

GRAF MATRİSLERİ VE ENERJİ

Çilem YAMAÇ



T. C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRAF MATRİSLERİ VE ENERJİ

Çilem YAMAÇ
0000-0001-6044-1578

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
(Danışman)
0000-0002-0700-5774

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2019

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Çilem YAMAÇ tarafından hazırlanan “Graf Matrisleri ve Enerji” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Başkan: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
0000-0002-0700-5774
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Doç. Dr. Musa DEMİRCİ
0000-0002-6439-8439
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye: Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ
0000-0003-2924-5397
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/09/2019

İmza

Çilem YAMAÇ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRAF MATRİSLERİ VE ENERJİ

Çilem YAMAÇ

Bursa Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (Bursa Uludağ Üniversitesi)

Bu çalışmanın amacı bazı graf matrisleri yardımıyla çeşitli graf sınıflarının karakteristik polinomlarının hesaplanması ve ayrıca kenar-Zagreb indekslerinin bulunmasıdır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. Temel tanım ve kavramlar ile sonraki bölümlerde kullanılacak bazı önemli sonuçlar burada verilmiştir. İkinci bölümde graflarda kenar komşuluğu kavramı yardımıyla kenar komşuluk matrisleri tanımlanmış ve bunlara karşılık gelen karakteristik polinomlar elde edilmiştir. Üçüncü bölümde bitişiklik matrisleri ve polinomları çalışılmış, dördüncü ve son bölümde ise kenar kavramına bağlı olarak tanımlanan ve köşe kavramına bağlı olarak tanımlanan haline oranla daha az çalışılmış olan kenar-Zagreb indeksleri ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Graf, graf indeksi, kenar-Zagreb matrisi, kenar-Zagreb indeksi

2019, vi + 38 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

GRAPH MATRICES AND ENERGY

Çilem YAMAÇ

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ismail Naci CANGUL (Bursa Uludag University)

The aim of this study is to calculate characteristic polynomials of several graph classes by means of some graph matrices and also to find edge-Zagreb indices.

There are four chapters in this thesis. In the first chapter, there is introduction to the thesis. Fundamental definitions and notions together with some important results which are necessary in the following chapters. In the second chapter, the edge-adjacency matrices are defined by means of the edge-adjacency idea and also the corresponding characteristic polynomials are obtained. In the third chapter, the incidence matrices and polynomials are considered, and in the fourth chapter, the edge-Zagreb indices which have been studied relatively less compared with the vertex-based counterpart are studied.

Key Words: Graph, graph index, edge-Zagreb matrix, edge-Zagreb index

2019, vi + 38 page

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca güleryüzü ile destek veren, cesaretlendiren sözleri ile daima yanımda olan, tavsiye ve deneyimleriyle bana yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e;

ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, benim için her türlü fedakarlığı yapan, başarıya ulaşacağıma beni inandıran canım aileme,

sonsuz teşekkürler...

Çilem YAMAÇ

26/09/2019

İÇİNDEKİLER

| | Sayfa |
|---|--------------|
| ÖZET | i |
| ABSTRACT | ii |
| ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR | iii |
| İÇİNDEKİLER | iv |
| SİMGELER DİZİNİ | v |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | vi |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. MATERYAL VE YÖNTEM | 7 |
| 3. GRAFLARDA KENAR KOMŞULUĞU | 8 |
| 4. BİTİŞİKLİK MATRİSLERİ VE POLİNOMLARI | 23 |
| 5. GRAFLARIN KENAR-ZAGREB MATRİSLERİ VE POLİNOMLARI | 26 |
| KAYNAKLAR | 37 |
| ÖZGEÇMİŞ | 38 |

SİMGELER DİZİNİ

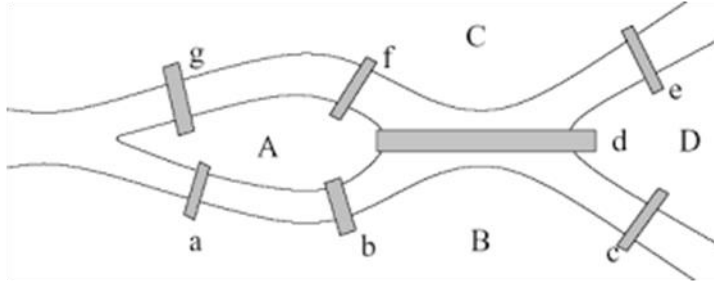
| Simgeler | Açıklama |
|-----------------|---------------------------|
| G | Graf |
| $V(G)$ | G grafının köşe kümesi |
| $E(G)$ | G grafının kenar kümesi |
| $d(u)$ | u köşesinin derecesi |
| K_n | n köşeli tam graf |
| C_n | n köşeli devir grafi |
| P_n | n köşeli yol grafi |
| S_n | n köşeli yıldız grafi |
| T_n | n köşeli ağaç grafi |
| $K_{r,s}$ | Tam iki parçalı graf |
| $T_{r,s}$ | $r+s$ köşeli larva grafi |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | |
|--|---|
| Şekil 1.1. Pregel Nehri | 1 |
| Şekil 1.2. Königsberg grafi..... | 2 |
| Şekil 1.3. 5 köşeli ve 7 kenarlı graf örneği..... | 2 |
| Şekil 1.4. Düzenli graf..... | 3 |
| Şekil 1.5. P_5 yol grafi | 4 |
| Şekil 1.6. C_4 Devir Grafi..... | 4 |
| Şekil 1.7. S_7 yıldız grafi | 4 |
| Şekil 1.8. K_5 tam grafi..... | 5 |
| Şekil 1.9. $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafi..... | 5 |
| Şekil 1.10. $T_{4,3}$ larva grafi..... | 6 |
| Şekil 3.1. G grafi..... | 6 |
| Şekil 3.2. Aynı komşuluk matrisine sahip izomorfik olmayan iki graf..... | 6 |

1. GİRİŞ

Graf Teorinin 1736 yılında Euler'in (1707-1783) yazdığı bir makale ile başladığı düşünülmektedir. Bu makale Königsberg Köprü Problemini çözebilen bir teoriyi içeriyordu. Königsberg kasabasının içinden akan Pregel nehrinin ortasında nehrin kıyılarına ve birbirine Şekil 1.1'deki gibi köprüler ile bağlı bir ada ve yarımada bulunmaktadır.



Şekil 1.1. Pregel Nehri

Buradaki problem

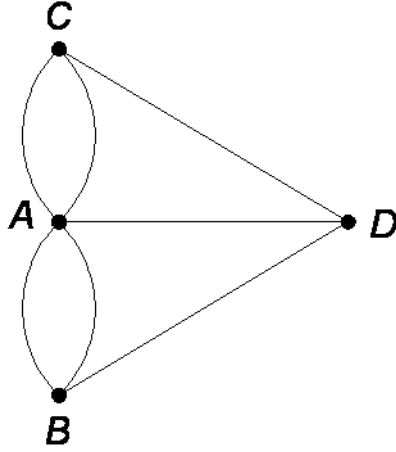
'Kıyıların veya adaların birinden başlayıp tüm köprülerden sadece birer kez geçerek başladığımız yere dönebilir miyiz?'

şeklindedir.

Euler bu problemi aşağıdaki grafa dönüştürerek problemin çözümünün olmadığını göstermiştir. Bu graf ile verilen problem

'Grafın tüm ayrıntılarını içeren kapalı bir yol var mıdır?'

haline dönüşmüştür.



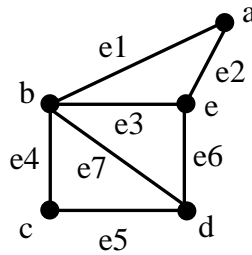
Şekil 1.2. Königsberg grafi

Aşağıdaki kısımda bu tezde kullanılacak olan bazı temel kavramları tanıyacağız. Bu kavramlarla ilgili daha geniş bilgi için Balakrishnan ve Ranganathan (2012), Berge (2001), Biggs ve Ark. (1986), Bondy ve Murty (2008), Bollobas (1998), West (1996), Chen (1976), Harary (1994), Foulds (1992), Golumbic ve Hartman (2005) ve Harris ve Ark. (2008) kaynaklarına başvurulabilir.

1.1. Tanım. V sonlu kümesinin elemanları *köşeler* (*vertex*) ve E sonlu kümesinin elemanları *kenarlar* (*edge*) olmak üzere kenar ve köşelerin sıralı olmayan ikililerini eleman kabul eden yapıya *graf* denir ve

$$G = (V, E)$$

ile gösterilir.



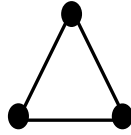
Şekil 1.3. 5 köşeli ve 7 kenarlı bir graf örneği

Şekil 1.3.'de verilen graf örneğinin köşe kümesi $V(G) = \{ a, b, c, d, e \}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$ 'dir.

1.2. Tanım. Bir G grafında bir u köşesini uç kabul eden kenar sayısına u köşesinin *derecesi (degree)* denir ve $d(u)$ ile gösterilir. Örneğin Şekil 1.3.'de $d(a) = 2$ ve $d(b) = 4$ 'tür.

1.3. Tanım. Bir G grafında bulunan v köşesi için $der(v) = 1$ ise bu köşeye *asılı veya sallanan köşe (pendant vertex)*; buna bitişik olan kenara da *asılı veya sallanan kenar (pendant edge)* denir.

1.4. Tanım. Bir G grafında bütün köşe dereceleri aynı ise bu grafa *düzenli (regular) graf* denir. Bir G grafının bütün köşelerinin dereceleri n ise bu grafa *n -düzenli (n -regular) graf* denir.



Şekil 1.4. 2-düzenli graf

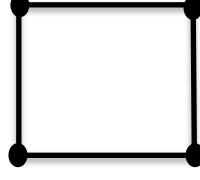
1.5. Tanım. Bir $G = (V, E)$ grafının bazı köşeleri $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ olsun. $i = 1, 2, \dots, k$ için $v_i v_{i+1} \in E$ dizisine G grafının bir *yolu (walk)* denir. Eğer bir yolun tüm köşeleri farklıysa bu yola *patika (path)* denir. n köşeli bir patika P_n ile gösterilir.



Şekil 1.5. P_5 yol grafı

Tez boyunca patika için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 2$ alınacaktır.

1.6. Tanım. n köşeye sahip bir G grafi kapalı bir patika ise, yani başlangıç ve bitiş noktaları aynıysa, bu grafa *devir (cycle) graf* denir ve C_n ile gösterilir.

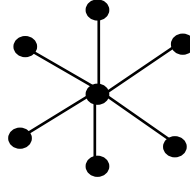


Şekil 1.6. C_4 devir grafi

Tez boyunca devir graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 3$ alınacaktır. Çünkü $n = 1$ ve $n = 2$ için $C_n = P_n$ 'dir.

1.7. Tanım. Merkezdeki bir köşenin diğer tüm köşelere bağlandığı bir grafa *yıldız (star) graf* denir ve S_n ile gösterilir.

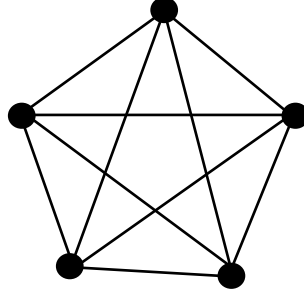
S_n grafında merkezdeki köşenin derecesi $n - 1$, diğer köşelerin dereceleri 1 olur.



Şekil 1.7. S_7 yıldız grafi

Tez boyunca yıldız graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 4$ alınacaktır. Çünkü $n = 1, 2, 3$ için $S_n = P_n$ 'dir.

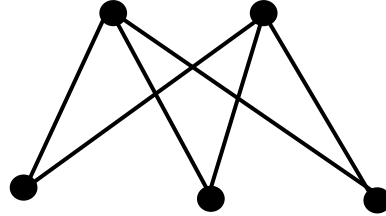
1.8. Tanım. Bir G grafindaki n köşenin her biri diğer köşelerin hepsi ile birer kenar oluşturuyorsa bu grafa *tam (complete) graf* denir ve K_n ile gösterilir.



Şekil 1.8. K_5 tam grafi

Tez boyunca tam graf için n köşe sayısı olmak üzere $n \geq 4$ alınacaktır. Çünkü $n = 1$ ve $n = 2$ için $K_n = P_n$ ve $n = 3$ için $K_n = C_n$ 'dir.

1.9. Tanım. Bir G grafının köşe kümesi A ve B gibi iki alt köşe kümesine ayrılabilir ve A (veya B) kümesindeki bir köşe sadece B (veya A) kümesindeki bir köşe veya köşeler ile birleşiyorsa bu grafa **iki parçalı (bipartite) graf** denir. Eğer A (veya B) kümesindeki her köşe B (veya A) kümesindeki her bir köşeye birleşiyorsa bu grafa da **tam iki parçalı (complete bipartite) graf** denir ve A kümesinin eleman sayısı r , B kümesinin eleman sayısı s olmak üzere $K_{r,s}$ ile gösterilir.



Şekil 1.9. $K_{2,3}$ tam iki parçalı grafi

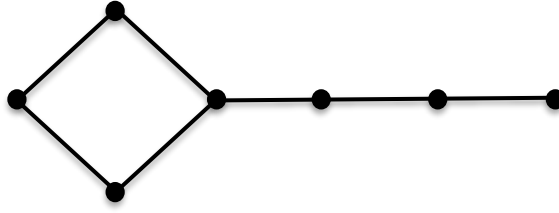
İki parçalı graflarda A ve B kümelerindeki köşelerin iki farklı renkle gösterilmesi alışılmış bir uygulamadır.

Tez boyunca r ve s köşe sayıları olmak üzere

$$s = \begin{cases} 2, & r = 2 \text{ iken} \\ \geq r, & r > 2 \text{ iken} \end{cases}$$

alınacaktır.

1.10. Tanım. Bir G grafının köşe kümesi A ve B gibi iki alt köşe kümesine ayrılabilirse ve A kümesindeki köşeler bir devir oluştururken, B kümesindeki köşeler bir patika oluşturuyorsa ve bu devirin bir köşesi ile patikanın bir uç köşesi ortak ise bu grafa **larva (tadpole) graf** denir. Devir kısmındaki köşe sayısı r , patika kısmındaki köşe sayısı s olan bir larva graf $T_{r,s}$ ile gösterilir.



Şekil 1.10. $T_{4,3}$ larva grafı

Tez boyunca $r \geq 3$ ve $s \geq 1$ alınacaktır. Çünkü diğer durumlarda $T_{r,s} = P_{r+s}$ olur.

1.11. Tanım. Bir G bağlantılı grafında, bir e kenarı ile bağlanan u ve v köşelerine **komşu (adjacent)** denir ve $e = uv$ ile gösterilir.

1.12. Tanım. G bağlantılı bir graf olmak üzere u ve v köşeleri bir e kenarı ile bağlantılı olsunlar. Bu e kenarı u ve v köşelerine **bitişiktir (incident)** denir.

1.13. Tanım. Bir G grafına ait komşuluk matrisinin tüm özdeğerlerinin kümesine **G grafının spektrumu** denir.

1.14. Tanım. A matrisi bir G grafına ait komşuluk matrisi olmak üzere $|A - \lambda I_n| = 0$ ifadesinin kökleri olan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sayılarına A matrisinin özdeğerleri denilir. Eşitliğin sol tarafı ile elde edilen polinoma G grafının **karakteristik polinomu** denir.

1.15. Tanım. Bir G bağlantılı grafında bir v köşesine bitişik olan iki e, f kenarına **komşu (adjacent) kenarlar** denilir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Lineer cebir, matematiğin Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi alt dalının en önemli çalışma alanlarından birisidir. Lineer cebir yöntemleri, matematiğin ve uygulamalarının var olduğu tüm bilim alanlarının vaz geçilmez yöntemleri arasındadır.

Herhangi bir matrisin determinanı yardımıyla oluşturulan karakteristik polinomun kökleri bize verilen matrisin öz değerleri adı verilen bazı sayıları vermektedir. Eğer verilen matris bir graf matrisi ise, bu öz değerlerin mutlak değerleri toplamı, graf enerjisi adı verilen ve birçok uygulamaları olan bir kavramı doğurmaktadır. Farklı graf matrislerine bağı olarak farklı graf enerjileri tanımlanmıştır.

Bu tezde lineer cebir metotları ve sonuçları kullanılarak bazı graf matrisleri yardımıyla çeşitli graf enerjileri çalışılmıştır. Bu enerjileri elde edebilmek için verilen matrislerin determinantları, satır-sütun operasyonları ve determinant özellikleri kullanılarak hesaplanmış, elde edilen karakteristik polinomların kökleri, yani öz değerler bulunarak bunlarla ilgili var olan sonuçlardan yararlanarak sonuçlar elde edilmiştir.

Graf enerjisi ile ilgili sonuçların elde edilmesinde aynı zamanda graf teorisinin ve kombinatorik teorisinin temel bazı sonuçlarından ve yöntemlerinden faydalanılmıştır.

3. GRAFLARDA KENAR KOMŞULUĞU

Bu bölümde en popüler graf matrisi olan komşuluk matrisine benzer olarak bir grafın kenar-komşuluk matrisini tanımlayacağız ve özelliklerini inceleyeceğiz. Bu bölümde elde edilen sonuçlar Yamaç ve Ark. (2018) ve Öz ve Ark. (2019)'da yayınlanmıştır.

İlk olarak bir grafın komşuluk matrisi kavramını hatırlayalım.

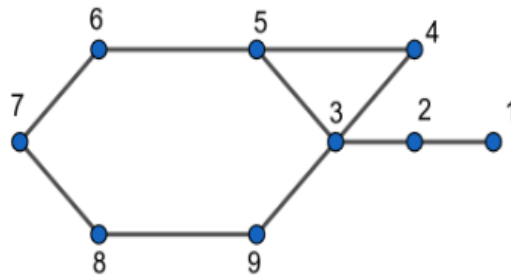
Tanım 3.1. G grafi n köşeli ve m kenarlı bağlantılı bir basit graf olsun. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ biçiminde gösterilen ve

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ ve } v_j \text{ köşeleri komşu ise} \\ 0, & v_i \text{ ve } v_j \text{ köşeleri komşu değil ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ boyutlu bir kare matris G grafının *köşe-komşuluk matrisi* denir.

Komşuluk matrisi graf teori ve moleküler kimyada birçok alanda kullanılır. Komşuluk matrisine ait öz değerlerin mutlak değerlerinin toplamı bir grafın enerjisini verir. Enerji kavramı, graf teoride birçok kimyasal yorumlamaya sahip olduğundan oldukça kullanışlı ve geniş uygulama alanına sahip bir kavramdır. Bu yüzden komşuluk matrisi ve komşuluk ile ilgili notasyonlar birçok alanda sıklıkla kullanılır. Bu tezde komşuluk matrisine alternatif olarak tanımlanan benzeri birkaç matris ile çalışacağız.

Örnek 3.1. Şekil 3.1'deki G grafını ele alalım.



Şekil 3.1. Bir G grafi

Bu G grafinin komşuluk matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi komşuluk matrisinin en önemli benzeri olan kenar-komşuluk matrisini tanımlayacak ve özelliklerini inceleyeceğiz. Hatırlanacağı gibi komşuluk matrisinde köşelerin birbirlerine komşu olup olmamalarına göre hareket edilmekteydi. Kenar-komşuluk matrisinde ise, görüleceği gibi kenarların birbirine komşu olmalarına göre hareket edilecektir.

Tanım 3.2. G grafi n köşeli ve m kenarlı bağlantılı bir basit graf olsun. G grafinin **kenar-komşuluk matrisi**

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & e_i \text{ ve } e_j \text{ kenarları komşu ise} \\ 0, & e_i \text{ ve } e_j \text{ kenarları komşu değil ise} \end{cases}$$

olmak üzere $A^e = [a_{ij}]_{m \times m}$ biçiminde tanımlanan bir $m \times m$ kare matrisidir.

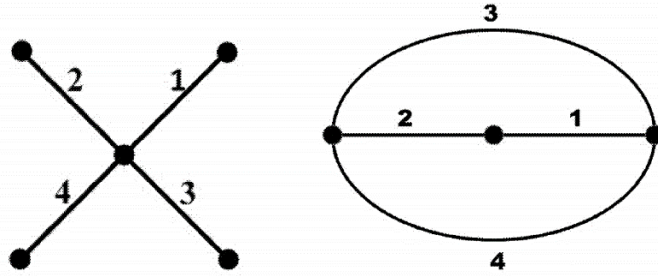
Örnek 3.2. Şekil 3.1'de 10 tane isimlendirilmiş kenara sahip bir G grafi ve altında da bu grafa ait kenar-komşuluk grafi verilmiştir. Bu grafin kenar-komşuluk matrisi

$$A^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

İzomorfik olmayan grafların komşuluk matrisleri farklı olmasına rağmen, kenar-komşuluk matrisleri aynı olabilir. Örneğin Şekil 3.2'deki grafların ikisi de aynı kenar-komşuluk matrisine sahiptir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.2. Aynı komşuluk matrisine sahip, izomorfik olmayan iki graf

Literatürde bir G grafi ile ilgili bir karakteristik özellikten, özdeğerlerden veya enerjiden bahsedildiğinde, $A(G)$ komşuluk matrisi ile çalışıldığı varsayılır. Başka bir matris kullanıldığında bu durum kesinlikle belirtilmelidir ve bu durumda kavramlar da uygun şekilde adapte edilmelidir. Örneğin kenar-komşuluk matrisiyle çalışıldığında elde edilen enerji artık kenar-komşuluk enerjisi olarak adlandırılacaktır.

Bu çalışmada A^e kenar-komşuluk matrisi ile ilgili karakteristik polinomlar ele alınmıştır. Kenar-komşuluk matrisinin karakteristik polinomunun hesaplanmasıyla elde edilen kenar-karakteristik polinomunu komşuluk karakteristik polinomundan ayırt etmek için $P_G^e(\lambda)$ ile göstereceğiz. Burada literatürde çok sık kullanılan bazı graf sınıfları için kenar-karakteristik polinomunu inceleyeceğiz. İlk olarak P_n patika grafi ele alınacaktır.

Teorem 3.1. P_n patika grafinin kenar-komşuluk matrisi kullanılarak elde edilen kenar-karakteristik polinomu için indirgeme bağıntısı

$$P_{P_n}^e(\lambda) = \lambda P_{P_{n-1}}^e(\lambda) - P_{P_{n-2}}^e(\lambda)$$

şeklindedir.

İspat. P_n patika grafinin kenar-komşuluk matrisi

$$A^e(P_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve karakteristik polinomu

$$|\lambda \cdot I - A^e(P_n)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

dir. Bu determinanı birinci satıra göre açarsak,

$$\begin{aligned}
|\lambda \cdot I - A^e(P_n)| &= \lambda P_{P_{n-1}}^e(\lambda) + 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda P_{P_{n-1}}^e(\lambda) - P_{P_{n-2}}^e(\lambda)
\end{aligned}$$

ve son determinanı birinci sütuna göre açtığımızda istenen eşitlik elde edilir.

Patika graflara ait ilk birkaç kenar-karakteristik polinom indirgeme bağıntısından kolayca elde edilebilir:

$$P_{P_3}^e(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

$$P_{P_4}^e(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda$$

$$P_{P_5}^e(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 - 1$$

$$P_{P_6}^e(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3 + 3\lambda.$$

Öncelikle P_n patika grafına ait kenar-karakteristik polinomu için bir formül elde edeceğiz.

Bunun için ilk olarak aşağıdaki sonuca ihtiyaç duyulmaktadır.

Lemma 3.1. $k \leq n$ özelliğindeki tüm k ve n pozitif tamsayıları için

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Kombinasyon sayılarının kombinatorik özellikleri kullanılarak aşağıdaki şekilde sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{n+1!}{(n+1-k)!k!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Teorem 3.2. $P_{P_n}^e(\lambda) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^l \binom{n-1-l}{l} \lambda^{n-1-2l}, n \text{ tek iken} \\ \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^l \binom{n-1-l}{l} \lambda^{n-1-2l}, n \text{ çift iken.} \end{cases}$

İspat. Kuvvetli tümevarım kullanalım. n tek olsun.

$$\begin{aligned}
P_{P_3}^e &= \lambda^2 - 1 \\
&= (-1)^0 \binom{2}{0} \lambda^2 + (-1)^1 \binom{1}{1} \lambda^0 \\
&= \sum_{l=0}^{\frac{3-1}{2}} (-1)^l \binom{3-1-l}{l} \lambda^{3-1-2l}.
\end{aligned}$$

Bu durum $3, 4, 5, \dots, n-1, n$ için doğru olsun. Biz bu durumun $n+1$ için doğru olduğunu ispatlamak istiyoruz.

Tümevarım hipotezinden dolayı,

$$\sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^l \binom{n-1-l}{l} \lambda^{n-1-2l} \text{ ve } \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^l \binom{n-2-l}{l} \lambda^{n-1-2l}$$

olduğunu biliyoruz. Lemma 3.1'den dolayı

$$P_{P_{n+1}}^e = \lambda P_{P_n}^e(\lambda) - P_{P_{n-1}}^e(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \left(\sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^l \binom{n-1-l}{l} \lambda^{n-1-2l} \right) - \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^l \binom{n-2-l}{l} \lambda^{n-2-2l} \\
&= \lambda [(-1)^0 \binom{n-1}{0} \lambda^{n-1} + (-1)^1 \binom{n-2}{1} \lambda^{n-3} + (-1)^2 \binom{n-3}{2} \lambda^{n-5} + (-1)^3 \binom{n-4}{3} \lambda^{n-7} \\
&+ \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1-\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \lambda^0] - [(-1)^0 \binom{n-2}{0} \lambda^{n-2} + (-1)^1 \binom{n-3}{1} \lambda^{n-4} + \\
&(-1)^2 \binom{n-4}{2} \lambda^{n-6} + (-1)^3 \binom{n-5}{3} \lambda^{n-8} + \dots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \binom{n-2-\frac{n-3}{2}}{\frac{n-3}{2}} \lambda^1 \\
&= (-1)^0 \binom{n-1}{0} \lambda^n + (-1)^1 \binom{n-1}{1} \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} \\
&= \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^l \binom{n-l}{l} \lambda^{n-2l}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi n çift olsun.

$$\begin{aligned}
P_{P_4}^e &= \lambda^3 - 2\lambda \\
&= (-1)^0 \binom{3}{0} \lambda^3 + (-1)^1 \binom{2}{1} \lambda \\
&= \sum_{l=0}^{\frac{4-2}{2}} (-1)^l \binom{4-1-l}{l} \lambda^{4-1-2l}.
\end{aligned}$$

Bu durum $3, 4, 5, \dots, n-1, n$ için doğru olsun. Biz bu durumun $n+1$ için doğru olduğunu ispatlamak istiyoruz. Tümevarım hipotezinden dolayı

$$\sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^l \binom{n-1-l}{l} \lambda^{n-1-2l} \text{ ve } \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^l \binom{n-2-l}{l} \lambda^{n-2-2l}$$

olduğunu biliyoruz. Lemma 3.1'den dolayı

$$\begin{aligned}
P_{P_{n+1}}^e &= \lambda P_{P_n}^e(\lambda) - P_{P_{n-1}}^e(\lambda) \\
&= \lambda \left(\sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^l \binom{n-1-l}{l} \lambda^{n-1-2l} \right) - \left(\sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^l \binom{n-2-l}{l} \lambda^{n-2-2l} \right) \\
&= (-1)^0 \binom{n-1}{0} \lambda^n + (-1)^1 \binom{n-1}{1} \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n-2}{2}}{\frac{n-2}{2}} \lambda^0 \\
&= (-1)^0 \binom{n}{0} \lambda^n + (-1)^1 \binom{n-1}{1} \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}} \lambda^0 \\
&= \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^l \binom{n-l}{l} \lambda^{n-2l}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.3. C_n devir grafının kenar-komşuluk matrisiyle elde edilen kenar-karakteristik polinomunun indirgeme bağıntısı

$$P_{C_n}^e(\lambda) = \lambda P_{P_n}^e(\lambda) - 2P_{P_{n-1}}^e(\lambda) - 2$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. Öncelikle

$$\begin{aligned}
P_{C_3}^e(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \lambda P_{P_3}^e(\lambda) + (-\lambda - 1) - (1 + \lambda)
\end{aligned}$$

$$= \lambda P_{P_3}^e(\lambda) - 2\lambda - 2$$

ve

$$P_{C_4}^e(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda P_{P_4}^e(\lambda) - P_{P_3}^e(\lambda) + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - P_{P_3}^e(\lambda)$$

$$= \lambda P_{P_4}^e(\lambda) - 2P_{P_3}^e(\lambda) - 1 - 1$$

$$= \lambda P_{P_4}^e(\lambda) - 2P_{P_3}^e(\lambda) - 2$$

olduğunu belirtelim. Benzer şekilde

$$P_{C_5}^e(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda P_{P_5}^e(\lambda) + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda P_{P_5}^e(\lambda) - P_{P_4}^e(\lambda) + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - P_{P_4}^e(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda P_{P_5}^e(\lambda) - 2P_{P_4}^e(\lambda) + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} - 1 \\
&= \lambda P_{P_5}^e(\lambda) - 2P_{P_4}^e(\lambda) - 1 - 1 \\
&= \lambda P_{P_5}^e(\lambda) - 2P_{P_4}^e(\lambda) - 2
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde devam edersek, ilk olarak birinci satıra göre determinant alınır. Buradan $P_{P_n}^e(\lambda)$ polinomu ile $P_{C_n}^e(\lambda)$ polinomunun alt matrisinden gelen iki determinant elde edilir. Daha sonra sırayla son matrisin birinci sütuna göre ve önceki matrisin birinci satıra göre determinantı alınır. Son matrisin determinantından, determinantı -1 olan bir üst üçgensel matris elde edilir ve diğer matris bize $-P_{P_{n-1}}^e(\lambda)$ ifadesini verir. Önceki matrisin determinantından $-P_{P_{n-1}}^e(\lambda)$ ve bir matris daha elde edilir. Bu şekilde devam edilerek sonunda $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}$ ifadesi elde edilir. Bu ifade -1 'e eşittir. Elde ettiğimiz terimlerin toplamı ise

$$P_{C_n}^e(\lambda) = \lambda P_{P_n}^e(\lambda) - 2P_{P_{n-1}}^e(\lambda) - 2$$

eşitliğini verir.

$P_{P_n}^e(\lambda)$ karakteristik polinomunun formülünü elde etmiştik. Şimdi de bu formülü kullanarak $P_{C_n}^e(\lambda)$ karakteristik polinomunun formülünü elde edebiliriz:

Teorem 3.4. C_n devir grafının kenar-karakteristik polinomunun formülü n çift iken

$$P_{C_n}^e(\lambda) = \lambda \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^l \binom{n-1-l}{l} \lambda^{n-1-2l} - 2 \sum_{l=0}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^l \binom{n-2-l}{l} \lambda^{n-2-2l} - 2$$

ve n tek iken

$$P_{C_n}^e(\lambda) = \lambda \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^l \binom{n-1-l}{l} \lambda^{n-1-2l} - 2 \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^l \binom{n-2-l}{l} \lambda^{n-2-2l} - 2$$

şeklindedir.

Aşağıdaki iki sonuç $P_{P_n}^e(\lambda)$ ve $P_{C_n}^e(\lambda)$ polinomlarının herbirisinin katsayılar toplamının 6 modunda özel bir forma sahip olduğunu kanıtlar:

Teorem 3.5.

$$P_{P_n}^e(1) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(6) \text{ ve } n \equiv 3(6) \\ 1, & n \equiv 1(6) \text{ ve } n \equiv 2(6) \\ -1, & n \equiv 4(6) \text{ ve } n \equiv 5(6) \end{cases}$$

Teorem 3.6.

$$P_{C_n}^e(1) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(6) \\ -1, & n \equiv 1(6) \text{ ve } n \equiv 5(6) \\ -3, & n \equiv 2(6) \text{ ve } n \equiv 4(6) \\ -4, & n \equiv 3(6) \end{cases}$$

Şimdi S_n yıldız grafına ait kenar-karakteristik polinomunu inceleyelim:

Teorem 3.7. S_n yıldız grafına ait kenar-karakteristik polinomunun indirgeme formülü

$$P_{S_n}^e(\lambda) = \lambda P_{S_{n-1}}^e(\lambda) - (n-2)(\lambda + 1)^{n-3}$$

şeklindedir.

İspat. n köşeli yıldız grafın kenar-komşuluk matrisi

$$A^e(S_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

formundadır. $A^e(S_n)$ matrisinin karakteristik polinomu

$$|\lambda I - A^e(S_n)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

şeklinde ifade edilir. Eğer determinant birinci satıra göre açılırsa $(n-2) \times (n-2)$ tipinde üç adet determinant elde edilir.

$$P_{S_n}^e(\lambda) = \lambda P_{S_{n-1}}^e(\lambda) + (-1)^{1+1}(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}(-1) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Daha sonra determinantlara elementer satır operasyonları uygulanırsa tüm determinantlar

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

haline dönüşür ve kolayca görülebilir ki bunların tümü aynıdır. O halde

$$P_{S_n}^e(\lambda) = \lambda P_{S_{n-1}}^e(\lambda) + (n-2) \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)}$$

elde edilir. Son determinanta $R_2 \rightarrow R_2 - R_1$, $R_3 \rightarrow R_3 - R_1, \dots, R_n \rightarrow R_n - R_1$ satır operasyonları uygulanırsa

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)}$$

formuna dönüşür. Bu ifade $(-1)(\lambda + 1)^{n-3}$ 'e eşittir. O halde

$$P_{S_n}^e(\lambda) = \lambda P_{S_{n-1}}^e(\lambda) - (n-2)(\lambda + 1)^{n-3}$$

elde edilir.

Teorem 3.8. S_n yıldız grafının kenar-karakteristik polinomu

$$P_{S_n}^e(\lambda) = [\lambda - (n - 2)](\lambda + 1)^{(n-2)}$$

şeklindedir.

İspat. n köşeli yıldız grafın kenar-komşuluk matrisine karşılık gelen determinant

$$P_{S_n}^e(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

olup $A^e(S_n)$ matrisinin kenar-karakteristik polinomu

$$|\lambda \cdot I - A^e(S_n)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

formundadır. Öncelikle $R_1 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_{n-1}$ satır operasyonlarını uygularsak determinant

$$\begin{vmatrix} \lambda - (n-2) & \lambda - (n-2) & \cdots & \lambda - (n-2) & \lambda - (n-2) \\ -1 & \lambda & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

halini alır. Daha sonra determinant özelliğinden

$$[\lambda - (n-2)] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & \lambda & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

ifadesi elde edilir ve $R_2 \rightarrow R_2 + R_1, R_3 \rightarrow R_3 + R_1, \dots, R_{n-1} \rightarrow R_{n-1} + R_1$ satır operasyonlarını uygularsak

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = (\lambda+1)^{(n-2)}$$

eşitliğine ulaşılır. Son olarak

$$P_{S_n}^e(\lambda) = [\lambda - (n-2)](\lambda+1)^{(n-2)}$$

elde edilir.

Aşağıdaki sonuçların ispatları yukarıda yapılanlara benzediğinden burada verilmeyecektir.

Teorem 3.9. $T_{r,s}$ larva grafına ait kenar-komşuluk matrisi ile elde edilen kenar-karakteristik polinomunun indirgeme bağıntısı

$$P_{T_{r,s}}^e(\lambda) = \begin{cases} \lambda P_{T_{r,s-1}}^e(\lambda) - P_{T_{r,s-2}}^e(\lambda), & s \neq 1 \text{ ve } s \neq 2 \\ \lambda P_{T_{r,s-1}}^e(\lambda) - P_{C_r}^e(\lambda) & , \quad s = 2 \\ \lambda P_{C_r}^e(\lambda) - 2P_{P_r}^e(\lambda) - 2P_{P_{r-1}}^e(\lambda) - 2, & s = 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 3.10. K_n tam grafına ait kenar-karakteristik polinomu

$$P_{K_n}^e(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 & , n = 3 \\ [\lambda - 2(n - 2)][\lambda - (n - 4)]^{n-1}(\lambda + 2)^{\binom{n}{2}-n}, & n \neq 3 \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 3.11. $K_{r,s}$ tam iki parçalı grafına ait kenar-karakteristik polinomu

$$P_{K_{r,s}}^e(\lambda) = (\lambda - s - r + 2)(\lambda - s + 2)^{r-1}(\lambda - r + 2)^{s-1}(\lambda + 2)^{(r-1)(s-1)}$$

şeklindedir.

Aşağıdaki sonuçlar kolayca daha önceki sonuçlardan elde edilebilir olup kenar-karakteristik polinomları ile (köşe-)karakteristik polinomları arasındaki bazı ilişkileri vermektedir ve ispatları açıktır:

Teorem 3.12. $P_{P_n}^e(\lambda) = P_{P_{n-1}}^v(\lambda)$.

Teorem 3.13. $P_{C_n}^e(\lambda) = P_{C_n}^v(\lambda)$.

Teorem 3.14. $P_{K_{r,1}}^e(\lambda) = P_{S_{r+1}}^e(\lambda)$.

Teorem 3.15. $P_{S_n}^e(\lambda) = P_{K_{n-1}}^v(\lambda)$.

4. BİTİŞİKLİK MATRİSLERİ VE POLİNOMLARI

Şimdiye kadar köşe-karakteristik ve kenar-karakteristik polinomlar ile çalıştık. Bilindiği üzere, bu polinomlar spektral graf teoride bir grafın enerjisinin hesaplanmasında önemli rol oynar. Bu iki kavram da komşuluk matrislerine dayalı olarak tanımlanmakta ve kullanılmaktadır. Bu bölümde ise farklı olarak bitişiklik polinomlarını ele alacağız. Bir G grafının bitişiklik polinomu $I_G(\lambda)$ ile gösterilecektir.

İlk bölümde bir G grafının bir kenarını $e = uv$ ile ifade edip, e kenarını u ve v köşelerine bitişik olarak adlandırmıştık. Bir G grafına ait $A^i(G) = [a_{ij}]_{m \times n}$ bitişiklik matrisi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ ve } e_j \text{ kenarları bitişik ise} \\ 0, & v_i \text{ ve } e_j \text{ kenarları bitişik değil ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Şimdi bitişiklik polinomlarına ait formülleri ve indirgeme bağıntılarını hesaplayacağız. Bir G grafının bitişiklik matrisi kare matris olmayabileceğinden tüm graflar için bitişiklik polinomu hesaplamak mümkün değildir. Bu sebeple bitişiklik matrisi kare olan polinomları hesaplayacağız.

Lemma 4.1. Bir matris A ve B matrisleri kare matrisler, 0 tüm elemanları 0 olan bir matris ve C uygun boyutlu herhangi bir matris olmak üzere aşağıdaki gibi dört blok matrise bölünürse

$$\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline C & B \end{array} \right]$$

matrisinin determinantı $|A||B|$ ifadesine eşit olur.

Lemma 4.1 sayesinde larva graflar için indirgeme bağıntısını elde edebiliriz.

Teorem 4.1. $T_{r,s}$ larva grafına ait bitişiklik polinomu

$$I_{T_{r,s}}(\lambda) = (\lambda - 1)^s I_{C_r}(\lambda)$$

bağıntısı ile elde edilir.

Buradaki $I_{C_r}(\lambda)$ polinomu aşağıda hesaplanacak olan devirli grafların bitişiklik polinomunu göstermektedir.

İspat. $T_{r,s}$ larva grafinin bitişiklik matrisi

$$a_{ij} \begin{cases} 1, i = j \text{ ise} \\ 1, i - j = 1 \text{ ise} \\ 1, i = s + 1, j = r + s \text{ ise} \\ 0, \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

formundadır. $A^i(T_{r,s})$ matrisini aşağıdaki gibi dört blok matrise bölersek

$$A^i(T_{r,s}) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right]$$

olur ve

$$|\lambda I - A^i(T_{r,s})| = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda-1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \lambda-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-1 \end{array} \right]$$

ifadesi elde edilir. Burada sol üstteki üst üçgensel matrisin determinanı $(\lambda - 1)^s$ ve alt sağ blok matrisin determinanı $I_{C_r}(\lambda)$ olur. Lemma 4.1'den dolayı

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^s I_{C_r}(\lambda)$$

elde edilir.

Aşağıda verilen iki sonuç benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 4.2. C_n devir grafına ait bitişiklik polinomu

$$I_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n - 1$$

bağıntısıyla elde edilir.

Teorem 4.3. $K_{2,2}$ tam-iki parçalı grafına ait bitişiklik polinomu

$$I_{K_{2,2}}(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda^2$$

bağıntısıyla elde edilir.

5. GRAFLARIN KENAR-ZAGREB MATRİSLERİ VE POLİNOMLARI

Graf matrislerinin cebirsel çalışılması graf teorisinin, moleküler yapıların kimyasal ve fiziksel özellikleri hakkında bilgi veren önemli bir alt alanıdır. Bu bölümde graf indekslerinden en çok kullanılanları arasında olan ve Zagreb indeksleri olarak adlandırılan indekslerden faydalanılarak elde edilen kenar-Zagreb matrisleri üzerinde çalışılmıştır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar Yamaç ve Ark. (2019)'da yayınlanmıştır.

$G = (V, E)$ grafı, $|V(G)| = n$ köşeli ve $|E(G)| = m$ kenarlı bir graf olsun. Hatırlanacağı gibi bir $v \in V(G)$ köşesinin derecesi d_v ya da $d_G(v)$ ile gösterilir. Ayrıca derecesi 1 olan bir köşe sallanan köşe olarak adlandırılır. Benzer şekilde bir sallanan köşeye sahip olan bir kenara da sallanan kenar denildiğini belirtmiştik. Bir G grafında u ve v köşeleri bir kenarı ile bağlı ise bu durum $e = uv$ ile gösterilmektedir. Bu durumda u ve v köşeleri komşudur ve e kenarı u ve v köşelerine bitişiktir denilmektedir.

Komşuluk ve bitişiklik ile ilgili matrislere ait çalışmalar, moleküler kimyaya yardımcı olup graf teorisinin iyi bilinen bir uygulamasıdır. Ayrıca graf teorisinin grafların enerjisi ile ilgilenen alt alanı olan spektral graf teorisinde lineer cebirsel metotlar ile bir grafın öz değerleri hesaplanarak bu değerler o grafa ait moleküler enerjinin bulunmasında kullanılır. Bu nedenle bazı kimyasal yapıların graf modellerinin spektral olarak çalışılmasında matrisler oldukça yardımcıdır.

Bir G grafı n köşeye ve m kenara sahip bağlantılı basit bir graf olsun. Bu G grafına ait kenar-Zagreb matrisi

$$a_{ij} = \begin{cases} d(v_i)d(v_j), & v_i \text{ ve } v_j \text{ köşeleri komşu ise} \\ 0, & v_i \text{ ve } v_j \text{ köşeleri komşu değil ise} \end{cases}$$

formundadır ve $ZM(G) = [a_{ij}]_{n \times n}$ ile gösterilir. Bu matrisler yardımıyla hesaplanan kenar-Zagreb polinomlarını $P_G^{ez}(\lambda)$ ile göstereceğiz. Bu polinomlar karakteristik polinomlardır ve polinomun kökleri kenar-Zagreb matrisinin öz değerleridir. Bu

özdeğerlerin mutlak değerlerinin toplamı ise kenar-Zagreb matrisine karşılık gelen grafin kenar-Zagreb enerjisini verir. Bu bölümde

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

formunda olan özel bir kare matris kullanılacaktır. Bu matris herhangi bir grafa karşılık gelmemesine rağmen hesaplamalarda sıkça kullanılacağından burada determinantını ve karakteristik polinomunu hesaplayacağız. n boyutlu bu matrisi Δ_n ile gösterelim. Bu matrise karşılık gelen karakteristik polinom ise $P_{\Delta_n}(\lambda)$ ile gösterilecek olup

$$P_{\Delta_n}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k 2^{4k} \binom{n-k}{n-2k} \lambda^{n-2k}$$

formunda olduğu kolayca hesaplanabilir.

İlk olarak P_n patika grafına ait kenar-Zagreb polinomu ele alınacaktır.

Teorem 5.1. $n \geq 4$ için,

$$P_{P_1}^{ez}(\lambda) = \lambda, P_{P_2}^{ez}(\lambda) = \lambda^2 - 1 \quad \text{ve} \quad P_{P_3}^{ez}(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda$$

olmak üzere, P_n patika grafının kenar-Zagreb matrisi kullanılarak elde edilen kenar-Zagreb polinomunun formülü

$$P_{P_n}^{ez}(\lambda) = \lambda^2 P_{\Delta_{n-2}}(\lambda) - 8\lambda P_{\Delta_{n-3}}(\lambda) + 16P_{\Delta_{n-4}}(\lambda)$$

formundadır.

İspat. P_n patika grafının kenar-Zagreb matrisi

$$ZM(P_n) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

formundadır. Dolayısıyla kenar-Zagreb polinomunu elde etmek için

$$P_{P_n}^{ez}(\lambda) = |\lambda I - ZM(P_n)| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & -4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -4 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplamak gerekir. $n = 1$ için tek boyutlu 0 matrisi ortaya çıkar; dolayısıyla $P_{P_1}^{ez}(\lambda) = \lambda$ elde edilir. $n = 2$ ve $n = 3$ için ispat açıktır. $n \geq 4$ olsun. $P_{P_n}^{ez}(\lambda)$ birinci satıra göre hesaplanırsa

$$|\lambda I - ZM(P_n)| = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda & -4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -4 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -4 & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

ifadesi elde edilir. İkinci determinant birinci sütuna göre açılırsa

$$+16 \begin{vmatrix} \lambda & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda & -4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -4 & \lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix} + (-4)\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda & -4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -4 & \lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix}$$

elde edilir. Bu ifadedeki ilk ve son determinant $(n-3) \times (n-3)$, ikinci determinant $(n-2) \times (n-2)$ ve son determinant $(n-4) \times (n-4)$ boyutludur. Sonuç olarak, P_n patika grafına ait kenar-Zagreb polinomu

$$P_{P_n}^{ez}(\lambda) = \lambda^2 P_{\Delta_{n-2}}(\lambda) - 8\lambda P_{\Delta_{n-3}}(\lambda) + 16P_{\Delta_{n-4}}(\lambda)$$

formundadır.

Şimdi C_n devir grafına ait kenar-Zagreb polinomu ele alınacaktır.

Teorem 5.2. C_n devir grafının kenar-Zagreb matrisi kullanılarak elde edilen kenar-Zagreb polinomunun formülü

$$P_{C_n}^{ez}(\lambda) = -2^{2n+1} - 32P_{\Delta_{n-2}}(\lambda) - \lambda P_{\Delta_{n-1}}(\lambda)$$

formundadır.

İspat. C_n devir grafının kenar-Zagreb matrisi

$$ZM(C_n) \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

formundadır. Dolayısıyla

$$|\lambda I - ZM(C_n)| = \begin{vmatrix} \lambda & -4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -4 \\ -4 & \lambda & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix}$$

ifadesi elde edilir. Bu matrisin determinanı son satıra göre hesaplanırsa

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+2} 4 \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -4 \\ \lambda & -4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{2n} 4 \begin{vmatrix} \lambda & -4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -4 \\ -4 & \lambda & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{2n} \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. İlk determinanı birinci satıra göre ve ikinci determinanı son sütuna göre açarsak sırasıyla boyutları $(n-2) \times (n-2)$, $(n-2) \times (n-2)$, $(n-2) \times (n-2)$, $(n-2) \times (n-2)$ ve $(n-1) \times (n-1)$ olan beş determinant elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} P_{C_n}^{ez}(\lambda) &= (-1)^{n+5} 16(-4)^{n-2} + (-1)^{2n+3} 16P_{\Delta_{n-2}}(\lambda) + (-1)^{3n+1} 16(-4)^{n-2} \\ &\quad + (-1)^{4n-1} 16P_{\Delta_{n-2}}(\lambda) + \lambda P_{\Delta_{n-1}}(\lambda) \\ &= -2^{2n+1} - 32P_{\Delta_{n-2}}(\lambda) - \lambda P_{\Delta_{n-1}}(\lambda) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi $T_{r,s}$ larva grafına ait kenar-Zagreb polinomu ele alınacaktır.

Teorem 5.3. $T_{r,s}$ larva grafına ait kenar-Zagreb matrisi kullanılarak elde edilen kenar-Zagreb polinomunun formülü

$$P_{T_{r,s}}^{ez}(\lambda) = \begin{cases} (\lambda^2 - 9)P_{\Delta_{r-1}}(\lambda) - 72\lambda P_{\Delta_{r-2}}(\lambda) - 9 \cdot 2^{2r-1}\lambda, & s = 1 \\ \lambda^2[\lambda P_{\Delta_{r-1}}(\lambda) - 72P_{\Delta_{r-2}}(\lambda) - 9 \cdot 2^{2r-1}] \\ -40\lambda P_{\Delta_{r-1}}(\lambda) + 288(P_{\Delta_{r-2}}(\lambda) + 2^{2r-4}), & s = 2 \\ \lambda P_{\Delta_{s-1}}(\lambda)[\lambda P_{\Delta_{r-1}}(\lambda) - 72P_{\Delta_{r-2}}(\lambda) - 9 \cdot 2^{2r-1}] \\ + P_{\Delta_{s-2}}(\lambda)[-40\lambda P_{\Delta_{r-1}}(\lambda) + 288(P_{\Delta_{r-2}}(\lambda) + 2^{2r-4})], & s > 2 \\ + P_{\Delta_{s-3}}(\lambda)[144P_{\Delta_{r-1}}(\lambda)] \end{cases}$$

formundadır.

İspat. $s = 1$ olsun. O halde

$$P_{T_{r,s}}^{ez}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda & -6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix}$$

determinantı elde edilir. Bu determinantı hesaplırsak

$$P_{T_{r,1}}^{ez}(\lambda) = (\lambda^2 - 9)P_{\Delta_{r-1}}(\lambda) - 72\lambda P_{\Delta_{r-2}}(\lambda) - 9 \cdot 2^{2r-1}\lambda$$

sonucu elde edilir. Şimdi $s = 2$ olsun. Bu durumda

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & \lambda & -6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & \lambda & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \dots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix}$$

determinantı elde edilir ve bu determinantı üçüncü satıra göre açarsak

$$\begin{aligned}
& 6 \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & \lambda & -4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \dots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \dots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix} \\
& + 6 \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \dots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{r+s+3}(-6) \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & \lambda & -4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \dots & \lambda & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu determinantları sırasıyla ikinci satıra, birinci satıra, üçüncü satıra ve son satıra göre açarsak ve Lemma 4.1 ile üst üçgensel matrisin özelliklerinden dolayı

$$\begin{aligned}
P_{T_{r,2}}^{ez}(\lambda) &= \lambda^2 [\lambda P_{\Delta_{r-1}}(\lambda) - 72\lambda P_{\Delta_{r-2}}(\lambda) - 9 \cdot 2^{2r-1}] - 40\lambda P_{\Delta_{r-1}}(\lambda) \\
&\quad + 288(P_{\Delta_{r-2}}(\lambda) + 2^{2r-4})
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $s \geq 3$ için

$$P_{T_{r,s}}^{ez}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & -4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4 & \lambda & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4 & \lambda & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -6 & \lambda & -6 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -6 & \lambda & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & \lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix}$$

determinantı elde edilir. Bu determinant hesaplandığında ise

$$\begin{aligned}
P_{T_{r,1}}^{ez}(\lambda) &= \lambda P_{\Delta_{s-1}}(\lambda) [\lambda P_{\Delta_{r-1}}(\lambda) - 72\lambda P_{\Delta_{r-2}}(\lambda) - 9 \cdot 2^{2r-1}] \\
&\quad - P_{\Delta_{s-2}}(\lambda) [-40\lambda P_{\Delta_{r-1}}(\lambda) + 288(P_{\Delta_{r-2}}(\lambda) + 2^{2r-4})] \\
&\quad + P_{s-3}(\lambda) [144P_{\Delta_{r-1}}(\lambda)]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi S_n yıldız grafi için kenar-Zagreb polinomunu hesaplayacağız.

Teorem 5.4. S_n yıldız grafına ait kenar-Zagreb matrisi kullanılarak elde edilen kenar-Zagreb polinomunun formülü

$$P_{S_n}^{ez}(\lambda) = \lambda^{n-2} [\lambda^2 - (n-1)^3]$$

formundadır.

İspat. S_n yıldız grafına ait kenar-Zagreb polinomunu hesaplamak için

$$P_{S_n}^{ez}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -(n-1) & \lambda & -(n-1) & -(n-1) & \cdots & -(n-1) & -(n-1) & -(n-1) \\ 0 & -(n-1) & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

determinantı hesaplanmalıdır. Eğer determinantı dört blok matrise ayırırsak sol üst matris 2×2 tipinde ve sağ üst matris $(n-2) \times (n-2)$ tipinde olur. Ayrıca

$$\frac{n-1}{\lambda} R_3 + R_2 \rightarrow R_2,$$

$$\frac{n-1}{\lambda} R_4 + R_2 \rightarrow R_2,$$

⋮

$$\frac{n-1}{\lambda} R_n + R_2 \rightarrow R_2,$$

elementer satır operasyonları uygulanırsa

$$\begin{vmatrix} \lambda & -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(n-1) & \lambda - \frac{(n-2)(n-1)^2}{\lambda} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

determinantı elde edilir. Bu determinantın hesaplanması ise bize

$$P_{S_n}^{ez}(\lambda) = \lambda^{n-2}[\lambda^2 - (n-1)^3]$$

sonucunu verir.

Benzer şekilde aşağıdaki sonuç elde edilebilir:

Teorem 5.5. K_n tam grafına ait kenar-Zagreb matrisi kullanılarak elde edilen kenar-Zagreb polinomunun formülü

$$P_{K_n}^{ez}(\lambda) = [\lambda - (n-1)^3][\lambda + (n-1)^2]^{n-1}$$

formundadır.

İspat. K_n tam grafına ait kenar-Zagreb polinomunu hesaplamak için

$$P_{K_n}^{ez}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -(n-1)^2 & -(n-1)^2 & \cdots & -(n-1)^2 \\ -(n-1)^2 & \lambda & -(n-1)^2 & \cdots & -(n-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(n-1)^2 & -(n-1)^2 & -(n-1)^2 & \cdots & -(n-1)^2 \\ -(n-1)^2 & -(n-1)^2 & -(n-1)^2 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

determinantına $R_1 + R_2 + \cdots + R_n \rightarrow R_1$ elemanter satır operasyonu uygulanırsa

$$[\lambda - (n-1)^3] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -(n-1)^2 & \lambda & -(n-1)^2 & \cdots & -(n-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(n-1)^2 & -(n-1)^2 & -(n-1)^2 & \cdots & -(n-1)^2 \\ -(n-1)^2 & -(n-1)^2 & -(n-1)^2 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca

$$(n - 1)^2 R_1 + R_2 \rightarrow R_2,$$

$$(n - 1)^2 R_1 + R_3 \rightarrow R_3,$$

⋮

$$(n - 1)^2 R_1 + R_n \rightarrow R_n,$$

satır operasyonları uygulanırsa

$$P_{K_n}^{ez}(\lambda) = [\lambda - (n - 1)^3][\lambda + (n - 1)^2]^{n-1}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi verilecek olan sonuç benzer şekilde kolayca ispatlanabilir:

Teorem 5.6. $K_{r,s}$ tam iki parçalı grafına ait kenar-Zagreb matrisi kullanılarak elde edilen kenar-Zagreb polinomunun formülü

$$P_{K_{r,s}}^{ez}(\lambda) = \lambda^{r+s-2}(\lambda^2 - r^3 s^3)$$

formundadır.

KAYNAKLAR

Balakrishnan, R., Ranganathan, K. 2012. A Textbook of Graph Theory, Springer, New York., 425 pp.

Berge, C. 2001. The Theory of Graphs, Fletcher & Son Ltd., UK.

Biggs, N. L., Lloyd, E. K., Wilson, R. J. 1986. Graph Theory 1736-1936, Oxford University Press, London.

Bollobas, B. 1998. Modern Graph Theory, Springer, New York.

Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 2008. Graph Theory, Springer, New York.

Chen, W. 1976. Applied Graph Theory, North-Holland Publishing Company, New York.

Foulds, L. R. 1992. Graph Theory Applications, Springer, New York.

Golumbic, M. C., Hartman, I. B. 2005. Graph Theory, Combinatorics and Algorithms, Springer, New York.

Harary, F. 1994. Graph Theory, Addison-Wesley, USA.

Harris, J. M., Hirst, J. L., Mossinghoff, M. J. 2008. Combinatorics and Graph Theory, Springer, New York.

Oz, M. S., Yamac, C., Cangul, I. N. 2019. Sum-edge characteristic polynomials of graphs. *Journal of Taibah University for Science*, 13 (1): 193-200.

West, D. B. 1996. Introduction to Graph Theory. Upper Saddle River, Prentice Hall.

Yamac, C., Oz, M. S., Cangul, I. N. 2018. Edge Adjacency in Graphs. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 21 (3): 357-373.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Çilem YAMAÇ
Doğum Yeri ve Tarihi : Aydın, 27/04/1991
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Menemen Anadolu Lisesi, 2005-2009
Lisans : Uludağ Üniversitesi, 2009-2015
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi, 2015-2019

İletişim (e-posta) : cilemyamac@hotmail.com