LOKAL HALKALAR ÜZERİNE OCTONİON DÜZLEMLER

İlknur ÖZKAN CANDAN

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOKAL HALKALAR ÜZERİNE OCTONİON DÜZLEMLER

İlknur ÖZKAN CANDAN

Doç. Dr. Atilla AKPINAR
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2016

TEZ ONAYI

İlknur ÖZKAN CANDAN tarafından hazırlanan **"Lokal Halkalar Üzerine Octonion Düzlemler"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Atilla Akpınar

Başkan: Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Prof. Dr. İbrahim GÜNALTILI
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fak.
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Üye: Doç. Dr. Atilla AKPINAR
Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR

Enstitü Müdürü

28/04/2016

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/06/2016
İmza
İlknur ÖZKAN CANDAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LOKAL HALKALAR ÜZERİNE OCTONİON DÜZLEMLER

İlknur ÖZKAN CANDAN

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Atilla AKPINAR

Bu tezde; R birimli, değişmeli ve birleşmeli bir lokal halka olmak üzere girdileri bir O octonion R-cebirden alınarak oluşturulan 3x3 matris uzayının $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3, J_\Gamma)$ ile gösterilen simetrik elemanlarının bir özel alt kümesi ile çalışılmıştır. $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3, J_\Gamma)$ kübik R-cebiri üzerinde iz form olarak bir matrisin izi ve norm form olarak bir matrisin determinantı seçilerek elde edilen bir kuadratik Jordan cebir sınıfının elemanları ile bir octonion düzlemin nasıl inşa edildiği incelenmiş ve böylece bu octonion düzlemin üzerinde olma bağıntısı, komşuluk bağıntısı ve bir noktanın bir doğruya yakın olma bağıntısı farklı bir biçimde ifade edilebilmiştir. Son olarak, elde edilen octonion düzlemin bir projektif düzlem olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: lokal halkalar, exceptional Jordan cebirleri, octonion düzlemler, projektif düzlemler

2016, vi + 87 sayfa

ABSTRACT

Mse Thesis

OCTONION PLANES OVER LOCAL RINGS

İlknur ÖZKAN CANDAN

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Atilla AKPINAR

In this thesis; the special subset which consists of symmetric elements of 3×3 matrix spaces denoted by $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3, J_\Gamma)$, whose entries are taken from octonion $\mathrm{R}-$algebra O where R is a unital, commutative, associative local ring, is studied. It is examined that how to construction of an octonion plane with the elements of a class of quadratic Jordan algebras which is obtained by choosing trace of a matrix as the trace form and determinant of a matrix as the norm form on the cubic $\mathrm{R}-$algebra $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3, J_\Gamma)$. So the incidence relation, the neighbour relation and the relation to be near to a line of a point can be expressed in different way on this plane. Finally, it is showed that the obtained octonion plane is a projective plane.

Key Words: local rings, exceptional Jordan algebras, octonion planes, projective planes

2016, vi + 87 pages

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca; tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım hocam Doç. Dr. Atilla AKPINAR' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bilgi ve birikimleriyle bana birçok konuda yardımcı olan hocalarım Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ, Prof. Dr. Basri ÇELİK ve Arş. Gör. Dr. Fatma ÖZEN ERDOĞAN' a çok teşekkür ederim.

Beni bu günlere getiren ve bu süreçte maddi ve manevi desteklerini her an yanımda hissettiğim kıymetli annem Beyşah ÖZKAN ve babam Mehmet ÖZKAN' a, bu zor ve uzun süreçte hissettirdiği sevgi ile her zorluğu aşmamı sağlayan çok değerli eşim Teyfik CANDAN' a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

KUAP(F)-2014/50 numaralı proje ile bu çalışmayı destekleyen U. Ü. Bilimsel Araştırmalar Komisyonu'na teşekkür ederim.

İlknur ÖZKAN CANDAN

27/06 /2016

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1946 da A.A. Albert tarafından ismi verilen Jordan cebirleri, bir fizikçi olan ve kuantum mekaniğinin cebirsel formulasyonunu elde etmeye çalışan P. Jordan tarafından 1930 ların başlarında çalışılmıştır. Bu yöndeki çalışmalarıyla, bu cebirler ile Lie grupları arasındaki ilişkinin görülmesine ve bazı geometrik keşiflere yol açmıştır.

Faulkner'a (1970) göre, octonion düzlemlerle ilgili ilk çalışma Moufang (1933) tarafından yapılmıştır. Moufang, Harmonik Nokta Teoremini sağlayan Dezargsel olmayan bir projektif düzlem örneği olan bir projektif octonion düzlem kurmuş ve bu düzlemi octonion (Cayley-Dickson) bölümlü cebiri ile koordinatlamıştır.

Girdileri bir O octonion R-cebirden alınarak oluşturulan 3x3 matris uzayının $X \mapsto \bar{X}^t$ involusyonu altında simetrik kalan elemanların $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3)$ alt uzayı üzerinde, $X \cdot Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ çarpma (Jordan çarpımı) işlemi tanımlanırsa $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3)$ bir Jordan R-cebiri yapısına sahip olur. Yine Faulkner'a (1970) göre $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3)$ cebirini bir octonion düzlemi tanımlamakta ilk olarak Jordan (1949) kullanmıştır. Jordan bu çalışmasında O yu reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir reel octonion bölümlü cebiri olarak almış ve bir projektif düzlemin nokta ve doğrularını temsil etmek için $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3)$ deki primitive idempotentleri kullanmıştır. Freudenthal (1951), Jordan'ın (1949) çalışmasındakine benzer bir kuruluş vermiştir.

Springer (1960), Freudenthal-Jordan tarafından verilen projektif düzlem koordinatlamasının O nun karakteristiği 2 ve 3 den farklı bir cisim üzerinde tanımlı bir octonion bölümlü cebiri olması durumunda da yapılabileceği göstermiştir.

Springer (1968), karakteristiği 2 ve 3 den farklı bir cisim üzerinde tanımlı split (yani bölümlü olmayan) octonion cebirleri ile koordinatlanan düzlemler ile de çalıştı. Farklı iki doğruları birden fazla noktada kesişebildiğinden bu düzlemler birer projektif düzlem değildirler.

McCrimmon (1966) çalışmasında bir kuadratik Jordan cebir notasyonu kullanıldı ve bu sayede Jacobson (1966)'da verilen yapısal teori; R nin birimli, değişmeli ve birleşmeli keyfi bir halka üzerinde tanımlı kuadratik Jordan cebiri olması durumuna genişletilmiş oldu. McCrimmon (1969), tüm karakteristikler için geçerli olan ve Freudenthal (1954, 1959), Springer (1962) ve Tits'in yayımlanmamış çalışmalarında verilen tüm yaklaşımları içinde özel bir durum olarak barındıran bir genel yapıya ulaştı. Faulkner (1969) da bu genel yapıyı kullanarak, karakteristiği 2 olan bir cisim üzerinde tanımlı kuadratik Jordan cebiri ile koordinatlanan octonion düzlemlerle çalıştı.

Faulkner (1970), makalesinde keyfi karakteristikli bir cisim üzerinde tanımlı bir octonion cebiri yardımıyla kurulan octonion düzlemleri ele almıştır.

Daha sonrasında bu yapılar üzerine farklı çalışmalar yapılmıştır. Bunlara örnek olarak, McCrimmon (1971), Springer (1973), Racine (1977), Faulkner (1988), Springer ve ark. (2000), Pumplün (2010) çalışmalarını verebiliriz.

Jordan cebirleri ve onların uygulamaları hakkında 1978 e kadar yapılan çalışmaların iyi bir derlemesi olarak McCrimmon'ın (1978) çalışmasına bakılabilir. Bunların fizikteki uygulamaları için Okubo (1995) ve bilhassa parçacık fiziğindeki uygulaması için Gürsoy (1996) çalışmaları incelenebilir.

Faulkner (1970)'da verilen octonion düzlem kuruluşunun bir genellemesi Bix (1980)'de verilmiştir. Burada, R birimli, değişmeli ve birleşmeli olan bir lokal halka olmak üzere girdileri bir O octonion R-cebirden alınarak oluşturulan 3x3 matris uzayının $\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\Gamma\right)$ ile gösterilen simetrik elemanlarının bir özel alt kümesi ile çalışılmıştır. Bu küme üzerinde bir norm form (determinant) ve bir iz form (bir matrisin izi) yardımıyla bir (exceptional) kuadratik Jordan cebir yapısı kurulmuştur. Bu tezde, Bix (1980)'de verilen octonion düzlem kuruluşu ele alınmıştır. Bu cebir hakkında daha detaylı bilgi için Jacobson (1968), McCrimmon (2004) ve Faulkner (2014) çalışmalarını incelemeye değer görüyoruz.

2. bölüm, tez için ihtiyaç duyulan temel bilgilerin tanım ve teoremler olarak verildiği bölümdür. 3. bölümde $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3, J_\Gamma)$ kümesinin bir kübik R-cebir olduğuna dair işlemler detaylı bir şekilde incelenmiştir ve nihayetinde bu cebirin literatürde çok iyi bilinenen bir kuadratik Jordan cebiri sınıfı olduğu gerçeği ifade edilmiştir. Son bölümde, $\mathrm{H}(\mathrm{O}_3, J_\Gamma)$ cebiri üzerinde iz form olarak bir matrisin izi ve norm form olarak bir matrisin determinantı seçilerek elde edilen kuadratik jordan cebirinin elemanları ile bir octonion düzlemin nasıl inşa edildiği incelenmiş ve böylece bu octonion düzlemin üzerinde olma bağıntısı, komşuluk bağıntısı ve bir noktanın bir doğruya yakınlığı farklı bir biçimde ifade edilebilmiştir. Elde edilen octonion düzlemin bir projektif düzlem olduğu gösterilerek bu çalışma tamamlanmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu kısımda; bu çalışmaya temel teşkil edecek tanım, teorem ve gösterimlere yer verilmiştir. Genel bilgilerin bir araya getirilmesinde, alfabetik sırayla, Beachy (1999), Blyth ve Robertson (2002), Çiftçi (2015), Elman ve ark. (2008), Faulkner (2014), Fraleigh (1982), Hungerford (1974), Jacobson (1985), Malik ve ark. (1997), McDonald (1976), Schafer (1996) çalışmalarından faydalanılmıştır. Üstelik, bu bölüm içinde verilen spesifik bilgiler için gerekli görülen yerlerde ayrıca başka çalışmalar da referans gösterilmiştir.

Tanım 2.1: $(R,+)$ bir abel grubu ve "$\cdot$" (çarpma) R üzerinde tanımlı bir iç işlem olsun. Eğer her $a,b,c \in R$ için

$$(a+b)c = ac+bc$$

ve

$$c(a+b) = ca+cb$$

şartları sağlanıyorsa $(R,+,\cdot)$ üçlüsüne bir *halka* denir. Kısalık olması bakımından $(R,+,\cdot)$ halkası R ile gösterilir. Eğer R de "$\cdot$" işlemi birleşmeli (asosyatif) ise halkaya *birleşmeli* (*asosyatif*) *halka*, "$\cdot$" işleminin etkisiz elemanı varsa halkaya *özdeşlikli* (*birimli*) *halka*, "$\cdot$" işlemi değişmeli (komutatif) ise bu halkaya *değişmeli* (*komutatif*) *halka* denir.

Tanım 2.2: R bir halka olsun. $\overbrace{1+1+1+...+1}^{n \text{ tane}} = 0$ eşitliğine uyan en küçük $n \geq 2$ tamsayısına R halkasının *karakteristiği* denir. Eğer böyle (sonlu) bir n tamsayısı yoksa R nin *karakteristiği* sıfırdır denir.

Tanım 2.3: R özdeşlikli bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 1$ olacak biçimde $b \in R$ varsa b ye a nın *sağ tersi* ve $ca = 1$ olacak biçimde $c \in R$ varsa c ye a nın *sol tersi* denir. Eğer $d \in R$ olmak üzere $ad = da = 1$ ise d ye a nın bir tersi ve a ya da *birim(sel) eleman* denir.

Tanım 2.4: R bir halka olsun. Eğer R nin bir R' alt kümesi R halkasının işlemleri altında bir halka oluşturuyorsa R' ye R nin bir *alt halkası* denir.

Tanım 2.5: R bir halka olsun. $Z(R)=\{a\in R \mid ab=ba,\ \forall b\in R\}$ kümesine R nin *merkezi* denir.

$Z(R)$ kümesi R halkasının bir alt halkasıdır. Eğer R değişmeli ise $Z(R)=R$ olur.

Tanım 2.6: R nin her a elemanı için $aI\subseteq I$ ve $Ia\subseteq I$ şartlarını sağlayan bir I alt halkasına R halkasının bir *ideali* denir.

Tanım 2.7: R bir halka ve $M\neq R$, R nin bir ideali olsun. Eğer $M\subset I\subset R$ şartını sağlayan hiçbir I ideali yoksa M ye R nin *maksimal ideali* denir.

Tanım 2.8: Aşağıda birbirine denk olarak verilen şartlardan bir tanesini sağlayan bir R halkasına *lokal halka* denir:

a) R nin bir tek maksimal ideali vardır.

b) R nin tüm birim olmayan (tersi olmayan) elemanları bir tek has idealde kapsanır.

c) R nin birim olmayan (tersi olmayan) elemanları bir has ideal oluşturur.

d) $\forall\ r\in R$ için ya r ya da $1-r$ birimdir.

Tanım 2.9: Birleşmeli olmayan bir R halkasında her $a,b\in R$ için

$$a(ab)=(aa)b$$

ve

$$(ab)b=a(bb),$$

sırasıyla, sol ve sağ alterne şartları sağlanıyorsa R ye *alterne halka* denir.

Teorem 2.10: R bir alterne halka olsun. Bu takdirde, Moufang özdeşlikleri olarak da isimlendirilen, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Pickert 1955, Faulkner 2014):

a) $b((ac)a)=((ba)c)a$

b) $\left(a\left(ca\right)\right)b=a\left(c\left(ab\right)\right)$

c) $\left(ab\right)\left(ca\right)=a\left(bc\right)a$.

Tanım 2.11: $\left(R,+,\cdot\right)$ birleşmeli bir halka ve $\left(M,\oplus\right)$ değişmeli bir grup olsun. Her $a\in R$ ve her $x\in M$ için $(a,x)\to a\circ x$ olacak şekilde tanımlı $R\times M\to M$ dış işlemi her $a,b\in R$ ve her $x,y\in M$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\left(M,\oplus,\circ\right)$ sistemine R halkası üzerinde bir (*sol*) *modül*, kısaca M ye bir (*sol*) $R-$ *modül* denir:

M1) $a\circ(x\oplus y)=\left(a\circ x\right)\oplus\left(a\circ y\right)$ dir.

M2) $(a+b)\circ x=\left(a\circ x\right)\oplus\left(b\circ x\right)$ dir.

M3) $(ab)\circ x=a\circ(b\circ x)$ dir.

R, $1\neq 0$ özdeşlikli bir halka ve her $x\in M$ için

M4) $1\circ x=x$ dir,

şartını sağlayan bir (sol) $R-$ modüle *özdeşlikli* (*birimli*) bir (sol) $R-$ modül denir.

Her $a\in R$ ve her $x\in M$ için $(x,a)\to x*a$ olacak şekilde tanımlı $M\times R\to M$ dış işlemi her $a,b\in R$ ve her $x,y\in M$ için yukarıdaki benzer şartları sağlıyorsa $\left(M,\oplus,*\right)$ sistemine R halkası üzerinde bir (*sağ*) *modül*, kısaca M ye bir (*sağ*) $R-$ *modül* denir. R değişmeli bir halka iken sol ve sağ $R-$ modül arasında hiçbir fark yoktur.

M hem bir sol $R-$ modül hem de bir sağ $R-$ modül iken her $r,r'\in R$ ve her $m\in M$ için $\left(r\circ m\right)*r'=r\circ\left(m*r'\right)$ şartı (bu şart ile sağ ve sol dış işlemler arasında bir uyum sağlanmıştır) da sağlanırsa M ye bir $R-$*bimodül* adı verilir.

Tanım 2.12: M bir $R-$modül olsun. Eğer M nin boştan farklı bir M' alt kümesi, M nin $R-$modül olmasını sağlayan işlemlerin M' üzerine indirgenmişleri altında bir $R-$ modül oluşturuyorsa M' ye M nin bir *alt modülü* (ya da *alt uzayı*) denir.

Tanım 2.13: M bir $R-$modül olmak üzere, M nin M_1 ve M_2 ile gösterilen iki alt modülü (alt uzayı) verilsin. Eğer,

1) $M = M_1 + M_2$ dir.

2) $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ dır.

şartları sağlanıyorsa M ye M_1 ve M_2 nin direkt toplamı denir ve bu durumda $M = M_1 \oplus M_2$ yazılır.

Tanım 2.14: R özdeşlikli bir halka ve M bir $R-$modül olsun. M nin kendisini üreten (veya geren) lineer bağımsız bir alt kümesine M bir *bazı* denir. Eğer M nin bir bazını oluşturan sonlu sayıda $i_1, i_2, ..., i_n$ elemanları varsa M ye bir *serbest (free)* $R-$modül denir.

Tanım 2.15: Bir M $R-$modülün herhangi bir bazındaki eleman sayısına M nin *boyutu* denir.

Tanım 2.16: $M_1, M_2, ..., M_n$ ve M' $R-$modülleri verilsin. i, $1 \leq i \leq n$ özelliğinde seçilmiş bir tamsayı, $x, y \in M_i$, $1 \leq j \leq n$ ve $j \neq i$ için $\alpha_j \in M_j$ ve $\lambda \in R$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \to M'$ dönüşümüne bir *n-lineer dönüşüm* denir:

NL1) $f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x + y, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) = f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) + f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, y, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ dir.

NL2) $f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \lambda x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) = \lambda f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ dir.

Burada sadece $i.$ bileşen göz önüne alınırsa f nin bu bileşen için lineer olduğu görülür. n tane bileşen için lineerlik şartlarının sağlanması istendiğinden f ye n-lineer dönüşüm adı verilmektedir. Özel olarak $n = 2$ alınırsa f ye *2-lineer* (*bilineer*) *dönüşüm* denir.

Tanım 2.17: M bir $R-$modül olsun. $M^n = M \times M \times \cdots \times M$ olmak üzere $f : M^n \to R$ dönüşümü n-lineer ise f ye M *üzerinde n-lineer dönüşüm* ya da kısaca *n-lineer form* adı verilir.

Tanım 2.18: f , M üzerinde bir n-lineer dönüşüm olsun. Eğer her $(\alpha_1,....,\alpha_n)$ sıralı n-lisi ve her $i \neq j$ için

$$f(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) = f(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$$

ise f ye *simetrik n-lineer dönüşüm,*

$$f(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) = -f(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$$

ise f ye *anti-simetrik n-lineer dönüşüm* denir.

Tanım 2.19: M ve M' iki $R-$ modül olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $Q: M \to M'$ dönüşümüne bir *kuadratik dönüşüm* denir:

KU1) Her $\lambda \in R$ ve her $y \in M$ için $Q(\lambda y) = \lambda^2 Q(y)$ dir (yani Q 2 dereceden homojen polinom fonksiyondur).

KU2) Her $x, y \in M$ için $Q(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$ özelliğinde $M \times M$ den M' ye bir simetrik ve 2-lineer dönüşüm vardır (Linerizasyon ya da polarizasyon özelliği).

$M' = M$ iken Q kuadratik dönüşümüne M üzerinde bir kuadratik dönüşüm denir. $M' = R$ iken Q kuadratik dönüşümüne bir *kuadratik form*, bu durumda $Q(x,y)$ ye de *birleştirilmiş 2-lineer form* denir (Burada $Q(x,x) = Q(x)$ olduğuna dikkat ediniz.).

Tanım 2.20: M ve M' iki $R-$ modül olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $N: M \to M'$ dönüşümüne bir *kübik dönüşüm* denir:

KÜ1) Her $\lambda \in R$ ve her $y \in M$ için $N(\lambda y) = \lambda^3 N(y)$ dir (yani N 3. dereceden homojen polinom fonksiyondur).

KÜ2) Her $x, y, z \in M$ için

$$N(x,y,z) = \frac{1}{6}\left[N(x+y+z) - N(x+y) - N(y+z) - N(x+z) + N(x) + N(y) + N(z)\right]$$

özelliğinde $M \times M \times M$ den M' ye bir simetrik ve 3-lineer dönüşüm vardır (Linerizasyon ya da polarizasyon özelliği).

$M' = M$ iken N kübik dönüşümüne M üzerinde bir kübik dönüşüm denir. $M' = R$ iken N kübik dönüşümüne bir *kübik form* (Schafer 1959), bu durumda $N(x, y, z)$ ye de *birleştirilmiş 3-lineer form* denir (Burada $N(x, x, x) = N(x)$ olduğuna dikkat ediniz.).

(Thomas 2014) yardımıyla Tanım 2.19 ve Tanım 2.20 nin genellemesi aşağıdaki biçimde yapılabilir.

Tanım 2.21: M ve M' iki $R-$modül olsun. $n \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : M \to M'$ dönüşümüne bir *n. dereceden dönüşüm* denir:

ND1) Her $\lambda \in R$ ve her $y \in M$ için $f(\lambda y) = \lambda^n f(y)$ dir (yani f n. dereceden homojen polinom fonksiyondur).

ND2) Her $x_1, x_2, ..., x_n \in M$ ve $H \subseteq \{1, 2, 3, ..., n\}$ için

$$n! B_f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \sum_{H, |H|=k} f(S_H), \; S_H := \sum_{i \in H} x_i$$

özelliğinde $M^n = M \times M \times \cdots \times M$ den M' ye bir B_f simetrik ve n-lineer dönüşüm vardır (Linerizasyon ya da polarizasyon özelliği).

$M' = M$ iken n. dereceden dönüşüme M *üzerinde n. dereceden dönüşüm* denir. $M' = R$ iken n. dereceden dönüşüme bir *n. dereceden form*, bu durumda $B_f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ye de *birleştirilmiş n-lineer form* denir (Burada $B_f(x, x, ..., x) = f(x)$ olacağına dikkat ediniz.).

Özel olarak; M üzerindeki bir 1. dereceden form bir lineer form olarak isimlendirilir. $n = 2$ için Tanım 2.19 da kuadratik ve $n = 3$ için Tanım 2.20 de kübik ifadeleri daha önce kullanılmıştı.

Gösterim: M bir $R-$ modül iken M üzerindeki tüm n. dereceden dönüşümlerin kümesi $Hom_R(M, M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.22: $(M,\oplus,\circ)$ özdeşlikli bir $R-$modül olup M üzerinde bir $\otimes$ (çarpma) iç işlemi tanımlansın. Eğer M bu işleme göre her $a\in R$ ve her $x,y\in M$ için

$$(a\circ x)\otimes y = x\otimes(a\circ y) = a\circ(x\otimes y)$$

şartını sağlayan bir halka (yani $(M,\oplus,\otimes)$ bir halka) ise M ye R halkası üzerinde bir *cebir*, kısaca M ye bir $R-$*cebir* denir. M bir $R-$ cebir iken her $x,y,z\in M$ için

$$(x\otimes y)\otimes z = x\otimes(y\otimes z)$$

ya da buna denk olan

$$[x,y,z]=0 \text{ (asosyatör)}$$

şartı sağlanıyorsa M ye *birleşmeli* $R-$ cebir,

$$x\otimes y = y\otimes x$$

ya da buna denk olan

$$[x,y]=0 \text{ (komütatör)}$$

şartı sağlanıyorsa M ye *değişmeli* $R-$ cebir denir.

Böylece daha önce verdiğimiz alterne kurallar, asosyatör yardımıyla $[x,x,y]=0$ ve $[y,x,x]=0$ olarak ifade edilebilir. Üstelik; bu sonuçlar yardımıyla, $[x,z,y]+[z,x,y]=0$ ve $[y,x,z]+[y,z,x]=0$ olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.23: M bir $R-$cebir olsun. Eğer M nin boştan farklı bir M' alt kümesi, M nin $R-$cebir olmasını sağlayan işlemlerin M' üzerine indirgenmişleri altında bir $R-$cebir oluşturuyorsa M' ye M nin bir *alt cebiri* denir.

(Schafer 1996) dan, bir birleşmeli cebirden bir Lie cebiri veya bir Jordan cebirinin nasıl elde edildiği aşağıda verilecektir.

M bir birleşmeli $R-$ cebir iken M üzerinde her $x,y\in M$ için

$$x\square y = xy - yx$$

biçiminde yeni bir çarpma (*Lie çarpımı*) işlemi tanımlansın. Burada, $x\square x=0$ dır. Bu yeni çarpma işlemi ile M den elde edilen cebir M^- ile gösterilsin. M^- deki çarpma hem anti-komütatiftir hem de *Jakobi Özdeşliği* olarak bilinen

$$\left(x \square\, y\right) \square\, z + \left(y \square\, z\right) \square\, x + \left(z \square\, x\right) \square\, y = 0$$

eşitliğini sağlar. Bu şekilde elde edilen M^{-} ye bir *Lie cebiri* denir. Üstelik M^{-} nin bu işleme göre kapalı olan herhangi bir alt cebiri de Lie cebiri yapısına sahip olur.

M bir birleşmeli $R-$ cebir iken M üzerinde her $x, y \in M$ için

$$x \square y = \frac{1}{2}\left(xy + yx\right)$$

biçiminde yeni bir çarpma (*Jordan çarpımı*) işlemi tanımlansın. Burada, $x \square x = xx$ yani $x^{\square 2} = x^{2}$ dir. Bu yeni çarpma işlemi ile M den elde edilen cebir M^{+} ile gösterilsin. M^{+} daki çarpma hem değişmelidir hem de *Jordan Özdeşliği* olarak bilinen

$$\left(x \square y\right) \square \left(x^{\square 2}\right) = x \square \left[y \square \left(x^{\square 2}\right)\right]$$

eşitliğini sağlar. Bu şekilde elde edilen M^{+} ya bir *Jordan cebiri* denir. Üstelik M^{+} nın bu işleme göre kapalı olan herhangi bir alt cebiri de Jordan cebiri yapısına sahip olur.

Böylece, (Jacobson 1968) den aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 2.24: Herhangi bir cebir M^{+} Jordan cebirinin herhangi bir alt cebirine izomorf ise bu cebire *özel Jordan cebiri* adı verilir. Özel olmayan Jordan cebirleri *exceptional Jordan cebirleri* olarak adlandırılır.

Bundan sonra; çarpma iç işlemi ve skalarla çarpma dış işlemlerini gösterirken kullanılan $\otimes$, $\circ$ ve $*$ sembolleri yerine işlemler, elemanlar yan yana yazılarak kullanılacaktır ve toplama iç işlemini gösterirken kullanılan $\oplus$ sembolü yerine de $+$ alınacaktır.

Tanım 2.25 (Cayley halkası-Octonion $R-$cebir)**:** R ; birim olmayan elemanlarının kümesi I ile gösterilen özdeşlikli, birleşmeli ve değişmeli bir lokal halka olsun.

$$\mathrm{O} = \left\{ a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7 \,\middle|\, a_i \in R,\ i = 0,1,2,\dots,7 \right\}$$

kümesi tanımlansın. O daki iki elemanın eşitliği

$$a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_7 i_7 = b_0 + b_1 i_1 + \cdots + b_7 i_7 \Leftrightarrow a_i = b_i \ \left(i = 0,1,2,\dots,7\right)$$

biçiminde, O üzerindeki toplama iç işlemi her $x=a_0+a_1i_1+\cdots+a_7i_7$ ve $y=b_0+b_1i_1+\cdots+b_7i_7\in \mathrm{O}$ için

$$x+y=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)i_1+\cdots+(a_7+b_7)i_7$$

olarak ve O üzerindeki dış işlem her $\lambda\in R$ ve her $x\in \mathrm{O}$ için

$$\lambda x=\lambda(a_0+a_1i_1+\cdots+a_7i_7)=(\lambda a_0)+(\lambda a_1)i_1+\cdots+(\lambda x_7)i_7$$

olarak tanımlanırsa $(\mathrm{O},+,\cdot)$ sistemi bir özdeşlikli $R-$modül olur.

O üzerinde ikinci bir işlem olarak çarpma iç işlemi, Tablo 2.1 yardımıyla ve aşağıdaki dört özellikle birlikte tanımlansın:

a) $j\neq k$ için $i_ji_k=-(i_ki_j)$ dir,

b) Her i_j,i_k ve i_m için dağılma kuralları geçerlidir.

c) $a\in R$ için $ai_k=i_ka$ dır,

d) $a,b\in R$ için $a(bi_k)=(ab)i_k$ dır. R nin karakteristiğinin 2 den farklı olması durumunda Tablo 2.1 deki çarpım tablosu ile birlikte O nun $\{i_0=1,i_1,i_2,i_3=i_1i_2,i_4,i_5=i_1i_4,i_6=i_2i_4,i_7=(i_1i_2)i_4\}$ biçiminde bir bazı vardır.

O nun sonlu sayıda elemandan oluşan bir bazı var olduğundan O kümesi bir serbest $R-$modüldür.

$c_1,c_2,c_3\in R-I$ olmak üzere bu çarpım tablosu aşağıdaki gibidir (Jacobson 1985):

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	c_1i_0	i_3	c_1i_2	i_5	c_1i_4	$-i_7$	$-c_1i_6$
i_2		c_2i_0	$-c_2i_1$	i_6	i_7	c_2i_4	c_2i_5
i_3			$-c_1c_2i_0$	i_7	c_1i_6	$-c_2i_5$	$-c_1c_2i_4$
i_4				c_3i_0	$-c_3i_1$	$-c_3i_2$	$-c_3i_3$
i_5					$-c_1c_3i_0$	c_3i_3	$c_1c_3i_2$
i_6						$-c_2c_3i_0$	$-c_2c_3i_1$
i_7							$c_1c_2c_3i_0$

Tablo 2.1

O daki çarpma işleminin değişmeli olmadığı yukarıdaki a) dan açıktır, birleşmeli olmayacağına dair bir örnek bulmak zor değildir (mesela, $[i_3, i_4, i_5] \neq 0$ dır.). Böylece $(\mathrm{O}, +, \cdot)$ sistemi değişmeli ve birleşmeli olmayan özdeşlikli bir halka (yani özdeşlikli bir $R-$cebir) olur. Bu halkaya *Cayley halkası* veya *octonion* $R-$*cebiri* denir.

Bazı kaynaklarda octonion $R-$cebiri yerine Cayley-Dickson cebiri de denilmektedir (Stevenson 1972).

Teorem 2.26 (Bruck-Kleinfeld Teoremi)**:** Bir alterne halka ya birleşmelidir ya da kendi merkezi üzerinde Cayley-Dickson cebiridir (Stevenson 1972, Faulkner 2014).

Tanım 2.27: $(R, +, \cdot)$ ve $(R', +', \cdot')$ iki halka, $\Phi : R \to R'$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $a, b \in R$ için

1) $\Phi(a+b) = \Phi(a) +' \Phi(b)$

2) $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot' \Phi(b)$

şartları sağlanıyorsa Φ dönüşümüne R den R' ye bir *homomorfizm* denir. Eğer 2) şartı yerine

2′) $\Phi(a \cdot b) = \Phi(b) \cdot' \Phi(a)$

şartı alınırsa Φ dönüşümüne R den R' ye bir *anti-homomorfizm* adı verilir.

Tanım 2.28: $(R, +, \cdot)$ ve $(R', +', \cdot')$ iki halka olsun. $\Phi : R \to R'$ birebir ve örten bir homomorfizm (veya anti-homomorfizm) ise Φ dönüşümüne R den R' ye bir *izomorfizm* (veya *anti-izomorfizm*) denir. R nin kendisi üzerine bir izomorfizmine (veya anti- izomorfizmine) R üzerinde bir *otomorfizm* (veya *anti-otomorfizm*) denir.

Tanım 2.29: R bir halka olsun. i , R üzerinde özdeşlik dönüşümü olmak üzere mertebesi (peryodu) 2 (yani $f \neq i$ iken $f^2 = i$) olan bir f otomorfizmine (veya anti-otomorfizmine) R nin bir *involusyonu* (veya *anti-involusyonu*) denir.

Tanım 2.30: R bir halka ve f de R nin bir involusyonu (ya da anti-involusyonu) olsun. R nin f involusyonu (ya da anti-involusyonu) altında değişmez kalan elemanlarına R nin *simetrik elemanları* denir.

Bu bölümün bundan sonraki kısımında, $\mathbb{O}$ Cayley halkası (veya octonion $R-$cebiri) ile ilgili verilecek bilgiler için Jacobson (1985), Schafer (1996), Çelik (1995) ve Akpınar (2007) çalışmaları esas alınmış ve bazı sonuçların ispatları açık olarak verilmiştir.

Tanım 2.31: $x = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_7 i_7 \in \mathbb{O}$ olmak üzere $\bar{\ } : \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ için $x \to \bar{x} = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - ... - a_7 i_7$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *eşlenik alma dönüşümü* denir.

Teorem 2.32: $x \in \mathbb{O}$ için $\bar{\bar{x}} = x$ ve $x, y \in \mathbb{O}$ için $\overline{xy} = \bar{y}\,\bar{x}$ dir, yani eşlenik alma dönüşümü $\mathbb{O}$ nun bir anti-involusyonudur.

Tanım 2.33: $n : \mathbb{O} \to R$ için $x \to n(x) = x\bar{x}$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *norm form*, $n(x)$ e de x in *normu* veya *norm formu* denir.

Bu tanıma göre $x = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_7 i_7 \in \mathbb{O}$ için

$$n(x) = x\bar{x} = \bar{x}x = n(\bar{x}) = a_0^2 - c_1 a_1^2 - c_2 a_2^2 + c_1 c_2 a_3^2 - c_3 a_4^2 + c_1 c_3 a_5^2 + c_2 c_3 a_6^2 - c_1 c_2 c_3 a_7^2$$

ve $x \in R$ için $n(x) = x^2$ olur. Bu sonuç bize aşağıdaki iki teoremi ifade etmemizi sağlar.

Teorem 2.34: $x \in \mathbb{O}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) $n(x)$ birimdir $\Leftrightarrow$ x birimdir. Bu durumda $x^{-1} = \bar{x} n(x)^{-1}$ olur.

ii) $n(x)$ birim değildir $\Leftrightarrow$ x birim değildir.

Teorem 2.35: $\mathbb{O}$ da birim olmayan elemanların oluşturduğu küme $\mathbf{I}$ ile gösterilirse

$$\mathbf{I} = \{ x = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_7 i_7 \mid n(x) \in I \}$$

dır.

Bu durumda O daki birimlerin kümesi $\mathbf{U} := \mathrm{O} - \mathbf{I}$ ile gösterilebilir. Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 2.36: $(\mathrm{O},+,\cdot)$ sistemi maksimal ideali **I** olan bir lokal alterne halkadır.

Teorem 2.26 gereği $(\mathrm{O},+,\cdot)$ kendi merkezi üzerinde bir Cayley-Dickson cebiridir. Burada $Z(\mathrm{O}) = R$ olduğuna dikkat ediniz.

Teorem 2.37: Her $x, y, z \in \mathrm{O}$ için aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) $[x,\overline{x},y]=[\overline{x},x,y]=[y,\overline{x},x]=[y,x,\overline{x}]=0$ dır.

ii) $\left[x+z,\overline{x+z},y\right]=0 \Rightarrow \left[x,\overline{z},y\right]+\left[z,\overline{x},y\right]=0$ dır.

Tanım 2.38: $t:\mathrm{O}\rightarrow R$ için $x\rightarrow t(x)=\dfrac{x+\overline{x}}{2}$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *iz − form*, $t(x)$ e de x in *izi* veya *iz − formu* denir.

Bu tanıma göre $x = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_7 i_7 \in \mathrm{O}$ için

$$t(x)=\frac{x+\overline{x}}{2}=\frac{\overline{x}+x}{2}=t(\overline{x})=a_0$$

ve $x \in R$ için $t(x) = x$ olur.

Teorem 2.39: t iz formu lineerdir.

Teorem 2.40: Her $x, y \in \mathrm{O}$ için $n(xy) = n(x)n(y)$ dir. (Norm form çarpılabilirdir.)

Teorem 2.41: Her $x \in \mathrm{O}$ için $x^2 - 2t(x)x + n(x) = 0$ dır.

İspat: $t(x)=\dfrac{x+\overline{x}}{2}$ eşitliğinden $\overline{x} = 2t(x) - x$ olup bunu $n(x) = x\overline{x}$ de yerine yazarsak $n(x) = x(2t(x) - x)$ ve böylece $x^2 - 2t(x)x + n(x) = 0$ elde edilir.

$n(x) = x\bar{x}$ de x yerine $x+\lambda y$ yazarsak yani bu ifadeyi x e göre lineerleştirirsek;

$$n(x+\lambda y) = (x+\lambda y)\overline{(x+\lambda y)} = (x+\lambda y)\left(\bar{x}+\lambda\bar{y}\right)$$
$$= n(x) + \lambda\left(x\bar{y}+y\bar{x}\right) + \lambda^2 n(y)$$

eşitliğinden $\lambda\left(x\bar{y}+y\bar{x}\right) = n(x+\lambda y) - n(x) - \lambda^2 n(y)$ elde edilir. burada λ yerine 1 alınırsa $x\bar{y}+y\bar{x} = n(x+y) - n(x) - n(y)$ olur. Eşitliğin sol tarafı $2t(x\bar{y})$ ye eşit olduğundan bu eşitlik $2t(x\bar{y}) = n(x+y) - n(x) - n(y)$ şeklinde yazılarak

$$t(x\bar{y}) = \frac{1}{2}\left[n(x+y) - n(x) - n(y)\right]$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.42: $\mathrm{O}\times\mathrm{O} \to R$ ye her $x, y \in \mathrm{O}$ için

$$n(x,y) = \frac{1}{2}\left[n(x+y) - n(x) - n(y)\right] \qquad (2.1)$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme birleştirilmiş form denir.

Teorem 2.43: Birleştirilmiş form için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) $n(x,y) = t(x\bar{y})$ dir. Özel olarak, $y=1$ için $n(x,1) = t(x)$ olur.

ii) Birleştirilmiş form simetrik ve 2-lineerdir.

Tanım 2.44: $\mathrm{O}\times\mathrm{O} \to R$ ye her $x, y \in \mathrm{O}$ için $t(x,y) := t(xy)$ olarak tanımlanan t ye jenerik iz form adı verilir.

Her $x \in \mathrm{O}$ için $t(x,1) = t(x)$, $t(1,y) = t(y)$ ve $t(1,1) = t(1) = 1$ olacağı açıktır.

Teorem 2.45: t jenerik iz formu 2-lineerdir.

İspat: t iz formu lineer olduğundan,

$t(x+z,y) = t((x+z)y) = t(xy+zy) = t(xy) + t(zy) = t(x,y) + t(z,y)$ ve

$t(cx,y) = t((cx)y) = t(c(xy)) = ct(xy) = ct(x,y)$

şartları sağlanır, yani $t(x,y)$ 1. bileşene göre lineerdir.

$t(x,y+z)=t(x(y+z))=t(xy+xz)=t(xy)+t(xz)=t(x,y)+t(x,z)$ ve

$t(x,cy)=t(x(cy))=t(c(xy))=ct(xy)=ct(x,y)$

şartları da sağlanır, yani $t(x,y)$ 2. bileşene göre de lineerdir. Dolayısıyla, $t(x,y)$ dönüşümü 2-lineerdir.

Teorem 2.46: $t(x,y)=t(\bar{x},\bar{y})$ dir.

İspat: $t(x)=\dfrac{x+\bar{x}}{2} \Rightarrow x=2t(x)-\bar{x}$ olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned}
t(x,y) &= t\left(2t(x)-\bar{x},2t(y)-\bar{y}\right)\\
&= t\left(2t(x),2t(y)-\bar{y}\right)-t\left(\bar{x},2t(y)-\bar{y}\right)\\
&= t\left(2t(x),2t(y)\right)-t\left(2t(x),\bar{y}\right)-t\left(\bar{x},2t(y)\right)+t\left(\bar{x},\bar{y}\right)\\
&= 2t(x)2t(y)t(1,1)-2t(x)t\left(1,\bar{y}\right)-2t(y)t\left(\bar{x},1\right)+t\left(\bar{x},\bar{y}\right)\\
&= 2t(x)2t(y)t(1)-2t(x)t\left(\bar{y}\right)-2t(y)t\left(\bar{x}\right)+t\left(\bar{x},\bar{y}\right)\\
&= 4t(x)t(y)1-2t(x)t(y)-2t(y)t(x)+t\left(\bar{x},\bar{y}\right)\\
&= t\left(\bar{x},\bar{y}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.47: $n(xy,zw)+n(zy,xw)=2n(x,z)n(y,w)$ dir.

İspat: $n(xy)=n(x)n(y)$ eşitliğinde x yerine $x+z$ yazılır ve n normunun çarpılabilirliği kullanılırsa $n(xy+zy)=n(x+z)n(y)$ bulunur. $n(x+y)$ yerine (2.1) den

$$n(x+y)=2n(x,y)+n(x)+n(y)$$

eşitliği kullanılırsa

$n(xy+zy)=2n(xy,zy)+n(xy)+n(zy)$

$n(xy+zy)=n(x+z)n(y)=\left[2n(x,z)+n(x)+n(z)\right]n(y)$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$2n(xy,zy)+n(xy)+n(zy)=\left[2n(x,z)+n(x)+n(z)\right]n(y)$

yazılır. $KarR\neq 2$ olduğu kullanılarak gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$n(xy,zy)=n(x,z)n(y) \tag{2.2}$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde, y yerine $y+w$ yazılsaydı

$$
\begin{aligned}
& n(x(y+w))=n(x)n(y+w)\\
& \Rightarrow n(xy+xw)=n(x)n(y+w)\\
& \Rightarrow 2n(xy,xw)+n(xy)+n(xw)=n(x)[2n(y,w)+n(y)+n(w)]\\
& \Rightarrow 2n(xy,xw)=2n(x)n(y,w)\\
& \Rightarrow n(xy,xw)=n(x)n(y,w)
\end{aligned}
$$

elde edilirdi.

(2.2) ifadesinde y yerine $y+w$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
& n(x(y+w),z(y+w))=n(x,z)n(y+w)\\
& \Rightarrow n(xy+xw,zy+zw)=n(x,z)n(y+w)\\
& \Rightarrow n(xy,zy)+n(xy,zw)+n(xw,zy)+n(xw,zw)=n(x,z)n(y+w)\\
& \Rightarrow n(xy,zw)+n(xw,zy)+n(xy,zy)+n(xw,zw)=n(x,z)[2n(y,w)+n(y)+n(w)]\\
& \Rightarrow n(xy,zw)+n(zy,xw)=2n(x,z)n(y,w)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç 2.48: $n(yx,wz)+n(wx,yz)=2n(y,w)n(x,z)$ dir.

İspat: Teorem 2.47 de x ile y ve z ile w nun rolleri değiştirilirse sonuç açıktır.

Teorem 2.49: Jenerik iz form için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

1) t simetriktir, yani her $x,y\in \mathrm{O}$ için $t(x,y)=t(y,x)$ dir. Bu şart, kısaca, $t([x,y])=0$ olarak da ifade edilebilir.

2) t asosyatiftir, yani her $x, y, z \in O$ için $t(xy, z) = t(x, yz)$ dir. Bu şart, kısaca, $t([x, y, z]) = 0$ olarak da ifade edilebilir.

İspat: 1) $t(x, y) = t(\bar{x}, \bar{y})$ olduğundan $t(xy) = t(\overline{xy}) = t(\overline{yx}) = t(yx)$ yani $t(x, y) = t(y, x)$ olur.

2) $t(x(yz)) = n(x, \overline{yz}) = n(x, \bar{z}\bar{y})$ ve $t((xy)z) = n(xy, \bar{z})$

olduğundan $t(xy, z) = t(x, yz)$ olduğunu ispat etmek için $n(x, \overline{yz}) = n(xy, \bar{z})$ olduğunu göstermek yeterlidir. $t(y) = \dfrac{y + \bar{y}}{2}$ eşitliğinden $\bar{y} = 2t(y) - y$ olduğunu ve $t(y) = n(y,1)$ den $n(x, z\bar{y}) = n(x, z[2n(y,1) - y])$ yazabiliriz. Buradan her $x, y, z \in O$ için

$$
\begin{aligned}
n(x, z\bar{y}) &= n(x, 2n(y,1)z) - n(x, zy) \\
&= 2n(y,1)n(x, z) - n(x, zy)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Teorem 2.47 de $w = 1$ alınırsa $2n(y,1)n(x, z) = n(xy, z) + n(zy, x)$ olur ki

$$
\begin{aligned}
n(x, z\bar{y}) &= n(xy, z) + n(zy, x) - n(x, zy) \\
&= n(xy, z)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte z yerine $\bar{z}$ alınırsa $n(xy, \bar{z}) = n(x, \bar{z}\bar{y}) = n(x, \overline{yz})$ olur.

Sonuç 2.50: $t(x, y) = t(\bar{x}, \bar{y})$ dir.

İspat: t jenerik iz formun simetrikliği ve $t(x) = t(\bar{x})$ olduğu gerçeğinden hareketle

$$
t(x, y) = t(y, x) = t(yx) = t(\overline{yx}) = t(\bar{x}\,\bar{y}) = t(\bar{x}, \bar{y})
$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.51: $n(x, y) = n(\bar{x}, \bar{y})$ dir.

İspat: Teorem 2.43 i) deki sonuç, $t(x)=t(\overline{x})$ olduğu, Teorem 2.32 ve t jenerik iz formun simetrikliği bir arada düşünülürse

$$n(x,y)=t(x\overline{y})=t\left(\overline{x\overline{y}}\right)=t(y\overline{x})=t(\overline{x}y)=n(\overline{x},\overline{y})$$

sonucu elde edilir.

$t(x,y)=t(xy)$ ve $n(x,y)=t(x\overline{y})$ olduğundan $t(x,y)+n(x,y)=\ t(xy)+t(x\overline{y})$ yazabiliriz. t lineer ve $y+\overline{y}=2t(y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} t(x,y)+n(x,y) &= t(xy+x\overline{y}) \\ &= t\left(x\left[y+\overline{y}\right]\right) \\ &= t\left(x\left[2t(y)\right]\right) \\ &= 2t(x)t(y) \end{aligned}$$

yani $t(x,y)=2t(x)t(y)-n(x,y)$ elde edilir. Şimdi bu sonucun alternatif bir ispatını aşağıda veriyoruz.

Teorem 2.52: $t(x,y)=2t(x)t(y)-n(x,y)$ dir.

İspat: $t\left(x,\overline{y}\right)=n(x,y)=\frac{1}{2}\left[n(x+y)-n(x)-n(y)\right]$

eşitliğindeki $n(x)$ ifadeleri yerine Teorem 2.41 den $n(x)=2t(x)x-x^2$ değeri kullanılırsa

$$n(x,y)=\frac{1}{2}\left[2t(x+y)(x+y)-(x+y)^2-\left(2t(x)x-x^2\right)-\left(2t(y)y-y^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\left(t(x)+t(y)\right)x+2\left(t(x)+t(y)\right)y-x^2-y^2-xy-yx-2t(x)x+x^2-2t(y)y+y^2\right]$$

eşitliklerinden

$$n(x,y)=\frac{1}{2}\left[2t(y)x+2t(x)y-xy-yx\right] \tag{2.3}$$

elde edilir. (2.3) de y yerine $\overline{y}$ yazarsak

$$n\left(x,\overline{y}\right)=t(x,y)=\frac{1}{2}\left[2t\left(\overline{y}\right)x+2t(x)\overline{y}-x\overline{y}-\overline{y}x\right]=t(y)x+t(x)\overline{y}-\frac{1}{2}\left(x\overline{y}+\overline{y}x\right) \tag{2.4}$$

ve (2.3) de x yerine $\overline{x}$ yazarsak da

$$n\left(\overline{x},y\right)=t\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\frac{1}{2}\left[2t\left(y\right)\overline{x}+2t\left(\overline{x}\right)y-\overline{x}y-y\overline{x}\right]=t\left(y\right)\overline{x}+t\left(x\right)y-\frac{1}{2}\left(\overline{x}y+y\overline{x}\right)\quad(2.5)$$

eşitliğini elde ederiz. $t(x,y)=t\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ olduğundan (2.4) ve (2.5) deki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$2t(x,y)=2t(x)t(y)+2t(y)t(x)-t\left(x\overline{y}\right)-t\left(\overline{y}x\right)$$

ve t simetrik olduğundan

$$2t(x,y)=4t(x)t(y)-2t\left(x\overline{y}\right)$$

olur. Burada, $KarR\neq 2$ ve $t\left(x,\overline{y}\right)=n(x,y)$ olduğu kullanılırsa

$$t(x,y)=2t(x)t(y)-n(x,y)$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 2.53: $n(x,y)=n\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ dir.

İspat: $t(x,y)=2t(x)t(y)-n(x,y)$ ile birlikte $t(x,y)=t\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ ve $t(x)=t\left(\overline{x}\right)$ olduğu düşünülürse $n(x,y)=n\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ bulunur.

Bu bölümde son olarak, (Kaya 2005) den projektif düzlem tanımı verilecektir.

Tanım 2.54: N ve D elemanları, sırasıyla, noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme ve $\in$ da $\mathrm{N}\times D$ kümesi üzerinde tanımlı bir üzerinde olma bağıntısı olmak üzere aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen bir $\mathrm{P}=\left(\mathrm{N},D,\in\right)$ sistemine bir *projektif düzlem* denir.

PD1) Farklı iki noktadan tam olarak bir doğru geçer.

PD2) Farklı iki doğrunun tam olarak bir arakesit noktası vardır.

PD3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

3. ÖZDEŞLİKLİ KUADRATİK JORDAN CEBİRLERİ

Bu kısımda, çalışacağımız Jordan cebir sınıfı hakkındaki bilgiler bir araya getirilmiştir. Jordan cebirleri hakkında daha detaylı bilgi için (Jacobson 1968), kuadratik Jordan cebirleri hakkında daha fazla bilgi için (Jacobson 1969) çalışmalarına bakılabilir.

Jordan cebiri tanımı, L_x (sol çarpım) ve R_x (sağ çarpım) operatörleri yardımıyla aşağıdaki biçimde de verilebilir.

Tanım 3.1: M bir $R-$ cebir olsun. Eğer,

1) $L_x = R_x$ yani $x \circ y = y \circ x$ (komütatiflik şartı),

2) $L_{x^2} L_x = L_x L_{x^2}$ yani $(x \circ y) \circ (x^{\circ 2}) = x \circ \left[y \circ (x^{\circ 2}) \right]$ (Jordan Özdeşliği)

şartları sağlanıyorsa M ye bir *Jordan* $R-$ *cebiri* denir.

L_x ve R_x operatörleri yardımıyla alterne kurallar, $L_{x^2} = (L_x)^2$ ve $R_{x^2} = (R_x)^2$ biçiminde yazılır.

(McCrimmon 2004) deki çalışmanın 1. Kısmın 4.1 nolu alt bölümünde Jordan cebirlerinin klasik teorisinin daha iyi anlaşılması için Jacobson'un U_x $U-$operatörleri (Jacobson 1968) ve bu operatörlerin yardımcı operatörleri ile ondan linerizasyonla elde edilen $\{x, y, z\}$ Jordan üçlü çarpımını ve bunlarla ilgili olan $U_{x,y}$, $V_{x,y}$, V_x operatörleri aşağıdaki biçimde verilmiştir.

$$U_x := 2(L_x)^2 - L_{x^2}, \qquad U_{x,z} := (U_{x+z} - U_x - U_z)$$

$$V_{x,y}(z) := \{x, y, z\} := U_{x,z}(y),$$

$$V_x(y) := \{x, y\} := \{x, 1, y\}, \qquad V_x = V_{x,1} = U_{x,1} = V_{1,x} = 2L_x$$

Şimdi $\{x, y, z\}$ Jordan üçlü çarpımını ve bu operatörleri daha yakından inceleyelim:

$\{x, y, z\} := (x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x - (x \circ z) \circ y$ olarak tanımlanmıştır. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\{x,y,z\} &= \left[\frac{1}{2}(xy+yx)\right]\square z+\left[\frac{1}{2}(yz+zy)\right]\square x-\left[\frac{1}{2}(xz+zx)\right]\square y \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}(xy+yx)z+z\frac{1}{2}(xy+yx)\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(yz+zy)x+x\frac{1}{2}(yz+zy)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(xz+zx)y+y\frac{1}{2}(xz+zx)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(xy)z+\frac{1}{2}(yx)z+\frac{1}{2}z(xy)+\frac{1}{2}z(yx)\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(yz)x+\frac{1}{2}(zy)x+\frac{1}{2}x(yz)+\frac{1}{2}x(zy)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(xz)y+\frac{1}{2}(zx)y+\frac{1}{2}y(xz)+\frac{1}{2}y(zx)\right] \\
&= \frac{1}{4}(xy)z+\frac{1}{4}z(yx)+\frac{1}{4}(zy)x+\frac{1}{4}x(yz) \\
&= \frac{1}{2}(xy)z+\frac{1}{2}z(yx)
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden

$$\{x,y,z\}=\frac{1}{2}\left[(xy)z+z(yx)\right]$$

olduğu görülür. Bir birleşmeli M cebirinden elde edilen M^{+} Jordan cebirinde (bkz. Tanım 2.23 ile Tanım 2.24 arası) Jordan çarpımı birleşme özelliğine sahip olmasa da yukarıdaki işlemlerde aynı renkli terimler birleşmeli olan M cebirinin elemanı

olduğundan sadeleşmektedir ve bu özellik devamında yapılan işlemlerde de kullanarak en sade sonuç elde edilmiştir. Benzer biçimde,

$$\{z,y,x\}=\frac{1}{2}\left[(zy)x+x(yz)\right]$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu Jordan üçlü çarpımının x ve z de simetrik olması için yani $\{x,y,z\}=\{z,y,x\}$ olması için yine birleşme özelliğinin geçerli olması gerektiğine dikkat ediniz.

$U_x := 2(R_x)^2 - R_{x^2} = 2(L_x) - L_{x^2}$ olarak tanımlanmaktadır ve bu durumda

$$
\begin{aligned}
U_x(y) &= \left[2R_x^2 - R_{x^{\bullet 2}}\right](y) \\
&= 2R_x^{\,2} y - R_{x^{\bullet 2}} y \\
&= 2R_x R_x y - R_{x\bullet x} y \\
&= 2R_x\left(y\bullet x\right) - y\bullet\left(x\bullet x\right) \\
&= 2\left(y\bullet x\right)\bullet x - y\bullet\left(\frac{1}{2}[xx+xx]\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}[yx+xy]\right)\bullet x - \frac{1}{2}\left[yx^2 + x^2y\right] \\
&= 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(yx+xy)x + x\left(\frac{1}{2}(yx+xy)\right)\right)\right] - \frac{1}{2}yx^2 - \frac{1}{2}x^2y \\
&= \frac{1}{2}yx^2 + \frac{1}{2}xyx + \frac{1}{2}xyx + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}yx^2 - \frac{1}{2}x^2y \\
&= xyx
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden $U_x(y) = xyx$ olduğu görülür. $\{x,y,x\} = \frac{1}{2}\left[(xy)x + x(yx)\right] = xyx$ olduğu dikkate alınarak $U_x(y) := \{x,y,x\}$ olarak da tanımlanabilirdi.

$U_{x,z}(y) := \{x,y,z\} = \{z,y,x\}$ olarak tanımlı olup $U_{x,z}$ operatörünün x ve z için simetrik olacağı açıktır.

$V_{x,y}(z) := \{x,y,z\} = U_{x,z}(y)$ biçiminde tanımlı olduğundan $V_{x,y}(z)$ operatörü de x ve z için simetriktir.

$V_x(y) := V_{1,x}y$ olarak tanımlı olup $\{1,x,y\} = \{x,y,1\} = \{x,1,y\} = \frac{1}{2}(xy+yx)$ eşitliklerinden $V_x(y) = V_{1,x}y = U_{x,1}y = V_{x,1}y = U_{x,y}1 = \frac{1}{2}(xy+yx)$ olarak yazabiliriz.

Son olarak, $U_{x+z}y = U_x + U_z + 2U_{x,z}$ olduğunu görelim:

$$
\begin{aligned}
U_{x+z}y &= \{(x+z), y, (x+z)\} \\
&= (x+z)\,y\,(x+z) \\
&= (xy+zy)(x+z) \\
&= (xy)x+(xy)z+(zy)x+(zy)z \\
&= xyx+(xy)z+(zy)x+zyz
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\left[U_x+U_z+2U_{x,z}\right](y) &= U_x y+U_z y+2U_{x,z}y \\
&= \{x,y,x\}+\{z,y,z\}+2\{x,y,z\} \\
&= xyx+zyz+2\frac{1}{2}(xy)z+2\frac{1}{2}z(yx) \\
&= xyx+zyz+(xy)z+z(yx)
\end{aligned}
$$

sonuçlarından $U_{x+z}=U_x+U_z+2U_{x,z}$ olması için yine birleşme özelliğinin geçerli olması gerektiğine dikkat ediniz.

U_x operatörü sol ve sağ çarpımın aynı anda uygulandığı bir dış çarpım gibi, V_x operatörü de sol çarpım ile sağ çarpımın toplamı olarak düşünülebilir.

Burada geniş izahlar ile verdiğimiz bilgiler kullanılarak (McCrimmon 2004) de verilen aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilir:

$$U_x y \approx xyx\,,\ \ \{x,y,z\}\approx(xyz+zyx),\ \{x,y,1\}:=\{x,y\}\approx(xy+yx).$$

(McCrimmon 2004) de $U-$operatörlü üç tane Jordan cebir örneği aşağıdaki biçimde verilmiştir:

Herhangi bir **özel Jordan cebirinde**, $U-$operatörü ve onunla ilgili bağıntılar aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$U_x y = xyx\,,\ V_x y=\{x,y\}=xy+yx\,,$$

$$V_{x,y}z=U_{x,z}y=\{x,y,z\}=xyz+zyx\,.$$

c baz noktalı bir Q kuadratik formla belirlenen bir **kuadratik Jordan cebirinde**, $U-$ operatörü aşağıdaki formda ifade edilir:

$\overline{y}=t(y)c-y$ olmak üzere $U_x y=Q(x,\overline{y})x-Q(x)\overline{y}$.

c baz noktalı ve bir N kübik form ile belirlenen bir **kübik Jordan cebirinde** $U-$ operatörü aşağıda formda ifade edilir:

$^{\#}$ bir kuadratik dönüşüm, $x\times y=\frac{1}{2}\left[(x+y)^{\#}-x^{\#}-y^{\#}\right]$ ve $N(x,y,z)=\frac{1}{3}T(x\times z,y)$ olmak üzere $U_x y=T(x,y)x-2\left(x^{\#}\times y\right)$ dir.

R; özdeşlikli, değişmeli ve birleşmeli bir halka ve M bir özdeşlikli R- modül olsun. M *üzerinde bir kuadratik gösterim*, M den $Hom_R(M,M)$ üzerine $U:x\to U_x$ biçiminde tanımlı bir kuadratik dönüşümdür. Bu durumda, her $x,y\in M$ ve her $\alpha\in R$ için $U_{\alpha x}=\alpha^2 U_x$ özelliği sağlanır ve $U_{x,y}\equiv U_{x+y}-U_x-U_y$ özelliğinde 2-lineer olan bir $U_{x,y}$ dönüşümü vardır. Eğer U , M üzerinde bir kuadratik gösterim ise bu takdirde $(y)U_x=yU_x=U_x(y)=U_x y$ özelliğinde bir kübik birleşim ile birlikte x ve z için simetrik olan $yU_{x,z}=(y)U_{x,z}=U_{x,z}y=U_{x,z}(y)=\{x,y,z\}$ özelliğinde bir üç lineer birleşim vardır. Ayrıca, $zV_{x,y}=\{x,y,z\}=yU_{x,z}$ özelliğinde bir $V_{x,y}$ operatörü de tanımlanabilir.

Böylece, (Faulkner 1970) den aşağıdaki tanımı verebiliriz:

M üzerinde bir kuadratik gösterim U ve $1\in M$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan $\sigma=(M,U,1)$ üçlüsüne *özdeşlikli bir kuadratik Jordan cebiri* denir:

$(KJ1)$ $U_1=1$

$(KJ2)$ $U_a U_b U_a=U_{bU_a}$

$(KJ3)$ $U_b V_{a,b}=V_{b,a}U_b=U_{aU_b,b}$

$(KJ4)$ R nin herhangi bir genişlemesi altında $(KJ1)-(KJ3)$ şartları geçerlidir.

$(KJ4)$ şartı, $(KJ2)$ ve $(KJ3)$ şartlarının aşağıdaki lineerizasyonlarının geçerliliğine denktir:

$(KJ5)$ $U_aU_bU_{a,c}+U_{a,c}U_bU_a=U_{bU_a,bU_{a,c}}$

$(KJ6)$ $U_aU_bU_c+U_cU_bU_a+U_{a,c}U_bU_{a,c}=U_{bU_a,bU_c}+U_{bU_{a,c}}$

$(KJ7)$ $U_aU_bU_{c,d}+U_{a,c}U_bU_{a,d}+U_{c,d}U_bU_a+U_{a,d}U_bU_{a,c}=U_{bU_{a,c},bU_{a,d}}+U_{bU_a,bU_{c,d}}$

$(KJ8)$ $V_{b,a}U_{b,c}+V_{c,a}U_b=U_{b,c}V_{a,b}+U_bV_{a,c}$

Bir kuadratik birleşim $x^2=1U_x$ olarak ve bir simetrik 2-lineer birleşim $x\circ y:=1U_{x,y}=\{x,1,y\}$ olarak alınabilir. V_x , $V_x:=V_{1,x}$ özelliğinde tanımlanırsa $yV_x=y\circ x$ olur. Aşağıdaki eşitlikler $(KJ1)-(KJ4)$ şartlarından elde edilebilir (McCrimmon 1966 ve Jacobson 1968):

$(KJ9)$ $V_x=V_{x,1}=U_{x,1}$

$(KJ10)$ $U_{a^2}=(U_a)^2$

$(KJ11)$ $U_aU_{a,c}+U_{a,c}U_a=U_{a^2,a\circ c}$

$(KJ12)$ $U_{a^2,c^2}+U_{a\circ c}=U_aU_c+U_cU_a+(U_{a,c})^2$

$(KJ13)$ $U_aV_bU_a=U_{bU_a,a^2}$

$(KJ14)$ $U_aV_bU_{a,c}+U_{a,c}V_bU_a=U_{bU_a,a\circ c}+U_{a^2,bU_{a,c}}$

$(KJ15)$ $U_{a^2,bU_c}+U_{bU_a,c^2}+U_{bU_{a,c},a\circ c}=U_aV_bU_c+U_cV_bU_a+U_{a,c}V_bU_{a,c}$

$(KJ16)$ $U_aU_bV_a+V_aU_bU_a=U_{bU_a,b\circ a}$

$(KJ17)$ $U_bU_{a,b}+U_{a\circ b}=U_aU_b+U_bU_a+V_aU_bV_a$

$(KJ18)$ $U_bV_c+V_cU_b=U_{b,b\circ c}$

$(KJ19)$ $2U_a=(V_a)^2-V_{a^2}$

$(QJ20)$ $V_{bU_a} + U_{a^2,b} + 2U_{a,a\circ b} = U_a V_b + V_b U_a + V_a V_b V_a$

$(KJ21)$ $a^2 U_b U_a = (bU_a)^2$

$(KJ22)$ $a^2 U_a = (a^2)^2$

$(KJ23)$ $V_a U_a = U_{a,a^2} = U_a V_a$

$(KJ24)$ $V_a V_c + V_{c,a} = V_c V_a + V_{a,c}$

$(KJ25)$ $\{a,c,c\} = c^2 \circ a$

$(KJ26)$ $\{a,b,c\} + \{b,a,c\} = (a \circ b) \circ c$

$(KJ27)$ $V_{b,a} V_{c,a} = V_{b,cU_a} + U_{b,c} U_a$

$(KJ28)$ $V_{a,c} V_{a,b} = V_{cU_a,b} + U_a U_{c,b}$.

Eğer R karakteristiği 2 olan bir cisim ve $\sigma = (M,U,1)$ üçlüsü de R üzerinde özdeşlikli bir kuadratik Jordan cebiri ise bu takdirde M , R üzerinde $x \to x^2$ dönüşümüyle donatılmış, bir kısıtlı Lie cebiridir. Gerçektende, $KJ25$ yardımıyla $x \circ x^2 = \{x,x,x\} = xxx + xxx = 2xxx = 2xU_x = 0$ elde edilir ki bu çok önemli bir özelliktir. Bu tür Lie cebirleri ile (Jonker 1968) de çalışılmıştır.

(Faulkner 1970) de özdeşlikli kuadratik Jordan cebirinin iki kuruluşu verilmiştir:

İlki; R değişmeli ve birleşmeli bir halka, M bir $R-$modül olmak üzere M üzerinde bir n kuadratik form verilsin ve $1 \in M$ için $n(1) = 1$ olsun. M üzerinde simetrik ve 2-lineer bir dönüşüm $n(x,y) = n(x+y) - n(x) - n(y)$ olmak üzere, $t(y) = n(y,1)$, $\bar{y} = t(y) - y$ ve $yU_x = n(x,\bar{y})x - n(x)\bar{y}$ olarak tanımlansın. Burada $n(x) = x\bar{x} \in R$ ve böylece $n(x,\bar{y}) = xy + \bar{y}\bar{x}$ olacağından

$$
\begin{aligned}
yU_x &= \left(xy + \overline{y}\,\overline{x}\right)x - n(x)\overline{y} \\
&= (xy)x + \left(\overline{y}\,\overline{x}\right)x - n(x)\overline{y} \\
&= xyx + \overline{y}\left(\overline{x}x\right) - \overline{y}\,n(x) \\
&= xyx
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Bu takdirde, $(M, U, 1)$ üçlüsü özdeşlikli bir kuadratik Jordan cebiridir ki bu cebir 1 _baz noktalı_ n _kuadratik formlu kuadratik Jordan cebiri_ olarak bilinir. 2. bölümdeki O octonion $R-$cebiri bu özellikte bir Jordan cebiridir.

Şimdi, özdeşlikli kuadratik Jordan cebirinin ikinci kuruluşunu verebiliriz. Bu tezin sonuçları, bu kuruluşu temel alarak, ifade edilecektir. Bu sebeple bu kuruluş detaylı olarak incelenecektir.

Önce kübik cebir tanımı içinde ihtiyaç duyulacak bazı kavramlar detaylı olarak ele alınacaktır.

(McCrimmon 2004) den bir kübik dönüşümün ilk ve tam linerizasyonu ile ilgili bilgiler kullanılarak aşağıda sonuçlar elde edilmiştir.

M bir $R-$ modül olsun. Her $X \in M$ ve her $\alpha \in R$ için M üzerinde bir N kübik dönüşümü verilsin. Bu durumda, $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ olacak biçimde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$ elemanlarının var olduğu kabul edilsin. Böylece, N kübik dönüşümü

$$
\begin{aligned}
N(X) &= N\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3 N(x_i) + \sum_{i \neq j}^{n} \lambda_i^2 \lambda_j N(x_i, x_j) + \sum_{i<j<k}^{n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k N(x_i, x_j, x_k)
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılarak $R[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ polinom halkasına genişletilmiş olur.

$X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ de $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$ ve $x_1 = x$ olarak seçilirse $N(X) = N(1x + 0x_2 + \ldots + 0x_n) = \lambda_1^3 N(x_1) = 1^3 N(x) = N(x)$ olduğu görülür.

Şimdi $N(x+\lambda y)$ yi hesaplamak istiyoruz. $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+...+\lambda_n x_n$ ifadesinde $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda$, $\lambda_3=...=\lambda_n=0$ ve $x_1=x$, $x_2=y$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} N(x+\lambda y+0x_3+...+0x_n) &= \sum_{i=1}^{2}\lambda_i^3 N(x_i)+\sum_{i\neq j}^{2}\lambda_i^2\lambda_j N(x_i,x_j)+0 \\ &= \lambda_1^3 N(x_1)+\lambda_2^3 N(x_2)+\lambda_1^2\lambda_2 N(x_1,x_2)+\lambda_2^2\lambda_1 N(x_2,x_1) \\ &= N(x)+\lambda^3 N(y)+\lambda N(x,y)+\lambda^2 N(y,x) \\ &= N(x)+\lambda N(x,y)+\lambda^2 N(y,x)+\lambda^3 N(y) \end{aligned}$$

olur. Buradan, $N(x+\lambda y)=N(x)+\lambda N(x,y)+\lambda^2 N(y,x)+\lambda^3 N(y)$ ve böylece $N(x+\lambda y)-N(x)=\lambda\left[N(x,y)+\lambda N(y,x)+\lambda^2 N(y)\right]$ yazılabilir. Son eşitliğin her iki tarafı λ ya bölünür ve $\lambda\to 0$ iken her iki tarafın limiti alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to 0}\frac{N(x+\lambda y)-N(x)}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to 0}\left[N(x,y)+\lambda N(y,x)+\lambda^2 N(y)\right] \\ &= N(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir. $N(x,y)$ ye N nin x noktasında y yönündeki diferansiyeli (veya yönlü türevi) denir. Bu durumda, $N(x,y)=\Delta_x^y N=\partial_y N_x$ olarak ifade edilebilir. Üstelik, $N(x,y)$ x de kuadratik y de lineerdir. Bu özellikteki $N(x,y)$ ye N *nin ilk linerizasyonu* adı verilir.

$N(x+\lambda y)=N(x)+\lambda N(x,y)+\lambda^2 N(y,x)+\lambda^3 N(y)$ eşitliğinde $\lambda=1$ alarak $N(x,y)$ terimi yalnız bırakılırsa

$$N(x,y)=N(x+y)-N(y,x)-N(x)-N(y) \tag{3.1}$$

bulunur. Buradan,

$$N(x,y)+N(y,x)=N(x+y)-N(x)-N(y) \tag{3.2}$$

elde edilir. $N(x,y)$ sadece N ye bağlı olarak yazılmak istenseydi,

$N(x,y)=2\left[N(x,y)+N(y,x)\right]-\frac{1}{2}\left[\mathbf{2}N(x,y)+\mathbf{4}N(y,x)\right]$ eşitliğinde (3.2) kullanılırsa

$$N(x,y)=2\left[N(x+y)-N(x)-N(y)\right]-\frac{1}{2}\left[N(x,\mathbf{2}y)+N(\mathbf{2}y,x)\right]$$

olarak bulunur. Son eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terimde yine (3.2) kullanılırsa

$$N(x,y)=2\left[N(x+y)-N(x)-N(y)\right]-\frac{1}{2}\left[N(x+2y)-N(x)-N(2y)\right]$$
$$=2\left[N(x+y)-N(x)-N(y)\right]-\frac{1}{2}\left[N(x+2y)-N(x)-8N(y)\right]$$

sonucu elde edilirdi.

$N(x,y)$ de $y=x$ alınırsa,

$$N(x,x)=2\left[N(2x)-N(x)-N(x)\right]-\frac{1}{2}\left[N(3x)-N(x)-8N(x)\right]$$
$$=2\left[8N(x)-2N(x)\right]-\frac{1}{2}\left[27N(x)-9N(x)\right]$$
$$=12N(x)-\frac{1}{2}18N(x)$$
$$=12N(x)-9N(x)$$
$$=3N(x)$$

olur.

$^{\#}$ M üzerinde bir kuadratik dönüşüm ve T de M üzerinde tanımlı bir simetrik ve 2-lineer dönüşüm olmak üzere $N:M\times M\to R$ dönüşümü her $(x,y)\in M\times M$ için $N(x,y):=T(x^{\#},y)$ olarak tanımlansın. N; x de kuadratik y de lineer olan 2. dereceden homojen bir polinom fonksiyondur. $T(x,y):=T(xy)$ olmak üzere özel olarak $y=1$ için $N(x,1)=T(x^{\#},1)=T(x^{\#})$ ve $x=1$ için

$N(1,y)=T(1^{\#},y)=T(1,y)=T(y)$ olur. Bu durumda $N(x+\lambda y)$ de x yerine $-x$ ve y yerine 1 alarak,

$$N(\lambda 1-x)=N(-x)+\lambda N(-x,1)+\lambda^2 N(1,-x)+\lambda^3 N(1)$$
$$=-N(x)+\lambda N(x,1)-\lambda^2 N(1,x)+\lambda^3 N(1)$$
$$=-N(x)+\lambda T(x^{\#})-\lambda^2 T(x)+\lambda^3 1$$

elde edilir. $N(\lambda 1-x):=p_x(\lambda)=\lambda^3-T(x)\lambda^2+T(x^{\#})\lambda-N(x)1$ olarak tanımlansın. Bu polinoma *jenerik minimum polinom* adı verilir. Burada, $N(0)=0$ olacağından her x için $p_x(x)=x^3-x^2T(x)+xT(x^{\#})-N(x)1=0$ eşitliğinin sağlanacağı açıktır.

Buradan, $x^3 - x^2T(x) + xT(x^\#) = N(x)1$ ve $\left(x^2 - xT(x) + T(x^\#)\right)x = N(x)1$ yazılabilir. Böylece, $T(x^\#) := S(x)$ ve $x^\# := x^2 - xT(x) + S(x)$ olarak tanımlanırsa $x^\# x = xx^\# = N(x)1$ olarak yazılması mümkün olacaktır.

$S(x)$ dönüşümü için $S(x,y) = \frac{1}{2}\left[S(x+y) - S(x) - S(y)\right]$ ifadesine birleştirilmiş form denir. Burada $S(x,x) = \frac{1}{2}\left[S(2x) - S(x) - S(x)\right] = \frac{1}{2}\left[4S(x) - 2S(x)\right] = S(x)$ dir.

$x \times x = x^\#$ özelliğinde M üzerinde 2-lineer ve simetrik olan bir $\times$ dönüşümü $M \times M$ den M ye her $(x,y) \in M \times M$ için

$$x \times y := \frac{1}{2}\left[(x+y)^\# - x^\# - y^\#\right] \tag{3.3}$$

olarak tanımlansın. Bu çarpımın bir başka ifadesi Freudenthal çarpım olarak ileride (3.7) de verilmiştir. (3.7) yardımıyla $\times$ işleminin $+$ işlemi üzerine dağılma özelliğine sahip olduğu gerçeğini görmek çok kolaydır.

Aşağıdaki teorem $S(x,y)$ nin bazı özelliklerini belirlemektedir.

Teorem 3.2: $S(x,y)$ birleştirilmiş form için aşağıdaki önermeler doğrudur:

i) $S(x,y) = T(x \times y)$ dir. Bu durumda, $S(x,1) = T(x)T(1) - T(x)$ ve $S(x,x) = S(x)$ olur.

ii) $S(x,y)$ simetrik ve 2-lineerdir.

İspat: i) $S(x,y) = \frac{1}{2}\left[T\left((x+y)^\#\right) - T(x^\#) - T(y^\#)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[T\left((x+y)^\# - x^\# - y^\#\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}T\left(2(x \times y)\right)$$

$$= T(x \times y)$$

dir.

Eğer, $y=1$ alınırsa

$$S(x,1)=T(x\times 1)=T(1\times x)=T\left(T(x)1-x\right)$$
$$=T\left(T(x)1\right)-T(x)=T(x)T(1)-T(x)$$

bulunur.

Özel olarak, $y=x$ için

$$S(x,x)=T(x\times x)=T\left(x^{\#}\right)=S(x)$$

dir.

ii) $x\times y=y\times x$ olduğundan i) den $S(x,y)=S(y,x)$ yani S birleştirilmiş formu simetriktir. Böylece,

$$S(x+z,y)=T\left((x+z)\times y\right)=T(x\times y+z\times y)=T(x\times y)+T(z\times y)=S(x,y)+S(z,y)$$

ve

$$S(\alpha x,y)=T\left((\alpha x)\times y\right)=T\left(\alpha(x\times y)\right)=\alpha T(x\times y)=\alpha S(x,y)$$

elde edilir ki bu S birleştirilmiş formunun 1. bileşene göre lineer olduğunu gösterir. S nin simetrikliği ve 1. bileşene göre lineerliğinden S nin 2. bileşene göre de lineer olduğu yani S nin 2-lineer olduğu sonucuna varılır.

Şimdi $N(x+\lambda y+\mu z)$ yi hesaplamak istiyoruz.

$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+...+\lambda_n x_n$ ifadesinde $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda$, $\lambda_3=\mu$, $\lambda_4=\lambda_5=...=\lambda_n=0$ ve $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ alarak;

$$N(x+\lambda y+\mu z)$$
$$=\lambda_1^3 N(x_1)+\lambda_2^3 N(x_2)+\lambda_3^3 N(x_3)+\lambda_1^2\lambda_2 N(x_1,x_2)+\lambda_1^2\lambda_3 N(x_1,x_2)+\lambda_2^2\lambda_1 N(x_2,x_1)$$
$$+\lambda_2^2\lambda_3 N(x_2,x_3)+\lambda_3^2\lambda_1 N(x_3,x_1)+\lambda_3^2\lambda_2 N(x_3,x_2)+\lambda_1\lambda_2\lambda_3 N(x_1,x_2,x_3)$$

ve böylece

$$N(x+\lambda y+\mu z)=N(x)+\lambda^3 N(y)+\mu^3 N(z)+\lambda N(x,y)+\mu N(x,z)+\lambda^2 N(y,x)$$
$$+\lambda^2\mu N(y,z)+\mu^2 N(z,x)+\mu^2\lambda N(z,y)+\lambda\mu N(x,y,z)$$

elde ederiz. Son eşitlikte $\lambda=\mu=1$ alarak $N(x,y,z)$ terimi yalnız bırakılırsa

$$N(x,y,z)$$
$$=N(x+y+z)-N(x,y)-N(x,z)-N(y,x)-N(y,z)-N(z,x)-N(z,y)-N(x)-N(y)-N(z)$$

ve $N(u,v)$ ile $N(v,u)$ biçimindeki tüm terimleri yan yana getirerek

$$N(x,y,z)$$
$$=N(x+y+z)-[N(x,y)+N(y,x)]-[N(x,z)+N(z,x)]-[N(y,z)+N(z,y)]-N(x)-N(y)-N(z)$$

buluruz. Bu son eşitlikteki $[N(u,v)+N(v,u)]$ biçimindeki tüm terimler yerine (3.2) den eşiti olan $N(u+v)-N(u)-N(v)$ yazılırsa

$$\begin{aligned} N(x,y,z)=N(x+y+z)&-[N(x+y)-N(x)-N(y)]-[N(x+z)-N(x)-N(z)] \\ &-[N(y+z)-N(y)-N(z)]-N(x)-N(y)-N(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli kısaltmalar yapılarak $N(x,y,z)$ yi N ye bağlı olarak

$$N(x,y,z)=N(x+y+z)-N(x+y)-N(x+z)-N(y+z)+N(x)+N(y)+N(z) \quad (3.4)$$

yazılmış olur. Bu son ifadeye N *nin tam linerizasyonu* adı verilir. Aşağıdaki ifade de N nin tam linerizasyonuna denktir:

$N(x,y,z):=N(x+z,y)-N(x,y)-N(z,y)$ olarak tanımlansın. Burada, eşitliğin sol tarafındaki her bir terim yerine (3.1) den eşiti yazılırsa

$$\begin{aligned} N(x,y,z)=&\left[N(x+z+y)-N(y,x+z)-N(x+z)-N(y)\right] \\ &-[N(x+y)-N(y,x)-N(x)-N(y)]-[N(z+y)-N(y,z)-N(z)-N(y)] \end{aligned}$$

ve böylece

$$N(x,y,z)=N(x+y+z)-N(x+y)-N(x+z)-N(y+z)+N(x)+N(y)+N(z)$$

elde edilir ki bu (3.4) deki sonuçla aynıdır. $N(x,y,z)$ de y ve z yerine x alınırsa

$$\begin{aligned} N(x,x,x)&=N(3x)-N(2x)-N(2x)-N(2x)+3N(x) \\ &=27N(x)-8N(x)-8N(x)-8N(x)+3N(x) \\ &=27N(x)-8N(x)-8N(x)-8N(x)+3N(x) \\ &=30N(x)-24N(x) \\ &=6N(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $N(x,x,x)=N(x)$ olması istendiğinden $N(x,y,z)=\frac{1}{6}[N(x+y+z)-N(x+y)-N(x+z)-N(y+z)+N(x)+N(y)+N(z)]$ olarak alınır. Her $(x,y,z)\in M\times M\times M$ için

$$N(x,y,z)=\frac{1}{6}\left[N(x+y+z)-N(x+y)-N(x+z)-N(y+z)+N(x)+N(y)+N(z)\right]$$

olarak tanımlanan $N: M\times M\times M\to R$ dönüşümüne birleştirilmiş form denir.

Teorem 3.3: Birleştirilmiş form için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) $N(x,y,z)=\frac{1}{3}T(x\times z,y)$ dir. Bu durumda $3N(x,y,x)=T(x^{\#},y)=N(x,y)$ dir.

ii) $N(x,y,z)$ birleştirilmiş formu simetrik ve 3-lineerdir.

İspat: i) $N(x,y,z)=\frac{1}{6}\left[N(x+z,y)-N(x,y)-N(z,y)\right]$

$$=\frac{1}{6}\left[T\left((x+z)^{\#},y\right)-T\left(x^{\#},y\right)-T\left(z^{\#},y\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[T\left((x+z)^{\#}-x^{\#}-z^{\#},y\right)\right]$$

$$=\frac{1}{6}T\left(2(x\times z),y\right)$$

$$=\frac{1}{3}T(x\times z,y)$$

ve böylece

$$N(x,y,z)=\frac{1}{3}T(x\times z,y) \tag{3.5}$$

olur. Burada özel olarak z yerine x alınırsa $N(x,y,x)=\frac{1}{3}T(x\times x,y)=\frac{1}{3}T(x^{\#},y)$ ve böylece $3N(x,y,x)=T(x^{\#},y)=N(x,y)$ elde edilir.

ii) $N(x,y,z)$ nin tanımından simetrikliği açıktır. 3-lineerliliği, i) deki sonuç yardımıyla T dönüşümünün lineerliliği kullanılarak kolayca görülebilir.

$T\left(x^{\#}, y\right)=N(x, y)$ dir. Ancak $T(x, y)$ nedir? Şimdi bu sorunun cevabını bulmak istiyoruz. Tanım 3.5 deki kübik cebir tanımında $y \times 1=\frac{1}{2}[T(y)-y]$ olması isteneceğinden $T(x, y \times 1)=T\left(x, \frac{1}{2}(T(y)-y)\right)$ ve T nin 2. bileşene göre lineerliğinden

$$
\begin{aligned}
2T(x, y \times 1) &= T(x, T(y))-T(x, y) \\
&= T(x,1) T(y)-T(x, y) \\
&= T(x) T(y)-T(x, y)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. T nin özellikleri gereği (simetrikliği, (3.5) ve $T(x, y)=T(xy)$) $T(x, y \times 1)=T(x \times y, 1)$ ve $T(x \times y, 1)=T(x \times y)$ olduğundan $2T(x \times y)=T(x) T(y)-T(x, y)$ yani

$$
T(x, y)=T(x) T(y)-2T(x \times y) \tag{3.6}
$$

elde edilir. Bu sonuç ile birlikte $x^{\#}:=x^{2}-xT(x)+S(x)$, $S(x, y)=\frac{1}{2}[S(x+y)-S(x)-S(y)]$ ve $S(x, y)=T(x \times y)$ olduğu $x \times y=\frac{1}{2}\left[(x+y)^{\#}-x^{\#}-y^{\#}\right]$ eşitliğinde kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
x \times y &= \frac{1}{2}\left[\left((x+y)^{2}-(x+y) T(x+y)+S(x+y)\right)-\left(x^{2}-xT(x)+S(x)\right)-\left(y^{2}-yT(y)+S(y)\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(x^{2}+xy+yx+y^{2}\right)-(x+y)(T(x)+T(y))+S(x+y)-x^{2}+xT(x)-S(x)-y^{2}+yT(y)-S(y)\right] \\
&= \frac{1}{2}[(xy+yx)-xT(x)-xT(y)-yT(x)-yT(y)+S(x+y)+xT(x)-S(x)+yT(y)-S(y)] \\
&= \frac{1}{2}[(xy+yx)-xT(y)-yT(x)+S(x+y)-S(x)-S(y)] \\
&= \frac{1}{2}(xy+yx)-\frac{1}{2} xT(y)-\frac{1}{2} yT(x)+\frac{1}{2}[S(x+y)-S(x)-S(y)] \\
&= x \square y-\frac{1}{2} xT(y)-\frac{1}{2} yT(x)+\frac{1}{2}[S(x+y)-S(x)-S(y)] \\
&= x \square y-\frac{1}{2} xT(y)-\frac{1}{2} yT(x)+\frac{1}{2} S(x, y) \\
&= x \square y-\frac{1}{2} xT(y)-\frac{1}{2} yT(x)+\frac{1}{2} T(x \times y)
\end{aligned}
$$

$$= x\square y - \frac{1}{2}xT(y) - \frac{1}{2}yT(x) + \frac{1}{2}\left(T(x)T(y) - T(x,y)\right)$$

sonucuna ulaşılır. Burada elde edilen

$$x \times y = x\square y - \frac{1}{2}xT(y) - \frac{1}{2}yT(x) + \frac{1}{2}\left(T(x)T(y) - T(x,y)\right)1 \qquad (3.7)$$

eşitliği literatürde *Freudenthal çarpım* olarak bilinmektedir.

(3.1) ve (3.3) den elde edilecek $N(x+y) = N(x) + T(x^{\#}, y) + T(x, y^{\#}) + N(y)$ ve $(x+y)^{\#} = x^{\#} + 2(x \times y) + y^{\#}$ eşitlikleri kullanarak ispatlanacak aşağıdaki teoremin benzeri (Faulkner 2014) de Lemma 11.15 olarak ifade edilmiştir.

Teorem 3.4: M bir $R-$ modül, N bir kübik dönüşüm olmak üzere $(M, N, 1)$ sisteminde (cebirinde) her $x, y, z, w \in M$ için aşağıdaki önermeler geçerlidir:

a) $(x^{\#})^{\#} = N(x)x$

b) $4\left[x^{\#} \times (x \times y)\right] = N(x)y + T(x^{\#}, y)x$

c) $4\left[(x \times y)^{\#}\right] + 2\left(x^{\#} \times y^{\#}\right) = T(x^{\#}, y)y + T(y^{\#}, x)x$

d) $8\left[(x \times y) \times (x \times z)\right] + 4\left[x^{\#} \times (y \times z)\right] = T(x^{\#}, y)z + T(x^{\#}, z)y + 2T(y \times z, x)x$

e) $4\left[(x \times y) \times (w \times z) + (w \times y) \times (x \times z) + (x \times w) \times (y \times z)\right]$

$= T(x \times w, y)z + T(x \times w, z)y + T(y \times z, x)w + T(y \times z, w)x$

İspat: a) daki önermenin ispatı için (Faulkner 2014) deki Lemma 11.13 b) ye bakılabilir.

a) da $s, t \in R$ olmak üzere x yerine $sx + ty$ yazılarak her iki taraf açılırsa $s^3 t$ li terimlerin katsayıların eşitliğinden b) ve $s^2 t^2$ li terimlerin katsayılarının eşitliğinden c) elde edilir. c) de y yerine $sy + tz$ yazılır ve her iki taraf açılırsa st li terimlerin katsayılarının eşitliğinden d) elde edilir. d) de x yerine $sx + tw$ yazılır ve her iki taraf açılırsa st li terimlerin katsayılarının eşitliğinden e) elde edilir.

a) da x yerine $sx + ty$ yazarsak;

$((sx+ty)^{\#})^{\#} = [N(sx+ty)](sx+ty)$ olur. Önce sol taraf açılırsa,

$$((sx+ty)^{\#})^{\#}$$

$$=\left[(sx)^{\#}+2(sx\times ty)+(ty)^{\#}\right]^{\#}$$

$$=\left((sx)^{\#}\right)^{\#}+2\left[(sx)^{\#}\times\left(2(sx\times ty)+(ty)^{\#}\right)\right]+\left(2(sx\times ty)+(ty)^{\#}\right)^{\#}$$

$$=[N(sx)](sx)+2\left[(sx)^{\#}\times 2(sx\times ty)\right]+2\left[(sx)^{\#}\times(ty)^{\#}\right]+[2(sx\times ty)]^{\#}+2\left[2(sx\times ty)\times(ty)^{\#}\right]+\left((ty)^{\#}\right)^{\#}$$

$$=[N(x)x]s^4+4\left[x^{\#}\times(x\times y)\right]{\color{red}s^3t}+2\left(x^{\#}\times y^{\#}\right){\color{blue}s^2t^2}+4(x\times y)^{\#}{\color{blue}s^2t^2}+4\left((x\times y)\times y^{\#}\right)st^3+[N(y)y]t^4$$

elde edilir. Şimdi $[N(sx+ty)](sx+ty)$ ifadesini açık olarak yazalım. Böylece,

$$[N(sx+ty)](sx+ty)=\left[N(sx)+T((sx)^{\#},ty)+T(sx,(ty)^{\#})+N(ty)\right](sx+ty)$$

$$=\left[N(x)s^3+T(x^{\#},y)s^2t+T(x,y^{\#})st^2+N(y)t^3\right](sx+ty)$$

$$=[N(x)x]s^4+T(x^{\#},y)x{\color{red}s^3t}+T(x,y^{\#})x{\color{blue}s^2t^2}+N(y)xst^3+N(x)y{\color{red}s^3t}+T(x^{\#},y)y{\color{blue}s^2t^2}+$$
$$T(x,y^{\#})yst^3+[N(y)y]t^4$$

olur.

Elde edilen iki eşit ifadenin yukarıda kırmızı renkle gösterilen s^3t li terimlerin katsayılarının eşitliğinden b) deki sonucun geçerli olduğu görülür. st^3 lü terimlerin katsayılarının eşitliğinden $4\left[(x\times y)\times y^{\#}\right]=N(y)x+T(x,y^{\#})y$ bulunurdu ki bu b) deki sonuçta x ile y nin rollerinin değişmesine karşılık gelen sonucu verir. Eğer bu eşitlikte yukarıda mavi renk ile gösterilen s^2t^2 li terimlerin katsayıların eşitliği dikkate alınırsa c) deki sonucun geçerli olduğu görülür.

c) de $s,t\in R$ olmak üzere y yerine $sy+tz$ yazarsak ve eşitliğin her iki tarafını açarsak;

$$4[x\times(sy+tz)]^{\#}+2(x^{\#}\times(sy+tz)^{\#})=T(x^{\#},sy+tz)(sy+tz)+T((sy+tz)^{\#},x)x$$

$$\Rightarrow 4\left[(x\times sy)+(x\times tz)\right]^{\#}+2\left(x^{\#}\times\left[(sy)^{\#}+2(sy+tz)+(tz)^{\#}\right]\right)$$
$$=\left[T(x^{\#},sy)+T(x^{\#},tz)\right](sy+tz)+T\left((sy)^{\#}+2(sy+tz)+(tz)^{\#},x\right)x$$

$$\Rightarrow 4\left[(x\times sy)^{\#}+2\left((x\times sy)\times(x\times tz)\right)+(x\times tz)^{\#}\right]+2\left(x^{\#}\times(sy)^{\#}\right)+2\left(x^{\#}\times 2(sy+tz)\right)+2\left(x^{\#}\times(tz)^{\#}\right)$$
$$=T(x^{\#},y)ys^2+T(x^{\#},z)yst+T(x^{\#},y)zst+T(x^{\#},z)zt^2+\left[T(y^{\#},x)s^2+2T(y\times z,x)st+T(z^{\#},x)t^2\right]x$$

$$\Rightarrow 4(x\times y)^{\#}s^2+8((x\times y)\times(x\times z))st+4(x\times z)^{\#}t^2+2(x^{\#}\times y^{\#})s^2+4(x^{\#}\times(y\times z))st+2(x^{\#}\times z^{\#})t^2$$
$$=T(x^{\#},y)ys^2+T(x^{\#},z)yst+T(x^{\#},y)zst+T(x^{\#},z)zt^2+\left[T(y^{\#},x)s^2+2T(y\times z,x)st+T(z^{\#},x)t^2\right]x$$

elde edilir. Son eşitlikte yukarıda pembe renk ile gösterilen st li terimlerin katsayılarının eşitliğinden d) deki sonuç elde edilir.

d) de $s,t\in R$ olmak üzere x yerine $sx+tw$ yazarsak ve her iki tarafı açarsak;

$$8\left[((sx+tw)\times y)\times(sx+tw)\times z)\right]+4\left[(sx+tw)^{\#}\times(y\times z)\right]=$$
$$T((sx+tw)^{\#},y)z+T((sx+tw)^{\#},z)y+2T((y\times z,sx+tw)(sx+tw)$$

elde edilir. Önce sol taraf açılırsa,

$$8\left[((sx+tw)\times y)\times(sx+tw)\times z)\right]+4\left[(sx+tw)^{\#}\times(y\times z)\right]$$
$$=8\left[((sx\times y)+(tw\times y))\times((sx\times z)+(tw\times z))\right]+4\left[((sx)^{\#}+2(sx\times tw)+(tw)^{\#})\times(y\times z)\right]$$
$$=8\left[((sx\times y)+(tw\times y))\times(sx\times z)+((sx\times y)+(tw\times y))\times(tw\times z)\right]+$$
$$4\left[(sx)^{\#}\times(y\times z)+2\left[(sx\times tw)\times(y\times z)\right]+(tw)^{\#}\times(y\times z)\right]$$
$$=8\left[(sx\times y)\times(sx\times z)+(tw\times y)\times(sx\times z)+(sx\times y)\times(tw\times z)+(tw\times y)\times(tw\times z)\right]+$$
$$4\left[s^2(x^{\#}\times(y\times z)+2st\left[(x\times w)\times(y\times z)\right]+t^2(w^{\#}\times(y\times z))\right]$$
$$=8s^2\left[(x\times y)\times(x\times z)\right]+8st\left[(w\times y)\times(x\times z)\right]+8st\left[(x\times y)\times(w\times z)\right]+8t^2\left[(w\times y)\times(w\times z)\right]+$$
$$4s^2(x^{\#}\times(y\times z)+8st\left[(x\times w)\times(y\times z)\right]+4t^2(w^{\#}\times(y\times z))$$

olur. Şimdi sağ taraf açık yazılırsa,

$$T((sx+tw)^{\#},y)z+T((sx+tw)^{\#},z)y+2T((y\times z,sx+tw)(sx+tw)$$
$$=T((sx)^{\#}+2(sx\times tw)+(tw)^{\#},y)z+T((sx)^{\#}+2(sx\times tw)+(tw)^{\#},z)y+2T(y\times z,sx)(sx+tw)+$$
$$2T(y\times z,tw)(sx+tw)$$
$$=s^2T(x^{\#},y)z+2stT(x\times w,y)z+t^2T(w^{\#},y)z+s^2T(x^{\#},z)y+2stT(x\times w,z)y+t^2T(w^{\#},z)y+$$
$$2T(y\times z,sx)sx+2T(y\times z,sx)tw+2T(y\times z,tw)sx+2T(y\times z,tw)tw$$
$$=s^2T(x^{\#},y)z+2stT(x\times w,y)z+t^2T(w^{\#},y)z+s^2T(x^{\#},z)y+2stT(x\times w,z)y+t^2T(w^{\#},z)y+$$
$$2s^2T(y\times z,x)x+2stT(y\times z,x)w+2stT(y\times z,w)x+2t^2T(y\times z,w)w$$

bulunur. Bu eşitliğin yukarıda turuncu renk ile gösterilen st li terimlerin katsayılarının eşitliğinden e) deki sonuç görülür.

Şimdi, (Bix 1980) den kübik cebir tanımını vermek için hazırız.

Tanım 3.5: M , özdeşlikli bir $R-$modül olsun. M üzerinde $x \to x^{\#}$ biçiminde bir kuadratik dönüşüm ve M üzerinde bir N kübik form tanımlansın. Eğer M üzerinde aşağıdaki şartlar sağlanırsa M ye bir kübik $R-$cebir denir:

1) $x^{\#\#} = N(x)x$ dir.

2) $N(1)=1$ dir.

3) $T(x^{\#}, y) = N(x,y)$ dir.

4) $1^{\#} = 1$ dir.

5) $x \times y = \frac{1}{2}\left[(x+y)^{\#} - x^{\#} - y^{\#}\right]$ ve $T(y) = T(y,1)$ olmak üzere $1 \times y = \frac{1}{2}\left[T(y)1 - y\right]$ dir.

1-5) şartlarının hepsi R nin tüm skalar genişlemeleri altında sağlanır.

Tanım 3.5 in 3. şartında $N(x,y) := \Delta_x^y N = \partial_y N_x$ olarak ifade edilebileceğini daha önce belirtmiştik (bkz. s. 20). Bu durumda N dönüşümü x de kuadratik y de lineer olan bir dönüşüm olarak tanımlanmıştı.

Bir kübik cebir $U_x y = T(x,y)x - 2(x^{\#} \times y)$ eşitliği altında bir özdeşlikli kuadratik Jordan cebiridir (McCrimmon 1969).

$U_x y = T(x,y)x - 2(x^{\#} \times y)$ eşitliğinde $x=1$ olarak seçilirse; $U_1 y = T(1,y)1 - 2(1^{\#} \times y) = T(y)1 - 2(1 \times y)$ olur ve $U_1 y = y$ olacağından bu iki sonuç birleştirilirse $T(y)1 - 2(1 \times y) = y$ yani $1 \times y = \frac{1}{2}\left[T(y)1 - y\right]$ elde edilir. Bu sonucun Tanım 3.5 in 5 nolu şartında yer aldığına dikkat ediniz.

$U_x y = T(x,y)x - 2(x^{\#} \times y)$ eşitliğinde $y=1$ olarak alınırsa;

$U_x 1 = U_x = x^2 = T(x,1)x - 2(x^{\#} \times 1)$

$\Rightarrow x^2 - T(x)x + 2[x^\# \times 1] = 0$

$\Rightarrow x^2 - T(x)x + 2\left(\frac{1}{2}[T(x^\#)1 - x^\#]\right) = 0$

$\Rightarrow x^2 - T(x)x + T(x^\#) = x^\#$

$\Rightarrow x^2 - T(x)x + S(x) = x^\#$

ve böylece

$$x^2 = T(x)x + x^\# - S(x) \tag{3.8}$$

elde edilir.

$U_x y = T(x, y)x - 2(x^\# \times y)$ eşitliğinde $y = x$ olarak seçilirse;

$U_x x = xxx = x^3 = T(x, x)x - 2[x^\# \times x]$ eşitliğinden (3.6) yardımıyla

$$x^3 = [T(x)T(x) - 2T(x \times x)]x - 2[x^\# \times x]$$

ve (3.3) yardımıyla

$$x^3 = [T(x)]^2 x - 2T(x^\#)x - 2[x^\# \times x]$$

elde edilir. Son eşitlikte $x^\# \times x$ in eşiti (3.7) den yazılırsa

$$x^3 = [T(x)]^2 x - 2T(x^\#)x - 2\left[x^\# x - \frac{1}{2}T(x^\#)x - \frac{1}{2}T(x)x^\# + \frac{1}{2}[T(x^\#)T(x) - T(x^\#, x)]\right]$$

olur ve son eşitlikte $x^\# x = N(x)$ olduğu kullanılırsa

$$x^3 = [T(x)]^2 x - 2T(x^\#)x - 2N(x) + T(x^\#)x + T(x)x^\# - T(x^\#)T(x) + T(x^\#, x)$$

bulunur ki son eşitlikte gerekli kısaltmalar yapılarak

$$x^3 = [T(x)]^2 x - T(x^\#)x - 2N(x) + T(x)x^\# - T(x^\#)T(x) + T(x^\#, x) \tag{3.9}$$

sonucuna varılır. Burada $T(x^\#, x) = N(x, x) = 3N(x)$ olduğundan, (3.9) dan

$$x^3 = [T(x)]^2 x - T(x^\#)x + N(x) + T(x)x^\# - T(x^\#)T(x)$$

yazabiliriz ki

$$
\begin{aligned}
x^3+T(x^\#)x-N(x)&=\left[T(x)\right]^2 x+T(x)x^\#-T(x^\#)T(x)\\
&=T(x)\left[T(x)x+x^\#-T(x^\#)\right]\\
&=T(x)\left[T(x)x+x^\#-S(x)\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada (3.8) kullanılırsa, $x^3-T(x)x^2+T(x^\#)x-N(x)=0$ elde edilir. O halde bir kuadratik Jordan cebirinde

$$x^3-T(x)x^2+T(x^\#)x-N(x)=0$$

bağıntısı geçerlidir. Üstelik, $xx^\#=x^\#x=N\left(x\right)$ olduğundan bir x elemanının birim olması için gerek ve yeter şart $N\left(x\right)$ in birim olmasıdır ve bu durumda $x^{-1}=N\left(x\right)^{-1}x^\#$ dir.

$U_x y=T\left(x,y\right)x-2\left(x^\#\times y\right)$ olduğunu kullanarak, $U_{x,z}=\frac{1}{2}\left[U_{x+z}-U_x-U_z\right]$ eşitliğinden $U_{x,z}y=\frac{1}{2}\left[U_{x+z}y-U_x y-U_z y\right]$ ve böylece

$$U_{x,z}y=\frac{1}{2}\Big[T\left(x+z,y\right)\left(x+z\right)-2\left(\left(x+z\right)^\#\times y\right)-\left(T\left(x,y\right)x-2\left(x^\#\times y\right)\right)-\left(T\left(z,y\right)z-2\left(z^\#\times y\right)\right)\Big]$$

yazabiliriz. Bu son eşitlikte T nin lineerliği ve $(x+y)^\#=x^\#+2(x\times y)+y^\#$ genişlemesi kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
U_{x,z}y=&\frac{1}{2}\Big[T\left(x,y\right)\left(x+z\right)+T\left(z,y\right)\left(x+z\right)-2\left(\left(x^\#+2\left(x\times z\right)+z^\#\right)\times y\right)\Big]\\
&-\frac{1}{2}T\left(x,y\right)x+\left(x^\#\times y\right)-\frac{1}{2}T\left(z,y\right)z+\left(z^\#\times y\right)
\end{aligned}
$$

olur ve gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$U_{x,z}y=\frac{1}{2}T\left(x,y\right)z+\frac{1}{2}T\left(z,y\right)x-2\left(x\times z\right)\times y \tag{3.10}$$

olarak bulunur. Üstelik, $U_{x,z}y=V_{x,y}z$ olarak tanımlı olup (3.10) dan

$$V_{x,y}z=\frac{1}{2}T\left(x,y\right)z+\frac{1}{2}T\left(z,y\right)x-2\left(x\times z\right)\times y \tag{3.11}$$

sonucuna varılır. (3.11) deki sonuç, tezin son kısmında verilecek lemmanın ispatında önemli bir rol oynayacaktır.

Bu kuadratik Jordan cebirinde Teorem 3.4 deki önermeler sağlanır. Bu önermelere benzer daha fazla sonuç görmek için (McCrimmon 1969) a bakılabilir.

4. BİR KUADRATİK JORDAN CEBİR SINIFI VE ONUNLA KOORDİNATLANAN OCTONİON DÜZLEMLER

Gösterim: Girdileri O octonion $R-$cebirinden alınan tüm 3×3 matrislerin kümesi kısaca O_3 ile gösterilecektir.

O_3 kümesi üzerinde $+$ iç işlemi olarak bildiğimiz matris toplamı ve $R\times\mathrm{O}_3\rightarrow\mathrm{O}_3$ dış işlemi olarak skalarla bir matrisin çarpımı alınırsa $\left(\mathrm{O}_3,+,\cdot\right)$ özdeşlikli bir $R-$modül olur. O_3 üzerinde ikinci bir iç işlem olarak alışageldiğimiz matris çarpımı alınırsa $\left(\mathrm{O}_3,+,\cdot\right)$ sistemi birleşmeli ama değişmeli olmayan özdeşlikli bir halka yani özdeşlikli bir $R-$cebirdir.

$\left(\mathrm{O}_3,+,\cdot\right)$ cebirine R üzerinde 3×3 Cayley matris cebiri adını vereceğiz ve kısaca O_3 $R-$cebiri olarak ifade edeceğiz.

$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ nin R nin birimleri olmak üzere $\Gamma=\begin{bmatrix}\gamma_1 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3\end{bmatrix}$ diyagonal matrisini ele alalım ve her $X=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\in\mathrm{O}_3$ için $J_\Gamma\left(X\right)=\Gamma^{-1}\bar{X}^T\Gamma$ özelliğinde bir $J_\Gamma:\mathrm{O}_3\rightarrow\mathrm{O}_3$ dönüşümü tanımlayalım. Bu dönüşüm O_3 $R-$ cebiri üzerinde bir involusyondur. Gerçektende; her $X=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\in\mathrm{O}_3$ için

$$J_\Gamma(X)=\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}^{-1}\overline{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}}^{T}\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}&0&0\\0&\gamma_2^{-1}&0\\0&0&\gamma_3^{-1}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\overline{a}_{11}&\overline{a}_{21}&\overline{a}_{31}\\\overline{a}_{12}&\overline{a}_{22}&\overline{a}_{32}\\\overline{a}_{13}&\overline{a}_{23}&\overline{a}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}&0&0\\0&\gamma_2^{-1}&0\\0&0&\gamma_3^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\overline{a}_{11}&\gamma_2\overline{a}_{21}&\gamma_3\overline{a}_{31}\\\gamma_1\overline{a}_{12}&\gamma_2\overline{a}_{22}&\gamma_3\overline{a}_{32}\\\gamma_1\overline{a}_{13}&\gamma_2\overline{a}_{23}&\gamma_3\overline{a}_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}\gamma_1\overline{a}_{11}&\gamma_1^{-1}\gamma_2\overline{a}_{21}&\gamma_1^{-1}\gamma_3\overline{a}_{31}\\\gamma_2^{-1}\gamma_1\overline{a}_{12}&\gamma_2^{-1}\gamma_2\overline{a}_{22}&\gamma_2^{-1}\gamma_3\overline{a}_{32}\\\gamma_3^{-1}\gamma_1\overline{a}_{13}&\gamma_3^{-1}\gamma_2\overline{a}_{23}&\gamma_3^{-1}\gamma_3\overline{a}_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{a}_{11}&\gamma_1^{-1}\gamma_2\overline{a}_{21}&\gamma_1^{-1}\gamma_3\overline{a}_{31}\\\gamma_2^{-1}\gamma_1\overline{a}_{12}&\overline{a}_{22}&\gamma_2^{-1}\gamma_3\overline{a}_{32}\\\gamma_3^{-1}\gamma_1\overline{a}_{13}&\gamma_3^{-1}\gamma_2\overline{a}_{23}&\overline{a}_{33}\end{bmatrix}$$

olup

$$J_\Gamma(J_\Gamma(X))=\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}^{-1}\overline{\begin{bmatrix}\overline{a}_{11}&\gamma_1^{-1}\gamma_2\overline{a}_{21}&\gamma_1^{-1}\gamma_3\overline{a}_{31}\\\gamma_2^{-1}\gamma_1\overline{a}_{12}&\overline{a}_{22}&\gamma_2^{-1}\gamma_3\overline{a}_{32}\\\gamma_3^{-1}\gamma_1\overline{a}_{13}&\gamma_3^{-1}\gamma_2\overline{a}_{23}&\overline{a}_{33}\end{bmatrix}}^{T}\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}&0&0\\0&\gamma_2^{-1}&0\\0&0&\gamma_3^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&\gamma_2^{-1}\gamma_1a_{12}&\gamma_3^{-1}\gamma_1a_{13}\\\gamma_1^{-1}\gamma_2a_{21}&a_{22}&\gamma_3^{-1}\gamma_2a_{23}\\\gamma_1^{-1}\gamma_3a_{31}&\gamma_2^{-1}\gamma_3a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}a_{11}&\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1a_{12}&\gamma_1^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_1a_{13}\\\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2a_{21}&\gamma_2^{-1}a_{22}&\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_2a_{23}\\\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_3a_{31}&\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3a_{32}&\gamma_3^{-1}a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_1\gamma_1^{-1}a_{11}&\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1a_{12}&\gamma_3\gamma_1^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_1a_{13}\\\gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_2a_{21}&\gamma_2\gamma_2^{-1}a_{22}&\gamma_3\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}\gamma_2a_{23}\\\gamma_1\gamma_3^{-1}\gamma_1^{-1}\gamma_3a_{31}&\gamma_2\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3a_{32}&\gamma_3\gamma_3^{-1}a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=X$$

dir. Böyle bir involusyona *kanonik involusyon* denir. Şayet bu involusyonda özel olarak $\Gamma = I_3$ birim matris olarak seçilirse bu involusyona *standart involusyon* adı verilir (Jacobson 1968 ya da McCrimmon 2004).

Üstelik; her $X, Y \in \mathrm{O}_3$ için

$$J_\Gamma\left(XY\right)=\Gamma^{-1}\overline{\left(XY\right)}^T\Gamma=\Gamma^{-1}\left(\bar{Y}^T\bar{X}^T\right)\Gamma=\Gamma^{-1}\left(\bar{Y}^T\left(\Gamma\Gamma^{-1}\right)\bar{X}^T\right)\Gamma=\left(\Gamma^{-1}\bar{Y}^T\Gamma\right)\left(\Gamma^{-1}\bar{X}^T\Gamma\right)=J_\Gamma\left(Y\right)J_\Gamma\left(X\right)$$

olduğundan J_Γ O_3 üzerinde bir anti-involusyondur.

Şimdi, J_Γ involusyonu yardımıyla O_3 uzayının simetrik elemanlarını bulmak istiyoruz. Simetrik elemanların oluşturduğu küme $\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3,J_\Gamma\right)$ ile gösterilirse bu alt kümenin herhangi bir elemanının; $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R$ olmak üzere

$$X=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\bar{a}_2\\ \gamma_1\bar{a}_3 & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\bar{a}_1 & \alpha_3\end{bmatrix}$$

formunda olduğu görülür. Gerçektende;

$$J_\Gamma\left(X\right)=\begin{bmatrix}\gamma_1 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3\end{bmatrix}^{-1}\overline{\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\bar{a}_2\\ \gamma_1\bar{a}_3 & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\bar{a}_1 & \alpha_3\end{bmatrix}}^T\begin{bmatrix}\gamma_1 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3\end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2^{-1} & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_1 a_3 & \gamma_1\bar{a}_2\\ \gamma_2\bar{a}_3 & \alpha_2 & \gamma_2 a_1\\ \gamma_3 a_2 & \gamma_3\bar{a}_1 & \alpha_3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\gamma_1 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}\alpha_1 & \gamma_1^{-1}\gamma_1 a_3 & \gamma_1^{-1}\gamma_1\bar{a}_2\\ \gamma_2^{-1}\gamma_2\bar{a}_3 & \gamma_2^{-1}\alpha_2 & \gamma_2^{-1}\gamma_2 a_1\\ \gamma_3^{-1}\gamma_3 a_2 & \gamma_3^{-1}\gamma_3\bar{a}_1 & \gamma_3^{-1}\alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_1^{-1}\alpha_1 & a_3 & \bar{a}_2\\ \bar{a}_3 & \gamma_2^{-1}\alpha_2 & a_1\\ a_2 & \bar{a}_1 & \gamma_3^{-1}\alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1 & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2 & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_1\gamma_1^{-1}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\bar{a}_2\\ \gamma_1\bar{a}_3 & \gamma_2\gamma_2^{-1}\alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\bar{a}_1 & \gamma_3\gamma_3^{-1}\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\bar{a}_2\\ \gamma_1\bar{a}_3 & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\bar{a}_1 & \alpha_3\end{bmatrix}=X$$

dir.

$\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3,J_\Gamma\right)$ alt kümesi O_3 $R-$ modülünün bir alt modülü (yani alt uzayı) olur. $\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3,J_\Gamma\right)$ alt uzayı üzerinde ikinci bir iç işlem olan “$\square$” işlemi, her $X,Y\in\mathrm{O}_3$ için $X\square Y=\frac{1}{2}\left(XY+YX\right)$ Jordan çarpımı olarak tanımlanırsa $\left(\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3,J_\Gamma\right),+,\square\right)$ sistemi bir Jordan $R-$cebiri olur. Burada XY ile O_3 $R-$cebiri üzerindeki matris çarpımı kast edilmektedir. “$\circ$” işlemi değişmeli olduğundan $\left(\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\Gamma\right), +, \circ\right)$ Jordan $R-$ cebiri değişmelidir.

$\left(\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\Gamma\right), +, \circ\right)$ Jordan $R-$cebiri exceptional Jordan cebiridir (Jacobson 1968).

Şimdi bu cebir üzerinde Jordan çarpımını biraz daha detaylı inceleyelim:

Her $X, Y \in \mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\Gamma\right)$ için

$$
\begin{aligned}
X \circ Y &= \frac{1}{2}\left(XY + YX\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \bar{a}_2 \\ \gamma_1 \bar{a}_3 & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \bar{a}_1 & \alpha_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \bar{b}_2 \\ \gamma_1 \bar{b}_3 & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \bar{b}_1 & \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \bar{b}_2 \\ \gamma_1 \bar{b}_3 & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \bar{b}_1 & \beta_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \bar{a}_2 \\ \gamma_1 \bar{a}_3 & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \bar{a}_1 & \alpha_3 \end{bmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 + \gamma_2\gamma_1 a_3\bar{b}_3 + \gamma_3\gamma_1\bar{a}_2 b_2 & \alpha_1\gamma_2 b_3 + \beta_2\gamma_2 a_3 + \gamma_3\gamma_2\bar{a}_2\bar{b}_1 & \alpha_1\gamma_3\bar{b}_2 + \gamma_2\gamma_3 a_3 b_1 + \gamma_3\beta_3\bar{a}_2 \\ \beta_1\gamma_1\bar{a}_3 + \alpha_2\gamma_1\bar{b}_3 + \gamma_3\gamma_1 a_1 b_2 & \gamma_1\gamma_2\bar{a}_3 b_3 + \alpha_2\beta_2 + \gamma_3\gamma_2 a_1\bar{b}_1 & \gamma_1\gamma_3\bar{a}_3\bar{b}_2 + \alpha_2\gamma_3 b_1 + \gamma_3\beta_3 a_1 \\ \beta_1\gamma_1 a_2 + \gamma_2\gamma_1\bar{a}_1\bar{b}_3 + \alpha_3\gamma_1 b_2 & \gamma_1\gamma_2 a_2 b_3 + \beta_2\gamma_2\bar{a}_1 + \alpha_3\gamma_2\bar{b}_1 & \gamma_1\gamma_3 a_2\bar{b}_2 + \gamma_2\gamma_3\bar{a}_1 b_1 + \alpha_3\beta_3 \end{bmatrix} + \right.\\
&\qquad \left.\begin{bmatrix} \beta_1\alpha_1 + \gamma_2\gamma_1 b_3\bar{a}_3 + \gamma_3\gamma_1\bar{b}_2 a_2 & \beta_1\gamma_2 a_3 + \gamma_2\alpha_2 b_3 + \gamma_3\gamma_2\bar{b}_2\bar{a}_1 & \beta_1\gamma_3\bar{a}_2 + \gamma_2\gamma_3 b_3 a_1 + \gamma_3\alpha_3\bar{b}_2 \\ \gamma_1\alpha_1\bar{b}_3 + \beta_2\gamma_1\bar{a}_3 + \gamma_3\gamma_1 b_1 a_2 & \gamma_1\gamma_2\bar{b}_3 a_3 + \beta_2\alpha_2 + \gamma_3\gamma_2 b_1\bar{a}_1 & \gamma_1\gamma_3\bar{b}_3\bar{a}_2 + \beta_2\gamma_3 a_1 + \gamma_3\alpha_3 b_1 \\ \gamma_1\alpha_1 b_2 + \gamma_2\gamma_1\bar{b}_1\bar{a}_3 + \beta_3\gamma_1 a_2 & \gamma_1\gamma_2 b_2 a_3 + \gamma_2\alpha_2\bar{b}_1 + \beta_3\gamma_2\bar{a}_1 & \gamma_1\gamma_3 b_2\bar{a}_2 + \gamma_2\gamma_3\bar{b}_1 a_1 + \beta_3\alpha_3 \end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix} := Z
\end{aligned}
$$

eşitliğinden;

$$
\begin{aligned}
z_{11} &= \frac{1}{2}\left(2\alpha_1\beta_1 + \gamma_2\gamma_1\left(a_3\bar{b}_3 + b_3\bar{a}_3\right) + \gamma_3\gamma_1\left(\bar{a}_2 b_2 + \bar{b}_2 a_2\right)\right)\\
&= \alpha_1\beta_1 + \gamma_2\gamma_1 n\left(a_3, b_3\right) + \gamma_3\gamma_1 n\left(a_2, b_2\right) = \alpha_1\beta_1 + \gamma_1\left(\gamma_2 n\left(a_3, b_3\right) + \gamma_3 n\left(a_2, b_2\right)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{21} &= \frac{1}{2}\left(\beta_1\gamma_1\bar{a}_3 + \alpha_2\gamma_1\bar{b}_3 + \gamma_3\gamma_1 a_1 b_2 + \gamma_1\alpha_1\bar{b}_3 + \beta_2\gamma_1\bar{a}_3 + \gamma_3\gamma_1 b_1 a_2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_3\left[\gamma_1\left(a_1 b_2 + b_1 a_2\right)\right] + \gamma_1\left[\left(\beta_1 + \beta_2\right)\bar{a}_3 + \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\bar{b}_3\right]\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{31} &= \frac{1}{2}\left(\beta_1\gamma_1 a_2 + \gamma_2\gamma_1\bar{a}_1\bar{b}_3 + \alpha_3\gamma_1 b_2 + \gamma_1\alpha_1 b_2 + \gamma_2\gamma_1\bar{b}_1\bar{a}_3 + \beta_3\gamma_1 a_2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\gamma_2\left[\gamma_1\left(\bar{b}_1\bar{a}_3 + \bar{a}_1\bar{b}_3\right)\right] + \gamma_1\left[\left(\beta_1 + \beta_3\right)a_2 + \left(\alpha_3 + \alpha_1\right)b_2\right]\right),
\end{aligned}
$$

$$z_{12}=\frac{1}{2}\left(\alpha_1\gamma_2 b_3+\beta_2\gamma_2 a_3+\gamma_3\gamma_2\bar{a}_2\bar{b}_1+\beta_1\gamma_2 a_3+\gamma_2\alpha_2 b_3+\gamma_3\gamma_2\bar{b}_2\bar{a}_1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\gamma_3\left[\gamma_2\left(\bar{b}_2\bar{a}_1+\bar{a}_2\bar{b}_1\right)\right]+\gamma_2\left[\left(\beta_1+\beta_2\right)a_3+\left(\alpha_1+\alpha_2\right)b_3\right]\right),$$
$$z_{22}=\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3,b_3\right)+\alpha_2\beta_2+\gamma_3\gamma_2 n\left(a_1,b_1\right)=\alpha_2\beta_2+\gamma_2\left(\gamma_3 n\left(a_1,b_1\right)+\gamma_1 n\left(a_3,b_3\right)\right),$$
$$z_{32}=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\gamma_2 a_2 b_3+\beta_2\gamma_2\bar{a}_1+\alpha_3\gamma_2\bar{b}_1+\gamma_1\gamma_2 b_2 a_3+\gamma_2\alpha_2\bar{b}_1+\beta_3\gamma_2\bar{a}_1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\left[\gamma_2\left(a_2 b_3+b_2 a_3\right)\right]+\gamma_2\left[\left(\beta_2+\beta_3\right)\bar{a}_1+\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\bar{b}_1\right]\right),$$
$$z_{13}=\frac{1}{2}\left(\alpha_1\gamma_3\bar{b}_2+\gamma_2\gamma_3 a_3 b_1+\gamma_3\beta_3\bar{a}_2+\beta_1\gamma_3\bar{a}_2+\gamma_2\gamma_3 b_3 a_1+\gamma_3\alpha_3\bar{b}_2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\gamma_2\left[\gamma_3\left(a_3 b_1+b_3 a_1\right)\right]+\gamma_3\left[\left(\beta_3+\beta_1\right)\bar{a}_2+\left(\alpha_3+\alpha_1\right)\bar{b}_2\right]\right),$$
$$z_{23}=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\gamma_3\bar{a}_3\bar{b}_2+\alpha_2\gamma_3 b_1+\gamma_3\beta_3 a_1+\gamma_1\gamma_3\bar{b}_3\bar{a}_2+\beta_2\gamma_3 a_1+\gamma_3\alpha_3 b_1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\gamma_1\left[\gamma_3\left(\bar{b}_3\bar{a}_2+\bar{a}_3\bar{b}_2\right)\right]+\gamma_3\left[\left(\beta_2+\beta_3\right)a_1+\left(\alpha_2+\alpha_3\right)b_1\right]\right),$$
ve
$$z_{33}=\gamma_1\gamma_3 n\left(a_2,b_2\right)+\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1,b_1\right)+\alpha_3\beta_3=\alpha_3\beta_3+\gamma_3\left(\gamma_1 n\left(a_2,b_2\right)+\gamma_2 n\left(a_1,b_1\right)\right)$$
olarak elde edilir.

$\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3,J_\Gamma\right)$ kümesinin herhangi bir $X=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\bar{a}_2\\ \gamma_1\bar{a}_3 & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\bar{a}_1 & \alpha_3\end{bmatrix}$ elemanının

$\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{bmatrix}:=\alpha$ ve $x:=\begin{bmatrix}0 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\bar{a}_2\\ \gamma_1\bar{a}_3 & 0 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\bar{a}_1 & 0\end{bmatrix}$ olmak üzere

$X=\alpha+x$ biçiminde de yazılabileceğine dikkat ediniz. Böylece $\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3,J_\Gamma\right)$ kümesini,

$$\mathbf{S}=\left\{\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{bmatrix}\ \middle|\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R\right\}\subset\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3,J_\Gamma\right)$$

ve

$$\mathbf{S}' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a}_2 \\ \gamma_1 \overline{a}_3 & 0 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a}_1 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a_1, a_2, a_3 \in \mathrm{O} \right\} \subset \mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\Gamma\right)$$

olmak üzere $\mathbf{S} + \mathbf{S}'$ toplam uzayı olarak ele alabiliriz.

$\mathbf{S} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} : \alpha_i \in R \right\}$ kümesi üzerinde; $+ : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ ve $\cdot : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ ikili işlemleri sırasıyla adi matris toplamı ve çarpımı olarak her $\alpha, \beta \in S$ için

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 + \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 + \beta_3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \alpha \cdot \beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \beta_3 \end{bmatrix} \quad \text{olarak}$$

tanımlansın. Bu işlemlerle birlikte $(\mathbf{S}, +, \cdot)$ sistemi bir lokal halkadır. R özdeşlikli bir halka olduğundan $\mathbf{S}$ nin özdeşlik elemanı I_3 tür. R değişmeli olduğundan $\mathbf{S}$ halkası da değişmelidir. R birleşmeli olduğundan $\mathbf{S}$ halkası da birleşmelidir. $\mathbf{S}$ nin birimleri; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ R de birimler olmak üzere $\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}$ formundaki elemanlardır ve bu

durumda $\begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^{-1} \end{bmatrix}$ dir.

$\mathbf{S}$ kümesi, yukarıda tanımlanan $+$ iç işlemi ve $\cdot : R \times \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ biçiminde tanımlı skalarla bir matrisin çarpımı dış işlemi ile birlikte bir $R-$modül olur.

Şimdi, $\mathbf{S}' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & 0 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & 0 \end{bmatrix} : a_i \in \mathrm{O} \right\}$ kümesini ele alalım. $\mathbf{S}'$ kümesi de adi matris toplamı ve skalarla matrisin çarpımı iç ve dış işlemleri altında bir $R-$modül olur.

Böylece $\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\Gamma\right)$ $R-$ modülünün $\mathbf{S}$ ve $\mathbf{S}'$ gibi iki alt $R-$modülü (yani alt uzayı) bulunmuş olur. Üstelik $\mathbf{S}$ ile $\mathbf{S}'$ alt uzaylarının arakesiti 3×3 sıfır matrisidir. Dolayısıyla, $\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\Gamma\right)$ uzayı $\mathbf{S}$ ile $\mathbf{S}'$ alt uzaylarının direkt toplam uzayıdır yani $\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\Gamma\right) = \mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'$ dir. Üstelik $\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'$ kümesi bir $\mathbf{S}-$modüldür. Bunun için bu küme üzerinde $+:\left(\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'\right)\times\left(\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'\right)\to\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'$ iç ve $\cdot:\mathbf{S}\times\left(\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'\right)\to\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'$ (sol) dış işlemi her $X,Y\in\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'$ ve $s\in\mathbf{S}$ için

$$X+Y=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \gamma_2\left(a_3+b_3\right) & \gamma_3\left(\overline{a_2}+\overline{b_2}\right)\\ \gamma_1\left(\overline{a_3}+\overline{b_3}\right) & \alpha_2+\beta_2 & \gamma_3\left(a_1+b_1\right)\\ \gamma_1\left(a_2+b_2\right) & \gamma_2\left(\overline{a_1}+\overline{b_1}\right) & \alpha_3+\beta_3\end{bmatrix}$$

ve

$$s\cdot X=sX=\begin{bmatrix}s_1 & 0 & 0\\ 0 & s_2 & 0\\ 0 & 0 & s_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1\alpha_1 & s_1\gamma_2 a_3 & s_1\gamma_3\overline{a_2}\\ s_2\gamma_1\overline{a_3} & s_2\alpha_2 & s_2\gamma_3 a_1\\ s_3\gamma_1 a_2 & s_3\gamma_2\overline{a_1} & s_3\alpha_3\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer biçimde $\cdot:\left(\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'\right)\times\mathbf{S}\to\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'$ (sağ) dış işlemi her $s\in\mathbf{S}$ ve her $X\in\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'$ için

$$X\cdot s=Xs=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1 & 0 & 0\\ 0 & s_2 & 0\\ 0 & 0 & s_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1\alpha_1 & s_2\gamma_2 a_3 & s_3\gamma_3\overline{a_2}\\ s_1\gamma_1\overline{a_3} & s_2\alpha_2 & s_3\gamma_3 a_1\\ s_1\gamma_1 a_2 & s_2\gamma_2\overline{a_1} & s_3\alpha_3\end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa $\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'$ kümesi bir $\mathbf{S}-$bimodül olur.

Şimdi $\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'$ üzerindeki Jordan çarpımına geri dönelim. Her $X=\alpha+x, Y=\beta+y\in\mathbf{S}\oplus\mathbf{S}'$ için

$$\left(\alpha+x\right)\circ\left(\beta+y\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\alpha+x\right)\left(\beta+y\right)+\left(\beta+y\right)\left(\alpha+x\right)\right]$$

olur. Buradan,

$$\frac{1}{2}\left[\left(\alpha+x\right)\left(\beta+y\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left[\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & 0 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & 0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & 0 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & 0\end{pmatrix}\right]\right]$$

$$
=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & 0 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & 0\end{pmatrix}+\right.
$$

$$
\left.\begin{pmatrix}0 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & 0 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & 0 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & 0 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & 0\end{pmatrix}\right]
$$

$$
=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2\beta_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\beta_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \alpha_1\gamma_2 b_3 & \alpha_1\gamma_3\overline{b_2}\\ \alpha_2\gamma_1\overline{b_3} & 0 & \alpha_2\gamma_3 b_1\\ \alpha_3\gamma_1 b_2 & \alpha_3\gamma_2\overline{b_1} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \gamma_2 a_3\beta_2 & \gamma_3\overline{a_2}\beta_3\\ \gamma_1\overline{a_3}\beta_1 & 0 & \gamma_3 a_1\beta_3\\ \gamma_1 a_2\beta_1 & \gamma_2\overline{a_1}\beta_2 & 0\end{pmatrix}+\right.
$$

$$
\left.\begin{pmatrix}\gamma_2\gamma_1 a_3\overline{b_3}+\gamma_3\gamma_1\overline{a_2}b_2 & \gamma_3\gamma_2\overline{a_2}\,\overline{b_1} & \gamma_2\gamma_3 a_3 b_1\\ \gamma_3\gamma_1 a_1 b_2 & \gamma_1\gamma_2\overline{a_3}b_3+\gamma_3\gamma_2 a_1\overline{b_1} & \gamma_1\gamma_3\overline{a_3}\,\overline{b_2}\\ \gamma_2\gamma_1\overline{a_1}\,\overline{b_3} & \gamma_1\gamma_2 a_2 b_3 & \gamma_1\gamma_3 a_2\overline{b_2}+\gamma_2\gamma_3\overline{a_1}b_1\end{pmatrix}\right]
$$

$$
=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1+\left(\gamma_2\gamma_1 a_3\overline{b_3}+\gamma_3\gamma_1\overline{a_2}b_2\right) & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2\beta_2+\left(\gamma_1\gamma_2\overline{a_3}b_3+\gamma_3\gamma_2 a_1\overline{b_1}\right) & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\beta_3+\left(\gamma_1\gamma_3 a_2\overline{b_2}+\gamma_2\gamma_3\overline{a_1}b_1\right)\end{pmatrix}\right.
$$

$$
\left.+\begin{pmatrix}0 & \alpha_1\gamma_2 b_3+\gamma_2 a_3\beta_2+\gamma_3\gamma_2\overline{a_2}\,\overline{b_1} & \alpha_1\gamma_3\overline{b_2}+\gamma_3\overline{a_2}\beta_3+\gamma_2\gamma_3 a_3 b_1\\ \alpha_2\gamma_1\overline{b_3}+\gamma_1\overline{a_3}\beta_1+\gamma_3\gamma_1 a_1 b_2 & 0 & \alpha_2\gamma_3 b_1+\gamma_3 a_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3\overline{a_3}\,\overline{b_2}\\ \alpha_3\gamma_1 b_2+\gamma_1 a_2\beta_1+\gamma_2\gamma_1\overline{a_1}\,\overline{b_3} & \alpha_3\gamma_2\overline{b_1}+\gamma_2\overline{a_1}\beta_2+\gamma_1\gamma_2 a_2 b_3 & 0\end{pmatrix}\right]
$$

$$
=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1+\gamma_1\left(\gamma_2 a_3\overline{b_3}+\gamma_3\overline{a_2}b_2\right) & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2\beta_2+\gamma_2\left(\gamma_1\overline{a_3}b_3+\gamma_3 a_1\overline{b_1}\right) & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\beta_3+\gamma_3\left(\gamma_1 a_2\overline{b_2}+\gamma_2\overline{a_1}b_1\right)\end{pmatrix}\right.
$$

$$
\left.+\begin{pmatrix}0 & \alpha_1\gamma_2 b_3+\gamma_2 a_3\beta_2+\gamma_3\left[\gamma_2\left(\overline{b_1 a_2}\right)\right] & \alpha_1\gamma_3\overline{b_2}+\gamma_3\overline{a_2}\beta_3+\gamma_2\left[\gamma_3\left(a_3 b_1\right)\right]\\ \alpha_2\gamma_1\overline{b_3}+\gamma_1\overline{a_3}\beta_1+\gamma_3\left[\gamma_1\left(a_1 b_2\right)\right] & 0 & \alpha_2\gamma_3 b_1+\gamma_3 a_1\beta_3+\gamma_1\left[\gamma_3\left(\overline{b_2 a_3}\right)\right]\\ \alpha_3\gamma_1 b_2+\gamma_1 a_2\beta_1+\gamma_2\left[\gamma_1\left(\overline{b_3 a_1}\right)\right] & \alpha_3\gamma_2\overline{b_1}+\gamma_2\overline{a_1}\beta_2+\gamma_1\left[\gamma_2\left(a_2 b_3\right)\right] & 0\end{pmatrix}\right]
$$

olur ve benzer biçimde

$$\frac{1}{2}\left[(\beta+y)(\alpha+x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \beta_1\alpha_1+\gamma_1\left(\gamma_2 b_3\overline{a_3}+\gamma_3\overline{b_2}a_2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2\alpha_2+\gamma_2\left(\gamma_3 b_1\overline{a_1}+\gamma_1\overline{b_3}a_3\right) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3\alpha_3+\gamma_3\left(\gamma_1 b_2\overline{a_2}+\gamma_2\overline{b_1}a_1\right) \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix} 0 & \beta_1\gamma_2 a_3+\gamma_2 b_3\alpha_2+\gamma_3\left[\gamma_2\left(\overline{a_1b_2}\right)\right] & \beta_1\gamma_3\overline{a_2}+\gamma_3\overline{b_2}\alpha_3+\gamma_2\left[\gamma_3\left(b_3a_1\right)\right] \\ \beta_2\gamma_1\overline{a_3}+\gamma_1\overline{b_3}\alpha_1+\gamma_3\left[\gamma_1\left(b_1a_2\right)\right] & 0 & \beta_2\gamma_3 a_1+\gamma_3 b_1\alpha_3+\gamma_1\left[\gamma_3\left(\overline{a_2b_3}\right)\right] \\ \beta_3\gamma_1 a_2+\gamma_1 b_2\alpha_1+\gamma_2\left[\gamma_1\left(\overline{a_3b_1}\right)\right] & \beta_3\gamma_2\overline{a_1}+\gamma_2\overline{b_1}\alpha_2+\gamma_1\left[\gamma_2\left(b_2a_3\right)\right] & 0 \end{pmatrix}\right]$$

elde edilir. Böylece,

$$(\alpha+x)\circ(\beta+y)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha+x)(\beta+y)+(\beta+y)(\alpha+x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1+\gamma_1\left(\gamma_2 a_3\overline{b_3}+\gamma_3\overline{a_2}b_2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2+\gamma_2\left(\gamma_1\overline{a_3}b_3+\gamma_3 a_1\overline{b_1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3\beta_3+\gamma_3\left(\gamma_1 a_2\overline{b_2}+\gamma_2\overline{a_1}b_1\right) \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1\gamma_2 b_3+\gamma_2 a_3\beta_2+\gamma_3\left[\gamma_2\left(\overline{b_1a_2}\right)\right] & \alpha_1\gamma_3\overline{b_2}+\gamma_3\overline{a_2}\beta_3+\gamma_2\left[\gamma_3\left(a_3b_1\right)\right] \\ \alpha_2\gamma_1\overline{b_3}+\gamma_1\overline{a_3}\beta_1+\gamma_3\left[\gamma_1\left(a_1b_2\right)\right] & 0 & \alpha_2\gamma_3 b_1+\gamma_3 a_1\beta_3+\gamma_1\left[\gamma_3\left(\overline{b_2a_3}\right)\right] \\ \alpha_3\gamma_1 b_2+\gamma_1 a_2\beta_1+\gamma_2\left[\gamma_1\left(\overline{b_3a_1}\right)\right] & \alpha_3\gamma_2\overline{b_1}+\gamma_2\overline{a_1}\beta_2+\gamma_1\left[\gamma_2\left(a_2b_3\right)\right] & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} \beta_1\alpha_1+\gamma_1\left(\gamma_2 b_3\overline{a_3}+\gamma_3\overline{b_2}a_2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2\alpha_2+\gamma_2\left(\gamma_3 b_1\overline{a_1}+\gamma_1\overline{b_3}a_3\right) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3\alpha_3+\gamma_3\left(\gamma_1 b_2\overline{a_2}+\gamma_2\overline{b_1}a_1\right) \end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix} 0 & \beta_1\gamma_2 a_3+\gamma_2 b_3\alpha_2+\gamma_3\left[\gamma_2\left(\overline{a_1b_2}\right)\right] & \beta_1\gamma_3\overline{a_2}+\gamma_3\overline{b_2}\alpha_3+\gamma_2\left[\gamma_3\left(b_3a_1\right)\right] \\ \beta_2\gamma_1\overline{a_3}+\gamma_1\overline{b_3}\alpha_1+\gamma_3\left[\gamma_1\left(b_1a_2\right)\right] & 0 & \beta_2\gamma_3 a_1+\gamma_3 b_1\alpha_3+\gamma_1\left[\gamma_3\left(\overline{a_2b_3}\right)\right] \\ \beta_3\gamma_1 a_2+\gamma_1 b_2\alpha_1+\gamma_2\left[\gamma_1\left(\overline{a_3b_1}\right)\right] & \beta_3\gamma_2\overline{a_1}+\gamma_2\overline{b_1}\alpha_2+\gamma_1\left[\gamma_2\left(b_2a_3\right)\right] & 0 \end{pmatrix}\right]$$

sonucuna ulaşılır. Bulunan matris W ile gösterilsin, yani $(\alpha+x)\circ(\beta+y)=W=\left[w_{ij}\right]$ olsun. Burada W matrisinin bileşenlerinin

$$
\begin{aligned}
w_{11} &= \frac{1}{2}\Big(2\alpha_1\beta_1 + \gamma_1\big[\gamma_2\left(a_3\bar{b}_3 + b_3\bar{a}_3\right) + \gamma_3\left(\bar{a}_2 b_2 + \bar{b}_2 a_2\right)\big]\Big) \\
&= \alpha_1\beta_1 + \gamma_1\big[\gamma_2 n\left(a_3, b_3\right) + \gamma_3 n\left(a_2, b_2\right)\big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{21} &= \frac{1}{2}\left(\beta_1\gamma_1\bar{a}_3 + \alpha_2\gamma_1\bar{b}_3 + \gamma_3\gamma_1 a_1 b_2 + \gamma_1\alpha_1\bar{b}_3 + \beta_2\gamma_1\bar{a}_3 + \gamma_3\gamma_1 b_1 a_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma_1\Big(\gamma_3\big[\left(a_1 b_2 + b_1 a_2\right)\big] + \big[\left(\beta_1 + \beta_2\right)\bar{a}_3 + \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\bar{b}_3\big]\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{31} &= \frac{1}{2}\left(\beta_1\gamma_1 a_2 + \gamma_2\gamma_1\overline{b_3 a_1} + \alpha_3\gamma_1 b_2 + \gamma_1\alpha_1 b_2 + \gamma_2\gamma_1\overline{a_3 b_1} + \beta_3\gamma_1 a_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma_1\Big(\gamma_2\big[\left(\overline{a_3 b_1 + b_3 a_1}\right)\big] + \big[\left(\beta_3 + \beta_1\right) a_2 + \left(\alpha_3 + \alpha_1\right) b_2\big]\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{12} &= \frac{1}{2}\left(\alpha_1\gamma_2 b_3 + \beta_2\gamma_2 a_3 + \gamma_3\gamma_2\overline{b_1 a_2} + \beta_1\gamma_2 a_3 + \gamma_2\alpha_2 b_3 + \gamma_3\gamma_2\overline{a_1 b_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma_2\Big(\gamma_3\big[\left(\overline{a_1 b_2 + b_1 a_2}\right)\big] + \big[\left(\beta_1 + \beta_2\right) a_3 + \left(\alpha_1 + \alpha_2\right) b_3\big]\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{22} &= \frac{1}{2}\Big(2\alpha_2\beta_2 + \gamma_2\big[\gamma_3\left(a_1\bar{b}_1 + b_1\bar{a}_1\right) + \gamma_1\left(\bar{a}_3 b_3 + \bar{b}_3 a_3\right)\big]\Big) \\
&= \alpha_2\beta_2 + \gamma_2\big[\gamma_3 n\left(a_1, b_1\right) + \gamma_1 n\left(a_3, b_3\right)\big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{32} &= \frac{1}{2}\left(\gamma_1\gamma_2 a_2 b_3 + \beta_2\gamma_2\bar{a}_1 + \alpha_3\gamma_2\bar{b}_1 + \gamma_1\gamma_2 b_2 a_3 + \gamma_2\alpha_2\bar{b}_1 + \beta_3\gamma_2\bar{a}_1\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma_2\Big(\gamma_1\big[\left(a_2 b_3 + b_2 a_3\right)\big] + \big[\left(\beta_2 + \beta_3\right)\bar{a}_1 + \left(\alpha_2 + \alpha_3\right)\bar{b}_1\big]\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{13} &= \frac{1}{2}\left(\alpha_1\gamma_3\bar{b}_2 + \gamma_2\gamma_3 a_3 b_1 + \gamma_3\beta_3\bar{a}_2 + \beta_1\gamma_3\bar{a}_2 + \gamma_2\gamma_3 b_3 a_1 + \gamma_3\alpha_3\bar{b}_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma_3\Big(\gamma_2\big[\left(a_3 b_1 + b_3 a_1\right)\big] + \big[\left(\beta_3 + \beta_1\right)\bar{a}_2 + \left(\alpha_3 + \alpha_1\right)\bar{b}_2\big]\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{23} &= \frac{1}{2}\left(\gamma_1\gamma_3\overline{b_2 a_3} + \alpha_2\gamma_3 b_1 + \gamma_3\beta_3 a_1 + \gamma_1\gamma_3\overline{a_2 b_3} + \beta_2\gamma_3 a_1 + \gamma_3\alpha_3 b_1\right) \\
&= \frac{1}{2}\gamma_3\Big(\gamma_1\big[\left(\overline{a_2 b_3 + b_2 a_3}\right)\big] + \big[\left(\beta_2 + \beta_3\right) a_1 + \left(\alpha_2 + \alpha_3\right) b_1\big]\Big),
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
w_{33} &= \frac{1}{2}\Big(2\alpha_3\beta_3 + \gamma_3\big[\gamma_1\left(a_2\bar{b}_2 + b_2\bar{a}_2\right) + \gamma_2\left(\bar{a}_1 b_1 + \bar{b}_1 a_1\right)\big]\Big) \\
&= \alpha_3\beta_3 + \gamma_3\big[\gamma_1 n\left(a_2, b_2\right) + \gamma_2 n\left(a_1, b_1\right)\big]
\end{aligned}
$$

şeklinde olduğu görülür. Bu daha önce elde edilen Z matrisi ile W matrisinin eşit olduğunu gösterir. $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ dairesel permütasyonu olmak üzere

$$w_{ii} = \alpha_i \beta_i + \gamma_i \left[\gamma_j n\left(a_k, b_k\right) + \gamma_k n\left(a_j, b_j\right) \right] \tag{4.1}$$

ve

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_j \left[\gamma_k \left(\overline{a_i b_j + b_i a_j} \right) + \left(\beta_i + \beta_j \right) a_k + \left(\alpha_i + \alpha_j \right) b_k \right] \tag{4.2}$$

biçiminde yazılabilir. Burada w_{ij} nin eşleneğinin w_{ji} olduğuna dikkat ediniz. Böylece $X \circ Y$ Jordan çarpımı

$$\begin{aligned} X \circ Y &= (\alpha + x) \circ (\beta + y) \\ &= \sum_{(ijk)} e_{ii} w_{ii} + \sum_{(ijk)} \left(w_{ij} e_{ij} + \overline{w_{ij}} e_{ji} \right) \end{aligned}$$

olarak da ifade edilebilir.

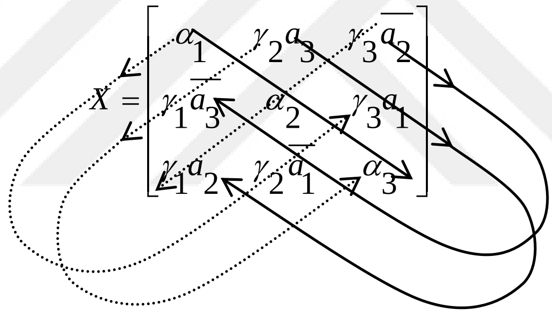
Şimdi, $\mathbf{J} = \left(\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\Gamma \right), +, \circ \right)$ kümesi üzerinde kuadratik dönüşüm olarak adjoint (ek) alma dönüşümü, iz form olarak $T(X) = iz(X)$ ve kübik form olarak da $N(X) = \det X$ determinant fonksiyonu alınırsa Tanım 3.5 deki kübik cebir şartlarının sağlandığını yani $\mathbf{J}$ nin bir kübik cebir olduğu göstereceğiz. Bu hedefe hazırlık olarak adjoint alma dönüşümü, iz form, norm form ve kübik formla ilgili temel bilgileri veriyoruz.

$\mathbf{J}$ nin herhangi $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{bmatrix}$ elemanı için $\alpha_2 \alpha_3 - \gamma_2 \gamma_3 n(a_1) \in R$, $\alpha_3 \alpha_1 - \gamma_3 \gamma_1 n(a_2) \in R$ ve $\alpha_1 \alpha_2 - \gamma_1 \gamma_2 n(a_3) \in R$ olmak üzere

$$X^{\#} = adj(X) = \begin{bmatrix} \alpha_2 \alpha_3 - \gamma_2 \gamma_3 n(a_1) & \gamma_2 \gamma_3 \overline{(a_1 a_2)} - \gamma_2 \alpha_3 a_3 & \gamma_3 \gamma_2 (a_3 a_1) - \gamma_3 \alpha_2 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \gamma_3 (a_1 a_2) - \gamma_1 \alpha_3 \overline{a_3} & \alpha_3 \alpha_1 - \gamma_3 \gamma_1 n(a_2) & \gamma_3 \gamma_1 \overline{(a_2 a_3)} - \gamma_3 \alpha_1 a_1 \\ \gamma_1 \gamma_2 \overline{(a_3 a_1)} - \gamma_1 \alpha_2 a_2 & \gamma_2 \gamma_1 (a_2 a_3) - \gamma_2 \alpha_1 \overline{a_1} & \alpha_1 \alpha_2 - \gamma_1 \gamma_2 n(a_3) \end{bmatrix} \in \mathbf{J}$$

olur.

Burada kofaktörler hesaplanırken a_1, a_2 ve a_3 elemanlarının çarpım sırası için (a_1, a_2, a_3) dairesel permütasyonundaki sıra; $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ ve $\overline{a_3}$ elemanlarının çarpım sırası için $\left(\overline{a_3}, \overline{a_2}, \overline{a_1}\right)$ dairesel permütasyonundaki sıra takip edilir. Kofaktörü işaretinden bağımsız olarak hesap etmek için önce esas köşegen üzerindeki elemanların diziliş yönü pozitif yön ve tali köşegen üzerindeki elemanların diziliş yönü negatif yön olarak kabul edilir. Sonra her iki yön için bunların yukarısından geçen aynı yönlü ikişer paraleller belirlenir. Böylece Şekil 4.1 de düz çizgiler ile belirtilen üç pozitif yön ve kesik çizgiler ile belirtilen üç negatif yön belirlenmiş olur. Herhangi iki elemanın çarpımının işareti üzerinde bulundukları yönün pozitif ya da negatif oluşuna göre pozitif ya da negatif olarak alınır, çarpımın sırası ise bu yön üzerindeki elemanların baştan sona doğru giden sırası bir dairesel permütasyon olarak alıp bu permütasyondaki sıra takip edilerek belirlenir.



Şekil 4.1. Kofaktör hesabı için çarpma işlemin yönü

$\alpha \in R$ için,

$$
\begin{aligned}
(\alpha X)^{\#} &= \begin{bmatrix} \alpha^2\left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3 n(a_1)\right] & \alpha^2\left[\gamma_2\gamma_3\overline{(a_1a_2)} - \gamma_2\alpha_3 a_3\right] & \alpha^2\left[\gamma_3\gamma_2(a_3a_1) - \gamma_3\alpha_2\overline{a_2}\right] \\ \alpha^2\left[\gamma_1\gamma_3(a_1a_2) - \gamma_1\alpha_3\overline{a_3}\right] & \alpha^2\left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1 n(a_2)\right] & \alpha^2\left[\gamma_3\gamma_1\overline{(a_2a_3)} - \gamma_3\alpha_1 a_1\right] \\ \alpha^2\left[\gamma_1\gamma_2\overline{(a_3a_1)} - \gamma_1\alpha_2 a_2\right] & \alpha^2\left[\gamma_2\gamma_1(a_2a_3) - \gamma_2\alpha_1\overline{a_1}\right] & \alpha^2\left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 n(a_3)\right] \end{bmatrix} \\
&= \alpha^2 X^{\#}
\end{aligned}
$$

dir. Yani, adjoint alma dönüşümü 2. dereceden homojen bir fonksiyondur. Üstelik **J** nin herhangi $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{bmatrix}$ ve $Y = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix}$ elemanları için **J** üzerinde $\times$ ikili işlemi $Q(X,Y) = X \times Y := \frac{1}{2}\left[(X+Y)^{\#} - X^{\#} - Y^{\#} \right]$ olarak tanımlansın. Burada, $X \times X = \frac{1}{2}\left[(2X)^{\#} - X^{\#} - X^{\#} \right] = \frac{1}{2}\left[4X^{\#} - 2X^{\#} \right] = \frac{1}{2}\left[2X^{\#} \right] = X^{\#}$ olduğuna dikkat ediniz. $X \times Y$ de X ve Y matrisleri yerine yazılırsa,

$$X \times Y = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} \alpha_1+\beta_1 & \gamma_2 a_3+\gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{a_2}+\gamma_3\overline{b_2} \\ \gamma_1\overline{a_3}+\gamma_1\overline{b_3} & \alpha_2+\beta_2 & \gamma_3 a_1+\gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 a_2+\gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{a_1}+\gamma_2\overline{b_1} & \alpha_3+\beta_3 \end{bmatrix}^{\#} - \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2} \\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3 \end{bmatrix}^{\#} - \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2} \\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix}^{\#} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3-\gamma_2\gamma_3 2n(a_1,b_1) & \gamma_2\gamma_3\overline{(a_1b_2+b_1a_2)}-\gamma_2(\alpha_3b_3+\beta_3a_3) & \gamma_3\gamma_2(a_3b_1+b_3a_1)-\gamma_3\left(\alpha_2\overline{b_2}+\beta_2\overline{a_2}\right) \\ \gamma_1\gamma_3(a_1b_2+b_1a_2)-\gamma_1\left(\alpha_3\overline{b_3}+\beta_3\overline{a_3}\right) & \alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 2n(a_2,b_2) & \gamma_3\gamma_1\overline{(a_2b_3+b_2a_3)}-\gamma_3(\alpha_1b_1+\beta_1a_1) \\ \gamma_1\gamma_2\overline{(a_3b_1+b_3a_1)}-\gamma_1(\alpha_2b_2+\beta_2a_2) & \gamma_2\gamma_1(a_2b_3+b_2a_3)-\gamma_2\left(\alpha_1\overline{b_1}+\beta_1\overline{a_1}\right) & \alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2 2n(a_3,b_3) \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. $Q(X,Y)$ nin $\mathbf{J}$ üzerinde simetrik ve 2-lineer bir dönüşüm olduğunu görmek kolaydır. Böylece, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.1: Adjoint alma dönüşümü $\mathbf{J}$ üzerinde bir kuadratik dönüşümdür.

$X \times Y$ matrisini bileşenleri cinsinden de ifade etmek mümkündür. $(i,j,k) = (1,2,3)$ dairesel permütasyonu göstermek şartıyla $X \times Y$ matrisinin (i,i). bileşeni,

$$(i,i) = \frac{1}{2}\left[\alpha_j\beta_k + \beta_j\alpha_k - 2\gamma_j\gamma_k n(a_i,b_i) \right] \tag{4.3}$$

ve (i,j). bileşeni,

$$(i,j) = \frac{1}{2}\left(\gamma_j \left[\gamma_k \overline{(a_ib_j + b_ia_j)} - (\alpha_k b_k + \beta_k a_k) \right] \right) \tag{4.4}$$

biçiminde yazılabilir, burada (i,j) bileşeninin eşleneğinin (j,i). bileşen olduğu görülür.

Tanım 4.2: $T : \mathbf{J} \to R$ için $X \to T(X) = iz(X)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme iz form, $T(X)$ e de X matrisinin izi denir.

Bu tanıma göre, $X=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{bmatrix}\in\mathbf{J}$ için $T(X)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ olur.

Teorem 4.3: T iz formu lineerdir.

Tanım 4.4: $N:\mathbf{J}\to R$ için $X\to N(X)=\det(X)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme norm form, $N(X)$ e de X matrisinin determinantı denir.

Teorem 4.5: Her $X,Y\in\mathbf{J}$ için $N(X\circ Y)=N(X)N(Y)$ dir (Yani, norm form çarpılabilirdir.).

İspat: $N(X\circ Y)=\det(X\circ Y)=\det(X)\det(Y)=N(X)N(Y)$ olur.

Herhangi bir $X=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{bmatrix}\in\mathbf{J}$ için

$$\begin{aligned}N(X)&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n(a_1)-\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n(a_2)-\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n(a_3)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t((a_1a_2)a_3)\\&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t((a_1a_2)a_3)-\sum_{(ijk)}\alpha_i\gamma_j\gamma_k n(a_i)\end{aligned}$$

olur. Burada, $\alpha\in R$ için $N(\alpha X)=\alpha^3 N(X)$ olduğuna dikkat ediniz. Bu sebeple, N dönüşümü 3. dereceden homojen bir fonksiyondur. Üstelik, $\mathbf{J}$ nin herhangi X,Y ve Z elemanları için $\mathbf{J}\times\mathbf{J}\times\mathbf{J}$ den R ye

$$N(X,Y,Z)=\frac{1}{6}\left[N(X+Y+Z)-N(X+Y)-N(Y+Z)-N(X+Z)+N(X)+N(Y)+N(Z)\right]$$

olarak tanımlanan dönüşümün $\mathbf{J}$ üzerinde simetrik bir dönüşüm olduğu açıktır.

Burada

$$X=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3\end{bmatrix} \text{ ve } Z=\begin{bmatrix}\mu_1 & \gamma_2 c_3 & \gamma_3\overline{c_2}\\ \gamma_1\overline{c_3} & \mu_2 & \gamma_3 c_1\\ \gamma_1 c_2 & \gamma_2\overline{c_1} & \mu_3\end{bmatrix} \text{ yerine}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}
&6N(X,Y,Z)=(\alpha_1+\beta_1+\mu_1)(\alpha_2+\beta_2+\mu_2)(\alpha_3+\beta_3+\mu_3)\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\left[(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\right](a_3+b_3+c_3)\right)-\sum_{(ijk)}(\alpha_i+\beta_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i+b_i+c_i)\\
&-(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)(\alpha_3+\beta_3)-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\left[(a_1+b_1)(a_2+b_2)\right](a_3+b_3)\right)\\
&\qquad+\sum_{(ijk)}(\alpha_i+\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i+b_i)\\
&-(\beta_1+\mu_1)(\beta_2+\mu_2)(\beta_3+\mu_3)-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\left[(b_1+c_1)(b_2+c_2)\right](b_3+c_3)\right)\\
&\qquad+\sum_{(ijk)}(\beta_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(b_i+c_i)\\
&-(\alpha_1+\mu_1)(\alpha_2+\mu_2)(\alpha_3+\mu_3)-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\left[(a_1+c_1)(a_2+c_2)\right](a_3+c_3)\right)\\
&\qquad+\sum_{(ijk)}(\alpha_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i+c_i)\\
&+\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((a_1a_2)a_3\right)-\sum_{(ijk)}\alpha_i\gamma_j\gamma_k n(a_i)\\
&+\beta_1\beta_2\beta_3+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((b_1b_2)b_3\right)-\sum_{(ijk)}\beta_i\gamma_j\gamma_k n(b_i)\\
&+\mu_1\mu_2\mu_3+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((c_1c_2)c_3\right)-\sum_{(ijk)}\mu_i\gamma_j\gamma_k n(c_i)
\end{aligned}$$

olur. Burada benzer terimler bir araya getirilirse

$$\begin{aligned}
&6N(X,Y,Z)=(\alpha_1+\beta_1+\mu_1)(\alpha_2+\beta_2+\mu_2)(\alpha_3+\beta_3+\mu_3)-(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)(\alpha_3+\beta_3)\\
&-(\beta_1+\mu_1)(\beta_2+\mu_2)(\beta_3+\mu_3)-(\alpha_1+\mu_1)(\alpha_2+\mu_2)(\alpha_3+\mu_3)+\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\beta_1\beta_2\beta_3+\mu_1\mu_2\mu_3\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\left[(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\right](a_3+b_3+c_3)\right)-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\left[(a_1+b_1)(a_2+b_2)\right](a_3+b_3)\right)\\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\left[(b_1+c_1)(b_2+c_2)\right](b_3+c_3)\right)-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\left[(a_1+c_1)(a_2+c_2)\right](a_3+c_3)\right)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((a_1a_2)a_3\right)\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((b_1b_2)b_3\right)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((c_1c_2)c_3\right)-\sum_{(ijk)}(\alpha_i+\beta_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i+b_i+c_i)\\
&+\sum_{(ijk)}(\alpha_i+\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i+b_i)+\sum_{(ijk)}(\beta_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(b_i+c_i)+\sum_{(ijk)}(\alpha_i+\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i+c_i)\\
&-\sum_{(ijk)}\alpha_i\gamma_j\gamma_k n(a_i)-\sum_{(ijk)}\beta_i\gamma_j\gamma_k n(b_i)-\sum_{(ijk)}\mu_i\gamma_j\gamma_k n(c_i)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadede bazı çarpma işlemleri yapılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
6N(X,Y,Z) &= \left[(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)+(\alpha_1+\beta_1)\mu_2+\mu_1(\alpha_2+\beta_2)+\mu_1\mu_2\right](\alpha_3+\beta_3) \\
&+\left[(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)+(\alpha_1+\beta_1)\mu_2+\mu_1(\alpha_2+\beta_2)+\mu_1\mu_2\right]\mu_3-(\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)(\alpha_3+\beta_3) \\
&-(\beta_1\beta_2+\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2+\mu_1\mu_2)\beta_3-(\beta_1\beta_2+\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2+\mu_1\mu_2)\mu_3 \\
&-(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2+\mu_1\mu_2)\alpha_3-(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2+\mu_1\mu_2)\mu_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\beta_1\beta_2\beta_3+\mu_1\mu_2\mu_3 \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t(\left[(a_1+b_1)(a_2+b_2)+(a_1+b_1)c_2+c_1(a_2+b_2)+c_1c_2\right](a_3+b_3) \\
&\qquad +\left[(a_1+b_1)(a_2+b_2)+(a_1+b_1)c_2+c_1(a_2+b_2)+c_1c_2\right]c_3) \\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(\left[(a_1+b_1)(a_2+b_2)\right](a_3+b_3)\right) \\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((b_1b_2+b_1c_2+c_1b_2+c_1c_2)b_3+(b_1b_2+b_1c_2+c_1b_2+c_1c_2)c_3\right) \\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((a_1a_2+a_1c_2+c_1a_2+c_1c_2)a_3+(a_1a_2+a_1c_2+c_1a_2+c_1c_2)c_3\right) \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((a_1a_2)a_3\right)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((b_1b_2)b_3\right)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((c_1c_2)c_3\right) \\
&-\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+b_i)-n(a_i+c_i)+n(a_i)\right] \\
&-\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+b_i)-n(b_i+c_i)+n(b_i)\right] \\
&-\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+c_i)-n(b_i+c_i)+n(c_i)\right]
\end{aligned}
$$

bulunur ve gerekli sadeleşmeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
6N(X,Y,Z) &= \left[\alpha_1\mu_2+\beta_1\mu_2+\mu_1\alpha_2+\mu_1\beta_2+\mu_1\mu_2\right]\alpha_3+\left[\alpha_1\mu_2+\beta_1\mu_2+\mu_1\alpha_2+\mu_1\beta_2+\mu_1\mu_2\right]\beta_3 \\
&+\left[\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\alpha_1\mu_2+\beta_1\mu_2+\mu_1\alpha_2+\mu_1\beta_2+\mu_1\mu_2\right]\mu_3 \\
&-(\beta_1\beta_2+\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2+\mu_1\mu_2)\beta_3-(\beta_1\beta_2+\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2+\mu_1\mu_2)\mu_3 \\
&-(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2+\mu_1\mu_2)\alpha_3-(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2+\mu_1\mu_2)\mu_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\beta_1\beta_2\beta_3+\mu_1\mu_2\mu_3 \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t(\left[a_1c_2+b_1c_2+c_1a_2+c_1b_2+c_1c_2\right]a_3+\left[a_1c_2+b_1c_2+c_1a_2+c_1b_2+c_1c_2\right]b_3 \\
&\qquad +\left[a_1a_2+a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2+a_1c_2+b_1c_2+c_1a_2+c_1b_2+c_1c_2\right]c_3) \\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((b_1b_2+b_1c_2+c_1b_2+c_1c_2)b_3+(b_1b_2+b_1c_2+c_1b_2+c_1c_2)c_3\right) \\
&-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((a_1a_2+a_1c_2+c_1a_2+c_1c_2)a_3+(a_1a_2+a_1c_2+c_1a_2+c_1c_2)c_3\right) \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((a_1a_2)a_3\right)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((b_1b_2)b_3\right)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left((c_1c_2)c_3\right) \\
&-\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+b_i)-n(a_i+c_i)+n(a_i)\right] \\
&-\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+b_i)-n(b_i+c_i)+n(b_i)\right] \\
&-\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+c_i)-n(b_i+c_i)+n(c_i)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yine gerekli sadeleşmeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&6N(X,Y,Z)=[\beta_1\mu_2+\mu_1\beta_2]\alpha_3+[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2]\beta_3+[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2]\mu_3\\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\big([b_1c_2+c_1b_2]a_3+[a_1c_2+c_1a_2]b_3+[a_1b_2+b_1a_2]c_3\big)\\
&-\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+b_i)-n(a_i+c_i)+n(a_i)\right]\\
&-\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+b_i)-n(b_i+c_i)+n(b_i)\right]\\
&-\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+c_i)-n(b_i+c_i)+n(c_i)\right]
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi $\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+b_i)-n(a_i+c_i)+n(a_i)\right]$ terimini inceleyelim. Burada $a_i+b_i=x_i$ ve $c_i=y_i$ denirse

$$\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+b_i)-n(a_i+c_i)+n(a_i)\right]=\left[n(x_i+y_i)-n(x_i)-n(a_i+y_i)+n(a_i)\right]$$

ve son terime $n(y_i)$ ekleyip çıkarırsak

$$\Big[\big(n(x_i+y_i)-n(x_i)-n(y_i)\big)+\big(n(y_i)-n(a_i+y_i)+n(a_i)\big)\Big]=\left[2n(x_i,y_i)-2n(a_i,y_i)\right]$$

elde edilir. n, 2-lineer bir dönüşüm olduğundan

$$\left[2n(x_i,y_i)-2n(a_i,y_i)\right]=2n(x_i-a_i,y_i)$$

olur ki burada $x_i=a_i+b_i$ ile $y_i=c_i$ olduğu kullanılırsa

$$2n(x_i-a_i,y_i)=2n(b_i,c_i)$$

sonucuna varılır. Böylece,

$$\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+b_i)-n(a_i+c_i)+n(a_i)\right]=2n(b_i,c_i)$$

olduğu görülür. Benzer biçimde,

$$\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+b_i)-n(b_i+c_i)+n(b_i)\right]=2n(a_i,c_i)$$

ve

$$\left[n(a_i+b_i+c_i)-n(a_i+c_i)-n(b_i+c_i)+n(c_i)\right]=2n(a_i,b_i)$$

olduğu görülebilir. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
6N(X,Y,Z) &= [\beta_1\mu_2 + \mu_1\beta_2]\alpha_3 + [\alpha_1\mu_2 + \mu_1\alpha_2]\beta_3 + [\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2]\mu_3 \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left([b_1c_2 + c_1b_2]a_3 + [a_1c_2 + c_1a_2]b_3 + [a_1b_2 + b_1a_2]c_3\right) \\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(b_i,c_i) - 2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i,c_i) - 2\sum_{(ijk)}(\mu_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i,b_i)
\end{aligned}
$$

olur.

Böylece $N(X,Y,Z)$ nin **J** üzerinde 3-lineer bir dönüşüm olduğunu görebiliriz. Özetle aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.6: $N(X,Y,Z)$ **J** üzerinde bir kübik formdur.

$N(X,Y,Z)$ de Z yerine X alınırsa,

$$
\begin{aligned}
6N(X,Y,X) &= [\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2]\alpha_3 + [\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2]\beta_3 + [\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2]\alpha_3 \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left([b_1a_2 + a_1b_2]a_3 + [a_1a_2 + a_1a_2]b_3 + [a_1b_2 + b_1a_2]a_3\right) \\
&-2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(b_i,a_i) - 2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i,a_i) - 2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i,b_i) \\
&= 2[\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2]\alpha_3 + 2[\alpha_1\alpha_2]\beta_3 \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 2t\left(2[b_1a_2 + a_1b_2]a_3 + 2[a_1a_2]b_3\right) \\
&-4\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i,b_i) - 2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i) \\
&= 2[\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2]\alpha_3 + 2[\alpha_1\alpha_2]\beta_3 \\
&+\gamma_1\gamma_2\gamma_3 4t\left([b_1a_2 + a_1b_2]a_3 + [a_1a_2]b_3\right) \\
&-4\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i,b_i) - 2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Tanım 4.7: $X \to T(X) = izX$ lineer fonksiyonu yardımıyla $(X,Y) \to T(X,Y) := T(X \square Y)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme jenerik iz (2-lineer) form adı verilir.

Teorem 4.8: $T(X,Y)$ jenerik iz formu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) T simetriktir yani $T(X,Y)=T(Y,X)$ dir.

ii) $T(X\times Y,\mathrm{Z})=T(X,Y\times Z)$ dir yani T birleşmelidir.

iii) $T\left(X,Y\right)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+2\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1,b_1\right)+2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2,b_2\right)+2\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3,b_3\right)$ dir.

İspat: i) $T(X,Y)=T\left(X\circ Y\right)=iz\left(X\circ Y\right)=iz\left(Y\circ X\right)=T\left(Y\circ X\right)=T(Y,X)$ olup T simetriktir.

ii) $N\left(X,Y,Z\right)$ simetrik ve (3.5) den $N\left(X,Y,Z\right)=\frac{1}{3}T\left(X\times Z,Y\right)$ olduğundan bu sonuç açıktır.

iii) $T\left(X,Y\right)=T\left(X\circ Y\right)=iz\left(X\circ Y\right)$ olup $X\circ Y$ matrisinin izi (4.1) yardımıyla $w_{11}+w_{22}+w_{33}$ toplamına eşittir. Böylece,

$$T\left(X,Y\right)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+2\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1,b_1\right)+2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2,b_2\right)+2\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3,b_3\right)$$

elde edilir.

iii) deki sonuç $\left(i,j,k\right)=\left(1,2,3\right)$ dairesel permütasyonu yardımıyla kısaca

$$T\left(X,Y\right)=\sum_{(ijk)}\left(\alpha_i\beta_i+2\gamma_i\gamma_j n\left(a_k,b_k\right)\right) \tag{4.5}$$

biçiminde de yazılabilir. (3.6) dan $T\left(X,Y\right)=T\left(X\right)T\left(Y\right)-2T\left(X\times Y\right)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} T\left(X,Y\right)&=\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)\left(\beta_1+\beta_2+\beta_3\right)\\ &-\left(\left[\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3\right]+\left[\alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1\right]+\left[\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2\right]-2\sum_{(ijk)}\gamma_j\gamma_k n\left(a_i,b_i\right)\right)\\ &=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+2\sum_{(ijk)}\gamma_j\gamma_k n\left(a_i,b_i\right) \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu sonuç (4.5) deki sonuçla aynıdır.

Böylece, (3.7) de Freudenthal çarpım olarak ifade ettiğimiz çarpım, jenerik iz form yardımıyla

$$X\times Y=X\circ Y-\frac{1}{2}XT\left(Y\right)-\frac{1}{2}YT\left(X\right)+\frac{1}{2}\left(T\left(X\right)T\left(Y\right)-T\left(X\circ Y\right)\right)I \tag{4.6}$$

olarak yazılır. Bu çarpım, Gürsoy ve ark. (1996) tarafından süperpozisyon prensibini Jordan formülasyonunda ifade etmek için kullanılmıştır. Burada $Y = X$ seçilirse,

$$
\begin{aligned}
X \times X &= X \circ X - \frac{1}{2} T(X) X - \frac{1}{2} T(X) X + \frac{1}{2}\left[T(X) T(X) - T(X \circ X) \right] I \\
&= X^2 - T(X) X + \frac{1}{2}\left[\left(T(X) \right)^2 - T\left(X^2 \right) \right] I \\
&= X^{\#}
\end{aligned}
$$

olup $^{\#}$ dönüşümünün bir kuadratik dönüşüm olduğu görülmektedir. $X^{\#} = X^2 - T(X) X + T\left(X^{\#} \right) I_3$ eşitliği yukarıdaki sonuçla birlikte düşünülürse $\frac{1}{2}\left[\left(T(X) \right)^2 - T\left(X^2 \right) \right] = T\left(X^{\#} \right)$ olmalıdır. Şimdi bunu görelim:

$\left(T(X) \right)^2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \right)^2 = \alpha_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2} + \alpha_3^{\,2} + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3$ ve $T\left(X^2 \right) = T(X \circ X) = T(X, X) = \alpha_1\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 + \alpha_3\alpha_3 + 2\sum_{(ijk)} \gamma_j \gamma_k n\left(a_i, a_i \right)$ eşitlileri taraf tarafa çıkarılırsa $\left(T(X) \right)^2 - T\left(X^2 \right) = 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3 - 2\sum_{(ijk)} \gamma_j \gamma_k n\left(a_i, a_i \right)$ elde edilir. $T\left(X^{\#} \right) = \alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3 n\left(a_1 \right) + \alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1 n\left(a_2 \right) + \alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 n\left(a_3 \right)$ olduğundan

$$
\frac{1}{2}\left[\left(T(X) \right)^2 - T\left(X^2 \right) \right] = T\left(X^{\#} \right) \tag{4.7}
$$

elde edilir.

$T(X, Y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + 2\sum_{(ijk)} \gamma_j \gamma_k n\left(a_i, b_i \right)$ de X yerine $X^{\#}$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
T\left(X^{\#},Y\right) &= \left[\alpha_2\alpha_3-\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right]\beta_1+\left[\alpha_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right]\beta_2+\left[\alpha_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right]\beta_3 \\
&\quad +2\sum_{(ijk)}\gamma_j\gamma_k n\left(\gamma_i\left(\overline{a_j a_k}\right)-\alpha_i a_i, b_i\right) \\
&= \left[\alpha_2\alpha_3-\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right]\beta_1+\left[\alpha_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right]\beta_2+\left[\alpha_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right]\beta_3 \\
&\quad +2\gamma_2\gamma_3 n\left(\gamma_1\left(\overline{a_2 a_3}\right)-\alpha_1 a_1, b_1\right)+2\gamma_3\gamma_1 n\left(\gamma_2\left(\overline{a_3 a_1}\right)-\alpha_2 a_2, b_2\right)+2\gamma_1\gamma_2 n\left(\gamma_3\left(\overline{a_1 a_2}\right)-\alpha_3 a_3, b_3\right) \\
&= \left[\alpha_2\alpha_3-\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right]\beta_1+\left[\alpha_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right]\beta_2+\left[\alpha_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right]\beta_3 \\
&\quad +2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 n\left(\left(\overline{a_2 a_3}\right), b_1\right)-2\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1, b_1\right)+2\gamma_2\gamma_3\gamma_1 n\left(\left(\overline{a_3 a_1}\right), b_2\right) \\
&\quad -2\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2, b_2\right)+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2 n\left(\left(\overline{a_1 a_2}\right), b_3\right)-2\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3, b_3\right) \\
&= \left[\alpha_2\alpha_3-\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right]\beta_1+\left[\alpha_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right]\beta_2+\left[\alpha_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right]\beta_3 \\
&\quad +2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(\left(\overline{a_2 a_3}\right), \overline{b_1}\right)-2\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1, b_1\right)+2\gamma_2\gamma_3\gamma_1 t\left(\left(\overline{a_3 a_1}\right), \overline{b_2}\right) \\
&\quad -2\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2, b_2\right)+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2 t\left(\left(\overline{a_1 a_2}\right), \overline{b_3}\right)-2\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3, b_3\right) \\
&= \left[\alpha_2\alpha_3-\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right]\beta_1+\left[\alpha_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right]\beta_2+\left[\alpha_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right]\beta_3 \\
&\quad +2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(a_2 a_3, b_1\right)-2\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1, b_1\right)+2\gamma_2\gamma_3\gamma_1 t\left(a_3 a_1, b_2\right) \\
&\quad -2\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2, b_2\right)+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2 t\left(a_1 a_2, b_3\right)-2\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3, b_3\right) \\
&= \left[\alpha_2\alpha_3-\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right]\beta_1+\left[\alpha_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right]\beta_2+\left[\alpha_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right]\beta_3 \\
&\quad +2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(b_1 a_2, a_3\right)-2\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1, b_1\right)+2\gamma_2\gamma_3\gamma_1 t\left(a_1 b_2, a_3\right) \\
&\quad -2\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2, b_2\right)+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2 t\left(a_1 a_2, b_3\right)-2\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3, b_3\right)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Böylece $6N\left(X,Y,X\right)=2T\left(X^{\#},Y\right)$ olduğu, yani $T\left(X^{\#},Y\right)=3N\left(X,Y,X\right)=N\left(X,Y\right)$ eşitliği elde edilmiş olur. Bu sonuç ile kübik cebir tanımının (yani Tanım 3.5 in) 3. şartının sağlandığını görmüş oluruz. Üstelik,

$$
\begin{aligned}
T\left(X^{\#},Y\right) &= \left[\alpha_2\alpha_3-\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right]\beta_1+\left[\alpha_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right]\beta_2+\left[\alpha_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right]\beta_3 \\
&\quad +2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(b_1 a_2, a_3\right)-2\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1, b_1\right)+2\gamma_2\gamma_3\gamma_1 t\left(a_1 b_2, a_3\right) \\
&\quad -2\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2, b_2\right)+2\gamma_3\gamma_1\gamma_2 t\left(a_1 a_2, b_3\right)-2\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3, b_3\right)
\end{aligned}
$$

eşitliğinde Y yerine X alınmış olsaydı,

$$
\begin{aligned}
T\left(X^{\#}, X\right) &= \left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right]\alpha_1 + \left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right]\alpha_2 + \left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right]\alpha_3 \\
&+ 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(a_1 a_2, a_3\right) - 2\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1, a_1\right) + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_1 t\left(a_1 a_2, a_3\right) \\
&- 2\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2, a_2\right) + 2\gamma_3\gamma_1\gamma_2 t\left(a_1 a_2, a_3\right) - 2\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3, a_3\right) \\
&= 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right) - \alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right) - \alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right) \\
&+ 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(a_1 a_2, a_3\right) - 2\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right) + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_1 t\left(a_1 a_2, a_3\right) \\
&- 2\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right) + 2\gamma_3\gamma_1\gamma_2 t\left(a_1 a_2, a_3\right) - 2\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right) \\
&= 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 3\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right) - 3\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right) - 3\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right) + 6\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(a_1 a_2, a_3\right) \\
&= 3\left[\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right) - \alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right) - \alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right) + 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(a_1 a_2, a_3\right)\right] \\
&= 3\det X = 3N\left(X\right) = 3N\left(X, X, X\right)
\end{aligned}
$$

bulunurdu. Dolayısıyla, $N\left(X, X, X\right) = N\left(X\right) = \frac{1}{3}T\left(X^{\#}, X\right) = \frac{1}{3}T\left(X \times X, X\right)$ olurdu. Bu sonuç (3.5) deki genel sonuçla uyumludur.

$$
\begin{aligned}
T\left(X^{\#}, Y\right) &= \left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right]\beta_1 + \left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right]\beta_2 + \left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right]\beta_3 \\
&+ 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(b_1 a_2, a_3\right) - 2\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1, b_1\right) + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_1 t\left(a_1 b_2, a_3\right) \\
&- 2\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2, b_2\right) + 2\gamma_3\gamma_1\gamma_2 t\left(a_1 a_2, b_3\right) - 2\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3, b_3\right)
\end{aligned}
$$

eşitliğinde Y yerine 1 alınmış olsaydı,

$$
\begin{aligned}
T\left(X^{\#}, 1\right) &= \left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right]1 + \left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right]1 + \left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right]1 \\
&+ 2\gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\left(0, a_3\right) - 2\alpha_1\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1, 0\right) + 2\gamma_2\gamma_3\gamma_1 t\left(0, a_3\right) \\
&- 2\alpha_2\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2, 0\right) + 2\gamma_3\gamma_1\gamma_2 t\left(a_1 a_2, 0\right) - 2\alpha_3\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3, 0\right) \\
&= \left[\alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3 n\left(a_1\right)\right] + \left[\alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1 n\left(a_2\right)\right] + \left[\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 n\left(a_3\right)\right] \\
&= T\left(X^{\#}\right) \\
&= 3N\left(X, 1, X\right)
\end{aligned}
$$

olurdu.

$N\left(X, Y, Z\right)$ de Z yerine 1 alınırsa,

$$
\begin{aligned}
6N(X,Y,1) &= [\beta_1 1 + 1\beta_2]\alpha_3 + [\alpha_1 1 + 1\alpha_2]\beta_3 + [\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2]1 \\
&\quad + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 t\big([b_1 0 + 0 b_2]a_3 + [a_1 0 + 0 a_2]b_3 + [a_1 b_2 + b_1 a_2]0\big) \\
&\quad - 2\sum_{(ijk)}(\alpha_i)\gamma_j\gamma_k n(b_i,0) - 2\sum_{(ijk)}(\beta_i)\gamma_j\gamma_k n(a_i,0) - 2\sum_{(ijk)}(1)\gamma_j\gamma_k n(a_i,b_i) \\
&= [\beta_1+\beta_2]\alpha_3 + [\alpha_1+\alpha_2]\beta_3 + [\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2] - 2\sum_{(ijk)}\gamma_j\gamma_k n(a_i,b_i) \\
&= [\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3] + [\alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1] + [\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2] - 2\sum_{(ijk)}\gamma_j\gamma_k n(a_i,b_i)
\end{aligned}
$$

olup bu sonuç $X \times Y$ matrisinin (i,i) bileşenlerinin toplamının iki katına yani $2T(X \times Y)$ ye eşittir. O halde $N(X,Y,1) = N(X,1,Y) = \frac{1}{3}T(X \times Y,1)$ dir.

Şimdi, $X \cdot X^{\#}$ çarpımını hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
X \cdot X^{\#} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2} \\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3 n(a_1) & \gamma_2\gamma_3\overline{(a_1 a_2)} - \gamma_2\alpha_3 a_3 & \gamma_3\gamma_2(a_3 a_1) - \gamma_3\alpha_2\overline{a_2} \\ \gamma_1\gamma_3(a_1 a_2) - \gamma_1\alpha_3\overline{a_3} & \alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1 n(a_2) & \gamma_3\gamma_1\overline{(a_2 a_3)} - \gamma_3\alpha_1 a_1 \\ \gamma_1\gamma_2\overline{(a_3 a_1)} - \gamma_1\alpha_2 a_2 & \gamma_2\gamma_1(a_2 a_3) - \gamma_2\alpha_1\overline{a_1} & \alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 n(a_3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \det(X) & 0 & 0 \\ 0 & \det(X) & 0 \\ 0 & 0 & \det(X) \end{bmatrix} = \det(X)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det(X) I_3
\end{aligned}
$$

olduğundan $X \cdot X^{\#} = X^{\#} \cdot X = \det(X) = N(X)$ yazabiliriz.

$$
X^{\#} = adj(X) = \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_3 - \gamma_2\gamma_3 n(a_1) & \gamma_2\gamma_3\overline{(a_1 a_2)} - \gamma_2\alpha_3 a_3 & \gamma_3\gamma_2(a_3 a_1) - \gamma_3\alpha_2\overline{a_2} \\ \gamma_1\gamma_3(a_1 a_2) - \gamma_1\alpha_3\overline{a_3} & \alpha_3\alpha_1 - \gamma_3\gamma_1 n(a_2) & \gamma_3\gamma_1\overline{(a_2 a_3)} - \gamma_3\alpha_1 a_1 \\ \gamma_1\gamma_2\overline{(a_3 a_1)} - \gamma_1\alpha_2 a_2 & \gamma_2\gamma_1(a_2 a_3) - \gamma_2\alpha_1\overline{a_1} & \alpha_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 n(a_3) \end{bmatrix}
$$

olup bu matrisinin tekrar eki alınırsa bu durumda $\left(X^{\#}\right)^{\#}$ matrisinin (i,j). bileşenleri ile $N(X)X$ matrisinin (i,j). bileşenlerinin aynı olduğu yani $\left(X^{\#}\right)^{\#} = N(X)X$ olduğunu görülür. Bu ise kübik cebir tanımın (yani Tanım 3.5 in) 1. şartının geçerli olduğunu gösterir. $N(1)=1$ ve $1^{\#}=1$ olduğunu görmek çok kolaydır ki bunlar, sırasıyla, kübik cebir tanımının 2 ve 4. şartlarıdır.

Böylece $\mathbf{J} = \left(\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\gamma \right), +, \square \right)$ nin bir kübik cebir olduğunu göstermiş olduk.

Bir kübik cebirin $U_X Y = T(X,Y)X - 2\left(X^{\#} \times Y \right)$ eşitliği altında bir özdeşlikli kuadratik Jordan cebiri olduğu 3. bölümde ifade edilmiştir.

Gösterim: $\mathbf{J}$ cebirindeki tüm girdileri $\mathbf{I}$ kümesinin elemanları olan matrislerin oluşturduğu küme $\mathbf{IJ}$ ile gösterilecektir.

Şimdi (Bix 1980, 1981) den aşağıdaki tanımı verebiliriz:

Tanım 4.9: $\left(R, I \right)$ bir lokal halka ve $\left(\mathrm{O}, \mathbf{I} \right)$ bir octonion $R-$ cebir olmak üzere $\mathbf{J} = \left(\mathrm{H}\left(\mathrm{O}_3, J_\gamma \right), +, \square \right)$ cebiri verilsin. $\Pi = \left\{ X \middle| X \in \mathbf{J} \setminus \mathbf{IJ} \text{ ve } X^{\#} = 0 \right\}$ olsun. $X \in \Pi$ için $\left\langle X \right\rangle = \left\{ \alpha X \mid \alpha \in R \setminus I \right\}$ olmak üzere $\mathscr{N} = \mathscr{D} = \left\{ \left\langle X \right\rangle \middle| X \in \Pi \right\}$ kümeleri tanımlansın. $\mathscr{N}$ noktalar ve $\mathscr{D}$ doğrular kümesi olmak üzere aşağıda tanımlanan $\in$ üzerinde olma bağıntısı ve $\square$ denklik (komşuluk) bağıntısı ile birlikte oluşturulan $\mathrm{P}\left(\Pi \right) = \left(\mathscr{N}, \mathscr{D}, \in, \square \right)$ geometrik yapısına bir *octonion düzlem* denir.

i) $V_{X,Y} 1 = 0 \Leftrightarrow Y \in X$ (Y *noktası* X *doğrusu üzerindedir.*)

ii) $T\left(X, Y \right) \in \mathbf{I}$ ise X *noktası* Y *doğrusuna yakındır* denir ve bu durum $X \sim Y$ ile gösterilir. Aksi durum, $X \nsim Y$ ile gösterilir.

iii) $X \times Y \in \mathbf{IJ}$ ise X *noktası (doğrusu)* Y *noktası (doğrusu) ile komşudur* denir ve bu durum $X \sim Y$ ile gösterilir. Aksi hal, $X \nsim Y$ ile gösterilir.

Tanımda verilen Π kümesi $\left\{ X \middle| X \in \mathbf{J} \setminus \mathbf{IJ} \text{ ve } X \times X = X^{\times 2} = 0 \right\}$ ile de gösterilebilir, yani Π nin bir elemanı indeksi 2 olan bir nilpotent elemandır.

Şimdi, bu tanımı daha yakından inceleyerek bu düzlemin $\mathscr{N}$ noktalar ve $\mathscr{D}$ doğrular kümesini üç denklik sınıfına ayırmak istiyoruz. Bu sayede, üzerinde olma bağıntısını, komşuluk bağıntısını ve bir noktanın bir doğruya yakınlığını yeniden yorumlayacağız.

Düzlemin üzerinde olma bağıntısı

$$V_{X,Y} : Z \to V_{X,Y} Z = \{X, Y, Z\} = \frac{1}{2}\left[(XY)Z + Z(YX)\right]$$

operatörü yardımıyla tanımlanmıştır. Şimdi, 3. bölümden bu operatör ile ilgili bazı bilgiler aşağıda hatırlatılacaktır.

$\{X, Y, Z\}$ de, sırasıyla $X = 1$, $Y = 1$ ve $Z = 1$ seçilirse;

$$\{1, X, Y\} = \frac{1}{2}\left[(1X)Y + Y(1X)\right] = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

$$\{X, 1, Y\} = \frac{1}{2}\left[(X1)Y + Y(1X)\right] = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

$$\{X, Y, 1\} = \frac{1}{2}\left[(XY)1 + 1(YX)\right] = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

yani,

$$\{1, X, Y\} = \{X, 1, Y\} = \{X, Y, 1\} = \frac{1}{2}(XY + YX) = X \circ Y$$

elde edilir. Buradan

$$V_{X,Y}1 = \{X, Y, 1\} = X \circ Y = Y \circ X = \{Y, X, 1\} = V_{Y,X}1$$

bulunur ki $V_{X,Y}1 = V_{Y,X}1$ eşitliğinden nokta yerine doğru ya da doğru yerine nokta alabileceğimizi görüyoruz. Dolayısıyla bu düzlemlerde dualite prensibi geçerlidir.

Hemen belirtelim ki tüm girdileri idealde olan bir eleman Π de bulunmadığından böyle bir eleman hem nokta hem de doğru belirtmeyecektir.

$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{J}$ olsun. $X^{\#} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = 0$ eşitliğinden elde edilebilecek dokuz denklemden altısını yazmak yeterlidir. Burada $\overline{A_{ij}} = A_{ji}$ olduğunu biliyoruz. Böylece, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&A_{11}=\alpha_2\alpha_3-\gamma_2\gamma_3 n(a_1)=0 \Rightarrow \alpha_2\alpha_3=\gamma_2\gamma_3 n(a_1)\\
&A_{21}=\gamma_1\gamma_3(a_1a_2)-\gamma_1\alpha_3\overline{a_3}=0\\
&A_{22}=\alpha_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 n(a_2)=0 \Rightarrow \alpha_3\alpha_1=\gamma_3\gamma_1 n(a_2)\\
&A_{32}=\gamma_2\gamma_1(a_2a_3)-\gamma_2\alpha_1\overline{a_1}=0\\
&A_{13}=\gamma_3\gamma_2(a_3a_1)-\gamma_3\alpha_2\overline{a_2}=0\\
&A_{33}=\alpha_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2 n(a_3)=0 \Rightarrow \alpha_1\alpha_2=\gamma_1\gamma_2 n(a_3)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

$X^{\#}=0$ iken α_1,α_2 ve α_3 ün idealde olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $A_{11}=0$ eşitliğinde γ_2 ve γ_3 ün birim olduğu dikkate alınırsa bu eşitliğin geçerli olması için $n(a_1)$ idealde olmalıdır, yani a_1 idealde olmak zorundadır. $A_{22}=0$ ve $A_{33}=0$ eşitliklerinden benzer bir inceleme ile a_2 ve a_3 ün de idealde olması gerektiği kolayca görülebilir. Böylece $X\in\mathbf{IJ}$ olur ki bu $X\notin\Pi$ demektir. O halde $X\in\Pi$ özelliğindeki herhangi bir eleman için α_1,α_2 ve α_3 den en az biri birim olmak zorundadır.

$X\in\Pi$ olsun. α_1, α_2 ve α_3 den en az birinin birim olduğu gerçeği kullanılırsa α_1, α_2 ve α_3 ün birim olup olmamasına göre yedi durum söz konusudur ve bu durumların her birinin (4.8) deki denklemleri sağlayacağını düşünülürse a_1, a_2 ve a_3 için aşağıdaki önermeler elde edilir:

1. durum: $\underline{\alpha_1\in U}$, $\alpha_2\in U \wedge \alpha_3\in U \Rightarrow a_1,a_2,a_3\in\mathbf{U}$

2. durum: $\underline{\alpha_1\in U}$, $\alpha_2\in U \wedge \alpha_3\in I \Rightarrow a_1,a_2\in\mathbf{I} \wedge a_3\in\mathbf{U}$

3. durum: $\underline{\alpha_1\in U} \wedge \alpha_2\in I \wedge \alpha_3\in U \Rightarrow a_1,a_3\in\mathbf{I} \wedge a_2\in\mathbf{U}$

4. durum: $\underline{\alpha_1\in U}$, $\alpha_2\in I \wedge \alpha_3\in I \Rightarrow a_1,a_2,a_3\in\mathbf{I}$

5. durum: $\underline{\alpha_2\in U} \wedge \alpha_1\in I \wedge \alpha_3\in U \Rightarrow a_2,a_3\in\mathbf{I} \wedge a_1\in\mathbf{U}$

6. durum: $\underline{\alpha_2\in U} \wedge \alpha_1\in I \wedge \alpha_3\in I \Rightarrow a_1,a_2,a_3\in\mathbf{I}$

7. durum: $\underline{\alpha_3\in U} \wedge \alpha_1\in I \wedge \alpha_2\in I \Rightarrow a_1,a_2,a_3\in\mathbf{I}$

Yukarıda verilen yedi durumu $(i,j,k)=(1,2,3)$ dairesel permütasyonu yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k \in U \Rightarrow a_i,a_j,a_k \in \mathbf{U}$ (1. durum)

$\alpha_i,\alpha_j \in U \ \wedge \alpha_k \in I \ \Rightarrow \ a_i,a_j \in \mathbf{I} \ \wedge \ a_k \in \mathbf{U}$ (2, 3 ve 5. durumlar)

$\alpha_i \in U \ \wedge \ \alpha_j,\alpha_k \in I \ \Rightarrow \ a_i,a_j,a_k \in \mathbf{I}$ (4, 6 ve 7. durumlar)

Ayrıca, α bir birim ve $X \in \Pi$ iken $\alpha X \in \Pi$ olacağı açıktır Çünkü, $X^{\#}=0$ olup $(\alpha X)^{\#}=\alpha^2 X^{\#}=\alpha^2 0=0$ dır. Π kümesinden, X noktasının denklik sınıfı olarak isimlendirilen $(X)=\{\alpha X \mid \alpha \,\text{birim}\}$ kümesi ve benzer biçimde X doğrusunun denklik sınıfı olarak isimlendirilen $[X]=\{\alpha X \mid \alpha \,\text{birim}\}$ kümesi elde edilir. Bir denklik sınıfının herhangi bir elemanı aynı nokta ya da doğruyu temsil edecektir. Şimdi, noktalar ve doğrular kümesi, sırasıyla $\mathscr{N}=\{(X) \mid X \in \Pi\}$ ve $\mathscr{D}=\{[X] \mid X \in \Pi\}$ biçiminde tanımlanabilir. Bu sonucu, $X \in \Pi$ için α_1, α_2 ve α_3 den en az birinin birim olduğu gerçeği ile birlikte düşünürsek noktalar (ya da doğrular) kümesinin aşağıdaki biçimde bir parçalanışı elde edilir. Bu parçalanışın elemanları; α_1 birim ise $\begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix}$ tipindeki noktaların kümesi, α_2 birim ise $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & 1 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix}$ tipindeki noktaların kümesi ve α_3 birim ise $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & 1 \end{pmatrix}$ tipindeki noktaların kümesidir. Bu üç eleman, kısaca, 1 in bulunduğu bileşene göre, sırasıyla, 1. tip, 2. tip ve 3. tip noktalar biçiminde de ifade edilebilir.

Gösterim: Bir $[X] \in \mathscr{D}$ doğrusu $X=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{bmatrix}$ biçiminde -köşeli parantez ile- gösterilecektir. Bundan sonra, bir nokta ve bir doğru için bu ayrıma dikkat edilecektir.

Yukarıdaki inceleme ile birlikte octonion düzlemin $\mathscr{N}$ noktalar ve $\mathscr{D}$ doğrular kümesi aşağıdaki biçimde verilebilir:

$$\mathscr{N}=\left\{X=\begin{pmatrix}1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{pmatrix}: \alpha_2\in R, \alpha_3\in I \wedge a_1, a_2 \in \mathbf{I}, a_3\in \mathrm{O}\right\}$$ (2 ve 4. durumları kapsar)

$$\cup\left\{Y=\begin{pmatrix}\beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & 1\end{pmatrix}: \beta_1, \beta_2\in R \wedge b_1, b_2, b_3 \in \mathrm{O}\right\}$$ (1, 3, 5 ve 7. durumları kapsar.)

$$\cup\left\{Z=\begin{pmatrix}\mu_1 & \gamma_2 c_3 & \gamma_3\overline{c_2}\\ \gamma_1\overline{c_3} & 1 & \gamma_3 c_1\\ \gamma_1 c_2 & \gamma_2\overline{c_1} & \mu_3\end{pmatrix}: \mu_1, \mu_3\in I \wedge c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{I}\right\}$$ (6. durumu kapsar.)

ve

$$\mathscr{D}=\left\{X=\begin{bmatrix}1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{bmatrix}: \alpha_2\in I, \alpha_3\in R\right\}$$ (3 ve 4. durumları kapsar.)

$$\cup\left\{Y=\begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & 1 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3\end{bmatrix}: \beta_1,\ \beta_3\in R\right\}$$ (1, 2, 5 ve 6. durumları kapsar.)

$$\cup\left\{Z=\begin{bmatrix}\mu_1 & \gamma_2 c_3 & \gamma_3\overline{c_2}\\ \gamma_1\overline{c_3} & \mu_2 & \gamma_3 c_1\\ \gamma_1 c_2 & \gamma_2\overline{c_1} & 1\end{bmatrix}: \mu_1, \mu_2\in I\right\}$$ (7. durumu kapsar.).

Üzerinde Olma Bağıntısı:

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{pmatrix}\in Y=\begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3\end{bmatrix}\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(XY+YX\right)=0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

üzerinde olma bağıntısını ele alalım. $\frac{1}{2}\left(XY+YX\right)$ de X ile Y yerine yazılarsa bu matrisin bileşenleri $(i,j,k)=(1,2,3)$ dairesel permütasyonu yardımıyla ifade edilebilir. (4.1) den (i,i). bileşeni $(i,i)=\alpha_i\beta_i+\gamma_i\left[\gamma_j n\left(a_k,b_k\right)+\gamma_k n\left(a_j,b_j\right)\right]$ ve (4.2) den (i,j). bileşeni $(i,j)=\frac{1}{2}\gamma_j\left[\gamma_k\left(\overline{a_i b_j+b_i a_j}\right)+\left(\beta_i+\beta_j\right)a_k+\left(\alpha_i+\alpha_j\right)b_k\right]$ biçiminde yazılabilir. Burada (i,j) nolu bileşeninin eşleneğinin (j,i) nolu bileşen olduğuna dikkat ediniz.

$$X=\begin{pmatrix}1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{pmatrix}\in\begin{bmatrix}1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3\end{bmatrix}=Y$$ olup olmadığını inceleyelim. Bu durumda; $\alpha_2\in R,\ \alpha_3\in I\ \wedge\ a_1,a_2\in I$ ve $\beta_2\in I,\ \beta_3\in R\ \wedge\ b_1,b_3\in I$ olup $\frac{1}{2}\left(XY+YX\right)$ matrisinin $(1,1)$ nolu girdisi olan $1+\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3,b_3\right)+\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2,b_2\right)$ elemanını dikkate alalım. Burada $\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3,b_3\right)\in I$ ve $\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2,b_2\right)\in I$ olacağından $(1,1)$ nolu terim birim olur. Dolayısıyla $\frac{1}{2}\left(XY+YX\right)=0$ bağıntısı sağlanmaz. Yani bu tip bir nokta bu tip bir doğru üzerinde bulunmaz.

$$X=\begin{pmatrix}1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3\end{pmatrix}\in\begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & 1 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3\end{bmatrix}=Y$$ olup olmadığını kontrol edelim. Bu durumda, $\frac{1}{2}\left(XY+YX\right)=0$ eşitliğini sağlayacak $\alpha_2,\beta_1,\beta_3\in R$, $\alpha_3\in I$ ve $b_1,b_2,b_3,a_3\in \mathrm{O}$ bulunabilir.

$$X=\begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & 1 \end{bmatrix} = Y$$ olup olmadığını inceleyelim. Bu durumda, $\frac{1}{2}(XY+YX)=0$ eşitliğini sağlayacak $\alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2 \in I$ ve $a_1,a_2,b_1,b_2,b_3 \in \mathbf{I}$ bulunabilir.

$$X=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & 1 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} 1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix} = Y$$ olup olmadığını kontrol edelim. Bu durumda, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_2 \in I$, $\beta_3 \in R$ ve $a_1,a_2,a_3,b_1,b_3 \in \mathbf{I}$ iken $\frac{1}{2}(XY+YX)=0$ eşitliğinin sağlanabileceği açıktır.

$$X=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & 1 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & 1 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix} = Y$$ olup olmadığını inceleyelim. Bu durumda; $\alpha_1 \in I$, $\alpha_3 \in I \ \wedge \ a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbf{I}$ ve $\beta_1 \in R$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 \in R \ \wedge \ b_1,\ b_3 \in \mathrm{O}$ olup $\frac{1}{2}(XY+YX)$ matrisinin $(2,2)$ nolu girdisi $(2,2)=1+\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3)+\gamma_3\gamma_2 n(a_1,b_1)$ birim olur. Dolayısıyla $\frac{1}{2}(XY+YX)=0$ bağıntısı sağlanmaz. Yani bu tip bir nokta bu tip bir doğru üzerinde bulunmaz.

$$X=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & 1 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & 1 \end{bmatrix} = Y$$ olup olmadığını kontrol edelim. Bu durumda, yani $\alpha_1,\alpha_3,\beta_1,\beta_2 \in I$ ve $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 \in \mathbf{I}$ koşulları altında $\frac{1}{2}(XY+YX)=0$ eşitliğin sağlanabileceği açıktır.

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & 1\end{pmatrix}\in\begin{bmatrix}1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3\end{bmatrix}=Y$$ olup olmadığını kontrol edelim. Bu durumda, yani $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3\in R$, $\beta_2\in I$ ve $a_1,a_2,a_3\in \mathrm{O}$, $b_1,b_3\in \mathbf{I}$ koşulları altında $\frac{1}{2}(XY+YX)=0$ eşitliğin sağlanabileceği açıktır.

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & 1\end{pmatrix}\in\begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & 1 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3\end{bmatrix}=Y$$ olup olmadığını inceleyelim. Bu durumda, $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_3\in R$ ve $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in \mathrm{O}$ koşulları altında $\frac{1}{2}(XY+YX)=0$ eşitliğin sağlanabileceği açıktır.

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & 1\end{pmatrix}\in\begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & 1\end{bmatrix}=Y$$ olup olmadığını inceleyelim. Bu durumda; $\alpha_1,\alpha_2\in R\ \wedge\ a_1,\, a_2,\, a_3\in \mathrm{O}$ ve $\beta_1,\beta_2\in I\ \wedge\ b_1,b_2,b_3\in \mathbf{I}$ olup $\frac{1}{2}(XY+YX)$ matrisinin $(3,3)$ nolu girdisi $(3,3)=1+\gamma_1\gamma_3 n(a_2,b_2)+\gamma_3\gamma_2 n(a_1,b_1)$ birim olur. Dolayısıyla $\frac{1}{2}(XY+YX)=0$ bağıntısı sağlanmaz. Yani bu tip bir nokta bu tip bir doğru üzerinde bulunmaz.

Sonuç 4.10: Tipleri aynı olan nokta ve doğrular birbiri üzerinde olamaz. Başka bir ifadeyle, aynı girdileri 1 olan bir nokta ile bir doğru birbiri üzerinde olamaz.

Komşuluk Bağıntısı:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2} \\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2} \\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } Z=\begin{pmatrix} \mu_1 & \gamma_2 c_3 & \gamma_3\overline{c_2} \\ \gamma_1\overline{c_3} & 1 & \gamma_3 c_1 \\ \gamma_1 c_2 & \gamma_2\overline{c_1} & \mu_3 \end{pmatrix} \text{ olmak}$$

üzere; (4.3) den $X\times Y$ matrisinin $(2{,}2)$ nolu bileşeni $\frac{1}{2}\left[\alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2,b_2\right)\right]$ olup

$$\alpha_3\beta_1\in I,\ \beta_3\alpha_1=1\in U \text{ ve } \gamma_3\gamma_1 n\left(a_2,b_2\right)\in I$$

olduğundan $\alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1-\gamma_3\gamma_1 n\left(a_2,b_2\right)\in U$ sonucu elde edilir. Bu yüzden $X\times Y\notin \mathbf{IJ}$ dir. Yani X tipli bir nokta ile Y tipli bir nokta komşu değildir.

(4.3) yardımıyla $X\times Z$ matrisinin $(3{,}3)$ nolu bileşeni

$$\alpha_1\mu_2=1\in U,\ \mu_1\alpha_2\in I \text{ ve } \gamma_1\gamma_2 n\left(a_3,c_3\right)\in I$$

olduğundan $\frac{1}{2}\left[\alpha_1\mu_2+\mu_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2 n\left(a_3,c_3\right)\right]\in U$ olup $X\times Z\notin \mathbf{IJ}$ dir. O halde X tipli bir nokta ile Z tipli bir nokta komşu değildir.

(4.3) yardımıyla $Y\times Z$ matrisinin $(1{,}1)$ nolu bileşeni

$$\beta_2\mu_3\in I,\ \mu_2\beta_3=1\in U \text{ ve } \gamma_2\gamma_3 n\left(a_1,c_1\right)\in I$$

olduğundan $\frac{1}{2}\left[\beta_2\mu_3+\mu_2\beta_3-\gamma_2\gamma_3 n\left(a_1,c_1\right)\right]\in U$ olup $Y\times Z\notin \mathbf{IJ}$ dir. Yani Y tipli bir nokta ile Z tipli bir nokta komşu değildir.

$$X=\begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2} \\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ ve } Y=\begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2} \\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3 \end{pmatrix} \text{ biçiminde aynı tipten iki nokta}$$

alalım. Bu durumda, $X\in\Pi$ olduğundan $\alpha_2\in R, \alpha_3\in I\wedge a_1,a_2\in\mathbf{I}, a_3\in\mathrm{O}$ ($\alpha_2\in U$ iken $a_3\in\mathbf{U}$ ve $\alpha_2\in I$ iken $a_3\in\mathbf{I}$) dir ve $Y\in\Pi$ olduğundan $\beta_2\in R, \beta_3\in I\wedge b_1,b_2\in\mathbf{I}, b_3\in\mathrm{O}$ ($\beta_2\in U$ iken $b_3\in\mathbf{U}$ ve $\beta_2\in I$ iken $b_3\in\mathbf{I}$) olduğunu biliyoruz. Bu şartlar $X \times Y$ matrisinin tüm (i, j) bileşenleri üzerinde taşınırsa $(3,3)$ nolu bileşeni hariç tüm bileşenlerin idealde olduğu görülür. $X \times Y$ nin $(3,3)$ nolu bileşeni $\frac{1}{2}\left[\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 - \gamma_1\gamma_2 n\left(a_3, b_3\right)\right]$ için aşağıdaki dört durum söz konusudur:

1) $\alpha_2 \in U, \beta_2 \in U$

2) $\alpha_2 \in U, \beta_2 \in I$

3) $\alpha_2 \in I, \beta_2 \in U$

4) $\alpha_2 \in I, \beta_2 \in I$

Şimdi bu durumları sırasıyla incelersek; 1, 2 ve 3. durumlarda bu bileşen birim olup sadece son durumda idealde olur. Yani sadece $\alpha_2 \in I, \beta_2 \in I$ iken $X \times Y \in \mathbf{IJ}$ olduğu görülür. Dolayısıyla bu tip iki noktanın komşu olması için gerek ve yeter şart $\alpha_2 \in I, \beta_2 \in I$ olmasıdır. Başka bir ifade ile $X = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix}$ ile $Y = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & \beta_3 \end{pmatrix}$ tipli iki noktanın komşu olması için ($X \,\square\, Y$) gerek ve yeter şart $\alpha_2 - \beta_2 \in I$ olmasıdır.

Benzer bir inceleme ile, $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & 1 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix}$ ile $\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & 1 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & \beta_3 \end{pmatrix}$ tipli iki noktanın her zaman komşu olacağı kolaylıkla görülebilir.

Şimdi $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & 1 \end{pmatrix}$ ile $Y = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & 1 \end{pmatrix}$ tipli iki noktanın komşu olma koşulunu bulmak istiyoruz. İlk nokta için aşağıdaki dört durum göz önüne alınmalıdır:

1) $\alpha_1, \alpha_2 \in U \Rightarrow a_1, a_2, a_3 \in U$

2) $\alpha_1 \in U \ \wedge \ \alpha_2 \in I \Rightarrow a_1, a_3 \in I \quad a_2 \in U$

3) $\alpha_1 \in I \ \wedge \ \alpha_2 \in U \Rightarrow a_2, a_3 \in I \quad a_1 \in U$

4) $\alpha_1, \alpha_2 \in I \ \Rightarrow a_1, a_2, a_3 \in I$

İkinci nokta için de aşağıdaki dört durum söz konusudur:

1) $\beta_1, \beta_2 \in U \Rightarrow b_1, b_2, b_3 \in U$

2) $\beta_1 \in U \ \wedge \ \beta_2 \in I \Rightarrow b_1, b_3 \in I \quad b_2 \in U$

3) $\beta_1 \in I \ \wedge \ \beta_2 \in U \Rightarrow b_2, b_3 \in I \quad b_1 \in U$

4) $\beta_1, \beta_2 \in I \ \Rightarrow b_1, b_2, b_3 \in I$

Böylece toplam on altı durumdan sadece birinde $X \times Y \in \mathbf{IJ}$ olup $X \,\square\, Y$ olmaktadır, o da $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ ve $\beta_1, \beta_2 \in I$ olması durumudur.

Böylece, "$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & 1 \end{pmatrix}$ ile $\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & 1 \end{pmatrix}$ tipli iki noktanın komşu olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2 \in I$ olmasıdır." sonucuna varılır.

İki noktanın komşu olması ile ilgili bulduğumuz tüm sonuçlar bir araya getirilerek aşağıdaki sonuç kolayca ifade edilir.

Sonuç 4.11:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & \beta_3 \end{pmatrix} = Y \Leftrightarrow \alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_3 - \beta_3 \in I \text{ dır.}$$

Doğrular kümesi üzerinde benzer bir inceleme yapılırsa benzer sonuçlar elde edilir.

Bir Noktanın Bir Doğruya Yakınlığı:

Bir X noktasının bir Y doğrusuna yakınlığı; (4.5) yardımıyla $T(X,Y)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+2\gamma_2\gamma_3 n(a_1,b_1)+2\gamma_3\gamma_1 n(a_2,b_2)+2\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3)$ elemanının I da olup olmadığına bakılarak belirlenecektir. Şayet $T(X,Y)\in I$ ise $X \sqsubset Y$ (yani X noktası Y doğrusuna yakın), aksi halde $X \not\sqsubset Y$ dir (yani X noktası Y doğrusuna yakın değildir) biçiminde ifade edilecektir.

İlk olarak; $X=\begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2} \\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \sqsubset \begin{bmatrix} 1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2} \\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix}=Y$ olup olmadığını incelemek istiyoruz. Bu durumda, $X\in\Pi$ olduğundan $\alpha_2\in R,\alpha_3\in I\wedge a_1,a_2\in\mathbf{I},a_3\in\mathrm{O}$ ($\alpha_2\in U$ iken $a_3\in\mathbf{U}$ ve $\alpha_2\in I$ iken $a_3\in\mathbf{I}$) dir ve $Y\in\Pi$ olduğundan $\beta_2\in I,\beta_3\in R\wedge b_1,b_3\in\mathbf{I},b_2\in\mathrm{O}$ ($\beta_3\in U$ iken $b_2\in\mathbf{U}$ ve $\beta_3\in I$ iken $b_2\in\mathbf{I}$) olduğunu biliyoruz. Böylece, $\alpha_1\beta_1=1\in U,\ \alpha_2\beta_2\in I,\ \alpha_3\beta_3\in I,\ \gamma_2\gamma_3 n(a_1,b_1)\in I,\ \gamma_3\gamma_1 n(a_2,b_2)\in I$ ve $\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3)\in I$ olduğundan $T(X,Y)\in U$ olur. Yani bu tip bir nokta ile bu tip bir doğru yakın olamaz, başka bir ifade ile bu tip bir doğru üzerinde olan ve bu tip noktaya komşu bir nokta mevcut değildir.

Şimdi $X=\begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2} \\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \sqsubset \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2} \\ \gamma_1\overline{b_3} & 1 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix}=Y$ olup olmadığını incelemek istiyoruz. Bu durumda $\beta_1\in R$, $\alpha_2\in R$, $\alpha_3\beta_3\in I$, $\gamma_2\gamma_3 n(a_1,b_1)\in I$, $\gamma_3\gamma_1 n(a_2,b_2)\in I$ ve $\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3)\in R$ olup $T(X,Y)\in I$ olma ihtimali mevcuttur yani bu tip bir nokta bu tip bir doğruya yakın olabilir.

$$X=\begin{pmatrix} 1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & 1 \end{bmatrix} = Y$$ olup olmadığını kontrol edelim. Bu durumda, $\beta_1 \in I$, $\alpha_2\beta_2 \in I$, $\alpha_3 \in I$, $\gamma_2\gamma_3 n(a_1,b_1) \in I$, $\gamma_3\gamma_1 n(a_2,b_2) \in I$ ve $\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3) \in I$ olup $T(x,y) \in I$ olur. O halde, bu tip tüm noktalar bu tip bir doğruya daima yakındır.

$$X=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & 1 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} 1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix} = Y$$ olup olmadığına bakalım. Bu durumda, $\alpha_1 \in I$, $\beta_2 \in I$, $\alpha_3\beta_3 \in I$, $\gamma_2\gamma_3 n(a_1,b_1) \in I$, $\gamma_3\gamma_1 n(a_2,b_2) \in I$ ve $\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3) \in I$ olup $T(x,y) \in I$ olur. O halde bu tip tüm noktalar bu tip bir doğruya daima yakındır.

$$X=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & 1 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & 1 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & \beta_3 \end{bmatrix} = Y$$ olup olmadığını kontrol edelim. Bu durumda, $\alpha_1\beta_1 \in I$, $\alpha_2\beta_2 = 1 \in U$, $\alpha_3\beta_3 \in I$, $\gamma_2\gamma_3 n(a_1,b_1) \in I$, $\gamma_3\gamma_1 n(a_2,b_2) \in I$ ve $\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3) \in I$ olup $T(x,y) \in U$ dur yani bu tip bir nokta bu tip bir doğruya asla yakın değildir.

$$X=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \overline{a_2} \\ \gamma_1 \overline{a_3} & 1 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \overline{a_1} & \alpha_3 \end{pmatrix} \sqcup \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3 \overline{b_2} \\ \gamma_1 \overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1 \\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2 \overline{b_1} & 1 \end{bmatrix} = Y$$ olup olmadığını görelim. Bu durumda, $\alpha_1\beta_1 \in I$, $\beta_2 \in I$, $\alpha_3 \in I$, $\gamma_2\gamma_3 n(a_1,b_1) \in I$, $\gamma_3\gamma_1 n(a_2,b_2) \in I$ ve $\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3) \in I$ olup $T(x,y) \in I$ olur. O halde bu tip tüm noktalar bu tip bir doğruya daima yakındır.

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & 1\end{pmatrix} \sqcup \begin{bmatrix}1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3\end{bmatrix}=Y$$ olup olmadığını inceleyelim. Bu durumda, $\alpha_1\in R$, $\alpha_2\beta_2\in I$, $\beta_3\in R$, $\gamma_2\gamma_3 n(a_1,b_1)\in I$, $\gamma_3\gamma_1 n(a_2,b_2)\in R$ ve $\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3)\in I$ olup $T(X,Y)\in I$ olma ihtimali mevcuttur yani bu tip bir nokta bu tip bir doğruya yakın olabilir.

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & 1\end{pmatrix} \sqcup \begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & 1 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & \beta_3\end{bmatrix}=Y$$ olup olmadığını kontrol edelim. Bu durumda, $\alpha_1\beta_1\in R$, $\alpha_2\in R$, $\beta_3\in R$, $\gamma_2\gamma_3 n(a_1,b_1)\in R$, $\gamma_3\gamma_1 n(a_2,b_2)\in R$ ve $\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3)\in R$ olup $T(X,Y)\in I$ olma ihtimali mevcuttur yani bu tip bir nokta bu tip bir doğruya yakın olabilir.

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3\overline{a_2}\\ \gamma_1\overline{a_3} & \alpha_2 & \gamma_3 a_1\\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2\overline{a_1} & 1\end{pmatrix} \sqcup \begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_2 b_3 & \gamma_3\overline{b_2}\\ \gamma_1\overline{b_3} & \beta_2 & \gamma_3 b_1\\ \gamma_1 b_2 & \gamma_2\overline{b_1} & 1\end{bmatrix}=Y$$ olup olmadığı görelim. Bu durumda, $\alpha_1\beta_1\in I$, $\alpha_2\beta_2\in I$, $\alpha_3\beta_3=1\in U$, $\gamma_2\gamma_3 n(a_1,b_1)\in I$, $\gamma_3\gamma_1 n(a_2,b_2)\in I$ ve $\gamma_1\gamma_2 n(a_3,b_3)\in I$ olup $T(x,y)\in U$ olur. O halde bu tip bir nokta bu tip bir doğruya asla yakın değildir.

Sonuç 4.12: Aynı tipten bir nokta ile doğru birbirine yakın değildir. Farklı tip nokta ve doğrular birbirine yakındır.

Son olarak, (Bix 1980) de Lemma 2.2 olarak verilen sonucun ispatını (Faulkner 1970, 2014) deki benzer sonuçlardan derlenerek aşağıda biçimde verebiliriz.

Lemma 4.13: $P(\Pi)=(\mathscr{N},\mathscr{D},\in,\square)$ octonion düzleminde $(A)\not\square(B)$ özelliğindeki iki noktadan geçen tek doğru $[A\times B]$ doğrusudur. Dual olarak, $[A]\not\square[B]$ özelliğindeki iki doğrunun tek arakesit noktası $(A\times B)$ noktasıdır.

İspat: Önce $A^{\#}=B^{\#}=0$ iken $(A\times B)^{\#}=0$ olduğunu görelim. $A^{\#}=B^{\#}=0$ iken Teorem 3.4 c) de $x=A$ ve $y=B$ alınırsa,

$$4\left[(A\times B)^{\#}\right]+2\left(A^{\#}\times B^{\#}\right)=T(A^{\#},B)B+T(B^{\#},A)A$$

eşitliğinden $4(A\times B)^{\#}=0$ yani $(A\times B)^{\#}=0$ dır. Üstelik, $A\times B\in\mathbf{J}-\mathbf{IJ}$ dir. Bu sebeplerden dolayı $[A\times B]\in\mathscr{D}$ dir. Şimdi, $(A)\in[A\times B]$ ve $(B)\in[A\times B]$ olduğu görelim. (3.11) de $x=A, y=A\times B$ ve $z=X$ olarak alınırsa

$$V_{A,A\times B}X=\frac{1}{2}T\left(A,A\times B\right)X+\frac{1}{2}T\left(X,A\times B\right)A-2\left(A\times X\right)\times\left(A\times B\right)$$

olur. Son eşitlikte T nin simetrikliği kullanılırsa

$$V_{A,A\times B}X=\frac{1}{2}T\left(A\times A,B\right)X+\frac{1}{2}T\left(X,A\times B\right)A-2\left(A\times X\right)\times\left(A\times B\right)$$

ve $A\times A=A^{\#}=0$ olduğundan

$$V_{A,A\times B}X=\frac{1}{2}T\left(X,A\times B\right)A-2\left(A\times X\right)\times\left(A\times B\right) \tag{4.9}$$

sonucuna varılır.

Teorem 3.4 d) de $x=A, y=X$ ve $z=B$ alınırsa,

$$8\left[(A\times X)\times(A\times B)\right]+4\left[A^{\#}\times(X\times B)\right]=T(A^{\#},X)B+T(A^{\#},B)X+2T(X\times B,A)A$$

olur. Bu son eşitlikte $A^{\#}=0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$8\left[(A\times X)\times(A\times B)\right]=2T(X\times B,A)A$$

ve böylece

$$2\left[(A\times X)\times(A\times B)\right]=\frac{1}{2}T(X\times B,A)A$$

bulunur ve T nin simetrikliğinden

$$2\left[(A\times X)\times(A\times B)\right]=\frac{1}{2}T(X,A\times B)A \tag{4.10}$$

sonucuna varılır. (4.10) daki sonuç (4.9) da kullanılırsa $V_{A,A\times B}X = 0$ yani $(A) \in [A \times B]$ olduğu görülür. Benzer biçimde, $(B) \in [A \times B]$ olduğu da kolayca görülebilir.

Son olarak, $(A) \neq (B)$ özelliğindeki bu iki noktayı birleştiren doğrunun tek olduğunu göstererek ispatı tamamlayalım. Bu iki noktayı birleştiren bir başka doğru $[U]$ olsun. Bu durumda, $(A) \in [U]$ olması bir önceki sonuç ve $\mathscr{N}$ ile $\mathscr{D}$ nin gösterim farkıyla eşit olduğu düşünülürse $A = U \times P$ olacak biçimde bir P elemanının varlığı, benzer biçimde $(B) \in [U]$ olmasının $B = U \times W$ olacak biçimde bir W elemanının varlığı görülür. Buradan $A \times B = (U \times P) \times (U \times W) \in \mathbf{J} - \mathbf{IJ}$ yazılabilir. (4.10) da $A = U, X = P$ ve $B = W$ alınırsa, $(U \times P) \times (U \times W) = \frac{1}{4} T(P, U \times W)U$ elde edilir. Son iki sonuç birleştirilirse, $A \times B = \frac{1}{4} T(P, U \times W)U$ yani $[A \times B] = [U]$ buluruz ki bu doğrunun tek olduğunu gösterir.

Γ standart invoulusyonu altında, $P(\Pi) = (\mathscr{N}, \mathscr{D}, \in, \square)$ octonion düzleminde herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta olarak $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ alınabilir.

Sonuç 4.14: $P(\Pi)$ octonion düzleminin bir epimorfizm altındaki görüntüsü bir projektif düzlemdir.

KAYNAKLAR

Akpınar, A. 2007. Geometrik Yapılarda Çifte Oran. *Doktora Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

Beachy, J.A. 1999. Introductory Lectures on Rings and Modules. London Mathematical Society Student Texts 47, Cambridge Univ. Press, UK, 238 pp.

Bix, R. 1980. Octonion planes over local rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 261(2): 417-438.

Bix, R. 1981. Isomorphism Theorems for Octonion Planes over Local Rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 266(2): 423-439.

Blyth, T.S., Robertson E.F. 2002. Further Linear Algebra. Springer, UK, 230 pp.

Çelik, B. 1995. Non-Assosyatif Cebirler Üzerine Kurulan Projektif Yapılar. *Doktora Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.

Çiftçi, S. 2015. Lineer Cebir. Dora Basın Yayın Dağıtım, Bursa, 430 s.

Elman, R., Karpenko, N., Merkurjev, A. 2008. The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms. Amer. Math. Soc., Colloguium Publications, 56: 443 pp.

Faulkner, J.R. 1969. Octonion Planes in characteristic two. *Bull. of The Amer. Math. Soc.*, 75: 980-983.

Faulkner, J.R. 1970. Octonion planes defined by quadratic Jordan algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 104: 71 pp.

Faulkner, J.R. 1988. Finding Octonion Algebras in Associative Algebras. *Proc. of The Amer. Math. Soc.*, 104(4): 1027-1030.

Faulkner, J.R. , 2014. The Role of Nonassociative Algebra in Projective Geometry. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 159, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 229 pp.

Fraleigh, J.B. 1982. A First Course in Abstract Algebra. Third Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 478 pp.

Freudenthal, H. 1951. Octaven, Ausnahmegruppen, und Octavengeometrie. Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, Utrecht.

Freudenthal, H. 1954. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. I. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A,* 57: 218-230.

Freudenthal, H. 1959. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. VIII. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A,* 62: 447-465.

Gürsoy, F., Tze, C.H. 1996. On the Role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics. World Scientific, USA, 480 pp.

Hungerford, T.W. 1974. Algebra. Holt Rinehart and Winston, Inc., New York, 502 pp.

Jacobson, N. 1966. Structure Theory for a Class of Jordan Algebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 55: 243-251.

Jacobson, N. 1968. Structure and Representations of Jordan Algebras. Colloq. Publ. 39, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 453 pp.

Jacobson N. 1969. Lectures on Quadratic Jordan Algebras. Lecture Notes. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 128 pp.

Jacobson, N. 1985. Basic Algebra I. Second Edition, W.H. Freeman and Company, New York, 499 pp.

Jonker, P. 1968. Restricted Lie Algebras over a Field of Characteristic 2, Dissertation, Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteir te Utrecht, Utrecht.

Jordan, P. 1949. Über Eine Nicht-Desarguessche Ebene Projektive Geometrie. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 16: 74-76.

Kaya, R. 2005. Projektif Geometri. Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No: 111, Eskişehir, 392 s.

Malik, D.S., Mordeson, J.M., Sen M.K. 1997. Fundementals of Abstract Algebra. The McGraw-Hill, New York, 636 pp.

McCrimmon, K. 1966. A General Theory of Jordan Rings. *Proc. Natl. Acad. Sci*., 56(4): 1072-1079.

McCrimmon K. 1969. The Freudenthal-Springer-Tits Constructions of Exceptional Jordan Algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 139: 495-510.

McCrimmon, K. 1971. Noncommutative Jordan Rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 158(1): 1-33.

McCrimmon, K. 1978. Jordan Alegbras and Their Applications. *Bull. of The Amer. Math. Soc.*, 84: 612-627.

McCrimmon, K. 2004. A Taste of Jordan Algebras. Springer, New York, 562 pp.

McDonald, B.R. 1976. Geometric Algebra over Local Rings. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 421 pp.

Moufang, R. 1933. Alternativekörper und der Satz vom vollstandigen Verseit. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 9: 207-222.

Okubo, S. 1995. Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics. Cambridge University Press, 136 pp.

Pickert, G. 1955. Projektive Ebenen. Springer, Berlin, 343 pp.

Pumplün, S. 2010. Symmetric Composition Algebras over Algebraic Varieties. *Manuscripta Math.*, 132: 307-333.

Racine, M.L. 1977. Point Spaces in Exceptional Quadratic Jordan Algebras. *Journal of Algebra*, 46: 22-36.

Schafer, R.D. 1959. On Cubic Forms Permitting Composition. *Proc. of The Amer. Math. Soc.*, 10(6): 917-925.

Schafer, R.D. 1996. An Introduction to Nonassociative Algebras. Dover Publications Inc., New York, 166 pp.

Springer, T.A. 1960. The Projective Octave Plane. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 63, Indag. Math., 22: 74-101.

Springer, T.A. 1962. Characterization of a Class of Cubic Forms. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 65: 259-265.

Springer, T.A. 1968. On Hjelmslev-Moufang Planes. *Math. Z.*, 107:249-263.

Springer, T.A. 1973. Jordan Algebras and Algebraic Groups. Springer, New York, 169 pp.

Springer, T.A., Veldkamp, F.D. 2000. Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups. VIII, Springer, New York, 208 pp.

Stevenson, F.W. 1972. Projective Planes. W. H. Freeman and Company, San Francisco, USA, 416 pp.

Thomas, E.G.F. 2014. A Polarization Identity for Multilinear Maps. *Indagationes Mathematicae,* 25: 468-474.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : İlknur ÖZKAN CANDAN
Doğum Yeri ve Tarihi : Bursa/ Yenişehir, 01/01/1989
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Yenişehir Ertuğrulgazi Anadolu Lisesi, 2003-2007
Üniversite : Uludağ Üniversitesi, 2008-2012
Techniqual University of Liberec, 2011

İletişim (e-posta) : ilknrozkn@gmail.com