 0$ olur.

Royster (1970), $CV(p)$ sınıfına ait bir f fonksiyonu için (3.20) bağıntısıyla verilen ϕ fonksiyonunun P sınıfına ait olduğunu tek yönlü olarak göstermiştir.

3.2.2 Teorem. $f \in CV(p)$ fonksiyonu $p \in (0,1)$ noktasında bir kutba sahip olsun. Bu durumda her $z \in \mathbb{D}$ için $\mathrm{Re}[-\phi(z)] > 0$ ve $-\phi \in P$ dir.

$-\phi \in P$ özelliğinde (3.1) açılımına sahip $f \in S(p)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf $\widetilde{CV}(p)$ ile gösterilirse 3.2.2 Teoreminden $CV(p) \subset \widetilde{CV}(p)$ olduğu görülür. Ancak p'nin bazı değerleri için bu iki sınıfın eşitliği Royster (1970) tarafından aşağıdaki teoremde gösterilmiştir.

3.2.3 Teorem. $0 < p < 2 - \sqrt{3}$ ise $CV(p) = \widetilde{CV}(p)$ dir. $2 - \sqrt{3} < p < 1$ ise $\widetilde{CV}(p)$ sınıfına ait olup da $CV(p)$ sınıfına ait olmayan bir F fonksiyonu bulmak mümkündür.

$-\phi$ fonksiyonunun $z = p$ noktasının delik komşuluğunda seri açılımı

$$-\phi(z) = -A(z) - B(z) = \left(1 + \frac{2p}{z-p} + z\sum_{n=2}^{\infty} d_n\,(z-p)^n\right) - \left(1 + \frac{2p}{z-p} - \frac{1+pz}{1-pz}\right)$$

$$= \frac{1+pz}{1-pz} + z\sum_{n=2}^{\infty} d_n\,(z-p)^n \tag{3.21}$$

dir. Böylece $-\phi(p) = (1+p^2)/(1-p^2)$ olur. $-\phi$ fonksiyonu P sınıfına ait olmasına rağmen p noktasındaki kısıtlaması nedeniyle P sınıfının keyfi bir fonksiyonu değildir.

$CV(p)$ sınıfında p noktası orijin olarak alınırsa (2.47) ve (2.59)'da verilen integral temsilleri aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

3.2.4 Teorem. f, $\mathbb{D}^*$ delik dairesinde (2.2) seri açılımına sahip meromorf bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f \in MST \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{z}\exp\left(\int_0^{2\pi} 2\log\left(1 - e^{-i\theta}z\right) d\mu(\theta)\right) \tag{3.22}$$

ve

$$g \in MCV \Leftrightarrow g'(z) = -\frac{1}{z^2}\exp\left(\int_0^{2\pi} 2\log\left(1 - e^{-i\theta}z\right) d\mu(\theta)\right) \tag{3.23}$$

olacak biçimde $\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\mu(\theta) = 0$ ve $\mu(\theta + 2\pi) - \mu(\theta) = 1$ özelliklerini sağlayan $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonu vardır.

$f \in CV(p)$ fonksiyonu (3.3) açılımına sahip olsun. $z \in \mathbb{D}^*$ için

$$g(z) = (p^2 - 1)f\left(\frac{p - z}{1 - pz}\right) = \frac{\alpha_{-1}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

biçiminde tanımlanan g fonksiyonu $z = 0$ noktasında basit kutba sahip ve $\mathbb{D}^*$ bölgesini konveks bir bölgenin tümleyeni üzerine resmedecek biçimde bulunabilir. (3.23) bağıntısı kullanılırsa g' için $\alpha_{-1} = m$ olmak üzere, Pfaltzgraff ve Pinchuk (1971) $CV(p)$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini türev fonksiyonu yardımıyla elde etmişler.

3.2.5 Teorem. $f \in CV(p)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$f'(z) = -\frac{m}{(p-z)^2(1-pz)^2}\exp\left(\int_0^{2\pi} 2\log\left(1 - pz - e^{-i\theta}(p - z)\right) d\mu(\theta)\right)$$

olacak biçimde $\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\mu(\theta) = 0$ ve $\mu(\theta + 2\pi) - \mu(\theta) = 1$ özelliklerini sağlayan $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonun mevcut olmasıdır.

(3.20) eşitliği ile tanımlı ϕ fonksiyonu için $-\phi \in P$ ise Royster (1970), $\widetilde{CV}(p)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki integral temsilini elde etmiştir.

3.2.6 Teorem. $f \in \widetilde{CV}(p)$, (3.1) seri açılımına sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$f \in \widetilde{CV}(p)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$f'(z) = \frac{p^2}{(p-z)^2(1-pz)^2} \exp\left(\int_0^{2\pi} 2\log\left(1 - e^{-i\theta} z\right) d\mu(\theta)\right) \tag{3.24}$$

olacak biçimde

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}}{1 - pe^{-i\theta}} d\mu(\theta) = \frac{p}{1-p^2} \quad \text{ve} \quad \int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1 \tag{3.25}$$

özelliklerini sağlayan, $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir $\mu(\theta)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

Pfaltzgraff ve Pinchuk (1971) $CV(p)$ sınıfına ait fonksiyonların türevinin modülü için aşağıdaki kesin üst sınırı elde etmişlerdir.

3.2.7 Teorem $f \in MCV(p)$ ve $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}\backslash\{p\}$ olsun. Bu durumda

$$|f'(z)| \leq \frac{p^2[(1+pr)^2 + (p+r)^2]}{(1+p^2)|z-p|^2|1-pz|^2}$$

dır. Eşitlik $z = -r$, $0 < r < 1$ olmak üzere

$$f_0(z) = \frac{p^2}{1-p^4}\left\{\frac{z-p}{1-pz} - \frac{1-pz}{z-p} + p - \frac{1}{p}\right\}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

w_0 noktasına göre yıldızıl olan ve (3.1) açılımına sahip $f \in S(p)$ fonksiyonlarının alt sınıfı $ST(p, w_0)$ ile gösterilmişti. $f \in CV(p)$ ise bu durumda $\overline{f(\mathbb{D})}$ bölgesinin tümleyenindeki her bir w_0 noktası için $f \in ST(p, w_0)$ olduğu açıktır. Ancak buradan belli bir $r_0 < |z| < 1$ halka bölgesinde

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z) - w_0} < 0$$

sonucunu çıkarmak açık bir problem olarak durmaktadır.

(3.20) eşitliği ile verilen ϕ fonksiyonu ve $f \in ST(p, w_0)$ ise $\mathbb{D}$ dairesinde

$$P(z) = \frac{pz}{1 - pz} - \frac{p}{z - p} - \frac{zf'(z)}{f(z) - w_0} \tag{3.26}$$

fonksiyonunun reel kısmının pozitif olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece $P(z) \in P$ dir.

(3.26) ile verilen $P(z) \in P$ fonksiyonu için (3.1) açılımına sahip $f \in S(p)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf $\widetilde{ST}(p, w_0)$ ile gösterilir. $0 < p < 1$ ise bu durumda $ST(p, w_0) \subset \widetilde{ST}(p, w_0)$ dir. J. Miller (1980) aşağıdaki teoremde ters kapsamanın genelde doğru olmadığını göstermiştir

3.2.7 Teorem. $0 < p \leq \sqrt{2} - 1$ iken $ST(p, w_0) = \widetilde{ST}(p, w_0)$ dir. $\sqrt{2} - 1 < p < 1$ iken $\widetilde{ST}(p, w_0)$ sınıfına ait olup $ST(p, w_0)$ sınıfına ait olmayan bir f fonksiyonu ve bir w_0 noktası bulunabilir.

J. Miller (1980) $\widetilde{ST}(p, w_0)$ sınıfına ait orijinde bir kutbu olan fonksiyonlar için katsayı sınırları elde etmiştir.

3.2.8 Teorem. f, $\widetilde{ST}(p, w_0)$ sınıfına ait (3.1) açılımına sahip analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $z \in \mathbb{D}^*$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{(z - p)(1 - pz)}{pw_0 z}(f(z) - w_0) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.27}$$

biçiminde tanımlı g fonksiyonu orijine göre yıldızıldır.

İspat. $0 < p < 1$ olmak üzere $w_0 \neq 0$ kabul edelim. Bu durumda g fonksiyonu $\mathbb{D}^*$ delik dairesinde analitiktir. g fonksiyonunun logaritmik türevinden

$$z\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{pz}{1-pz} - \frac{p}{z-p} - \frac{zf'(z)}{f(z)-w_0}$$

bulunur. Eğer $f \in \widetilde{ST}(p, w_0)$ ise bu eşitlikten $\mathbb{D}^*$ bölgesinde $\mathrm{Re}[zg'(z)/g(z)] < 0$ olduğu görülür. Böylece (3.26) bağıntısından sonuç görülür.■

(3.27) eşitliğinde katsayılar hem g hemde f fonksiyonuna bağlıdır. Basit bir hesaplamayla

$$c_0 = -\frac{1}{w_0} - p - \frac{1}{p} \tag{3.28}$$

$$c_1 = 1 + \frac{1}{w_0}\left(p + \frac{1}{p}\right) - \frac{a_2}{w_0} \tag{3.29}$$

ve $a_1 = 1$ olmak üzere her $n \geq 2$ için

$$c_n = -\frac{1}{w_0}\left(a_{n-1} - a_n\left(p + \frac{1}{p}\right) + a_{n+1}\right) \tag{3.30}$$

olduğu görülür. 2.2.6 Teoreminde z ile $1/z$ yer değiştirse $|c_n| \leq 2/(n+1)$ elde edilir. Bunu (3.28)'e uygularsak aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2.9 Teorem. $f \in \widetilde{ST}(p, w_0)$ ise

$$\frac{p}{(1+p)^2} \leq |w_0| \leq \frac{p}{(1-p)^2} \tag{3.31}$$

dır. Eşitlik $k_p(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

J. Miller (1980), 3.1.9 Teoreminden hareketle $\widetilde{ST}(p, w_0)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki katsayı eşitsizliklerini elde etmiştir.

3.2.10 Teorem. $f \in \widetilde{ST}(p, w_0)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$|a_2 - p - 1/p - w_0| \leq |w_0| \tag{3.32}$$

ve her $n \geq 2$ için

$$|a_{n+1} - (p + 1/p)a_n + a_{n-1}| \leq \frac{2|w_0|}{n+1} \tag{3.33}$$

dir. Her iki eşitsizlik de kesindir.

İspat. (3.32) ve (3.33) eşitsizlikleri, (3.29) ve (3.30) bağıntılarını 2.2.6 Teoreminde verilen $|c_n| \leq 2/(n+1)$ Clunie eşitsizliğine uygulanarak elde edilir.■

(3.32) bağıntısı için eşitlik $w_0 = -p/(1+p)^2$ olmak üzere

$$F(z) = \frac{pw_0}{(z-p)(1-pz)}(1+z)^2 + w_0$$

fonksiyonu için geçerlidir. (3.33) bağıntısı için ise eşitlik her $n \geq 2$ ve $w_0 = -p/(1+p^2)$ olmak üzere

$$F(z) = \frac{pw_0}{(z-p)(1-pz)}(1+z^{n+1})^{\frac{2}{n+1}} + w_0$$

fonksiyonu için geçerlidir.■

KAYNAKLAR

Aksent'ev, L. A. 1958. Sufficient conditions for univalence of regular functions, *Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika,* No: 3(4) : 3-7 (Russian).

Bazilevic, J. 1937. Complement a mes notes "Zum Koeffizienten problem der schlichten Funktionen" et "Sur les theoremes de Koebe-Bieberbach". *Rec. Math. Moscou, N.S.* 2 : 689-697.

Branges, L. De. 1985. A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Mathematica,* 154 : 137-152.

Brannan, D. A.; Clunie, J.; Kirwan, W. E. 1970. Coefficient estimates for a class of star-like functions, *Canad. J. Math. Soc.* 22 : 476-485.

Brown, J. E. 1989. Images of discs under convex and starlike functions, *Math. Z.*, 202 : 457-462.

Chichra, Pran Nath. 1969. An area theorem for bounded univalent functions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 66 : 317-321.

Clunie, J. 1959. On meromorphic schlicht functions, *J. London Math. Soc.* 34 : 215-216.

Duren, P. L. 1983. Univalent Functions, *Springer-Verlag,* New York.

Fenchel, W. 1931. Bemerkungen über die im Einheitkreises meromorphen schlichten Funktionen, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. –Math. Kl. H*, 22/23 : 431-436.

Garabedian, P. R ; Schiffer, M. 1955. A coefficient inequality for schlicht functions, *Ann. of Math.* (2) 61 : 116-136.

Gel'fer, S. (Guelfer) 1954. On coefficients of typically real functions, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N. S.),* 94 : 373-376.

Goodman, A. W. 1956. Functions typically real and meromorphic in the unit circle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 81 : 92-105.

Goodman, A. W. 1983. Univalent Functions, I-II, Mariner Publ. Co., Tampa Florida.

Goluzin, G. 1948. On distortion theorems and the coefficients of univalent functions, *Mat. Sbornik N. S.*, 23(65) : 353-360.

Goluzin, G. 1938. Some estimates of the coefficients of schlicht functions, *Mat. Sb. N. S.*, 3 : 321-330 (in Russian).

Graham, I. ; Kohr G. 2003., Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions, Marcel Dekker, Inc. New York.

Graham, I. ; Varolin D. 1996. Bloch constants in one and several variables, *Pacif. J. Math.* 174 : 347-357.

Gronwall, T. 1916. Sur la deformation dans la representantation conforme, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 162 : 249-252.

Grunsky, H. 1933. Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, 43 : 140-143.

Hummel, J. A. 1957. The coefficient regions of starlike functions, *Pacif. J. Math.*, 7 : 1381-1389.

Jack, I. S. 1971. Functions starlike and convex of order α. *J. London Math. Soc.*, 2(3) : 469-474.

Jakubowski, Z. J. 1962. Theoremes sur la deformation dans la famille de fonctions univalentes au pole simple al infini et bornees inferiurement dans le cercle $K(\infty, 1)$, *Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Lodz,* 34 : 43 pp.

Jenkins, J. A. 1960. On certain coefficients of univalent functions, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 96 : 534-545.

Kaczmarski, J. 1973. On the coefficients of some classes of starlike functions, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* 17 : 495-501.

Kaplan, W. 1952. Close-to-convex schlicht functions, *Michigan Math. J.*, 1 : 169-185.

Kirwan, W. E. ; Schober, G. 1978. Extremal problems for meromorphic univalent functions, *J. Analyse Math.* 30 : 330-348.

Komatu, Y. 1949. Note on the theory of conformal representation by meromorphic functions, I,II. *Proc. Imp. Acad. Tokyo.* 21: 269-277.

Kubota, Y. 1974-75. A coefficient inequality for certain meromorphic univalent functions, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 26 : 85-94.

Kubota, Y. 1974-75. On the fourth coefficients of meromorphic univalent functions, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 26 : 267-288.

Ladegast, K. 1953. Beitrage zur Theorie der schlichten Funktionen, *Math. Z.* 58 : 115-159

Libera, R. J.; Robertson, M. S. 1961. Meromorphic close-to-convex functions, *Michigan Math. J.*, 8 : 165-175.

Loewner, K. 1919. Über Extremumsatze bei der konformen Abbildung des Ausseren des Einheitkreises, *Math. Ann.*, 3 : 65-77.

Mikolajczyk, L. 1968. A theorem on distortion for univalent p −symmetrical functions bounded in the circle $|z| > 1$, *Prace Mat.* 12 : 35-51.

Miller, James. 1971. Extremal functions for meromorphic univalent functions, *J. Analyse Math.* 24 : 77-86.

Miller, S. S. 1973. Distortion properties of alpha-starlike functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 : 311-318.

Miller, James. 1980. Convex and starlike meromorphic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 80: 607-613.

Mocanu, P.T. 1969. Une propriete de convexite generalisee dans la theorie dee la representation conforme, *Mathematica (Cluj)*, 11 (34) : 127-133.

Nevanlinna, R. 1920. Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises, *Översikt Finska Vetenskaps-Soc. Förh.*, 62A : 1-14.

Noshiro, K. 1934-35. On the theory of schlicht functions, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, 2 : 129-155.

Ozaki, S. 1935. On the theory of multivalent functions, *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku*, 40 : 167-188.

Robertson, M. S. 1936. A remark on the odd schlict functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 : 366-370.

Royster, W. C. 1970. Convex meromorphic functions, *Mathematical Essays Dedicated to A. J. Macintyre*, 42 : 331-339.

Palka, B. P 1991. An Introduction to Complex Function Theory, Springer-Verlag, New York.

Pfaltzgraff Jhon. A.; Pinchuk, Bernard. 1971. A variational method for classes of meromorphic functions, *J. Analyse Math.* 24 : 101-150.

Pommerenke, C. 1963. On meromorphic starlike functions, *Pacific J. Math.*, 13 : 221-235.

Pommerenke, C. 1975. Univalent Functions, *Vandenhoeck&Ruprecht,* Göttingen.

Reade, M. O. 1955-56. On close to convex univalent functions, *Mich. Math. J.*, 3 : 59-62.

Rogosinski , W. 1932. Über positive harmonische Entwicklungen und typischreele Potenzreihen, *Math Zeit.* 35 : 93-121.

Spacek, L. 1932. Contribution a la theorie des fonctions univalentes, *Casopis Pest. Math.*, 62 : 12-19 (in Russia).

Trimble, S. Y. 1975. A coefficient inequality for convex univalent functions, *Proc. Amer. Math Soc.*, 48 : 266-267.

Waadeland, H. 1957. Ein Golusinscher Satz über schlichte Abbildungen von $|\zeta| > 1$, *Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim.,* 30 :165-168.

Warschawski, S. E. 1935. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 38 : 310-340.

Zamorski, J. 1960. About the extremal spiral schlicht functions, *Ann. Polon. Math.*, 9 : 265-273.

Zawadzki, R. 1961. Sur les modules des coefficients B_0 et B_1 des fonctions holomorphes univalentes bornees inferieurement. *Bull. Soc. Letters Lodz.* 12 : No. 5.9 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Feyyaz KALMAZ

Doğum Yeri ve Tarihi : IĞDIR, 25.02.1989

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise : Iğdır, 80. Yıl Cumhuriyet Anadolu Lisesi, 2009.

Lisans : Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat fakültesi Matematik Bölümü, 2013.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

TEZ ÇOĞALTMA VE ELEKTRONİK YAYIMLAMA İZİN FORMU

Yazar Adı Soyadı	Feyyaz KALMAZ
Tez Adı	Yalınkat Meromorf Fonksiyonlar Üzerine
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Tez Türü	Yüksek Lisans
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK
Çoğaltma (Fotokopi Çekim) izni	☒ Tezimden fotokopi çekilmesine izin veriyorum ☐ Tezimin sadece içindekiler, özet, kaynakça ve içeriğinin % 10 bölümünün fotokopi çekilmesine izin veriyorum ☐ Tezimden fotokopi çekilmesine izin vermiyorum
Yayımlama izni	☒ Tezimin elektronik ortamda yayımlanmasına izin veriyorum

Hazırlamış olduğum tezimin belirttiğim hususlar dikkate alınarak, fikri mülkiyet haklarım saklı kalmak üzere Uludağ Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı tarafından hizmete sunulmasına izin verdiğimi beyan ederim.

Tarih : 02/08/2016

İmza :

YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
Yayın ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı

Tez Yayımlama İzin Belgesi

(2006 yılı öncesi tezler için doldurulacaktır.)

Aşağıda bilgileri kayıtlı olan tezimin, bilimsel araştırma hizmetine sunulması amacı ile Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi Veri Tabanında arşivlenmesine ve internet üzerinden tam metin erişime açılmasına izin veriyorum.

02/08/2016

İmza

Tez Sahibinin Adı Soyadı	Feyyaz KALMAZ		
T.C. Kimlik Numarası	47182942186		
E-Posta Adresi	fkalmaz@uludag.edu.tr		
Posta Adresi	Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Kat:1 No: 106		
Üniversite	ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ		
Enstitü	Fen-Bilimleri Enstitüsü		
Danışman/lar	Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK		
Tez Numarası		**Tez Yılı**	2016
Tez Adı	YALINKAT MEROMORF FONKSİYONLAR ÜZERİNE		

*İzin Formu imzalandıktan sonra nüfus cüzdanı fotokopisi ile birlikte; 0312 298 74 53 numaraya faks çekilmeli veya taranarak dokuman@yok.gov.tr e-posta adresine ya da Yükseköğretim Kurulu Yayın ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı 06539 Bilkent – Ankara, posta adresine gönderilmelidir.