RICCATI DENKLEMİ,
ANALİTİK ÇÖZÜM İÇİN YENİ BİR YÖNTEM GELİŞTİRİLMESİ VE MÜHENDİSLİK UYGULAMALARI

Mutlu Özgür ERTAŞ

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RICCATI DENKLEMİ, ANALİTİK ÇÖZÜM İÇİN YENİ BİR YÖNTEM GELİŞTİRİLMESİ VE MÜHENDİSLİK UYGULAMALARI

Mutlu Özgür ERTAŞ

Prof. Dr. Yaşar PALA
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2017

TEZ ONAYI

Mutlu Özgür ERTAŞ tarafından hazırlanan "RICCATI DENKLEMİ, ANALİTİK ÇÖZÜM İÇİN YENİ BİR YÖNTEM GELİŞTİRİLMESİ VE MÜHENDİSLİK UYGULAMALARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Yaşar PALA

Başkan : Prof. Dr. Yaşar PALA — İmza

Üye : Doç. Dr. Emrullah YAŞAR — İmza

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin LEKESİZ — İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü
07 /1/2017

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

/ /2017

Mutlu Özgür ERTAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RICCATI DENKLEMİ, ANALİTİK ÇÖZÜM İÇİN YENİ BİR YÖNTEM GELİŞTİRİLMESİ VE MÜHENDİSLİK UYGULAMALARI

Mutlu Özgür ERTAŞ

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Yaşar PALA

Riccati denklemi, matematik modellerin yapıldığı birçok bilim dalında, çeşitli formlarda karşımıza çıkmaktadır. Başta birçok fiziksel durumun matematiksel modellemesi olmak üzere, kontrol sistemleri, otomatik sistemlerin programlaması, finansal modellemeler, kuantum mekaniği gibi çok geniş bir uygulama alanından bahsedilebilir. Genellikle non-lineer olarak adlandırılan durumlar, davranışlar veya sistemleri içeren problemlerin çözümünde direkt yada transformasyon yöntemleriyle Riccati denklemine ulaşılır. Şimdiye kadar belli bir analitik çözüm yönteminin her şarta uygun olarak bulunamamasından dolayı matematik biliminin başlıca konularından biri olmuştur. Günümüze kadar geliştirilmeye çalışılmış olan çözüm yöntemleri ya sadece belli şartlar altında analitik olarak çalışmaktadır yada nümerik yaklaşımlarla çözümler sunabilmektedir.

Bu çalışmada, bilinen mevcut çözüm yöntemlerini irdeleyeceğiz, ardından yeni bir çözüm yöntemi geliştirerek örneklerle pekiştirmeye çalışacağız ve son olarak da pratik uygulamalarda karşımıza çıkan problemleri bu yeni yöntemle çözeceğiz.

Sunulan yeni yöntem, içerdiği basit bir transformasyon yardımıyla, çözülmeye çalışılan belirli bir Riccati denkleminin analitik bir çözüme sahip olup olmadığını da kolaylıkla göstermektedir.

Birinci mertebeden non-lineer bir diferansiyel denklem olan Riccati denklemi üzerine yapılan çalışmalar halen sürmektedir. Bilim dünyasında, Riccati denklemiyle ilişkili birçok konuda çeşitli kitaplar yazılmıştır, birçok makaleler yayınlanmıştır ve hala yazılmaya/yayınlanmaya da devam edilmektedir.

Anahtar kelimeler: Riccati Denklemi, Non-Lineer Diferansiyel Denklem, Diferansiyel Denklemlerin Analitik Çözüm Yöntemleri, Adi Diferansiyel Denklemler.

2017, vi + 68 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

RICCATI EQUATION, A NEW ANALYTICAL METHOD FOR SOLVING RICCATI EQUATION AND ENGINEERING APPLICATIONS

Mutlu Özgür ERTAŞ

Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mechanical Engineering
Supervisor: Prof. Dr. Yaşar PALA

The Riccati equation emerges in various forms in many disciplines where mathematical models are made. It can be talked about a wide range of applications such as control systems, programming of automatic systems, financial models, quantum mechanics, mathematical modeling of many physical states. The Riccati equation can be reached by means of direct-side transformation methods for solving problems, which are usually called non-linear, problems involving behavioral systems. It has been one of the main topics of mathematical science because of the fact that until now a certain analytical solution method cannot be found in every circumstance appropriately. The solution methods that have been tried to be developed so far are only analytically operating under certain conditions, and can provide some solutions with numerical approaches.

In this study, we will examine the existing solution methods which are known, then we will try to reinforce it with examples by developing a new solution method and finally we will solve the problems that are encountered in practical applications with this new method.

The new method presented easily demonstrates that a given Riccati equation, attempted to be solved, has an analytical solution with a simple transformation included.

Studies on the Riccati equation, a first-order nonlinear differential equation, are still in progress. In the world of science, various books have been written in many subjects related to the Riccati equation, many articles have been published and are still being written / published.

Keywords: Riccati Equation, Non-linear Differential Equation, Analytical Methods for Differential Equations, Ordinary Differential Equations.

2017, vi + 68 pages

TEŞEKKÜR

“Riccati Denklemi, Analitik Çözüm İçin Yeni Bir Yöntem Geliştirilmesi ve Mühendislik Uygulamaları” isimli tez çalışmamın her aşamasında büyük bir sabır, olgunluk ve samimiyetle desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, birçok alanda geniş bilgi birikimi ve üst düzey tecrübesi ile örnek bir bilim insanı olarak bana ilham kaynağı olan saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Yaşar PALA’ ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yoğun ve stresli çalışmalarımda, sevgisiyle ve gösterdiği sabırla desteğini her zaman hissettiğim hayat arkadaşım Derya ERTAŞ’ a; hayatımın her zaman moral ve neşe kaynağı olan sevgili ikiz çocuklarım Öykü ve Özde’ ye ayrıca teşekkür ediyorum.

Bu naçizane çalışmanın, ileride başka bilimsel çalışmalara da ışık tutmasını, ülkemize ve bilim dünyasına bir nebze de olsa katkısının olmasını umut ediyorum.

Mutlu Özgür ERTAŞ
.../.../....

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
	Kesit Alanı
(), ()	Airy Fonksiyonları
Hava Direnç Katsayısı (Drag	Coefficient)
, 1, 2	Direnç Katsayısı
	Enerji
(), ()	Error Fonksiyonları
	Kuvvet
İtme Kuvveti (Thrust Force)	
,	Direnç Kuvveti
m, M	Kütle
, 0	Hız, İlk Hız
(), ()	Potansiyel Enerji
	Dalga Fonksiyonu
	Yoğunluk
	Açısal Hız
$\hbar$	Planc Sabiti

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
RRE	İndirgenmiş Riccati Denklemi (Reduced Riccati Equation)

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Çalışmaya konu olan denklem, Count Jacopo Francesco Riccati tarafından ele alınmıştır. Riccati 1720 yılında arkadaşı Giovanni Rizzeti'ye yazdığı bir mektupta şu iki denklemden bahsetmektedir:

$$\dot{} = {}^{2} + \qquad (1.1)$$

$$\dot{} = {}^{2} + \; + {}^{2} \qquad (1.2)$$

Burada bir fonksiyon, , , , reel sayılar ve bağımsız değişken olarak tanımlanmaktadır. (1.1) denklemi, Riccati'nin orijinal denklemi olarak bilinmektedir ve ilk olarak 1724 yılında Acta Eruditorum'da yayınlanmıştır.

Orijinal Riccati denklemine, bazı özel şartlar ve değerler için Riccati tarafından ve de Riccati'den bağımsız olarak Bernoulli tarafından çeşitli çözüm yolları bulunmaya çalışılmıştır.

Riccati Denklemi günümüzde,

$${}' + () + ()^{2} = () \qquad (1.3)$$

formunda tanımlanmaktadır. Aynı zamanda (1.3) denklemi Genelleştirilmiş Riccati Denklemi olarak adlandırılmaktadır. Bu denklem, birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem sınıfına dahildir. (Nonlinear First Order Differential Equation)

Denklemde, $(\ ) = 0$ olduğu durumda birinci dereceden lineer diferansiyel denklem ve $(\ ) = 0$ olduğu durumda ise Bernoulli denklemi olacaktır. Bu durumlar için genel çözüm yöntemleri bulunmaktadır.

(1.3) denkleminin her şart altında genel çözümünü veren, bilinen tek bir yöntem bulunmamaktadır. Günümüze kadar yapılan tüm çalışmalarda, belli şartlar altındaki durumlar ve tanımlamalar için çözüm yöntemleri geliştirilmeye çalışılmıştır.

Riccati denklemini çözmek için, klasik yöntem olarak $= {}_{1} + 1/$ dönüşümü uygulanır. Burada ${}_{1}$ bilinen özel bir çözümdür. Fakat her zaman bir özel çözümü bilmek ya da görebilmek mümkün olmayabilir. Bu yüzden bu yöntemin sınırlı kullanım alanları bulunmaktadır.

En yaygın olarak bilinen diğer iki yöntemden bahsetmek gerekirse, Rao (1962) tarafından geliştirilen Rao dönüşümü, bir diğeri de Allen ve Stein (1964) tarafından geliştirilen Allen-Stein dönüşümü ele alınabilir. Bu yöntemlerdeki temel fikir, denklemi ayrılabilir bir forma getirmektedir. Fakat diferansiyellenebilir bir denkleme dönüştürülemiyorsa ciddi bir sorunla karşılaşılmaktadır.

Harko, Lobo ve Mak (2014) Riccati denklemini incelemişler ve kısıtlı bir analitik çözüm yöntemi geliştirmişlerdir. Yöntem, denklemdeki katsayılar arasında özel koşullar gerektirdiğinden genel bir çözüm yöntemi olarak düşünülmemelidir. Sugai (1960) Riccati denklemine yeni bir dönüşüm önererek ikinci dereceden diferansiyel denklem haline getirmiştir. Dönüştürülen denklem çoğu durumda daha karmaşık ve çözümlenemez olduğundan, genel ve uygulanabilir değildir. Rao ve Ukidave (1968) Riccati denklemini bazı kısıtlı durumlar altında, ikinci mertebeden diferansiyel bir denkleme indirgemişlerdir. Bu yöntem de mühendislik uygulamaları açsından ciddi bir önem arz etmemektedir. Siller (1970) de yine benzer bir şekilde ayrıştırılabilir bir denkleme dönüştürerek çözme yöntemine gitmiştir.

Riccati denklemi için integre edilebilir durumlar, Mak ve Harko (2012) tarafından incelenmiş ve Riccati denkleminin analitik çözümlerini üretmek için yeni bir yöntem sunulmuştur. Mortici (2008) sabit katsayılı değişkenlere sahip doğrudan doğruya ayrıştırılabilir bir denkleme dönüştürerek yeni bir yöntem sunmuştur. Bu yöntem aynı zamanda çözüm üzerinde birkaç kısıtlama getirmektedir. Bu nedenle, genel bir yöntem olarak kabul edilemez.

Tüm yöntemler incelendiğinde, analitik çözümün açık, kapalı veya kuvvet serileri formunda olup olmadığı sorularına hiçbir yöntem açıklık getirmemektedir.

Bölüm 3'te bahsedilecek olan ve ilk kez sunulan, yeni bir analitik çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Bununla birlikte, ( ), ( ) ve ( )'in keyfi değerleri için probleme analitik çözüm bulmanın yanı sıra, sunulan yöntem bu önemli soruları cevaplayabilmektedir.

2. RICCATI DENKLEMİNİN BİLİNEN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, şimdiye kadar geliştirilmiş çeşitli çözüm yöntemlerinden bahsedilecek ve önemli olan bölümler örneklerle açıklanacaktır.

2.1. Bir veya Daha Fazla Özel Çözümü Bilinen Riccati Denkleminin Genel Çözümü

Bu kısımda, bir veya birden fazla özel çözümün bilindiği durumlar için geliştirilen genel çözüm yöntemleri incelenecektir. Bilinen her bir özel çözüm sayesinde farklı bir ifade/özellik ile karşılaşılmaktadır.

Bir özel çözümü bilinen bir Riccati denklemi için verilen yöntem ile iki kez integrasyon işlemi yapılarak genel çözüme ulaşılmaktadır. İki özel çözümü bilinen bir Riccati denklemi için bahsedilecek yöntemde sadece bir integrasyon işlemi yapılarak genel çözüme ulaşılmaktadır. Eğer üç özel çözümü bilinen bir Riccati denklemine sahipsek, bu durumda hiçbir integrasyon işlemi yapılmadan direk olarak bir formül yardımıyla genel çözüme ulaşmak mümkündür. Dört özel çözümü bilinen bir Riccati denkleminde, özel çözümler arasında sabit bir oran bulunduğunu göreceğiz. Dört ve daha fazla özel çözümü bilinen bir Riccati denkleminin genel çözümü için herhangi üç özel çözümü kullanarak, üç özel çözümü bilinen Riccati denklemi çözüm yöntemi uygulanarak bulunur. Bu sebepten, üçten fazla özel çözümü bilmenin herhangi bir avantajı veya katkısı bulunmamaktadır.

2.1.1. Bir özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözümü

Eğer (1.3) denkleminin $= {}_1$ şeklinde bir özel çözümü biliniyorsa

$$= {}_1 \qquad + \frac{1}{\;} \tag{2.1}$$

dönüşümü uygulanacaktır. (2.1) denkleminin birinci türevi

$$' \qquad ' \qquad \frac{'}{\;} \tag{2.2}$$

$= {}_1 - \qquad {}_2$

olarak bulunur. (2.1) ve (2.2) denklemleri (1.3) denkleminde yerlerine konulup ’ya göre düzenleme yapılırsa

$$\overline{\quad} - \left(\frac{1}{\quad} + {}_1 + {}_1{}^2 \right)^2 \qquad - (2\ {}_1 + \ ) - \ = - {}^2 (\ ) \tag{2.3}$$

elde edilir. ${}_1$, (1.3) denkleminin bir çözümü olduğundan

$$\overline{\quad} - (2\ {}_1 + \ ) = (\ ) \tag{2.4}$$

formuna indirgenmiş olacaktır. Elde edilen (2.4) denklemi bir lineer birinci mertebeden diferansiyel denklemdir ve çözülebilir. (2.4) denkleminin çözümü

$$= \Phi(\ ) + \Psi(\ ) \tag{2.5}$$

şeklinde bir forma sahip olacaktır. Buradan hareketle, ’nin çözümü diğer bir ifadeyle (1.3) denkleminin tam çözümü

$$= \ + \frac{1}{\quad} \qquad = \ + \frac{1}{\Phi\ (\ ) + \Psi(\ )} \tag{2.6}$$

veya

$$= \frac{\Phi_1(\ ) + \Psi_1(\ )}{\Phi\ (\ ) + \Psi(\ )} \tag{2.7}$$

şeklinde elde edilecektir. Bu yöntemi iki örnekle ele almaya çalışalım.

Örnek 2.1:

$$' - 2\ \ + \ {}^2 = - \ {}^2 + 5 \tag{2.8}$$

(2.8) denkleminin bir özel çözümü, + şeklinde aranırsa kolayca görülebileceği üzere $_1 = + 2$ olacaktır. O halde,

$$\frac{1}{} \qquad \frac{1}{} \tag{2.9}$$

$$= {}_1 + = + 2 +$$

dönüşümünü uygularsak

$$— \; -(1-2(+2)+(+2)^2)^2-(2(+2)-2)-1 \; (2.10)$$
$$= -{}^2(-{}^2+5)$$

ve

$$' - 4 = 1 \tag{2.11}$$

olur. Elde edilen (2.11) denkleminin çözümünü, integrasyon çarpanını tespit ederek şu şekilde bulabiliriz:

$$= -\int -4 \; (+ \int \int -4 \;) \tag{2.12}$$

veya

$$= \; ^4 \; - \frac{1}{4} \tag{2.13}$$

olarak bulunur. Buradan hareketle (2.8) denkleminin çözümü

$$= + 2 - \frac{1}{^4 - \frac{1}{4}} \tag{2.14}$$

veya

$$\frac{4}{} \quad = - \quad -4-1+2 \qquad (2.15)$$

olarak bulunacaktır (Burada ¯= 4 ’dir). (2.15) denklemi (2.8) denklemini sağlamaktadır.

Örnek 2.2: Aşağıdaki denklemin çözümünü bulmaya çalışalım.

$$' \quad \frac{1}{} \quad \frac{1}{} \quad 2 \quad ++(4\,2) \quad =5 \qquad (2.16)$$

(2.16) denklemi için aynı şekilde+ şeklinde bir çözüm ararsak, bir çözümün

$_1 = 2$ olabileceğini bulabiliriz.

$$\frac{1}{} \quad \frac{1}{} \quad = {}_1 + \; = 2 + \qquad (2.17)$$

dönüşümü ile

$$\frac{}{} - (2 + \frac{1}{}\ (2\,) + (\frac{1}{4^2}\ )\,(2\,)^2)\,2 - (2\,(\frac{1}{4^2})\,(2\,) + \frac{1}{})\ - \frac{1}{4^2} = -5\,2 \qquad (2.18)$$

ve

$$' \quad \frac{2}{} \quad \frac{1}{} \quad -() = 4\,2 \qquad (2.19)$$

elde edilir. Lineer bir formda olan (2.19) denkleminin çözümü kolaylıkla şu şekilde bulunacaktır:

$$\underline{2} \qquad \underline{2} \qquad = -\int - \;(+\int \frac{1}{4^2} \qquad \int - \qquad (2.20)$$

veya

$$= \quad {}^{2} - \frac{1}{{}_{12}} \qquad (2.21)$$

olarak bulunur. Şu halde (2.16) denkleminin çözümü ise

$$= 2 + \frac{1}{2 - \frac{1}{12}} \qquad (2.22)$$

veya

$$= 2 + \frac{12}{{}^{-3} \quad {}^{-1}} \qquad (2.23)$$

olarak bulunur (Burada ‾= 12 ’dir). (2.23) denklemi (2.16) denklemini sağlamaktadır.

2.1.2. İki özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözümü

Eğer bir Riccati denkleminin $= 1$ ve $= 2$ şeklinde iki özel çözümü biliniyorsa çözüm için daha farklı ve basit bir yol takip edilecektir. Genel olarak mühendislik uygulamalarında bu şekilde iki çözümü birden bilmek mümkün olmayacaktır. Riccati denklemini ve 1 çözümüne göre halini yazalım.

$$' + () + ()^2 = () \qquad (2.24)$$

$${}_1' + ()_1 + ()_1^{2} = () \qquad (2.25)$$

Bu iki denklemi taraf tarafa çıkarırsak

$$(' - {}_1') + ()(- {}_1) + ()({}^2 - {}_1^2) = 0 \qquad (2.26)$$

şeklinde olacaktır. Aynı işlemi 2 için de uygularsak

$$(' - {}_2') + ()(- {}_2) + ()({}^2 - {}_2^2) = 0 \qquad (2.27)$$

$(\; - 1)$ ile ve

olacaktır. Şimdi elde ettiğimiz denklemleri sırasıyla, (2.26) denklemini (2.27) denklemini $(\; - 2)$ ile oranlayacağız. (2.28)

$$\frac{(' - 1')}{(- \;\; 1)} + () + ()(+ 1) = 0$$

$$\frac{(' - 2')}{(- \;\; 2)} + () + ()(+ 2) = 0$$

(2.28) ve (2.29) denklemlerini taraf tarafa çıkarıp düzenlersek (2.29)

$$\frac{(- 1)'}{(- 1)} - \frac{(- 2)'}{(- 2)} + ()(\;\; - \;\;) = 0$$

elde ederiz. (2.30) denklemini şu şekilde de yazmak mümkündür: (2.30)

$$(\ln \frac{(- \;\; 1)}{(- 2)}) + ()(1 - 2) = 0$$

(2.31)'de ikinci terimi denklemin sağ tarafına geçirip integral alırsak

$$(\ln \frac{(- 1)}{})$$

(2.31)

ve

(2.32)

$$\ln \frac{(- 1)}{(- 2)} = \int - ()(\; - \;)$$

(2.33)

ve son olarak denklemin çözülerek düzenlenmiş hali

$$\frac{(1 \qquad - 2)}{1 - \int - ()(1 - 2)}$$

(2.34)

Bir örnek yardımıyla sonucu irdeleyelim.

Örnek 2.3:

$$' - 7 + {}^2 + 10 = 0 \qquad (2.35)$$

Yukarıdaki denklemin iki özel çözümü $_1 = 2$ ve $_2 = 5$ olarak bilinmektedir. İki özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözümünde kullanılan (2.34) denkleminde değerleri yazarsak

$$= \frac{(2-5)}{1 - \int(5-2)} + 5 = \frac{3}{{}^3 - 1} + 5 \qquad (2.36)$$

bulunur. (2.36) denklemiyle elde edilen ifade (2.35) denklemini sağlamaktadır.

2.1.3. Üç özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözümü

Riccati denkleminin $= {}_1$, $= {}_2$ ve $= {}_3$ şeklinde üç özel çözümünün bilindiğini varsayalım. Bu özel çözümlerle herhangi bir integral işlemi yapmadan genel çözüme ulaşmak çok daha kolay olacaktır. Fakat yine belirtmeliyiz ki pratikte bu şekilde pek karşımıza çıkmamaktadır ve fakat bu tip yöntemler, daha başka yöntemleri geliştirmek üzere anahtar olarak kullanılabilir.

Biliyoruz ki, bir lineer denklemin iki özel çözümü varsa genel çözüm bu iki çözüm ile rahatlıkla yazılabilmektedir. Örneğin bir lineer denklemde özel çözümler $_1$ ve $_2$ ise,

lineer denklemin tam çözümü $\overline{}$ şeklinde direk olarak yazılabilmektedir.

Buradan hareketle, Riccati denkleminin bir özel çözümüyle Bölüm 2.1'de yaptığımız gibi lineer denkleme dönüştürüp, daha sonra diğer iki çözümü de bu lineer denklemin çözümünü yazmakta kullanabiliriz. Böylelikle her iki yöntemin birleşimiyle çözümü direk olarak yazmak mümkün olacaktır.

Özel çözümlerin $_1$, $_2$ ve $_3$ olduğunu belirtmiştik. $_1$ özel çözümüyle

$$= {}_1 + \frac{1}{} \qquad (2.29)$$

dönüşümünü uygularsak Bölüm 2.1'de anlatıldığı gibi formatında bir lineer denkleme dönüşeceğini biliyoruz. (2.29)'da 'yi çekersek

$$= \frac{1}{-1} \tag{2.30}$$

ve 3 ile

olacaktır. Dönüşmüş olan lineer denklemin 1 ve 2 özel çözümlerinin 2 yazılabildiğini kabul edelim ve (2.30)'daki gibi

$$1 = \frac{1}{2 - 1}, 2 = \frac{1}{3 - 1} \tag{2.31}$$

yazılan ifadeler dönüşmüş lineer denklemin özel çözümleri olacaktır. Bahsettiğimiz üzere, lineer denklemin tam çözümü şu şekilde olmalıdır:

$$\frac{-1}{2-1} = \frac{\frac{1}{-} - \frac{1}{-}}{\frac{1}{3 - 1} - \frac{1}{2 - 1}} \tag{2.32}$$

Buradan sadece ve 'nin özel çözümlerini alarak

$$\frac{(- 1)(3 - 2)}{(2 -)(3 - 1)} = \tag{2.33}$$

şeklinde lineer denklemin genel çözümü olacaktır. Eğer 'yi çekerek yazmak istersek

$$= \frac{(2 - 1)(3 - 2)}{(3 - 1) + 2 - 3} + \tag{2.34}$$

şeklinde yazılır. Genel çözüm sadece üç özel çözümün (2.34) denkleminde yerine yazılmasıyla direk olarak elde edilmiş olacaktır.

2.1.4. Dört özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözümü ve özel çözümlerin çifte oranı

Riccati denkleminin $_1$, $_2$, $_3$ ve $_4$ olacak şekilde dört özel çözümü biliniyorsa, dördüncü özel çözüm olan $_4$'ü (2.33) denkleminde yerine yazarsak ve düzenlersek

$$\frac{(\ _4 - \ _1)(\ _3 - \ _2)}{(\ _4 - \ _2)(\ _3 - \ _1)} = \tag{2.35}$$

elde ederiz. Buradan da görüleceği üzere, dört çözüm arasında sabit bir oran vardır. Buna literatürde, Riccati denkleminin dört özel çözümünün çifte oranının sabit olması denilmektedir ve aslında şu şekilde yazılarak gösterilir:

$$\frac{(\ _4 - \ _1)}{(\ _4 - \ _2)} : \frac{(\ _3 - \ _1)}{(\ _3 - \ _2)} = \tag{2.36}$$

Genel çözümü bulmak için herhangi üç özel çözüm alınarak (2.34) denklemi yardımıyla çözülebilir.

2.2. Rao Dönüşümü ile Çözüm Yöntemi

Rao (1962) yayınladığı çalışmada, ayrıştırılabilir bir form elde etmek üzere

$$= - \frac{(\ )}{(\ )} \tag{2.37}$$

şeklinde bir dönüşüm önermiştir. Burada ( ) ve ( ) genelleştirilmiş Riccati denkleminin ((1.3) denklemi) katsayılarıdır ve iki kez diferansiyellenebilir olduğu kabul edilmektedir. Aynı zamanda (1.3) denklemindeki ( )'in de diferansiyellenebilir olduğu öngörülmektedir. (2.37) dönüşümü ile (1.3) denklemi şu şekilde yazılacaktır:

$$^2\ ' + \ ^2(\ ' - \ ) + \ ^3\ ^2\ ^2 - \ ' + \ ' - \ ^2 = 0 \tag{2.38}$$

Burada $(\ ) = \ ' - \ ' + \ ^2$ olarak tanımlayıp tekrar düzenlersek

$$2\,{}' = -\,{}^{2}(\,' -\ ) - {}^{3}\ {}^{2}\ {}^{2} \qquad (2.39)$$

olarak elde edilir. Bu adımdan itibaren, iki özel durum için çözüme devam edeceğiz.

(i) $\equiv 0$ olduğu bir aralık için

$$' - \ = 0 \qquad (2.40)$$

denklemini sağlayan fonksiyonunu tespit edeceğiz. Bu durumda (2.39) denklemi şu şekilde olacaktır:

$$' = -\ {}^{2} \qquad (2.41)$$

(2.41) denklemini çözerek ’yu tespit etmek çok basittir. İkinci adım olarak, (2.40) ve (2.41) denklemlerinden elde edilen ve fonksiyonlarını (2.37)’de yerine yerleştirerek çözüm elde edilmiş olacaktır.

(ii) > 0 olduğu aralık için

$$= -\ {}^{3}\ {}^{2} \qquad (2.42)$$

olarak seçilir. Bunula birlikte

$$\frac{' - (3\,' - 2\ )}{{}^{2\,1/2}\ \ {}^{3/2}} = \ ,(\ =\ \ ) \qquad (2.43)$$

olduğunu kabul ederek, ’nun çözümü için

$$' = (\ \frac{1}{\ }\ {}^{2}\ )\,(1 - \ + \ {}^{2}\ ) \qquad (2.44)$$

denklemi kullanılacaktır. Bu denklem ayrıştırılabilir formdadır ve çözümü bulunabilir. (2.42) denkleminden ve (2.44) denkleminden elde edilerek (2.37) denklemiyle ’nin genel çözümüne ulaşılır. Bu yöntemi bir örnekle pekiştirelim.

Örnek 2.4: Şu denklemi Rao dönüşümü yardımıyla çözmeye çalışalım:

$$' + 2 \ + 2^{2} + 1 = 0 \tag{2.45}$$

Burada

$$(\ ) = \ ' - \ ' + \ ^{2} = 0 \tag{2.46}$$

olduğu hesaplanır. O halde (2.40) denkleminden,

$$' - \ = 0 \Rightarrow \ = \ ^{2} \tag{2.47}$$

olarak çıkacaktır. Şimdi de (2.41) denklemi yardımıyla

$$' = - \ ^{2} \Rightarrow \ = \frac{1}{- \sqrt{\ } \ (\ ) +} \tag{2.48}$$

olarakfonksiyonu bulunur. (Burada $\int \ ^{2} = \frac{1}{2}\sqrt{-} \ (\ ) + \ )$ olarak tanımlanmaktadır. (2.37) dönüşümü ile

$$= - (\ ) = \frac{(\ )}{} \ \frac{2}{- \sqrt{\ } \ (\ ) + -} \tag{2.49}$$

olarak çözüm elde edilir.

2.3. Allen-Stein Yöntemi

$$' = (\ ) + (\ )^{2} + (\ ) \tag{2.50}$$

formundaki genelleştirilmiş Riccati denklemi için Allen ve Stein (1964) yaptıkları çalışmada, Rao'nun (1962) diferansiyellenebilme şartlarını daha az kısıtlayan

$$\overline{\underline{\ (\ )\ }}$$

$$= \sqrt{(\ )}\ (\ ) \qquad (2.51)$$

şeklinde bir dönüşüm uygulamışlardır. Bu dönüşümden çıkacak olan $'$ ve ifadelerini (2.50) denkleminde yazar ve düzenlersek

$$' = \left(\frac{'}{2} - \frac{'}{2} + \right) + \sqrt{\ }^{2} \quad \overline{} \quad + \sqrt{\ } \quad \overline{} \qquad (2.52)$$

elde edilir. Bu sefer de şu kabulü yapacağız:

$$\frac{\left(2 \frac{'}{} - 2 \frac{'}{} + \right)}{\sqrt{\ } \quad \overline{}} = = \qquad (2.53)$$

Bu şart altında (2.52) denklemi şu şekilde yazılır:

$$' = \frac{}{\sqrt{\ }\ (\ ^{2} + \ + 1)} \qquad (2.54)$$

(2.54) denklemi ayrıştırılabilir bir formdadır ve çözümü mümkündür. Çözümden elde edilen fonksiyonu (2.51) denkleminde yerleştirilerek problemin genel çözümüne ulaşılır.

Örnek 2.5: Şu denklemi çözmeye çalışalım:

$$' + (6\ ^{2} - \frac{2}{}\ ) - 9\ ^{2} - \ ^{4} = 0 \qquad (2.55)$$

(2.53) denkleminden

$$= \frac{\left(0 - \underline{2} + \underline{2} - 6\ ^{2}\right)}{\sqrt{9(\ ^{4})}} = -2 \qquad (2.56)$$

elde edilir. (2.54) denklemi yardımıyla şu denklem elde edilir:

$$' = 3\,^{2}(\,^{2} - 2\ + 1)$$

Ayrıştırılabilen bir denklem elde edilmiş oldu. Buradan (2.57)

$$= \frac{^{3} - 1 +}{^{3} +} = 1 - \frac{1}{^{3} +}$$

(2.58)

çözümü elde edilecektir. Buradan (2.51) dönüşüm denklemi yardımıyla

$$= \frac{2}{3\ (1-}\ \frac{1}{^{3}+}\ ) = \frac{2}{3\ -}\ \frac{2}{3(^{3}+\ )}$$

(2.59)

çözümü elde edilir.

2.4. İkinci Mertebeden Diferansiyel Denkleme Dönüşüm ile Çözüm Yöntemi (Klasik Yöntem)

(1.3) formundaki bir Riccati denklemine

$$= \frac{'}{} \tag{2.60}$$

şeklinde bir dönüşüm uygulandığında ikinci mertebeden lineer bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilmektedir. (2.60) dönüşümünde verilen tanımlanabilir bir fonksiyondur. Dönüşüm ile

$$'' + (\ - \frac{'}{}\ )\ ' - = 0 \tag{2.61}$$

şeklinde ikinci mertebeden lineer ve homojen bir denklem elde edilir. Bu yeni denklemin çözümü - , ve fonksiyonlarına bağlı olarak- bulunabiliyorsa, elde edilen fonksiyonu (2.60) denkleminde yerine yazılarak Riccati denkleminin çözümüne ulaşılır. İki örnekle bu durumları inceleyelim.

Örnek 2.6:

$$' \quad \frac{1}{} \quad + (8+\ ) + \quad 2 \quad - \quad \frac{1}{} \quad = 0 \tag{2.62}$$

şeklinde verilen denklemi çözmeye çalışalım. (2.61) dönüşümüyle

$$'' + 8\,' - \ = 0 \tag{2.63}$$

denklemi elde edilir. (2.63) denkleminin karakteristik denklemini yazarsak

$$^2 + 8 \ - 1 = 0 \tag{2.64}$$

olacağı görülür. (2.64) denkleminin kökleri $_{1,2} = -4 \mp \sqrt{17}$ olarak bulunur. Buradan hareketle, (2.63) denkleminn çöümü

$$= {}_1 \ ^{-4+\sqrt{17}} + {}_2 \ ^{-4-\sqrt{17}} \tag{2.65}$$

olarak elde edilir. (2.60) dönüşümüyle çözüm şu şekilde elde edilecektir:

$$= \frac{'}{} = \frac{}{(\,_1 \ ^{(-4+\sqrt{17})} + {}_2 \ ^{(-4-\sqrt{17})})} \tag{2.66}$$

veya

$$= \frac{-4+\sqrt{17}}{} - \frac{2\sqrt{17}}{(\ ^{2\sqrt{17}} + \ )} \tag{2.67}$$

Burada $=$ $2/1$ dir.

Örnek 2.6:

$$' + {}^2 - {}^2 + 2\,^2 + 1 = 0 \tag{2.68}$$

Denklemini çözmeye çalışalım. (2.61) dönüşümü ile

$$'' \quad {}^{2} \quad \frac{1}{} \quad ' \quad {}^{3} \qquad +(\quad +) \quad +(2 \quad +)=0 \tag{2.69}$$

elde edilir. Böyle bir denklemi klasik yöntemlerle analitik olarak çözerek Riccati denklemini çözüme ulaştırmak mümkün görünmemektedir. Bu tip durumlarla sık karşılaşılmakla beraber yöntemin sınırlı kullanım alanları vardır diyebiliriz.

2.5. Sugai Dönüşümü ile Çözüm Yöntemi

Sugai (1960) tarafından önerilen çözüm yöntemi, Bölüm 2.4'teki kısıtlı kullanımı biraz daha genişletmektedir. Bu kez diğer yöntemlerden daha farklı olarak

$$= \frac{}{} \tag{2.70}$$

dönüşümü ile, daha genel formda ikinci mertebeden diferansiyel bir denklem elde edilmektedir. (2.70) dönüşümünü (1.3) denklemine uygularsak

$$' + ' - ' + + {}^{2}\,{}^{2} = {}^{2} \tag{2.71}$$

elde edilir. (2.71) denkleminde keyfi kabuller yapılarak çok çeşitli formlarda yeni denklemler elde edilerek farklı çözüm yolları geliştirilebilmektedir. Denklemdeki üçüncü terimin ters işaretlisi olan $'$ ile beşinci terim ${}^{2}\,{}^{2}$ birbirine eşitlenirse,

$$' = {}^{2}\,{}^{2} \Rightarrow = \frac{'}{} \tag{2.72}$$

elde edilir. (2.72) ifadesini (2.70)'te yazarsak

$$= \frac{'}{} \tag{2.73}$$

olacağı görülür. Dikkat edilirse, Bölüm 2.4'te verilen (2.60) dönüşümüyle aynı ifade elde edilmiştir. (2.71) dönüşümünü (1.3) denklemine tekrar uygularsak

$$''+(-\frac{'}{})'-=0 \qquad (2.74)$$

elde edilir. Bu ifade de (2.61) denklemiyle aynıdır. Görüldüğü gibi (2.71)'deki denklem üzerinde yapılacak kabullerden yola çıkarak çok sayıda dönüşümü bu yöntemle elde etmek mümkündür ve bir çok dönüşüm metodunu kapsamaktadır.

Şimdi (2.71) denklemindeki sol taraftaki ikinci terim ile sağ taraftaki terimin birbirine eşit olduğunu kabul edelim:

$$' = \quad ^2 \Rightarrow = \frac{'}{} \qquad (2.75)$$

(2.75) ifadesini (2.70) denkleminde kullanarak

$$= \frac{}{} \qquad (2.75)$$

şeklinde yeni bir dönüşüm elde ederiz. (2.75) dönüşümünü (1.3) denklemine uygularsak

$$''+(+\frac{'}{})'-=0 \qquad (2.76)$$

şeklinde dönüştürülmüş yeni bir denklem elde ederiz.(2.74) denklemi ile (2.76) denklemlerini kıyaslarsak, her iki denklem de ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerdir. Her ikisinde de belirsizlik yada trivial

çözümle karşılaşmamak için sırasıyla $'/ \neq 0$ ve $'/ \neq 0$ olmalıdır. Bununla beraber (2.75) dönüşümü ve elde edilen (2.76) denklemi daha geniş bir aralıkta çözüm olanağı sunmaktadır.

(2.71) denkleminde bir başka kabul ile yeni bir dönüşüm daha elde etmeye çalışarak inceleyelim. Bu kez denklemin dördüncü ve beşinci terimlerinin toplamının sıfır olduğu kabulüyle

$$= - \;\; 2 \;\; 2 \;\; \Longrightarrow \qquad \qquad — = - — \tag{2.77}$$

ifadesi elde edilir. (2.77) ifadesini (2.70) dönüşümünde kullanarak

$$= - \quad — \tag{2.78}$$

elde edilir. (2.78) ifadesini (1.3) denklemiyle verilen Riccati denkleminde kullanırsak

$$' \quad — \quad = - ( ) \tag{2.78}$$

olduğu görülür. Dikkat edilirse Riccati denkleminin , ve değişken katsayılarının (2.78) koşulunu sağladığı durumda $_1 = -$ — şeklinde bir özel çözümü vardır. Bu özel çözüm ile genel çözümü bulmak, Bölüm 2.1'deki yöntem ile gayet basittir.

Her ne kadar birçok dönüşüm çeşitliliği içerse de, Sugai'nin (1960) önerdiği çözüm yönteminin kullanımı belirli koşullara bağlı olacağı için sınırlı alanda kalacaktır. Basit bir örnekle irdeleyelim.

Örnek 2.7:

$$' - 6 \;\; + 3 \;^2 - 2 = 0 \tag{2.79}$$

(2.79) denklemini incelersek

$$= - (\quad — \quad ' \quad) = 2 \tag{2.80}$$

şartının sağlandığı görülür. O halde (2.79) denkleminin bir özel çözümü (2.78) yardımıyla $_1 = 2$ olmaktadır. Bir özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözümü için (2.1) denklemine müracaat ederek

$$1 \qquad 1$$

$$= {}_1 + = 2 + \qquad (2.81)$$

dönüşümü uygulanır. O halde (2.79) denklemi

$$' - 6 \quad - 3 = 0 \qquad (2.82)$$

denklemine indirgenir. (2.82) denkleminin çözümü ise

$$3^2 \quad \frac{1}{} \quad 3^2 \quad \mathrm{erf}(\sqrt{3}\,) \qquad (2.83)$$

olarak bulunur. Burada $\int 3^{-3\,2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{erf}(\sqrt{3}\,)$ şeklinde çözülür. (2.83) ifadesi (2.81) denklemine yerleştirilerek aranan çözüm şu şekilde bulunur:

$$= 2 + \frac{-3^2}{\frac{1}{2} \quad \sqrt{3}\,\mathrm{erf}(\sqrt{3}\,)} \qquad (2.84)$$

2.6. Rao-Ukidave Çözüm Yöntemi

Rao ve Ukidave (1968) çalışmalarında, Riccati denklemini değişkenlerine ayrılabilir bir forma dönüştürmek üzere farklı bir dönüşüm uygulamışlardır. , ve (1.3) denkleminin katsayıları ve ve sabitler olmak üzere

$$' + \; = \qquad (2.85)$$

$$= - \;{}^2 \qquad (2.86)$$

şartlarını sağlayan bir fonksiyonu tespit edilerek,

$$= \qquad (2.87)$$

dönüşümü uygulanır. Böylelikle (1.3) denklemi

$$\underline{1} \qquad 2 \qquad {}' = (- \;)^2 \;(- \qquad - 1) \tag{2.88}$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir bir forma dönüşür. (2.88) denklemi çözülerek fonksiyonu tespit edilir ve daha önceden elde edilen fonksiyonu ile birlikte (2.87) denkleminde yerleştirilerek çözüme ulaşılır.

Örnek 2.8:

$$' \quad \frac{1}{} \quad \frac{1}{} \; 2 \quad + (2 - \quad) + \quad = - \tag{2.89}$$

şeklinde verilen denklemi Rao-Ukidave yöntemine başvurarak çözelim. (2.85) ve (2.86) denklemlerinden

$$' + (2 - {}^{1}) \quad - \quad = -$$

$$- \; = - \quad \frac{1}{}2 \quad \Rightarrow 2 \qquad = \frac{2}{} \tag{2.90}$$

şeklindeki ifadeler yazılır. Burada keyfi olarak $= 1$ ve bulunacaktır. Bu değerleri (2.88) denkleminde yazarsak $= -2$ alırsak $=$ olarak (2.91)

$$' = -2 \; - \; {}^{2} - 1 \tag{2.92}$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir bir denklem elde edilir. (2.88) denklemi çözülürse

$$= \quad \frac{1}{\quad - 1} - 1 \tag{2.93}$$

elde edilir. ve fonksiyonlarını (2.87) denkleminde yazarsak

$$\frac{1}{\quad} \tag{2.94}$$

çözümüne ulaşılır.

2.7. Siller Çözüm Yöntemi

Siller (1970) önerdiği çözüm yöntemiyle Riccati denklemini indirgemiştir. Yöntem şu şekildedir:

$$= \int - \tag{2.95}$$

Bu şarta uygun fonksiyonu bulunur ve bir fonksiyon olmak üzere

$$= \tag{2.96}$$

şeklinde bir dönüşüm yapılır. Böylelikle (1.3) denklemi

$$' = + \; ^2 \tag{2.97}$$

şeklinde bir denkleme indirgenmiş olacaktır. Literatürde (2.97) denklemine İndirgenmiş Riccati Denklemi (RRE: Reduced Riccati Equation) denilmektedir.
(2.97) denklemindeki katsayılar

$$- \tag{2.98a}$$

$$= - \tag{2.98b}$$

bağıntılarıyla tanımlanmaktadır. Bu yöntem basit tipteki Riccati denklemleri için etkilidir.

Örnek 2.9:

$$' \quad \frac{2}{} \quad 2 \quad + () + \quad = 2 \tag{2.99}$$

şeklinde verilen denklemi İndirgenmiş Riccati Denklemine dönüştürerek verilen yöntemle çözelim. (2.95) ifadesiyle

$$= \int - \quad = -2 \tag{2.100}$$

olarak tespit edilir. (2.96) dönüşümü, (2.98a) ve (2.98b) ifadelerindeki katsayıların tespiti ile (2.97) denklemine başvurarak

$$' = 2\ ^2 - \quad ^{-2}\ ^2 \tag{2.101}$$

denklemi elde edilir. (2.101) denklemi çözülerek

$$= \frac{(\sqrt{2} \quad ^{2\sqrt{2} - \sqrt{2})\,2}}{2\sqrt{2} +} \tag{2.101}$$

bulunur. Tekrar (2.96) dönüşümüne müracaat ederek

$$= \frac{(\sqrt{2} \quad ^{2\sqrt{2} - \sqrt{2})\,2}}{2\sqrt{2} +} \tag{2.102}$$

şeklinde çözüm elde edilir.

2.8. Wong Çözüm Yöntemi

Wong (1966) tarafından önerilen çözüm yöntemi Rao'nun (1962) önerdiği dönüşüme benzemektedir fakat çözümü biraz daha zordur ve pratik uygulamalarda kullanışlı değildir. , ve tanımlanabilir fonksiyonlar olmak üzere

$$= \; - \qquad (2.103)$$

şeklinde bir dönüşüm uygulanır. Bununla birlikte

$$= \frac{+ \; + \; ' - \;\; ^2}{} \qquad (2.104a)$$

$$= \frac{- \; - \; ' \qquad + 2}{} \qquad (2.104b)$$

$$= - \qquad (2.104c)$$

İfadeleriyle oluşturulan değişken katsayıları kullanılarak

$$' = + \; + \;\; ^2 \qquad (2.105)$$

şeklinde yine benzer bir Riccati denklemine indirgenir. Eğer $=$ ve $=$ şeklinde belirlenebilen ve sabit katsayıları mevcut ise (2.105) denklemi ayrıştırılabilir. Fakat bahsedildiği üzere bu koşulları sağlayan denklemlere ulaşmak kolay olmayacaktır.

3. RICCATI DENKLEMININ ANALİTİK ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ BİR YÖNTEM GELİŞTİRİLMESİ

3.1. Özel Tip Riccati Denklemi için Yeni Çözüm Yöntemi

Genelleştirilmiş Riccati denklemi olan (1.3) denklemini çözmek için şu dönüşümü dikkate alalım:

$$\bar{} = ()\int ()() \tag{3.1}$$

Burada ( ) ve ( ) uygun şekilde belirlenebilir fonksiyonlardır. (3.1) denkleminin her iki tarafının ikişer kez türevi alınırsa

$$\bar{}' = ('+ \ )\int ()() \tag{3.2}$$

ve

$$\bar{}'' = (\ ' + 2 \ ' \ + \ ' + \ ^2 \ ^2 + '')\int ()() \tag{3.3}$$

elde ederiz. (3.3) denklemini düzenlersek

$$' + [\ \frac{2\ '}{} + \frac{'}{}\ ] + \ ^2 \quad + \frac{''}{} = \frac{1}{}\bar{}'' - \int ()() \tag{3.4}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.4) denkleminin sol tarafının Riccati denklemi formunda olduğu görülebilir. (1.3) denklemi ve (3.4) denklemi karşılaştırıldığında

$$[\frac{2\ '}{} + \frac{'}{}] = ( ) \tag{3.5a}$$

$$( ) = ( ) \tag{3.5b}$$

$$\frac{''}{\quad} = -(\;) \qquad (3.5c)$$

yazılır. (3.4) denkleminin sağ tarafının sıfıra eşit olduğu bir durumu dikkate alarak bu bölüme devam edelim. Eğer bir Riccati formundaki denklem çözülmek istenirse, denklem aşağıdaki (3.6) denklemiyle özdeş olarak kabul edilecek ve (3.5) denklemleriyle de ve fonksiyonlarını tespit etmek gerekecektir.

$$' + [\frac{2'}{\quad} + \frac{'}{\quad}] + {}^{2} + \frac{''}{\quad} = 0 \qquad (3.6)$$

Şu halde (3.4) denklemini (3.6) denklemindeki gibi sıfıra eşitlediğimiz şartlarda, aslında şu koşullar kabul edilmiş olacaktır:

$$\bar{}'' = 0 \rightarrow \bar{} = \; + \qquad (3.7)$$

ve fonksiyonları denklem (3.5)'i sağlamalıdır. Şu halde (3.1) denkleminin ters dönüşümü ile

$$= \frac{1}{\quad}(\ln \frac{\bar{}}{\quad}) \qquad (3.8)$$

şeklinde tam çözümü yazılabilir. Aşağıdaki dört örnek, yöntemin daha rahat kavranmasını sağlayacaktır.

Örnek 3.1: İlk olarak şu denklemi çözmeye çalışalım:

$$' + 2 + {}^{2} + 1 = 0 \qquad (3.9)$$

Çözüm aynı zamanda integre edilerek de bulunabilir. (3.9) ve (3.6) denklemlerini karşılaştırdığımızda

$$[\frac{2'}{} + \frac{'}{}] = 2 \tag{3.10a}$$

$$= 1 \tag{3.10b}$$

$$\frac{''}{} = 1 \tag{3.10c}$$

olacağı görülür. = 1 (3.10a) denkleminde yerine konulur ve eşitlik çözülürse

$$= \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.10c) denklemi otomatik olarak sağlanmaktadır. Şimdi (3.8) denklemi kullanarak ve (3.7) denklemindeki durum dikkate alınarak.

$$= \frac{1}{} (\ln \frac{^{-}}{}) = \frac{1}{} (\ln \frac{+}{}) \tag{3.12}$$

veya

$$= \frac{1}{+^{-}} - 1 \,, \; ^{-} = / \tag{3.13}$$

bulunur. Denk.(3.13) ile elde edilen sonucun Denk.(3.9)'u sağladığı doğrulanabilir.

Örnek 3.2: Şimdi şu denklemi çözelim:

$$' + 5 + {}^2 + \frac{25}{4} {}^2 + \frac{5}{2} = 0 \tag{3.14}$$

(3.14) ve (3.6) denklemleri kıyaslandığında

$$[\frac{2'}{} + \frac{'}{}] = 5 \tag{3.15a}$$

$$= 1 \qquad (3.15b)$$

$$\frac{''}{} = \frac{25}{4}{}^{2} + \frac{5}{2} \qquad (3.15c)$$

elde edilir. Tanımladığımız fonksiyonu (3.15a) ve (3.15b) denklemleriyle ile bulunmaya çalışılırsa

$$\frac{5}{}{}^{2} \; = {}^{4} \qquad (3.16)$$

olacaktır. (3.8) denklemini kullanarak

$$= \frac{1}{}\frac{}{}(\ln \frac{-}{}) = \frac{1}{1}\frac{}{}(\ln \frac{+}{}\,{}^{1}{}_{4}) \qquad (3.17)$$

veya

$$= \frac{1}{(+)} - \frac{5}{2}\;{}^{-} = / \qquad (3.18)$$

olarak çözüm elde edilir. Yine doğrulayabiliriz ki (3.18) denklemini kullanılarak (3.14) denklemi sağlanmaktadır.

Örnek 3.3 : Aşağıdaki denklemi çözmeye çalışalım.

$${}' + 2 + {}^{2}\,{}^{2}\frac{1}{}{}^{-2} + \frac{2}{}{}^{4} + 1 = 0 \qquad (3.19)$$

(3.19) ve (3.6) denklemlerini karşılaştırdığımızda şu sonuçları elde edilir:

$$[\frac{2'}{} + \frac{'}{}] = 2 \qquad (3.20a)$$

$$= \; ^{2} \qquad (3.20b)$$

$$\frac{''}{} = -\frac{1}{} + \frac{2}{} + 1 \qquad (3.20c)$$

Yine aynı şekilde fonksiyonu kolaylıkla

$$= \frac{1}{} \; ^{2} \qquad (3.21)$$

şeklinde bulunur. (3.8) denklemini kullanarak

$$= \frac{1}{} (\ln \; \frac{-}{}) = \frac{1}{} (\ln \; \frac{+}{}) \qquad (3.22)$$

veya

$$= \frac{1}{^{2}(+)} - \frac{1}{} + \frac{1}{^{3}} \; ^{-} = \; / \qquad (3.23)$$

elde ederiz. Buraya kadarki örneklerde görüleceği üzere, Denk.(1.3)'teki ( ) fonksiyonu için, ( ) = ″/ koşulunu sağlayan denklemler seçilmiştir. Diğer durumlarda, bilinmeyen ( ) fonksiyonu aşağıdaki denklemler aracılığıyla bulunmalıdır ve her birini sağlamalıdır.

$$( ) = [\; \frac{2\,'}{} \; \frac{'}{} \; + \;] \qquad (3.24a)$$

$$( ) = \qquad (3.24b)$$

$$( ) = \frac{''}{} \qquad (3.24c)$$

Ancak, her zaman bu şekilde özel bir ( ) fonksiyonu bulmak kolay olmayacaktır. Bu durumu incelemek ve genelleştirmek üzere bir sonraki örneğe bakalım.

Örnek 3.4: , ℝ.olmak üzere, şu şekilde verilmiş olan denklemi çözmeye çalışalım.

$$'+ \quad ^2 \quad + \quad ^2 + (\,) = 0$$ (3.25)

Denk.(3.24a) ve Denk.(3.24b) kullanılarak şu şekilde yazılabilir:

$$[^2 \; ' + \; ' \;] = \quad ^2$$

fonksiyonu da şu şekilde bulunacaktır:

Bununla beraber şu şekilde bir ( ) fonksiyonu elde edilir: (3.26a)

$$(\,) = \;'' = {}^2 3 + {}^3 - 3 + 4 \;\; 4 \;\; 2$$

(3.26b)

(3.27)

(3.28)

Dolayısıyla, burada sunulan bu ilk özel duruma ait yöntem, Denk.(3.28)'de verilen koşul sağlandığında çözüm sunmaktadır. (3.23) denkleminin yeni formu ise

$$' + \;^2 + \;^2 + \quad \frac{^2}{4}\,3 \quad + \frac{3}{4}\,{-3} \quad + \frac{}{2} \quad = 0$$ (3.29)

şeklinde olmalıdır. Bu denklemin çözümü ise sunulan yöntem yardımıyla şu şekilde bulunabilir.

$$= \frac{1}{\;}\left(\ln \frac{\bar{\;}}{\;}\right) = \frac{1}{\;}\left(\ln \frac{\;+\;}{\;}\right) \qquad (3.30)$$

veya

$$= \frac{1}{(\;+\;)} - \frac{\;}{2} + \frac{1}{2\;2} \quad \bar{\;} = / \qquad (3.31)$$

şeklinde çözülmüş olacaktır.

3.2. Genel Riccati Denklemi için Yeni Çözüm Yöntemi

Bölüm (3.1)'deki dönüşüm ve yöntem ile elde edilmeye çalışılan çözüm, Denk.(1.3)'deki Genelleştirilmiş Riccati Denklemi için ( ) teriminin serbestçe seçilmesini önlemektedir. Böylece, anlatılan yöntem sadece özel tip Riccati denklemleri için geçerli olabilir.

Bu bölümde, keyfi olarak seçilebilen ( ), ( ) ve ( ) değişken katsayıları için, bu sınırlamayı kaldırarak daha genel bir analitik çözüme ulaşabilmeyi araştıracağız.

Bölüm (3.1)'deki dönüşümü tekrar dikkate alarak

$$\bar{\;} = (\;) \int (\;)(\;) \qquad (3.32)$$

yazılır. Denk.(3.32) yine iki kere türetilerek

$$\bar{\;}' = (\;' + \;) \int (\;)(\;) \qquad (3.33)$$

ve

$$\bar{\;}'' = (\;' + 2\;' + \;' + \;^2\;^2 + \;'') \int (\;)(\;) \qquad (3.34)$$

elde edilir. Denk.(3.34)'ü şu şekilde yazmak mümkündür:

$$'+[\ \frac{2'}{}+\frac{'}{}]+\ ^{2}\qquad+\frac{''}{}=\frac{1}{}\ ^{-'' - \int ()()}\qquad (3.35)$$

Denk.(3.35)’in sağ tarafını tanımlanabilir bir fonksiyon olarak düşünürsek

$$'+[\ \frac{2'}{}+\frac{'}{}]+\ ^{2}\qquad+\frac{''}{}=\ ()\qquad (3.36)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu tanımlamadan dolayı (3.35) denklemi yardımıyla

$$^{-''}=\ .\ .\ ().\int\ ()()\qquad (3.37)$$

şeklinde olmalıdır. Bununla birlikte (3.32) denklemi ile

$$^{-''}=\ ()()\qquad (3.38)$$

ifadesini yazmak mümkün olacaktır. Daha önce tanımladığımız $^{-}$ fonksiyonunun sembolü ( ) ile değiştirilip düzenlenirse

$$''-=0\qquad (3.39)$$

şeklinde bir denkleme ulaşılır. Elde edilen (3.39) denklemi ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem olup genel çözümünü analitik olarak yazmak mümkün olacaktır. Çözüm basit bir fonksiyon olabileceği gibi kuvvet serileri veya çeşitli özel fonksiyonlar/polinomlar (Bessel, Legendre, Gamma, Hipergeometrik, Airy..vb) cinsinden elde edilebilir. Kolaylıkla görülebileceği gibi, eğer çarpımı sabit bir sayı olarak karşımıza çıkarsa, ’nun dolayısıyla ’nin açık biçimde çözümü her zaman elde edilebilir. Diğer bir deyişle, bazı diğer yöntemlerle verilen değişken katsayılı kompleks yapıdaki bir ikinci mertebe diferansiyel denklemi çözmek zorunda kalmadan, kolaylıkla bir çözüm bulunabilecektir.

Denk.(3.39)’a dikkat edersek, (3.32) denklemiyle yapılan dönüşümün başlıca avantajlarından birinin, Riccati denklemini lineer bir forma dönüştürdüğü sonucuna varıyoruz. Bununla birlikte, Denk.(3.39)'daki form ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin en basit formuna sahiptir. Bu demek oluyor ki Denk.(3.39) ile (3.36) denkleminin yada diğer bir ifadeyle Genelleştirilmiş Riccati Denkleminin açık bir çözümünün olup olmadığını ve çözümün nasıl bir forma sahip olabileceğini kolaylıkla anlamak mümkündür.

Buradan hareketle, (3.39) denkleminin klasik yöntemlerle çözümü yapıldıktan sonra

$$= \frac{1}{()}\,\frac{}{}\left(\ln \frac{()}{()}\right) \tag{3.40}$$

şeklinde Riccati denkleminin genel çözümü olarak yazılabilir.

Denk.(3.40)'a da dikkat edersek, integrasyon işlemi içeren hiçbir terim bulunmamaktadır ve $(\ )$'in açık biçimini elde edebilmek için herhangi bir zorluk içermemektedir.

Daha iyi kavranabilmesi açısından, farklı tipte çözümler getiren dört örnekle inceleyelim.

Örnek 3.5: Bu bölüm için basit bir örnekle başlayalım.

$$' + 2\ \ - \ ^2 - (1 + \ ^2) = 0 \tag{3.41}$$

Bu tipteki bir Riccati denkleminin çözümü için, (3.41) ve (3.36) denklemleri karşılaştırarak

$$= -1 \tag{3.42a}$$

$$\left[\frac{2'}{} + \frac{'}{}\right] = 2 \tag{3.42b}$$

$$\frac{''}{} = -(1 + \ ^2)\,,\ \ (\ ) = 0 \tag{3.42c}$$

yazılabilir. Denk.(3.42a) ve Denk.(3.42b) ile $= {}^{2/2}$ olarak bulunur. Burada (=sabit)'tir. Şu halde görebiliriz ki $''/$ ifadesi direk olarak ( ) fonksiyonuna eşittir. Bundan dolayı ( ) fonksiyonu sıfır alınabilir. Bu sebeple $'' = 0$ olmaktadır.

'nun çözümü $= +$ şeklinde kolaylıkla yazılabilir. Bu çözüm (3.40) denklemi ile verilen ters dönüşüm yapılarak

$$\frac{1}{\quad} \qquad (3.43)$$

elde edilir. Bu çözümün (3.41) denklemini sağladığı kontrol edilebilir. Dikkat edilirse, bu basit örnekte Bölüm 3.1'teki şartlar sağlanmaktadır.

Örnek 3.6 : Aşağıdaki denklemin çözümünü arayalım.

$$' + 8 \quad + 4\,{}^{2} + 4\,{}^{2} - 3 = 0 \qquad (3.44)$$

Denk.(3.36) ile Denk.(3.44)'ü karşılaştırırsak

$$= 4 \qquad (3.45a)$$

$$[\frac{2\,'}{\quad} + \frac{'}{\quad} \quad] = 8 \qquad (3.45b)$$

elde edilir. Denk.(3.45a) ve Denk.(3.45b)'nin çözülmesiyle $= {}^{2\,2}$ elde edilecektir Burada (=sabit)'tir. Diğer terimleri de bulursak

$$\frac{''}{\quad} = 4\,{}^{2} + 1\,, \quad (\,) = 4 \qquad (3.46)$$

şeklinde ( ) fonksiyonuna ulaşılır. Dönüştürülmüş denklem olan (3.39)'da yerlerine yazılırsa

$$'' - 16 \; = 0 \tag{3.47}$$

elde edilir. İstediğimiz gibi basit bir ikinci bir mertebeden lineer diferansiyel denklem elde etmiş olduk. Denk.(3.47)'nin karakteristik denklemi

$$^2 - 16 = 0 \tag{3.48}$$

şeklinde olacaktır ve kökleri ise $_1 = 4$ ve $_2 = -4$'tür. Buradan hareketle, denkleminin çözümünü şu şekilde yazabiliriz:

$$= _1 \; ^4 + _2 \; ^{-4} \tag{3.47}$$

Şimdi Denk.(3.40)'ı kullanarak

$$= \frac{1}{()} (\ln \frac{()}{()})' = \frac{1}{4} (\ln \frac{^4 + ^{-4}}{2^2})' \tag{3.49}$$

veya

$$\tag{3.50}$$

$$= \frac{^4 - ^{-4}}{_1 \; ^4 + _2 \; ^{-4}} - \tag{3.51}$$

problem çözülmüş olacaktır. Denk.(3.51)'i daha sade bir formda düzenlersek

$$= \frac{8 \; -^{-}}{ + ^{-}} \tag{3.52}$$

şeklinde yazılacaktır. Bu noktada dikkat etmek gerekir ki, 'nun bir çözümü olan $_1 \; ^4$ ifadesini (3.40)'da yazarsak karşımıza $_1 = 1 -$ olan özel bir çözüm çıkacaktır. Bu özel çözüm de Denk.(3.44)'ü sağlamaktadır. Bölüm 2.1'de verildiği gibi, bir özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözüm yöntemini uygularsak, $= _1 + 1/$ dönüşümü ile aynı genel çözümü elde edebiliriz. Sonuç olarak yine karşımıza Denk.(3.52)'deki çözüm çıkmış olacaktır. (Burada olarak yazılan fonksiyon, bölüm

2.1'de denklem (2.1)'deki fonksiyonudur. Bu bölümde sembolize edilen fonksiyonu ile karışmaması için olarak bahsedilmiştir). Aynı şekilde, 'nun bir diğer çözümü olan $_1$ $^{-4}$ ifadesini de (3.40)'da yazarsak karşımıza $_2 = -1 -$ olan ikinci bir özel çözüm çıkacaktır. Yine bu iki özel çözüm olan $_1$ ve $_2$ ile de bölüm 2.2'de anlatılan, iki özel çözümü bilinen Riccati denkleminin çözüm yöntemi uygulanarak aynı genel

çözümün elde edilebilmesi mümkündür.

Örnek 3.7 :

$$' \quad + (4 - \quad \frac{1}{\ } \quad) + \quad \frac{1}{\ } \quad ^2 - \quad ^2 + 4 = 0 \tag{3.53}$$

şeklinde verilen denklemi çözmeye çalışalım. Denk.(3.53) için, şimdiye kadar karşımıza çıkan denklem yapılarından farklı olarak bir özel çözümü bulabilmek mümkün olmamaktadır. Çözüm için zaten klasik yöntemler kullanılamayacaktır.

Sunulan yöntemi kullanarak, (3.36) ve (3.53) denklemlerinin kıyaslanmasıyla

$$\frac{1}{\} = \tag{3.54a}$$

$$[\frac{^{2\prime}}{\ } + \frac{'}{\ }] = 4 - \frac{1}{\ } \tag{3.54b}$$

olduğu görülür. Bu iki denklem çözüldüğünde, $=$ ^{2} olacaktır. Burada (=sabit)'tir.

Şimdi dikkat edersek,

$$\frac{''}{\ } = 4 \tag{3.55}$$

olduğu görülecektir. Denk.(3.36) yardımı ile aradığımız ( ) fonksiyonu

$$\frac{''}{\ } - (\ ) = - \ ^2 \quad + 4 \Rightarrow 4 - (\ ) = - \ ^2 \quad + 4 \Rightarrow (\ ) = \ ^2 \tag{3.56}$$

şeklinde elde edilmiş olacaktır. Dolayısıyla (3.39) denklemi ile

$$'' - \; = 0 \tag{3.57}$$

denklemine ulaşılmış olacaktır. Anlaşılacağı üzere, Denk.(3.57) Airy denklemidir ve çözümü şu şekilde verilmektedir:

$$= {}_1 \; () + {}_2 \; () \tag{3.58}$$

Burada ( ) ve ( ) şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$() = 1 + \sum_{=1}^{\infty} \frac{3}{2.3.5.6 \ldots (3 - 3).(3 - 1).3} \tag{3.59a}$$

$$() = + \sum_{=1}^{\infty} \frac{3 + 1}{3.4.6.7 \ldots (3 - 2).3.(3 + 1)} \tag{3.59b}$$

(3.59a) ve (3.59b)'nin türevleri ise

$$(\; ())' = \sum_{=1}^{\infty} \frac{3 - 1}{2.3.5.6 \ldots (3 - 3).(3 - 1)} \tag{3.60a}$$

$$(\; ())' = 1 + \sum_{=1}^{\infty} \frac{3}{3.4.5.6.7 \ldots (3 - 2).3} \tag{3.60b}$$

şeklinde olacaktır. Denk.(3.40)'daki dönüşümü kullanarak

$$= (\; \frac{(\; ())' + \,.\, (\; ())'}{() + \,.\, ()} - 2) \tag{3.61}$$

Şeklinde problem çözüme ulaşılmış olacaktır. Burada = 'tir.

Örnek 3.8: Bu örnekte, daha önce Mortici (2004) tarafından yayınlanan, bazı kısıtlamalar ve tanımlamalar altında bir çözüm yöntemi geliştirilen şu denklemi çözmeye çalışalım:

$$' \quad - \; - \; - \quad ^{2} \; - \; - \quad = 0 \tag{3.62}$$

Burada , , sabit katsayılardır. Denk.(3.36) ile Denk.(3.62) karşılaştırıldığında

$$= - \tag{3.63a}$$

$$\frac{2'}{} \quad \frac{'}{} \quad - \tag{3.63b}$$

elde edilecektir. (3.63a) ve (3.63b)'nin çözülmesiyle $= - /2$ sonucuna varılır Burada (=)'tir. Dikkat edersek

$$\frac{''}{} = \frac{-(^{2} + 2\,)}{4} \; \frac{1}{2} \tag{3.64}$$

şeklinde karşımıza çıkacaktır. Denk.(3.36) ile ( ) fonksiyonu

$$\frac{''}{} - (\,) = - \frac{}{2} \Rightarrow \frac{-(^{2} + 2\,)}{4} \cdot \frac{1}{2} - (\,) = - \frac{}{2} \tag{3.65}$$

ve

$$(\,) = (- \frac{(^{2} \quad + 2\,)}{4} \;) \cdot \frac{1}{2} \tag{3.66}$$

olarak yazılır. Denk.(3.39)'a göre dönüştürülmüş denklem:

$$'' - (-)\,(- \frac{(\;^{2} + 2\;)}{4})\,\frac{1}{2} = 0 \qquad (3.67)$$

ve

$$'' + (\frac{4\; - (\;^{2} \quad + 2\;)}{4}\;)\;\frac{1}{2} = 0 \qquad (3.68)$$

olacaktır. Dikkat edilirse ($\frac{4\; - (\;^{2} + 2\;)}{4}$) olarak görülen katsayının durumuna göre problem çözümü değişiklik gösterecektir. Eğer $= (\frac{4\; - (\;^{2} + 2\;)}{4})$ olacak şekilde kısaca tanımlarsak, 'nın iki farklı durum için ($= 0 \neq 0$) ayrı ayrı çözmemiz gerekecektir. Problemin bu noktasından itibaren çözümünü dallandırıyoruz.

Durum 1: Eğer 4 $= (\;^{2} + 2\;)$ olursa (dolayısıyla $= 0$), dönüştürülmüş denklem olan (3.68) şu şekilde olacaktır:

$$'' = 0 \qquad (3.69)$$

fonksiyonunun formu $= \; +$ şeklinde olmalıdır. Bundan dolayı (3.40) denklemini

$$= \;\; (\ln\; - \frac{1}{\;}\; - \;) = - \;\; (\ln\; - \frac{1}{\;}\; \frac{+}{- /2}\;) \qquad (3.70)$$

veya

$$= \frac{-1}{(\; + \;)} - \frac{\;}{2} \qquad ^{-}= \;/ \qquad (3.71)$$

şeklinde yazarak çözüme ulaşmış olacağız.

≠ 0), böyle bir genel durum

Durum 2: Eğer 4 ≠ ($^2 + 2$) olursa (dolayısıyla için (3.68) denklemini şu şekilde yazabiliriz:

$$'' + 2 \quad = 0 \tag{3.72}$$

Elde ettiğimiz (3.72) denklemi bir Euler-Cauchy Equation diferansiyel denklemidir. Euler-Cauchy diferansiyel denkleminin genel formu

$$'' + \quad ' + \quad {}_2 = 0 \tag{3.73}$$

şeklindedir ve çözümü için bilinen aşağıdaki dönüşümü uygularsak lineer forma gelecektir.

$$'' + (\, - 1) \, ' + \; = 0 \, , \; (\; = 0 \, , \; = \;) \tag{3.74}$$

Denk.(3.74)'ün karakteristik denklemi ise

$$^2 - \; + \; = 0 \tag{3.75}$$

şeklindedir ve kökleri de $_1$ ve $_2$ olarak tanımlarsak, $_1$ ve $_2$ kökleri reel, komplex yada çakışık olabilir. Köklerin bu üç durumuna göre çözümler farklılaşacaktır.

$1 \pm \sqrt{1-4}$

Durum 2a: Eğer $(1 - 4 \;) > 0$, $_1 \neq \; _2$ ve $_1, \; _2 \in \mathbb{R}$.ise $_{1,2} = \; _2$ olacaktır. Böylece bu durum için ( )'in çözümü

$$= {}^1 \quad + {}^2 \tag{3.76}$$

olur ve sonuç olarak (3.40) yardımıyla ( )'in çözümü

$$\frac{1}{} \quad - \quad \frac{1}{} \quad \frac{1 \qquad +2}{} \tag{3.77}$$

$= (\ln \;) = -(\ln \qquad - /2 \qquad)$

veya

$$1^1 + \quad 2 \qquad = - \quad (\quad + \quad 2 \quad) \qquad (3.78)$$

bir yazımıyla

$$= - \frac{1}{\;} \left(\frac{{}_1 +^{-} \quad 2}{{}_1 +^{-} 2} + \frac{\;}{2} \right)^{-} = 2/1 \qquad (3.79)$$

şeklindedir.

Durum 2b: Eğer $(1 - 4\;) = 0$ $\quad {}_1 = {}_2 =$ ve $\in \mathbb{R}$ olduğunda çakışık kökler $= {}^1{}_2$ olmalıdır. Bundan dolayı $(\,)$'in çözümü

$$= + \ln \qquad (3.80)$$

olarak yazılacaktır. Yine Denk.(3.40) yardımıyla $(\,)$'in çözümünü yazmaya çalışırsak

$$= \frac{1}{\;}(\ln \quad) = - \frac{1}{\;}(\ln \quad \frac{+\ln}{-/2}) \qquad (3.81)$$

veya

$$= - \frac{1}{\;} \left(\frac{^{-1} + \;^{-1}(1 + \ln\;)}{+\ln} + \frac{\;}{2} \right) \qquad (3.82)$$

olacaktır. $= {}^1\bar{2}$ olarak yerine yazarsak ve sabitler arasında düzenleme yaparsak

$$= - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{-+} + \;\right) = 1/2^{-} = 1/2 \qquad (3.83)$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$= - \frac{+1}{2} - \frac{1}{(\bar{} + \ln)} \qquad (3.84)$$

olarak sonuca ulaşılır.

Durum 2c: $_1, \; _2 \notin \mathbb{R}, \; _1 = +_2 = -$ olduğunda ($= \sqrt{-1}$). $( )$'in çözümü

$$= ^{-} (\cos + \sin) \qquad (3.85)$$

olmaktadır. Son olarak $( )$'in çözümü (3.40) yardımıyla,

$$= \frac{1}{(\ln}) = - \frac{1}{(\ln} \frac{-(\cos + \sin)}{-/2 }) \qquad (3.86)$$

veya

$$= - \frac{1}{} \left(\frac{(\bar{} -) \cos - (\bar{} +) \sin}{\cos + \bar{} \sin} + \frac{}{2} \right), \bar{} = 2/ 1 \qquad (3.87)$$

olarak bulunur. Belirtmek gerekirse, Mortici'nin (2004) yayınladığı şartlara göre çıkan çözüm Denk.(3.84)'te elde edilenin aynısıdır. Fakat o çalışmada, yukarıda belirtilen , , 'nın değişkenliklerine göre diğer durumların sonuçlarına ulaşılamamıştı.

3.3. Yeni Çözüm Yöntemin Değerlendirilmesi

Bu yöntemle, genel Riccati denklemini, kolayca çözülebilen ikinci dereceden lineer homojen diferansiyel denklem haline getiren yeni bir dönüşüm önerilmiştir. İndirgenmiş denklem, bahsedildiği üzere ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin en basit biçimidir. Bu nedenle, dönüştürülmüş denklemi indirgemek için ilave işleme gerek yoktur. çarpımı şeklinde verilen katsayıya baktığımızda, çözümün açık veya kapalı biçimde ifade edilip edilmediğini hemen görmek mümkündür. Analitik çözüm için zaten gerekli olan herhangi bir farklı çözüme ihtiyaç duymadığımız için bu yöntem daha da basittir ve Riccati diferansiyel denkleminin çözümlerinin öğretilmesinde tercih edilebilir. Yöntem, denklemle ilgili işlemler üzerinde herhangi bir koşul koymadığından, çok geniş uygulama alanı olabilecektir.

Ayrıca bu yeni yöntem ile, Riccati denkleminin özel çözümleri de elde edilebilir. Bu nedenle, orijinal denklemi lineer bir birinci mertebeden diferansiyel denklem haline dönüştürmek için geleneksel yöntem kullanılarak çözüme de ulaşılabilir. Bu durum, Örnek 3.6'da gösterilmiştir.

3.4. ($''-$ ( ) $=$) Tipindeki Denklemlerin Bir Özel Çözümünün Yeni Bir Yöntemle Bulunması

Bu kısımda, bir önceki kısımda verilen Riccati denklemi için yeni bir çözüm yönteminden hareketle, $'' - \;(\;) = 0$ yapısındaki denklemlerin bazı özel tipleri için özel çözüm bulma yöntemi üzerinde çalışılacaktır.

Hatırlanırsa

$$'' -= 0 \tag{3.89}$$

şeklinde bir dönüşüm yapılmıştı. Burada ’nun katsayısına göre denklemin çözümünün yapılabilirliği veya çözümün zorluğu değişmektedir. Burada katsayısını ’in birçok şekilde fonksiyonu olarak görebilmek mümkündür. Bu denklemden bir önceki adım olan

$$\frac{''}{} - (\,) = (\,) \tag{3.90}$$

ifadesini hatırlayalım. Bu ifadeyi şu şekilde düzenlersek

$$'' - (\;+\;)\; = 0 \tag{3.91}$$

şeklinde bir yapı elde ederiz. Dikkat edilirse (3.91) denklemi ile (3.89) denklemi form olarak benzerdir. değişken katsayısı (+) değişken katsayısına denk gelmektedir. Bir önceki kısımlarda verdiğimiz yeni yöntemde

$$[\frac{2'}{} + \frac{'}{}] = () \tag{3.92}$$

olarak tanımlamıştık. Şimdi = 1 olarak alalım ve (3.92) denklemini tekrar şu şekilde düzenleyelim:

$$= \int \quad {}^{2} \tag{3.93}$$

Burada integral sabiti olarak gelmektedir. (3.93) denkleminin iki kere türevini alırsak

$$'' = ' \quad 2 \quad + 2 \quad 2 \quad \frac{}{2} \quad \frac{}{4} \tag{3.94}$$

elde edilir. = 1 ile birlikte = 0 olarak kabul ederek (3.93) ve (3.94) (3.90) denkleminde yazarsak ifadelerini

$$() = \frac{2 \, {}'^{2} + 4 \, {}^{2} \int \quad {}^{2} \int}{{}^{2}} = \frac{'}{2} + \frac{{}^{2}}{4} \tag{3.95}$$

elde ederiz. Bu değerlerle birlikte (3.91) denklemini tekrar yazarsak

$$'' - (\frac{'}{2} + \frac{{}^{2}}{4}) = 0 \tag{3.96}$$

olur. Dikkat edilirse fonksiyonu (3.93) denkleminde sadece ’ye bağlıdır ve

(3.96) denkleminde ’nin katsayısı sadece ’yi içermektedir. O halde, herhangi bir fonksiyonu için (3.96) denkleminin bir özel çözümü (3.93) ifadesine eşittir. Şimdi elde ettiğimiz yeni durumu genelleştirmek amacıyla yerine ve yerine de yazarak tekrar genel bir tanımlama yapalım:

$$'' - (\frac{'}{2} + \frac{{}^{2}}{4}) = 0 \tag{3.97}$$

şeklinde bir denklem için belirlenen yada bulunabilen fonksiyonuna göre bir özel çözüm

$$\int \qquad (3.98)$$

şeklindedir.

Örnek 3.9: $= 2$ için $'' - (^2 +) = 0$ denkleminin bir özel çözümü

Örnek 3.10: $= -\frac{2}{}$ için $'' - (\frac{^2}{}) = 0$ denkleminin bir özel çözümü

'dir. Denklem aynı zamanda bir Euler-Cauchy denklemidir ve çözülebilir.

Fakat hızlıca bir özel çözümü bu şekilde görmek mümkündür.

Örnek 3.11: sabit reel bir sayı olmak üzere $'' - (^2) = 0$ denkleminde $=$ olduğu kolayca görülebilir. Denklemin bir özel çözümü $_1 =$ ^{2} olacaktır.

Örnek 3.12: $'' - (\frac{}{2} + \frac{2}{4}) = 0$ denkleminde $=$ olduğu kolayca görülebilir.

Denklemin bir özel çözümü olacaktır.

için bir genelleştirme yaparak konuyu tamamlayalım. $= +$ şeklinde genel bir fonksiyon ise (ve sabit katsayılar) (3.97) denklemi ile

$$'' - (\frac{2\ 2 \qquad + 2 \quad + {}^2 + 2}{4}) = 0 \qquad (3.99)$$

elde edilir. Bu bir tür Weber denklemidir. (3.99) formundaki bir denklemin bir özel çözümü (3.98) yardımıyla

$$2$$

$$= \quad \frac{}{} \quad 2 \tag{3.100}$$

olacaktır. ve sabit katsayılarının tesptine bağlı olarak özel çözüm bulunabilir. Örneğin $\neq 0$ ve $= 0$ durumunda denklem $'' - (\;^{2\,2})$ $\frac{}{4}$ $= 0$ şeklinde bir Weber denklemi olacaktır ve bir özel çözümü $=$ $\frac{2}{}$ şeklindedir. Weber denklemi için ’nın alacağı her dereğer için bir özel çözüm rahatlıkla bulunabilir.

’in kuvvetlerini kapsayacak şekilde daha da genelleştirirsek, $=$ olduğunu düşünelim ve aynı adımları takip edelim:

$$'' - \left(\frac{-1}{2} + \frac{2\;2}{4} \right) = 0 \tag{3.101}$$

(3.101) şeklinde bir denklemin bir özel çözümü

$$\frac{+1}{} \tag{3.102}$$

olacaktır.

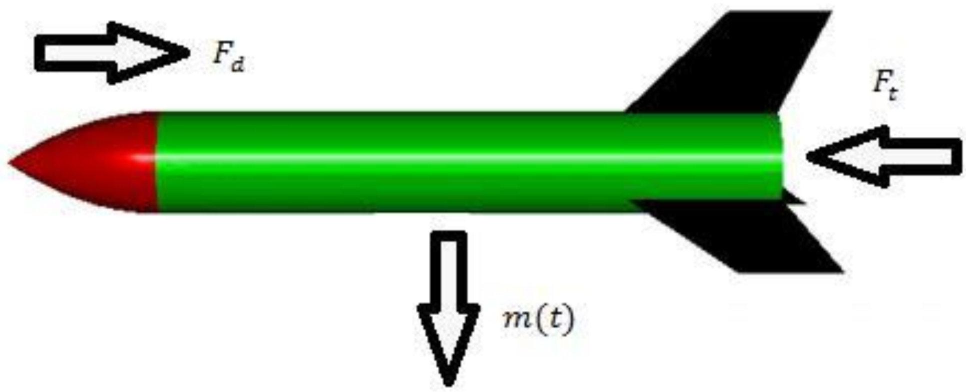
4. RICCATI DENKLEMİNİN MÜHENDİSLİK VE DİĞER ALANLARDAKİ UYGULAMALARI

Riccati denklemine, birçok bilim dalında şaşırtıcı bir şekilde karşılaşılmaktadır. Son yıllarda mühendislik, fizik, kuantum mekaniği, termodinamik, otomatik kontrol sistemleri ve dizayn simülasyon sistemlerinde örnekleri görülebilmektedir. Birçok ikinci mertebeden diferansiyel denklem uygulaması da kolaylıkla Riccati denklemine dönüştürülebilmektedir. Fakat Riccati denklemi için önerilen çözümler, genellikle karmaşık olduğundan, çok sık olarak Riccati denklemine dönüştürülmekten kaçınılmaktadır.

Bu bölümde, bazı bilim dallarındaki direkt Riccati denklemi formunda ya da denklemlerin Riccati denklemine dönüştürülerek karşılaşılan problemleri, Bölüm 3'te verilen yeni yöntemi kullanarak çözüm bulmaya çalışacağız.

4.1. Hava Direncine Maruz Kalan ve Kütlesi Azalan Hava Aracı Problemi (Füzenin Hareket Denklemi)

Bir füze hareketi, seyir halindeyken ve tek yönde impuls-momentum ilkesi kullanılarak incelenecektir. Bir füzenin sahip olduğu yakıt miktarını sürekli tüketmesini de göz önünde bulundurarak, kütleyi zaman bağlı olarak değişken kabul etmemiz gerekmektedir.



Şekil 4.1 Seyir Halindeki Bir Füze ve Etki Eden Kuvvetler

Burada : Hava direnç kuvveti (Drag Force), : İtme kuvveti (Thrust Force) ve ( ): Füzenin zamana bağlı değişken kütlesidir. Newton'un İkinci Kanunu'na göre denklemi yazarsak

$$\sum = \frac{(\ )}{} \Rightarrow - = \frac{(\ )}{} \tag{4.1}$$

olmalıdır. Burada füzenin zamana bağlı hız fonksiyonudur. Hava direnç kuvveti hızın karesiyle orantılı olarak değişmektedir ve (4.1) denkleminde olarak alınacaktır. olarak tanımlanan direnç katsayısıdır. Esasen bu değer (=) şeklinde hesaplanmaktadır ve sabit olarak kabul edilen , , bilinen değerleriyle bir katsayı olarak karşımıza çıkmaktadır. Burada (: havanın yoğunluğu, : Füzeye hava direncine maruz kalan etken alan ve : hava direnç katsayısı-drag coefficient-) olarak tanımlanmaktadır.

(4.1) denkleminde türevleri alıp denklemi tekrar yazarak

$$2 \tag{4.2}$$

elde ederiz. (4.2) denklemi kütle kaybeden sistemler için yazılmaktadır. Şimdi olarak yazalım ve denklemi tekrar düzenleyelim:

$$- + \quad ^2 - \quad = 0 \tag{4.3}$$

Dikkat edilirse, (4.3) denklemi = olacak şekilde bir Riccati Denklemidir. Kolaylıkla gösterilebilir ki;

$$() = - \quad () = \quad () = \tag{4.3}$$

ifadeleri Riccati denkleminin değişken katsayılarıdır. Bölüm 3.1'de verilen yeni yöntemi kullanarak (4.3) denklemini çözmeye çalışalım.

(4.3) ve (3.36) denklemlerini karşılaştırarak ve türevleri zamana bağlı olarak yazarsak

$$= \qquad \text{(4.4a)}$$

$$2 \qquad [\quad + \quad] = - \qquad \text{(4.4b)}$$

elde edilecektir. (4.4a) denklemi (4.4b)'de yerine yazılırsa

$$2 \quad - = - \quad \Rightarrow = \qquad \text{(4.5)}$$

olarak fonksiyonu elde edilir (Burada sabit). Buradan hareketle, (3.36)'daki diğer terimleri de karşılaştırırsak

$$- (\,) = - \qquad \text{(4.6)}$$

olduğu görülür. Belirlediğimiz ve fonksiyonlarını yerlerine yazarsak

$$- (\,) = - \quad \Rightarrow (\,) = \qquad \text{(4.7)}$$

elde edilir. ( ) ve fonksiyonlarını denklem (3.39)'da yerine yazarsak, dönüştürülmüş denklem şu şekilde olacaktır:

$$2 \qquad 2 - (\,)(\,) = 0 \qquad \text{(4.8)}$$

veya

$$2 \qquad 2-(\qquad {}_2) = 0 \tag{4.9}$$

Burada kütle fonksiyonunu zamana göre lineer değişen bir yapıda alabiliriz. Füzenin başlangıçtaki toplam kütlesi olsun ve yakıtın azalmasını da zamana bağlı olarak − olarak tanımlayalım ve burada ’yı sabit reel bir sayı olarak alalım. O halde;

$$(\,) = \; - \tag{4.10a}$$

$$\dot{} = - \;, \qquad \ddot{} = 0 \tag{4.10b}$$

elde edilir. İlaveten füzenin hareketini itme kuvvetinin sabit olduğu zaman dilimleri için inceleyelim ve = olarak kabul edelim. (4.10a) ve (4.10b)’yi kullanarak (4.9) ifadesini tekrar yazalım:

$$2 \qquad 2-(\,(\;-\;)2) \qquad = 0 \tag{4.11}$$

Denklem (4.11) bir ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü, bilinen yöntemlerle gerçekleştirildiğinde,

$$= {}_1(\;-\;) \qquad + {}_2(\;-\;) \tag{4.12}$$

olarak bulunacaktır. Burada 1 ve 1 sabitlerdir. Şimdi çözüm için müracaat ederek denklem (3.40)’a

yazabiliriz. Kolaylık olması açısından ve olarak belirleyelim. Denklemi tekrar düzenlersek

$$= \frac{-\ (-\ )^{1} \qquad - \ (-\ )^{2}}{(-\ )^{1} \qquad + (-\ )^{2}} \tag{4.14}$$

veya

$$= \frac{-\ (-\ )^{1} \qquad -^{-}\ (-\ )^{2}}{(-\ )^{1} \qquad +^{-}(-\ )^{2}} \tag{4.15}$$

şeklinde olacaktır. Biraz daha sadeleştirme yaparsak

$$= \frac{-}{} \ \frac{-^{-}\ (-\ )^{2^{-}1}}{(\qquad 1+(-\ )\ )} \tag{4.16}$$

olarak çözüm elde edilir. Burada ($^{-}= 2/\ 1$)'dir. Elde edilen denklemi bu şekliyle kullanabiliriz. Fakat daha sade bir form elde etmek için üzerinde biraz çalışacağız.

Başlangıç Değer Problemleri için Denklemlerin Sadeleştirilmesi:

Burada, $^{-}$sabitini başlangıç değer problemlerinde hesaplamamız gerekecektir.

= 0 anı için = $_0$ verildiyse, (4.16)'dan

$$^{-}= \frac{-\left(\frac{0}{} + \right)}{\frac{}{}(\qquad +)^{2-1}} \tag{4.17}$$

yazılır. Devam edelim ve buradan hareket ederek daha kısa bir formda yazmaya çalışalım. $_0$ ilk hızı için hesaplanan bu $^{-}$ değerini (4.16)'da yerine koyup düzenleyelim:

$$(\frac{0}{\ } + \ ) \quad 2- \ 1$$

(4.18)

Karmaşıklığı azaltmak üzere şu tanımlamaları yapalım:

$$= 2 - 1$$ (4.19a)

$$= (^0 + {}_1) (^0 + {}_2)$$ (4.19b)

$$- \Phi ( ) = ( )$$

(4.19c)

(4.19) denklemleriyle birlikte ve bazı manipülasyon işlemlerinden sonra (4.16)'da elde edilen denklem

$$= \quad (\frac{\ }{1 - \Phi} - {}_2)$$ (4.20)

şeklinde kolaylıkla kullanabileceğimiz yeni bir denklem haline gelir. Dikkat edilirse, (4.20) denkleminde değişkenine bağımlı olan sadece Φ fonksiyonu vardır ve diğer değerlerin tamamı sabitleri içermektedir.

Bu yeni tanımlamalarımıza göre, hesaplamalar sırasında ve ¯ sayılarını şu şekilde yazarak da kullanabiliriz:

$$= 1 -$$ (4.21)

$$\bar{\ } = -$$ (4.22)

Şimdi (4.20) denkleminden hareketle, konum fonksiyonunu yazmak istersek

$$= \int \quad = \int \qquad \_\_ \; (\qquad - \;) \qquad (4.23)$$

(4.23) denkleminin analitik olarak integrali alınamamaktadır ve sayısal yöntemler kullanılarak çözülebilecektir.

Bu çalışma ile ilgili bir sayısal örnek inceleyelim.

Örnek 4.1: Bir Tomahawk füzesi bir hedefe fırlatılmaktadır. Füzenin direnç katsayısı $= 0{,}04$ olarak alınmaktadır. Füzenin başlangıçtaki toplam ağırlığı 1440 kg ve 0,056 kg/s olacak şekilde yakıt tüketmektedir. $= 0$ anındaki hızı sıfır alınacağına göre 75 dakika sonra hedefine ulaştığındaki hızının ne olduğunu araştıralım. Seyir halindeki itme kuvveti zaman dilimi boyunca sabit tutularak $= 2400$ olduğu bilinmektedir ve bu değer Tomahawk füzesinin kalkıştan sonraki sabitlenen maksimum itme kuvvetidir (Maximum Thrust Force).

Çözüm: En son elde ettiğimiz (4.20) denklemini kullanmak üzere, gerekli sabitler ve fonksiyonlar şu şekilde olacaktır:

$$= 1440 \qquad , \quad = 0{,}056 \ / \qquad (4.24a)$$

$$= 1440 - 0{,}056$$

$$_0 = 0 \ / ,$$

$$= 0{,}04 \, , _1 = 175{,}4643 \, , _2 = -174{,}4643 \qquad (4.24b)$$

$$= \ _2 - \ _1 = -349{,}9285 \qquad (4.25a)$$

$$= 1 - \qquad = -1{,}0057 \qquad (4.25b)$$

$$(\ \underline{0} \quad + \ )$$

(4.24) denklemleri ve değerleri ~~yardımıyla,~~

$$- \quad \frac{}{1440 - 0{,}056.4500} \tag{4.25c}$$

$\Phi(\ ) = (\ ) = ($ 1440 $) = 0{,}825$

elde edilir. Şimdi (4.25) denklemlerinde elde edilen değerleri denklem (4.20)'de yerleştirirsek

$$= \frac{0{,}056}{0{,}04}\left(\frac{-349{,}9285}{1 - (-1{,}0057).\,0{,}825^{-349{,}9285}} - (-174{,}4643)\right) \tag{4.26}$$

$$= 245{,}65\ / \ = 882{,}94\ /$$

olarak hız hesaplanmış olur. Bu hesaplanan hız değeri, seçilmiş olan füzenin teknik bilgilerine bakıldığında, ulaşabileceği maksimum hız değeri olan $890\ /$ değerine çok yakındır. Menzilin ne kadar olduğunu hesaplamak istersek

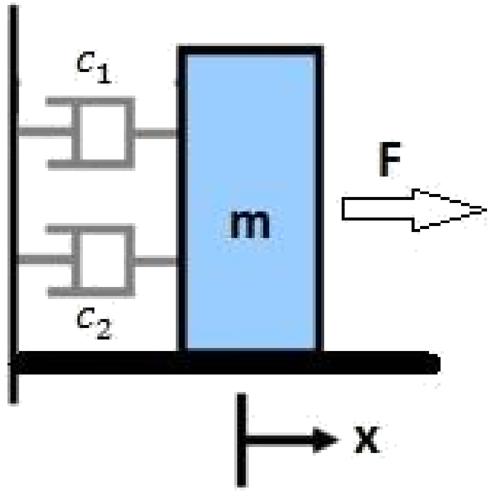
$$= \int \frac{0{,}056}{0{,}04}\left(\frac{-349{,}9285}{1 - (-0{,}9943).\,(1440 - 0{,}056.\,t)^{-349{,}9285}} + 174{,}4643\right) \tag{4.27}$$

$$\cong 1085$$

olarak bulunacaktır. Yine burada çıkan menzil değeri, seçilen füzenin teknik verilerine bakıldığında maksimum menzili olan 1104 km değerine çok yakın olarak bulunmuştur.

4.2. Bir Kütle-Çift Sönümleyici Sisteminin Analizi

Bu kısımda, sönümlü titreşim örneği olarak bir kütle ve çift sönümleyiciden ibaret mekanik sistemi inceleyeceğiz. Bu ve benzeri sistemler sönümleyici bulunduran birçok mekanizmada bulunabilmektedir. Üzerinde çalışacağımız sistemin farklılığı ise sönümleyicilerden birinin lineer olmayan (non-linear) davranış gösteren bir sönümleyici olmasıdır.



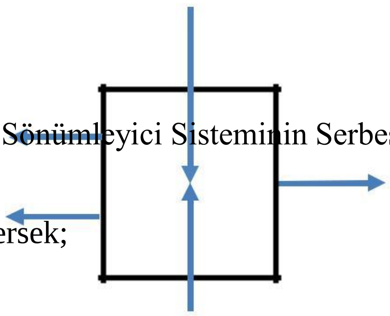
Şekil 4.2 Bir Kütle-Çift Sönümleyici Mekanik Sistem Modeli

Şekil 4.2.1'de görülen mekanik sistemde sönümleyicilerden biri non-lineer karakterlidir ve hızın karesiyle doğru orantılı tepki vermektedir. Sistemde kuvveti zamana bağlı olarak + şeklinde değiştiği kabul edilmektedir. Burada ve reel sabitlerdir.

Serbest cisim diyagramı şu şekilde oluşturulur.

$1^{\cdot}$

2



Şekil 4.3 Bir Kütle-Çift Sönümleyici Sisteminin Serbest Cisim Diyagramı

Hareket denklemini yazmak istersek;

$$\sum = + \qquad (4.28)$$

2

$$\ddot{} + {}_1\dot{} + {}_2\dot{} = + \qquad (4.29)$$

şeklinde olacaktır. ($=\dot{}$) ile hareket denklemini düzenlersek

$$\dot{} + + {}^{2} - (+) = 0 \qquad (4.30)$$

ve

$$+ \quad \frac{1}{} + \frac{2}{}{}^{2} - \frac{+}{} = 0 \qquad (4.31)$$

elde edilir. Görüleceği üzere (4.31) bir Riccati denklemidir. Bölüm 3'teki çözüm yöntemimizi uygulayalım.

$$= \frac{2}{} \qquad (4.32a)$$

$$\frac{2\dot{}}{} \quad \frac{\dot{}}{} \quad \frac{}{} \qquad (4.32b)$$

(4.32a) ve (4.32b) denklemleri çözülerek $= \frac{1}{}$ fonksiyonu elde edilir. (3.36) denklemindeki diğer terimleri de

$$\frac{\ddot{}}{} \qquad \frac{+}{} \qquad (4.33)$$

şeklinde yazılır. ve fonksiyonlarını yerlerine yazarsak,

$$\frac{\frac{2}{} \quad \frac{1}{}}{} \qquad \frac{+}{} \Rightarrow () = \qquad \frac{}{} + \frac{+}{} \qquad (4.34)$$

elde edilecektir. Şimdi (3.39) denklemine bulduğumuz ve fonksiyonlarını yazalım.

$$2\,2 \qquad \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{(\ +\ )}{} \qquad 2 + (4\,2 + \qquad 2\ ) = 0 \tag{4.35}$$

Bu denklem bir Airy denklemi türüdür ve çözümü ise

$$\frac{2 \qquad +4\ (\ +\ )}{} \qquad \frac{2 \qquad +4\ (\ +\ )}{} \tag{4.36}$$

şeklinde bulunur. Burada 1 ve 2 sabitlerdir. (4.36) denklemini kullanarak (3.40) denklemi,

$$= \frac{}{}\frac{}{} \ln \frac{\frac{2+4\ (\ +\ )}{} \qquad \frac{2 \quad +4\ (\ +\ )}{}}{\frac{}{2}} \tag{4.37}$$

şeklinde yazılır. Çözüp düzenlersek

$$= \frac{\cdot \ \frac{2+4\ (\ +\ )}{} \ - \ \cdot\ \frac{2 \qquad +4\ (\ +\ )}{}}{} \ \frac{}{} \tag{4.38}$$

olarak elde edilir. Burada ( )’dir.

Şimdi konum fonksiyonunu elde edeceğiz. Bunun için (4.38) denkleminde eşitliğin her iki tarafının integrali alınarak tarafına = koyarsak ve denklemin integralini alırsak;

$$\int = \int \frac{}{} = \int \frac{\cdot\ \frac{2+4\ (\ +\ )}{} \ - \ \frac{2\ +4\ (\ +\ )}{}}{} + \frac{}{} \tag{4.39}$$

yazılır. Denklemi çözüp düzenlersek

(4.40)

elde edilmiş olur. Burada sabitlerdir.

4.3. Newton Hareket Yasasının Riccati Denklemine Dönüştürülmesi ve Çözümü

Sunulan yöntemi kullanmak amacıyla, Newton hareket yasasını ele alacağız. Bu dönüşüm daha önce Nowakowski ve Rosu (2002) tarafından incelenmiştir. Şimdi o çalışmayla elde edilen Riccati denklemini, yeni geliştirdiğimiz yöntemle çözmeye çalışacağız.

Açısal momentumun korunumu yasasına göre, enerji korunum denklemi şu şekilde tanımlanmaktadır:

(4.41)

(4.41) denkleminin ’ye göre türevini alırsak

(4.42)

şeklinde ikinci mertebeden bir denklem elde ederiz. $( ) =$ olduğunu biliyoruz. (Power Law Central Potential) Buradan hareketle (4.42) denklemini düzenlersek

(4.43)

elde ederiz. (4.43) denklemini (4.41)’de yazarsak

(4.44)

şeklinde olacaktır. Burada $= 0$ olarak kabul ederek devam edeceğiz. Denklemi düzenlemek üzere

$$\cdot \qquad \frac{}{} \qquad = \tag{4.45a}$$

$$' \equiv \qquad \frac{}{} \tag{4.45b}$$

bağıntılarını kullanacağız. İlaveten bir dönüşüm fonksiyonuna ihtiyacımız olacak ve bunun için

$$= \frac{'}{} \tag{4.46}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlanacaktır. (4.44) denklemini bu koşullara göre düzenlersek ve ilaveten bazı manipülasyonlar uygularsak

$$' - \frac{+2}{{}^2} \, 2 - \frac{+2}{{}^2} = 0 \tag{4.47}$$

formunda özel tip bir Riccati denklemi elde edilmiş olacaktır. Bu noktadan itibaren, yeni çözüm yöntemimizi uygulayacak olursak, (4.47) ve (3.36) denklemlerinin kıyaslanmasıyla

$$= - \frac{+2}{{}^2} \tag{4.48a}$$

$$\frac{2'}{} + \frac{'}{} = 0 \tag{4.48b}$$

yazılır. (4.48) denklemlerinin çözülmesiyle $=$ fonksiyonuna ulaşılacaktır. (3.36) denkleminin diğer terimleri için

$$\frac{''}{} - (\,) = -\frac{+2}{2} \Rightarrow (\,) = \frac{+2}{2} \qquad (4.49)$$

elde edilir. Bulunan ve fonksiyonları denklem (3.39)'da yerlerine yazılırsa

$$'' \quad + (\frac{+2}{} \; 2 \quad) = 0 \qquad (4.50)$$

denklemine ulaşılır. İkinci mertebeden lineer ve sabit katsayılı bu denklemin çözümünü bulmak üzere, karakteristik denklemi yazarsak

$$2 \quad + (\frac{+2}{} \; 2 \quad) \quad = 0 \qquad (4.51)$$

şeklinde olacaktır. Bu denklemin kökleri, $= \mp \quad \frac{+2}{2}$ olduğu görülecektir. (4.50) denkleminin çözümü şu şekildedir:

$$= {}_1 \sin (\frac{+2}{2}) + {}_2 \cos (\frac{+2}{2}) \qquad (4.52)$$

(4.52) denklemini (3.39) denkleminde yazarsak 'nın çözümü için

$$= -\frac{2}{+2} \frac{}{} (\ln \frac{{}_1 \sin (\frac{+2}{}) + {}_2 \cos (\frac{+2}{})}{}) \qquad (4.53)$$

yazılır ve denklemi çözersek

$$= -\frac{\cos (\frac{+2}{}) - \sin (\frac{+2}{})}{\sin (\frac{+2}{2}) + \cos (\frac{+2}{2})} \qquad (4.54)$$

veya

$$= \frac{\tan(\quad \frac{+2}{2}) - 1}{\tan(\quad \frac{+2}{2}) + \frac{+2}{2} - 1} \qquad (4.55)$$

sonucuna ulaşılır. (4.47) denklemiyle tekrar ( ) fonksiyonunu bulalım.

$= \tan(\frac{+2}{2}) + \tan($

(4.56) denkleminin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\ln = -\frac{\ln(\cos(\frac{+2}{2}) + \sin(\frac{+2}{2}))}{(\frac{+2}{2})} \qquad (4.56)$$

bulunur. Buradan hareketle, ( ) fonksiyonu

$$\frac{\quad}{2} \quad \frac{\quad}{2} \quad \frac{2}{\quad} \qquad (4.57)$$

şeklinde çözülmüş olacaktır.

4.4. Kuantum Mekaniğinde Uygulama (4.58)

Bir çok defa zamandan bağımsız Schrödinger denklemi üzerinde çalışmalar yapılmış ve tam çözümü için Riccati denklemi çözüm metotları kullanılmıştır. Bunlardan biri de Wheeler (2004) tarafından gösterilmiştir. $\hbar$: Planc sabiti, : dalga fonksiyonu, ( ): potansiyel enerji, : orantı sabiti ve : parçacığın kütlesi olmak üzere Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2}\,'' + (\,) = \qquad (4.59)$$

şeklindedir. Bu denklemde

$$(\,) = \frac{'}{} \tag{4.60}$$

dönüşümünü uygularsak

$$' + {}^{2} - \frac{2}{\hbar^2}(\,(\,) - \,) = 0 \tag{4.61}$$

elde ederiz. (4.61) denklemi yapı itibariyle özel bir Riccati denklemidir. Denklemi yeni çözüm yöntemiyle çözelim. (4.61) denklemi ile (3.36) denklemlerini karşılaştırırsak

$$= 1 \tag{4.62a}$$

$$\frac{2\,'}{} + \frac{'}{} = 0 \tag{4.62b}$$

olduğu görülür. Bu iki denklemin ortak çözümüyle $=$ elde edilir. Yine (3.36) denkleminden

$$\frac{''}{} - (\,) = - \frac{2}{\hbar^2}(\,(\,) - \,) \Rightarrow (\,) = \frac{2}{\hbar^2}(\,(\,) - \,) \tag{4.63}$$

elde edilir. Bu değerlerle (3.39) denklemine başvurarak

$$'' - (\,\frac{2}{\hbar^2}(\,(\,) - \,)) = 0 \tag{4.64}$$

şeklinde yazılır. Burada denklemin çözümü, parçacığın içinde bulunduğu duruma göre değişecektir. $(\,)$'in sıfıra eşit olduğu serbest parçacık durumunda (4.64) denkleminin çözümü

$$= _1 \quad (\sqrt{\quad}\ ) \quad + _2 \quad (-\sqrt{\quad}\ ) \tag{4.65}$$

şeklinde olacaktır. (3.40) denklemi yardımıyla genel çözüm

$$= \ \ln \quad = \quad \hbar^2 \tag{4.66}$$

olarak bulunur. (4.60) ifadesiyle yapılan dönüşüm $(\,) = \,'$ tekrar yazılarak

$$\tag{4.67}$$

çözümü yapılırsa

$$= \ln(\ _1 \quad + _2) - (\quad \hbar \quad) + _3 \tag{4.68}$$

şeklinde dalga fonksiyonu elde edilir.

4.5. Schwarzian Türevinin Çözümü

Matematikte Schwarzian türevi, tüm lineer kesirli dönüşümler altında değişmeyen belirli bir operatördür. Tek değerli fonksiyonların teorisinde, konformal dönüşümlerde ve Teichmüller uzaylarında önemli bir yeri vardır. Denklem şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$(\,) \Rightarrow (\,'\,) - \frac{1}{2}\left(\frac{''}{\ }\right)^2 = \tag{4.69}$$

Bu denklem üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Denklemi çözebilmek üzere

$$= \frac{''}{'} \qquad (4.70)$$

şeklinde bir dönüşüm uygularsak

$$' - \frac{1}{2} \,{}^{2} - = 0 \qquad (4.71)$$

şeklinde bir Riccati denklemine dönüşür. Denklemi yeni yöntem ile çözmeye çalışalım. (3.36) denklemiyle karşılaştırırsak

$$(4.72a)$$

$$\frac{2\,'}{} + \frac{'}{} = 0 \qquad (4.72b)$$

olur. Bu iki denklem yardımıyla = olduğu görülür. Burada denklemi yardımıyla

$$'' - () = - \Rightarrow () =$$

sabittir. Yine (3.36)

olarak tespit edilir. (3.39) denklemi ile

$$'' + (2) \quad = 0 \qquad (4.73)$$

$$(4.74)$$

şeklinde yazılır. Burada ’nin sabit olduğu durumlarda çözüm

$$= \sin(\sqrt{\overline{\ }}\ ) + \cos(\sqrt{\overline{\ }}\ ) \qquad (4.75)$$

şeklinde olacaktır. (3.40) denklemi yardımıyla genel çözüm

$$= -2 \ \ln \frac{\sin(\sqrt{\ }\ ) + \cos(\sqrt{\ }\ )}{\ } \qquad (4.76)$$

ve

$$= -2 \frac{\sqrt{\ }\, 2\cos(\ \sqrt{\ }\ ) - 2\sin(\ \sqrt{\ }\ )}{\sin(\ \sqrt{\ }\ ) + \cos(\ \sqrt{\ }\ )} = \frac{-\sqrt{2}\,[1 - (\ \sqrt{\ }\ )]}{+ (\ \sqrt{\ }\ )} \qquad (4.77)$$

elde edilir. Geriye dönerek $= \frac{\ '}{\ '}$ dönüşümü ve (4.76) denklemi ile

$$\int = \int \frac{\ '}{\ } = \int -2 \ln \frac{\sin(\ \sqrt{\ }\ ) + \cos(\ \sqrt{\ }\ )}{\ } \qquad (4.78)$$

yazılır ve

$$\ln(\ ') = -2\ln(\ \sin(\sqrt{\ }\ ) + \cos(\sqrt{\ }\ )) + \qquad (4.79)$$

elde edilir. Denklemi düzenlersek

$$' = -2\ (\ \sin(\sqrt{\ }\ ) + \cos(\sqrt{\ }\ )) + \qquad (4.80)$$

olur. Bir kez daha integral alırsak sonuç şu şekilde olacaktır:

$$\int {}' = = \frac{2\sqrt{2}}{} ({}_1 \cos (\frac{\sqrt{2}}{2}) - {}_2 \sin (\frac{\sqrt{2}}{2})) + {}_3 + {}_4 \tag{4.81}$$

KAYNAKLAR

Allen, J.L., Stein, E.M, 1964, On the Solution of Certain Riccati Equations, The American Math.Montly, U.S.A., pp.1113-1115, 1964.

Harko, T., Lobo, F.S.N., Mak, M.K., 2014, Analytical Solution of the Riccati Equation with Coefficients Satisfying Integral or Differential Conditions with Arbitrary Functions, Universal Journal of Applied Mathematics, Vol.2, U.S.A., pp.109-118, 2014.

Ibragimov, N.H., 2004, A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modelling, ISBN 91-7295-988-6, Alga Publications, Karlskrona, Sweeden, 2004.

Ince, E.L., 1956, Ordinary Differential Equations, ISBN: 978-0-486-60349-0, Dover Publications, New York-U.S.A., pp. 1-204, 1956.

Kreyszig, E., 1999, Advanced Engineering Mathematics, ISBN: 0-471-33328-X, John Wiley&Sons. Inc, New York-U.S.A., pp.1-146, 1999.

Mak, M.K., Harko, T., 2012, New Integrability Case for the Riccati Equation, Applied Mathematics and Computation, Vol.218, Netherlands, pp.10974-10981, 2012.

Mortici, C., 2008, The method of the variation of constants for Riccati Equations, General Mathematics Vol. 16, No. 1, Romania, pp.111-116, 2008)

Nowakowski, M., Rosu, H.C., 2002, Newton's Laws of Motion in Form of Riccati Equation, Phys Rev. E. Stat. Nonlin. Soft Matter Phys., Guanajuato, Mexico, 2002.

Pala, Y., 2006, Modern Differential Equations and Its Applications, ISBN: 075-591-936-8, Nobel Publications, Bursa-Turkey, pp.1-188, 2006.

Rao, P.R.P., 1962, The Riccati Differential Equation, The American Mathematical Montly, U.S.A., pp.995-996, 1962.

Rao, P.R.P., Ukidave, **1968**, V.H., Separable forms of the Riccati Equation, The American Mathematical Montly, Vol.75, U.S.A., pp.38-39, 1968.

Siller, H., 1970, On the Separability of the Riccati Differential Equation, Mathematics Magazine, Vol.43, No.4, U.S.A., pp.197-202, 1970.

Sugai, I., 1960, Riccati's Nonlinear Differential Equation, The American Mathematical Monthly, Vol.67, No.2, U.S.A., pp.134-139, 1960.

Wheeler, N., 2004, Quantum Application of the Riccati Equation, Reed College Thesis, Portland, USA, 2004.

Wong, J.S.W., 1966, On Solutions of certain Riccati diff erential equations. Math. Magazine, Vol.39; pp.141-143, 1966.

Wyle, C.R., 1985, Advanced Engineering Mathematics, ISBN 0-07-072188-2, McGraw Hill Book Co., Singapore, 1985,

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı:	Mutlu Özgür Ertaş
Doğum Yeri ve Tarihi:	Bursa, 06.11.1979
Yabancı Dili:	İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)	
Lise:	Bursa Cumhuriyet Lisesi / 1996
Lisans:	Uludağ Üniversitesi Makine Mühendisliği / 2002
Yüksek Lisans:	Uludağ Üniversitesi Makine Mühendisliği / 2017
Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:	Makelronik İmta Ltd.Şti. (2001/2002)
	Er-Çim Gıda Makineleri Ltd.Şti.(2002 - 2003)
	Pisagor Mühendislik (2003-2006)
	Euroscientific Ltd.Şti..(2006 - 2007)
	Magneti Marelli Mako A.Ş. (2007 - Halen)
İletişim (e-posta):	moertas@gmail.com
Yayınları:	