

**ÖKLİD UZAYINDA CONCHOID EĞRİLER VE  
YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU**

**S. Neslihan ORUÇ**



T.C.  
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÖKLİD UZAYINDA CONCHOID EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BİR  
KARAKTERİZASYONU**

**S. Neslihan ORUÇ**  
0000-0002-4052-2239

Doç. Dr. Betül BULCA  
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

**Her hakkı saklıdır.**

## TEZ ONAYI

S. Neslihan ORUÇ tarafından hazırlanan “ÖKLİD UZAYINDA CONCHOID EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Betül BULCA

**Başkan** : Prof. Dr. Kadri ARSLAN  
0000-0002-1440-7050  
Bursa Uludağ Üniversitesi,  
Fen Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Anabilim Dalı

İmza



**Üye** : Prof. Dr. Cumali EKİCİ  
0000-0002-3247-5727  
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi,  
Fen Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Anabilim Dalı

İmza



**Üye** : Doç. Dr. Betül BULCA  
0000-0001-5861-0184  
Bursa Uludağ Üniversitesi,  
Fen Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Anabilim Dalı

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN  
Enstitü Müdürü

..!..!..!

**U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

.../.../.....

**S. Neslihan ORUÇ**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### ÖKLİD UZAYINDA CONCHOID EĞRİLER VE YÜZEYLERİN BİR KARAKTERİZASYONU

**S. Neslihan ORUÇ**

Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

**Danışman:** Doç. Dr. Betül BULCA

Bu tez çalışmasında Öklid uzayındaki conchoid eğrileri ve yüzeyleri ele alınmıştır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan Öklid uzayındaki eğri ve yüzeylerle ilgili bazı temel tanımlar ve kavramlar ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde düzlemde ve 3-boyutlu uzayda conchoid eğrileri tanımlanmıştır. Ayrıca bu eğrilerin eğrilikleri hesaplanıp bunlarla ilgili sonuçlar verilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre bazı örnekler verilip grafikleri çizdirilmiştir.

Dördüncü bölümde 3 ve 4-boyutlu Öklid uzayında conchoidal yüzeyler çalışılmıştır. İlk olarak 3-boyutlu Öklid uzayında daha önceden verilen conchoidal yüzey tanımına bağlı olarak eğrilikleri ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu uzayda bir conchoid eğrisinin döndürülmesi ile elde edilen dönel yüzey ile ilgili sonuçlar verilip grafikleri çizdirilmiştir. Son olarak 4-boyutlu Öklid uzayındaki conchoidal yüzey tanımı verilip bu yüzeylerin düz ve minimal olmaları ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca 4-boyutlu uzayda rotasyonel yüzeyler ve meridyen yüzeylerinin conchoidal yüzey olması örnek olarak verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Conchoid, Pascal Limaçonu, dönel yüzey, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik

**2019, vi + 46 sayfa.**

## ABSTRACT

MSc Thesis

A CHARACTERIZATION OF CONCHOID CURVES AND SURFACES IN EUCLIDEAN SPACES

**S. Neslihan ORUÇ**

Bursa Uludağ University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

**Supervisor:** Assoc. Prof. Dr. Betül BULCA

In this thesis, conchoid curves and surfaces in Euclidean space are considered.

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is the introduction.

The second chapter contains some well-known definitions and terms about curves and surfaces in Euclidean space which will be used in other chapters.

In the third chapter, conchoid curves are defined on plane and 3- dimensional Euclidean space. Furthermore, the curvatures of these curves are calculated and the results are given. According to the results, some examples are given and plot their graphics.

In the fourth chapter, conchoidal surfaces are studied in 3 and 4- dimensional Euclidean space. Firstly, in the 3- dimensional Euclidean space, the results of the curvature of the conchoidal surface are obtained. Also, the results are given of the surface of revolution obtained by rotating a planar conchoid curve in 3- dimensional space and are plotted the graphics of the surface. Finally, the definition of the conchoidal surface in the 4- dimensional Euclidean space is given. Also some results are obtained that these surfaces become flat and minimal. In the last part the rotational surfaces in the 4- dimensional space and the meridian surfaces are conchoidal surfaces are given as examples.

**Key words:** Conchoid, Limacons Pascal, surface of revolution, Gaussian curvature, mean curvature

**2019, vi + 46 pages.**

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca derin bilgilerinden çokça yararlandığım, bu tez çalışmasının ortaya çıkışından son haline gelene kadar akademik bilgisiyle, hoşgörüsü, anlayışı ve sabrıyla her zaman yanımda olduğunu hissettiren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Betül BULCA'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Gerek lisans gerek yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN ve Sayın Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Beni bugünlere getiren, bu süreç boyunca desteğini hep hissettiren, bana gösterdikleri sevgi ve güvenle birçok zorluğu aşmamda yardımcı olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

S. Neslihan ORUÇ

.../.../.....

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ .....	1
2. KURAMSAL TEMELLER .....	4
2.1. $E^3$ de Eğriler .....	4
2.2. $E^n$ de Yüzeyler .....	5
3. CONCHOİD EĞRİLER.....	9
3.1. $E^2$ de Conchoid Eğriler .....	9
3.2. $E^3$ de Conchoid Eğriler .....	13
4. CONCHOİD YÜZEYLER .....	16
4.1. $E^3$ de Conchoidal Yüzeyler .....	16
4.2. $E^3$ de Düzlemsel Conchoid Eğrileri ile Elde Edilen Dönel Yüzeyler .....	22
4.3. $E^4$ deki Conchoidal Yüzeyler .....	27
4.4. $E^4$ de Yüzey Örnekleri.....	33
5. SONUÇLAR .....	40
KAYNAKLAR .....	41
EKLER.....	43
ÖZGEÇMİŞ .....	46



## SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\Gamma_{ij}^k$	Christoffel sembolleri
$M_d$	Conchoid yüzeyi
$\alpha$	Eğri
$\tau$	Frenet burulması
$\kappa$	Frenet eğriliği
$K$	Gauss eğriliği
$h$	İkinci temel form
$c_{ij}^k$	İkinci temel form katsayıları
$\nabla$	İndirgenmiş Riemann konneksiyon
$\chi^\perp(M)$	M nin normal vektör alanları uzayı
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanları uzayı
$E^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$N_i$	Normal vektörleri
$\bar{H}$	Ortalama eğrilik vektörü
$X$	Regüler yama
$\tilde{\nabla}$	Riemann konneksiyon
$M$	Yüzey
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	$\chi(M)$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 3.1. Conchoid eğrisinin geometrik yapısı .....	9
Şekil 3.2. Düzlemde eğriler ve conchoid eğrileri .....	12
Şekil 3.3. Düzlemde botanik eğrileri ve conchoid eğrileri.....	12
Şekil 3.4. Uzay eğrileri ve conchoid eğrileri.....	15
Şekil 4.1. Düzlem ve conchoidal yüzeyi .....	22
Şekil 4.2. Deniz kabuğu yüzeyi ve conchoidal yüzeyi.....	22
Şekil 4.3. Düz dönel yüzey ve conchoid yüzeyi .....	26
Şekil 4.4. Dönel yüzey ve conchoid yüzeyi .....	26



## 1. GİRİŞ

Conchoidin icadı M.Ö. 2. Yüzyılda Pappus ve diğerklasik yazarlar tarafından Nicomed'e atfedilmiştir. Eski genel verilere dayanarak conchoid eğrisi Nicomed tarafından bir açığı üçe bölmek için tasarlanmıştır. Uzun yıllar boyunca birçok matematikçiyi uğraştırmış olan bazı problemler vardır. Bunlar; küpün iki katına büyütülmesi, çemberin kareleştirilmesi, herhangi bir açının üç eşit parçaya bölünmesi gibi bazı problemlerdir. Bu problemlerin yalnız pergel ve cetvel kullanılarak çözülememesi üzerine birçok matematikçi bunlar üzerinde yıllarca çalışmalar yapmışlardır. Bu problemlerden birisi olan herhangi bir açının üç eşit parçaya bölünmesi olup bu problemi ilk ortaya atanlardan birisi Hippias olup problemin çözümü için yol gösteren Arşimet olmuştur. Birçok kaynağa göre de M.Ö. 200 lü yıllarda problemin çözümüne kaynak gösterilen Nicomed conchoidi olarak adlandırılan eğri Nicomed tarafından tasarlanmıştır. Pappus da bu eğriyi üç bölmede kullanmıştır. Conchoid kelimesi Yunanca kabuklu anlamına gelen "conch" kelimesinden türetilmiştir. Midye kabuğu şekli olarak da kaynaklarda geçmektedir. Ayrıca bazı yerlerde cochloid olarak da adlandırılır (Şentürk 1990), (Lockwood 1961). Bu eğri daha sonra 17. yüzyılda analitik geometri ve kalkülüsde yeni metotlara birer örnek olarak birçok matematikçi tarafından favori olmuştur. 1837 yılında Pierre Wantzel tarafından keyfi bir açının klasik yollarla üçe bölünemeyeceği ispatlanmıştır (Wantzel 1837). Problemin ortaya atılmasıyla birlikte birçok matematikçi tarafından merak edilen bu soru üzerine conchoid eğrilerine örnek olacak günümüzde de çokça bilinen birçok eğri elde edilmiştir. Bunlardan ilki Hippias ın kuadratriks eğrisi olup daha sonra bilinen Nicomed conchoidi, Pascal Limaçonu, sikloid eğrisi vb. en çok bilinen örneklerdir. Bir conchoid eğrisi düzlemsel bir eğri, sabit bir nokta ve sabit bir uzaklık yardımıyla elde edilir. Düzlemsel bir eğri üzerindeki hareketli bir noktadan sabit uzaklıkta bulunan doğru üzerindeki noktaların kümesi bu düzlemsel eğrinin conchoidini verir. Bir düz doğru ile elde edilen conchoid eğrisi Nicomed conchoidi ve bir çember ile elde edilen conchoid eğrisi ise Pascal Limaçonu olarak bilinir (Sendra ve Sendra 2008).

Conchoid eğrileri ile bilgiler birçok temel kaynak ve kitapta bulunabilir (Yates 1947, Lawrance 1972, Weisstein 2003, Gleaser ve ark. 2016). Conchoid eğrilerinin birçok uygulama alanları olduğu bilinmektedir. Özellikle binaların ve yapıların inşasında

conchoid eğrilerinden faydalanılmıştır. Albert Dürer'in "Underweysung der Messung" kitabında Limaçon eğrilerini üretmek için bazı metotlar verildiği görülebilir (Dürer 1525). Ayrıca bu eğriler fizik, astronomi, optik, elektromanyetik çalışmalar, biyoloji ve tıbbi mühendislikte uygulama alanları olarak kullanılmaktadır (Kerrick 1959, Azzam 1992, Sultan 2005).

Optik çalışmalarında bir koninin içindeki yansıma ve kırılmaların ilmekli bir eğri şeklinde hareket gösterdiği ve bu eğrinin de Nicomed conchoidi olduğu belirlenmiştir (Szmulowicz 1996). Buradaki yansıma geometrilerinin sayısı göz önüne alındığında bu çalışmaların sonuçlarının görüntüleme dışı optik alanında (ışık toplayıcı, ışın şekillendirici, reflektör vb.) uygulama bulabilmesi mümkün olmuştur. Ayrıca yine bu Nicomed conchoid eğrisi bir yansıtıcı olarak heliostat denilen sistemlerde kullanılmaktadır. Bir güneş yoğunlaştırıcı olarak adlandırılan bu heliostat sistemlerinde ortak düzlemde bulunan çok sayıda ayna ve yansıtma koluyla konumlandırılması bu conchoid eğrilerinden faydalanılarak yapılmış olup güneş ışığını ortak bir odak noktasına toplamak için kullanılır (Hickerson 2010). Bununla birlikte Nicomed conchoidi ve Pascal Limaçonun statik alanların ve yüksek frekanslı dalgaların birer sınır eğrisi olabileceğine dair çalışmalar yapılmıştır (Lin ve ark. 2001). Bunun dışında bu eğrilerle tıpta ve biyomedikalde insan kalça kemiği için çalışmalar yapılmıştır. Kalça kemiği tam bir küresel yapıya sahip olmadığından kemiğin birleştiği noktanın merkezini küre merkezi gibi düşünmek doğru olmayacaktır. Bu nedenle kemiğin girintisinin olduğu bölge bir conchoid yapı benzeri olduğundan bu bölgede oluşacak eklem rahatsızlıklarının MR görüntüleme ile çözümünde bu eğriler ve yüzeyler ele alınmıştır (Kang 2004, Menschik 1997).

Klasik anlamda conchoid yapının oluşturulması reel afin düzlemdeki eğriler için yapılmıştır. J.R. Sendra ve J. Sendra cebirsel bir conchoid eğri yapısından bahsetmiş ve bu eğrilerin cebirsel özelliklerini vermişlerdir (Sendra ve Sendra 2008). Daha sonra bu cebirsel eğrilerin rasyonel parametrelendirmelerini de vermişlerdir (Sendra ve Sendra 2010). Ayrıca düzlemsel iki eğrinin conchoid dönüşümü üzerinde çalışmışlar da yapılmıştır (Albano ve Roggero 2010). 3-boyutlu Minkowski uzayında uzay benzeri conchoid eğriler de M. Dede tarafından çalışılmıştır (Dede 2013). Ayrıca conchoid yüzey

kavramı da eğri kavramına dayandırılarak verilmiş olup kuadriklerin conchoid yüzeyleri, kürenin conchoidi, regle yüzeylerin conchoidleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır (Gruber ve Peternell 2013), (Peternell ve ark. 2013), (Peternell ve ark. 2011), (Peternell ve ark. 2015), (Odehnal ve Hamann 2012).

Bu tez çalışmasında da belirtilen kaynaklardaki tanımlara dayanarak düzlemsel conchoid eğrileri ve 3-boyutlu Öklid uzayındaki conchoid yüzeyleri ele alınmıştır. Bu eğriler ve yüzeylerin geometrik özelliklerini belirleyen eğrilikleri hesaplanmış ve bunlarla ilgili örnekler verilmiştir. Ayrıca dönel yüzeyler birde bu eğrilerle ele alınmış ve hesaplamalar yapılmıştır. Bunlara ek olarak 3-boyutlu uzayda conchoid eğrileri tanımlanmış ve eğrilikleri ile birlikte bazı örnekler verilmiştir. Ayrıca conchoid yüzey kavramı 4-boyutlu uzayda ele alınmış ve bu yüzeylerin düz ve minimal olma durumları ile ilgili bazı sınıflandırmalar verilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

### 2.1. $E^3$ de Eğriler

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayı  $E^3$  deki eğriler konusundan temel hatırlatmalar verilmiştir.

**Tanım 2.1.1.**  $V$  reel bir vektör uzayı  $A$  da  $V$  ile birleşen bir reel afin uzay olmak üzere  $V$  de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V \times V &\rightarrow R \\ (x, y) &\rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa  $A$  afin uzayına *Öklid uzayı* adı verilir ve  $E^n$  ile gösterilir (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.1.2.**  $I = (a, b) \subset R$  açık bir aralık olmak üzere,  $\alpha : I \rightarrow E^n$  diferensiyellenebilir fonksiyonuna  $E^n$  de bir eğri denir (O’neill 1997).

**Tanım 2.1.3.**  $\alpha : I \subset R \rightarrow E^3$  eğrisi verilsin.  $\forall s \in I$  için  $\|\alpha'(s)\| = 1$  ise  $\alpha$  ya birim hızlı eğri denir. Ayrıca  $\alpha' \neq 0$  ise  $\alpha$  ya regüler eğri adı verilir (O’neill 1997).

**Tanım 2.1.4.**  $\alpha : I \subset R \rightarrow E^3$  regüler bir eğri ve  $T = \alpha'$  bu eğrinin teğet vektör alanı olsun.  $T, N, B$ ,  $\alpha$  eğrisi üzerindeki her noktada birbirine dik olan üç vektör alanı olmak üzere,  $T, N, B$  üçlüsüne  $\alpha$  eğrisi üzerindeki Frenet çatısı denir ve

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}, \\ N(s) &= B(s) \times T(s), \\ B(s) &= \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|} \end{aligned} \quad (2.2)$$

eşitlikleri ile verilir. Burada  $T, N, B$  sırasıyla birim teğet, normal ve binormal vektörler olarak adlandırılır.

**Teorem 2.1.5.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  regüler eğrisi verilsin.  $\{T, N, B\}$ , bu eğrinin Frenet çatısı olmak üzere Frenet- Serret formülleri

$$\begin{aligned} T'(s) &= v(s)\kappa(s)N(s), \\ N'(s) &= v(s)(-\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)), \\ B'(s) &= -v(s)\tau(s)N(s) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dir. Burada,  $v(s) = \|\alpha'(s)\|$ ,  $\alpha$  eğrisinin hız fonksiyonudur. Ayrıca  $\kappa(s)$  ve  $\tau(s)$  Frenet eğrilikleri olup sırasıyla,

$$\kappa(s) = \frac{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3}, \quad (2.4)$$

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle}{\|\alpha'(s) \times \alpha''(s)\|^2} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill 1997).

**Açıklama.** Eğer  $\alpha$  eğrisi düzlemsel bir eğri ise,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin eğriliği,

$$\kappa(s) = \frac{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)}{((x'(s))^2 + (y'(s))^2)^{3/2}} \quad (2.6)$$

şeklinde hesaplanabilir.

## 2.2. $E^n$ de Yüzeyler

**Tanım 2.2.1.**  $M$  yüzeyi  $X(u, v) : (u, v) \in D \subset E^2 \rightarrow E^n$  yaması ile verilsin.  $M$  yüzeyinin keyfi seçilmiş bir  $p \in X(u, v)$  noktasındaki teğet uzayı  $T_p(M)$ ,  $\{X_u, X_v\}$  ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece  $M$  nin birinci temel formu

$$I = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 \quad (2.7)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle X_u, X_u \rangle, \\ g_{12} &= \langle X_u, X_v \rangle, \\ g_{22} &= \langle X_v, X_v \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

olup  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bir Öklid iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.8) yardımıyla

$$\|X_u \times X_v\|^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = W^2 \quad (2.9)$$



elde edilir. Eğer  $X_u \times X_v \neq 0$  ise  $X(u, v)$  yaması regülerdir.

$M \subset E^n$  yüzeyi  $X(u, v)$  regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun.  $E^n$  de Riemann koneksiyonu  $\tilde{\nabla}$  ile gösterilsin. Bu durumda her  $X, Y \in \chi(M)$  lokal vektör alanları için  $M$  yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu  $\nabla$  olmak üzere  $M$  nin ikinci temel form dönüşümü

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M) ; h(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \quad (2.10)$$

biçiminde tanımlanır ve Gauss denklemi olarak bilinir (Chen 1973). Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir.

$M \subset E^n$  yüzeyi  $X(u, v)$  regüler yaması ile verilsin.  $\forall X \in \chi(M)$  ve  $N \in \chi^\perp(M)$  için  $M$  nin şekil operatörü dönüşümü

$$A : \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) ; A_N X = -\tilde{\nabla}_X N + \nabla_X^\perp N \quad (2.11)$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $A_N X$ ,  $N$  ye karşılık gelen şekil operatörü ve  $\nabla^\perp$  ise  $\chi^\perp(M)$  normal demete ait normal koneksiyonudur. Herhangi  $X, Y \in \chi(M)$  için

$$\langle A_N X, Y \rangle = \langle h(X, Y), N \rangle \quad (2.12)$$

dir ve bu denklem Weingarten denklemi olarak bilinir (Chen 1973). Bu operatör self-adjoint ve 2-lineerdir.

**Tanım 2.2.2.**  $M$  yüzeyi  $X(u, v) : (u, v) \in D \subset E^2 \rightarrow E^n$  yaması ile verilsin.  $X(u, v)$  yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri  $X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}$  ve normal vektör alanları  $N_1, N_2, \dots, N_{n-2}$  olmak üzere  $M$  nin ikinci temel form katsayıları,  $1 \leq k \leq n-2$  için

$$\begin{aligned} c_{11}^k &= \langle X_{uu}, N_k \rangle, \\ c_{12}^k &= \langle X_{uv}, N_k \rangle, \\ c_{22}^k &= \langle X_{vv}, N_k \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır (Mello 2003).

**Teorem 2.2.3.**  $X(u, v) : (u, v) \in D \subset E^2 \rightarrow E^n$  regüler yaması ile verilen  $M \subset E^n$  yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu

$$K = \frac{1}{W^2} \sum_{k=1}^{n-2} (c_{11}^k c_{22}^k - (c_{12}^k)^2) \quad (2.14)$$

ve ortalama eğrilik vektör alanı

$$\bar{H} = \frac{1}{2W^2} \sum_{k=1}^{n-2} (c_{11}^k g_{22} + c_{22}^k g_{11} - 2c_{12}^k g_{12}) N_k \quad (2.15)$$

dir. Burada

$$H_k = \frac{1}{2W^2} (c_{11}^k g_{22} + c_{22}^k g_{11} - 2c_{12}^k g_{12}) \quad (2.16)$$

$M$  nin  $k$ -ıncı ortalama eğrilik fonksiyonudur. Bununla birlikte  $M$  nin ortalama eğrilik fonksiyonu  $H = \|\bar{H}\|$  dir (Mello 2003, 2009).

**Tanım 2.2.4.**  $M \subset E^n$  yüzeyi  $X(u, v)$  regüler yaması ile verilsin. Bu durumda  $M$  nin *Christoffel sembolleri*  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $1 \leq i, j, k \leq 2$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{g_{22}(g_{11})_u - 2g_{12}(g_{12})_u + g_{12}(g_{11})_v}{2W^2}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2g_{11}(g_{12})_u - g_{11}(g_{11})_v - g_{12}(g_{11})_u}{2W^2} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{g_{22}(g_{11})_v - g_{12}(g_{22})_u}{2W^2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{g_{11}(g_{22})_u - g_{12}(g_{11})_v}{2W^2} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2g_{22}(g_{12})_v - g_{22}(g_{22})_u - g_{12}(g_{22})_v}{2W^2}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{g_{11}(g_{22})_v - 2g_{12}(g_{12})_v + g_{12}(g_{22})_u}{2W^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  ve  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$  dir (Gray 1997).

**Önerme 2.2.5.**  $M$  yüzeyi  $X : U \subset R^2 \rightarrow E^n$  regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde  $\forall X_u, X_v \in \mathcal{X}(M)$  ve  $N_1, N_2, \dots, N_{n-2} \in \mathcal{X}^\perp(M)$  için

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \tilde{\nabla}_{X_u} X_u = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + c_{11}^1 N_1 + c_{11}^2 N_2 + \dots + c_{11}^{n-2} N_{n-2}, \\ X_{uv} &= \tilde{\nabla}_{X_u} X_v = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + c_{12}^1 N_1 + c_{12}^2 N_2 + \dots + c_{12}^{n-2} N_{n-2}, \\ X_{vv} &= \tilde{\nabla}_{X_v} X_v = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + c_{22}^1 N_1 + c_{22}^2 N_2 + \dots + c_{22}^{n-2} N_{n-2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

dir (Gray 1997).

Böylece (2.18), (2.11) ve (2.12) denklemleri yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 2.2.6.**  $M$  yüzeyi  $X : U \subset R^2 \rightarrow E^n$  regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} h(X_u, X_u) &= c_{11}^1 N_1 + c_{11}^2 N_2 + \dots + c_{11}^{n-2} N_{n-2}, \\ h(X_u, X_v) &= c_{12}^1 N_1 + c_{12}^2 N_2 + \dots + c_{12}^{n-2} N_{n-2}, \\ h(X_v, X_v) &= c_{22}^1 N_1 + c_{22}^2 N_2 + \dots + c_{22}^{n-2} N_{n-2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

dir (Bulca 2013).

**Sonuç 2.2.7.**  $M$  yüzeyi  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow E^n$  regüler yaması ile verilsin. Bu takdirde

$$\begin{aligned} h(X_u, X_u) &= X_{uu} - \Gamma_{11}^1 X_u - \Gamma_{11}^2 X_v, \\ h(X_u, X_v) &= X_{uv} - \Gamma_{12}^1 X_u - \Gamma_{12}^2 X_v, \\ h(X_v, X_v) &= X_{vv} - \Gamma_{22}^1 X_u - \Gamma_{22}^2 X_v \end{aligned} \quad (2.20)$$

dir (Bulca 2013).

**Sonuç 2.2.8.**  $X(u, v)$  yüzeyi  $X(u, v) : (u, v) \in D \subset E^2 \rightarrow E^n$  regüler yaması ile verilsin.

Bu takdirde  $T_p(M)$  nin bir  $\{X_u, X_v\}$  bazı için  $M$  nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{1}{W^2} (\langle h(X_u, X_u), h(X_v, X_v) \rangle - \langle h(X_u, X_v), h(X_u, X_v) \rangle) \quad (2.21)$$

dir (Bulca 2013).

**Sonuç 2.2.9.**  $M \subset E^n$  yüzeyi  $X(u, v) : (u, v) \in D \subset E^2 \rightarrow E^n$  regüler yaması ile verilsin.

Bu takdirde  $\mathcal{X}(M)$  nin bir  $\{X_u, X_v\}$  bazı için  $M$  nin ortalama eğrilik vektörü

$$H = \frac{1}{2W^2} (g_{11}h(X_v, X_v) - 2g_{12}h(X_u, X_v) + g_{22}h(X_u, X_u)) \quad (2.22)$$

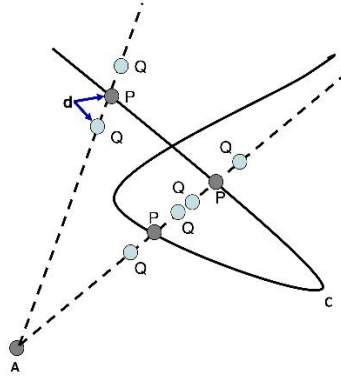
dir (Bulca 2013).

### 3. CONCHOID EĞRİLER

Bu bölümde Öklid uzayındaki düzlemsel eğriler ve conchoid eğrileri ele alınmıştır. Düzlemde verilen bir eğrinin ve bunun conchoid eğrisinin eğrilikleri hesaplanmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlarla ilgili örnekler verilip eğrilerin grafikleri çizdirilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu Öklid uzayında conchoid eğrileri tanımlanmıştır. Bu eğrilerin ve bunların conchoid eğrilerinin eğrilikleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre verilen eğri örnekleri için eğrilerin ve conchoidlerinin grafikleri çizdirilmiştir.

#### 3.1. $E^2$ de Conchoid Eğriler

Bir eğrinin conchoid eğrisinin yapısının oluşturulması bilinen bir kavramdır ve eski Yunanlılara kadar dayanmaktadır. Bir conchoid eğrisi düzlemsel bir eğri, sabit bir nokta ve sabit bir uzaklık yardımıyla elde edilir.  $C$  düzlemsel bir eğri (profil eğrisi),  $A$  düzlemde sabit bir nokta (odak noktası) ve  $d$  sabit bir uzaklık olsun.  $C$  eğrisi üzerindeki hareketli  $P$  noktasından  $d$  uzaklıkta bulunan  $AP$  doğrusu üzerindeki  $Q$  noktalarının kümesi  $C$  eğrisinin conchoidini verir (Şekil 3.1). Bilinen iki klasik conchoid Nicomedes conchoidi ve Pascal Limaçonu dur. Burada profil eğrileri sırasıyla düz bir doğru ve çemberdir (Sendra ve Sendra 2008, 2010).



Şekil 3.1. Conchoid eğrisinin geometrik yapısı

Bu eğrilerin analitik gösteriminde kolaylık olması açısından odak noktası  $A = (0,0)$  orijin noktası olarak alınabilir. Ayrıca conchoid eğrileri polar koordinatlarda da aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım 3.1.1.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^2$  düzlemsel bir eğri ve polar koordinatlardaki gösterimi de  $c(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$  olsun.  $C$  eğrisinin conchoidi olan  $D$  eğrisi  $d(t) = (r(t) \pm d)(\cos t, \sin t)$  olarak tanımlansın. Böylece  $C$  ve conchoidi olan  $D$  eğrileri sırasıyla

$$c(t) = r(t)k(t) \quad (3.1)$$

ve

$$d(t) = (r(t) \pm d)k(t) \quad (3.2)$$

ile gösterilir. Burada,  $k(t)$  eğrisi,  $S^1$  birim çemberinin bir parametrelendirmesi olmak üzere  $\|k(t)\| = 1$  dir (Peternell ve ark. 2011).

Böylece, düzlemde verilen bir eğri ve conchoid eğrisi ile ilgili aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Önerme 3.1.2.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^2$  eğrisi (3.1) parametrelendirmesi ile verilen bir eğri olmak üzere  $c(t)$  eğrisinin eğriliği  $\kappa(t)$ ,

$$\kappa(t) = \frac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}} \quad (3.3)$$

dir.

**İspat.** (3.1) parametrelendirmesi ile verilen  $C$  eğrisinin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} c'(t) &= (r' \cos t - r \sin t, r' \sin t + r \cos t), \\ c''(t) &= (r'' \cos t - 2r' \sin t - r \cos t, r'' \sin t + 2r' \cos t - r \sin t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. Bu türevler (2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

**Önerme 3.1.3.**  $d : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^2$  eğrisi,  $c$  eğrisinin (3.2) parametrelendirmesi ile verilen conchoid eğrisi olsun. O halde,  $d(t)$  eğrisinin eğriliği,

$$\kappa_d(t) = \frac{2(r')^2 - (r \pm d)r'' + (r \pm d)^2}{((r \pm d)^2 + (r')^2)^{3/2}} \quad (3.5)$$

dir.

**İspat.** (3.2) parametrelendirmesi ile verilen  $d$  eğrisinin birinci ve ikinci türevleri alınır

$$\begin{aligned}d'(t) &= (r' \cos t - (r \pm d) \sin t, r' \sin t + (r \pm d) \cos t), \\d''(t) &= (r'' \cos t - 2r' \sin t - (r \pm d) \cos t, r'' \sin t + 2r' \cos t - (r \pm d) \sin t)\end{aligned}\quad (3.6)$$

elde edilir. Benzer şekilde, bu türevler (2.6) eşitliğinde kullanılırsa (3.5) bulunur.

**Sonuç 3.1.4.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^2$  eğrisi (3.1) parametrelendirmesi ile verilen bir eğri olsun.

Eğer  $c$  düz bir doğru ise  $r(t) = \frac{1}{c_1 \sin t - c_2 \cos t}$  dir.

**İspat.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^2$  eğrisi (3.1) eşitliğindeki polar koordinatlarla verilmiş düzlemsel bir eğri olsun.  $c$  eğrisi düz bir doğru ise  $\kappa(t) = 0$  olup (3.3) eşitliğinden  $2(r')^2 - rr'' + r^2 = 0$  bulunur. Böylece bu diferensiyel denklemin çözümünden istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.1.5.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^2$ , (3.1) parametrelendirmesi ile verilen bir eğri olsun. Eğer  $c$

birim hızlı bir eğri ise,  $\left(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right)$  merkezli bir  $\frac{1}{2}$  yarıçaplı çemberdir. Burada,  $c_1^2 + c_2^2 = 1$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  dir.

**İspat.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^2$  eğrisi (3.1) eşitliğindeki polar koordinatlarla verilmiş düzlemsel bir eğri olsun.  $c$  eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere,  $\|c'(t)\|^2 = r^2 + (r')^2 = 1$  dir. Bu diferensiyel denklemin çözümünden  $r(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$  elde edilir. Burada,  $c_1^2 + c_2^2 = 1$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  dir. Böylece,  $c$  eğrisi,  $\left(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right)$  merkezli  $\frac{1}{2}$  yarıçaplı bir çemberdir.

Burada çemberin conchoid eğrisi ile ilgili aşağıdaki sonuç verilir (Glaeser ve ark. 2016).

**Teorem 3.1.6.** Pascal'ın limaçonu bir çemberin conchoididir.

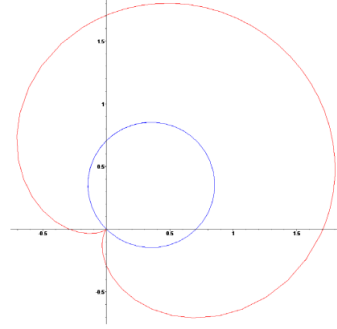
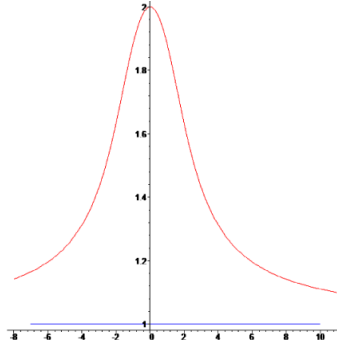
Aşağıda bu sonuçlarla ilgili örnekler verilmiş ve grafikleri çizdirilmiştir.

### Örnek 3.1.7.

1)  $c$  düz bir doğru olsun. O halde,  $r(t) = \frac{1}{\sin t}$  alınırsa  $c(t) = \frac{1}{\sin t}(\cos t, \sin t)$  dir ve  $c$  eğrisinin conchoid eğrisi  $d(t) = \left(\frac{1}{\sin t} \pm d\right)(\cos t, \sin t)$  olur (Nicomedes'in conchoidi).

(Şekil 3.2a).

2)  $c$  eğrisi bir çember olsun. O halde,  $c(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \sin t)(\cos t, \sin t)$  ve  $c$  eğrisinin conchoidi  $d(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \sin t) \pm d\right)(\cos t, \sin t)$  dir (Pascal'ın Limaçonu). (Şekil 3.2b)

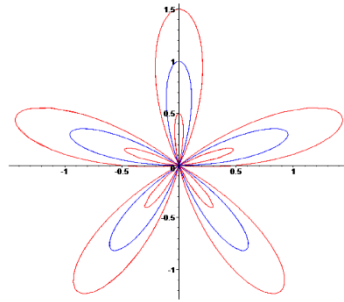


a)  $d = 1$  için düz doğru ve conchoidi

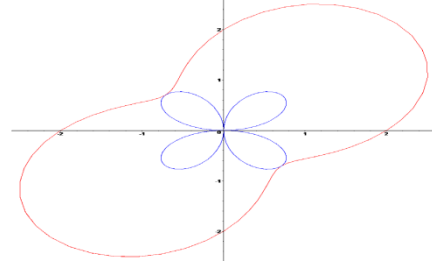
b)  $d = -1$  için çember ve conchoidi

Şekil 3.2. Düzlemde eğriler ve conchoid eğrileri

3)  $r(t)$  fonksiyonu,  $r(t) = \sin at$ ,  $a \in R$ , olsun. O halde,  $c(t) = \sin at(\cos t, \sin t)$  ve conchoid eğrisi  $d(t) = (\sin at \pm d)(\cos t, \sin t)$  'dir. (Şekil 3.3a,b)



a)  $a = 5$ ,  $d = \frac{1}{2}$



b)  $a = 2$ ,  $d = 2$

Şekil 3.3. Düzlemde botanik eğrileri ve conchoid eğrileri

Bu örneklerde  $c$  eğrisi mavi ile conchoidi olan  $d$  eğrisi ise kırmızı ile gösterilmiştir.

### 3.2. $E^3$ de Conchoid Eğriler

**Tanım 3.2.1.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  bir uzay eğrisi olmak üzere polar koordinatlardaki gösterimi de  $c(t) = r(t)(\sec ht, \cos t \tanh t, \sin t \tanh t)$  olsun.  $C$  eğrisinin conchoidi olan  $D$  eğrisi  $d(t) = (r(t) \pm d)(\sec ht, \cos t \tanh t, \sin t \tanh t)$  olarak tanımlansın. Böylece  $C$  ve conchoidi olan  $D$  eğrileri sırasıyla

$$c(t) = r(t)\alpha(t) \quad (3.7)$$

ve

$$d(t) = (r(t) \pm d)\alpha(t) \quad (3.8)$$

ile gösterilir. Burada,  $\alpha(t)$  eğrisi,  $S^2$  birim küresi üzerinde birim hızlı bir egridir. Yani  $\|\alpha(t)\| = \|\alpha'(t)\| = 1$  dir.

Böylece, 3-boyutlu uzayda verilen bir eğri ve conchoid eğrisi ile ilgili aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Önerme 3.2.2.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir uzay eğrisi olsun. O halde,  $c(t)$  eğrisinin eğriliği  $\kappa(t)$ ,

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{\cosh^2 t((r^2 - rr'')(r^2 - rr'' + 4(r')^2) + 4(r')^4) + 4r^2(r^2 + (r')^2)}}{\cosh t(r^2 + (r')^2)^{3/2}} \quad (3.9)$$

dir.

**İspat.** (3.7) parametrelendirmesi ile verilen  $c$  eğrisinin birinci ve ikinci türevleri alınıp (2.4) eşitliğinde yerine yazıldığında (3.9) eşitliği bulunmuş olur.

**Önerme 3.2.3.**  $d : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi,  $c$  eğrisinin (3.8) parametrelendirmesi ile verilen conchoid eğrisi olsun. O halde,  $d(t)$  eğrisinin eğriliği,

$$\kappa_d(t) = \frac{\sqrt{\cosh^2 t(((r \pm d)^2 - (r \pm d)r'')((r \pm d)^2 - (r \pm d)r'' + 4(r')^2) + 4(r')^4) + 4(r \pm d)^2((r \pm d)^2 + (r')^2)}}{\cosh t((r \pm d)^2 + (r')^2)^{3/2}} \quad (3.10)$$

dir.

**İspat.** (3.8) parametrelendirmesi ile verilen  $d$  eğrisinin birinci ve ikinci türevleri alınıp benzer şekilde bu türevler (2.4) eşitliğinde kullanıldığında  $\kappa_d(t)$  eğriliği elde edilir.



**Önerme 3.2.4.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir uzay eğrisi olsun. O halde,  $c(t)$  eğrisinin burulması  $\tau(t)$ ,

$$\tau(t) = -\frac{2(\cosh^2 t(6rr'r'' - 6(r')^3 - r^2r' - r^2r''') + \sinh t \cosh t(r^3 + 2r(r')^2 - r^2r'') - 4r^2r')}{\cosh t(\cosh^2 t((r^2 - rr'')(r^2 - rr'' + 4(r')^2) + 4(r')^4) + 4r^2(r^2 + (r')^2))} \quad (3.11)$$

dir.

**İspat.** (3.7) parametrelendirmesi ile verilen  $c$  eğrisinin türevleri alınıp (2.5) eşitliğinde yerine yazılırsa eğrinin burulması bulunur.

**Önerme 3.2.5.**  $d : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi,  $c$  eğrisinin (3.8) parametrelendirmesi ile verilen conchoid eğrisi olsun. O halde,  $d(t)$  eğrisinin burulması,

$$\tau_d(t) = -\frac{2\left(\cosh^2 t(6(r \pm d)r'r'' - 6(r')^3 - (r \pm d)^2 r' - (r \pm d)^2 r''') + \sinh t \cosh t((r \pm d)^3 + 2(r \pm d)(r')^2 - (r \pm d)^2 r'') - 4(r \pm d)^2 r'\right)}{\cosh t\left(\cosh^2 t(((r \pm d)^2 - (r \pm d)r'')((r \pm d)^2 - (r \pm d)r'' + 4(r')^2) + 4(r')^4)\right) + 4(r \pm d)^2((r \pm d)^2 + (r')^2)} \quad (3.12)$$

dir.

**İspat.** (3.8) parametrelendirmesi ile verilen  $d$  eğrisinin türevleri alınıp benzer şekilde bu türevler (2.5) eşitliğinde yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.2.6.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  (3.7) parametrelendirmesi ile verilen bir eğri olsun. Eğer  $c$  birim hızlı bir eğri ise,  $r(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$  olup, burada,  $c_1^2 + c_2^2 = 1$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  dir.

**İspat.**  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$  eğrisi (3.7) eşitliğindeki polar koordinatlarla verilmiş bir uzay eğrisi olsun.  $c$  eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere,  $\|c'(t)\|^2 = r^2 + (r')^2 = 1$  dir. Bu diferensiyel denklemin çözümünden  $r(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$  elde edilir. Burada,  $c_1^2 + c_2^2 = 1$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  dir.

Aşağıda bu sonuçlarla ilgili örnekler verilmiş ve grafikleri çizdirilmiştir.

### Örnek 3.2.7.

1)  $c$  düzlemsel bir eğri olsun. O halde,  $r(t) = \frac{1}{\sec ht}$  alınırsa

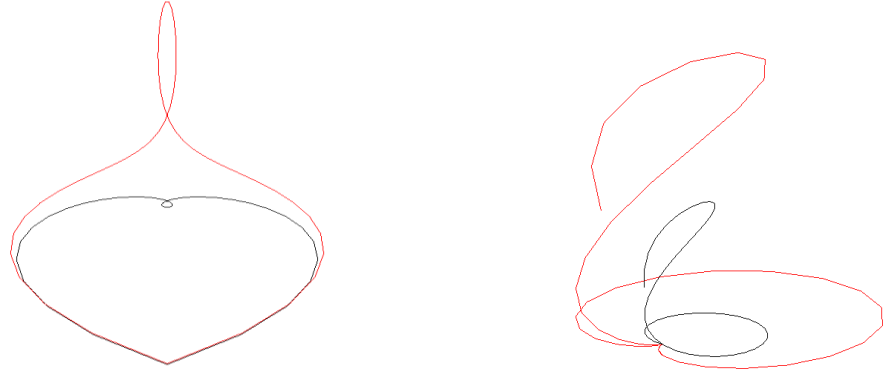
$c(t) = \frac{1}{\sec ht} (\sec ht, \cos t \tanh t, \sin t \tanh t)$  dir ve  $c$  eğrisinin conchoid eğrisi

$d(t) = \left( \frac{1}{\sec ht} \pm d \right) (\sec ht, \cos t \tanh t, \sin t \tanh t)$  olur. (Şekil 3.4a).

2)  $c$  eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. O halde,

$c(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t + \sin t) (\sec ht, \cos t \tanh t, \sin t \tanh t)$  ve  $c$  eğrisinin conchoidi

$d(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos t + \sin t) \pm d \right) (\sec ht, \cos t \tanh t, \sin t \tanh t)$  dir (Şekil 3. 4b).



a)  $d = 1$  için düzlemsel eğri ve conchoidi

b)  $d = 1$  için birim hızlı eğri ve conchoidi

Şekil 3.4. Uzak eğrileri ve conchoid eğrileri

Bu örneklerde  $c$  eğrisi siyah ile conchoidi olan  $d$  eğrisi ise kırmızı ile gösterilmiştir.

## 4. CONCHOİD YÜZEYLER

Bu bölümde Öklid uzayındaki conchoidal yüzeyler ele alınmıştır. İlk olarak 3-boyutlu Öklid uzayındaki conchoidal yüzeyler verilip Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır. Bu yüzeylerin düz ve minimal olması şartları ele alınıp grafikleri çizdirilmiştir. Bir sonraki kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında conchoid eğrileri ile elde edilen dönel yüzeyler üzerinde durulmuş ve bunlarla ilgili sonuçlar verilmiştir. Son olarak 4-boyutlu Öklid uzayında conchoidal yüzeyler tanımlanmıştır. Bu yüzeylerin düz ve minimal olması ile ilgili gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Ayrıca 4-boyutlu Öklid uzayında bazı rotasyonel yüzeylerin conchoidal yüzey olma durumları incelenmiştir.

### 4.1. $E^3$ deki Conchoidal Yüzeyler

Herhangi bir  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi  $F_d$  olmak üzere, bu yüzey belirli bir referans noktası  $O$  ya göre  $d$  yarıçap fonksiyonunu arttırmak suretiyle elde edilir.

$F \subset R^3$  yüzeyi, belirli bir sabit nokta  $O = (0,0,0) \in R^3$  ve  $d \in R$  mesafesine göre regüler bir yüzey olsun. Bu takdirde  $F$  yüzeyi

$$f(u, v) = r(u, v)\rho(u, v) \quad (4.1)$$

polar gösterimiyle verilsin. Burada  $\|\rho(u, v)\| = 1$  dir.  $S^2$  birim küresinin

$$\rho(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \quad (4.2)$$

parametrelendirmesi gözönüne alınırsa,  $\rho(u, v)$  ve  $r(u, v)$  fonksiyonları sırasıyla,  $f(u, v)$  parametrelendirmesinin küresel kısmı ve yarıçap fonksiyonu olarak adlandırılır.

$F$  nin conchoid yüzeyi olan  $F_d$  yüzeyi de  $d$  parametresine bağlı olarak

$$f_d(u, v) = (r \pm d)\rho(u, v) \quad (4.3)$$

ile gösterilir (Peternell ve ark. 2011).

**Teorem 4.1.1.**  $F$ , (4.1) parametrizasyonu ile verilen regüler bir yüzey olsun. O halde,  $F$  nin Gauss eğriliği,

$$K = -\frac{\delta^2(u, v) - \cos^2 v \zeta(u, v) \xi(u, v)}{r^2 ((r^2 + r_v^2) \cos^2 v + r_u^2)^2} \quad (4.4)$$

olup burada

$$\begin{aligned}
\delta(u, v) &= rr_{uv} \cos v - 2r_u r_v \cos v + rr_u \sin v, \\
\zeta(u, v) &= 2r_u^2 + rr_v \sin v \cos v + r^2 \cos^2 v - rr_{uu}, \\
\xi(u, v) &= 2r_v^2 + r^2 - rr_{vv}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

dir.

**İspat.**  $F$  yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= (r_u \cos u \cos v - r \sin u \cos v, r_u \sin u \cos v + r \cos u \cos v, r_u \sin v), \\
\frac{\partial f}{\partial v} &= (r_v \cos u \cos v - r \cos u \sin v, r_v \sin u \cos v - r \sin u \sin v, r_v \sin v + r \cos v)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

vektör alanları ile gerilmiştir.

Bu nedenle, yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle f_u, f_u \rangle = r^2 \cos^2 v + r_u^2, \\
g_{12} &= \langle f_u, f_v \rangle = r_u r_v, \\
g_{22} &= \langle f_v, f_v \rangle = r^2 + r_v^2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dır.

$f(u, v)$ 'nin ikinci kısmi türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\begin{aligned}
f_{uu} &= ((r_{uu} - r) \cos u \cos v - 2r_u \sin u \cos v, (r_{uu} - r) \sin u \cos v + 2r_u \cos u \cos v, r_{uu} \sin v), \\
f_{uv} &= (r_{uv} \cos u \cos v - r_u \cos u \sin v - r_v \sin u \cos v + r \sin u \sin v, \\
&\quad r_{uv} \sin u \cos v - r_u \sin u \sin v + r_v \cos u \cos v - r \cos u \sin v, r_{uv} \sin v + r_u \cos v), \\
f_{vv} &= ((r_{vv} - r) \cos u \cos v - 2r_v \cos u \sin v, (r_{vv} - r) \sin u \cos v - 2r_v \sin u \sin v, \\
&\quad r_{vv} \sin v + 2r_v \cos v - r \sin v).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Ayrıca yüzeyin birim normal vektörü

$$\begin{aligned}
N &= \frac{1}{\sqrt{(r^2 + r_v^2) \cos^2 v + r_u^2}} (r_v \cos u \cos v \sin v + r \cos u \cos^2 v + r_u \sin u, \\
&\quad r_v \sin u \cos v \sin v + r \sin u \cos^2 v - r_u \cos u, \\
&\quad -r_v \cos^2 v + r \cos v \sin v)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

dir.

(2.13), (4.8) ve (4.9) denklemleri yardımıyla ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
c_{11}^1 &= -\frac{\cos v(2r_u^2 + rr_v \sin v \cos v + r^2 \cos^2 v - rr_{uu})}{\sqrt{(r^2 + r_v^2) \cos^2 v + r_u^2}}, \\
c_{12}^1 &= -\frac{rr_{uv} \cos v - 2r_u r_v \cos v + rr_u \sin v}{\sqrt{(r^2 + r_v^2) \cos^2 v + r_u^2}}, \\
c_{22}^1 &= -\frac{\cos v(2r_v^2 + r^2 - rr_{vv})}{\sqrt{(r^2 + r_v^2) \cos^2 v + r_u^2}}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Ayrıca, (4.7) ve (4.10) denklemleri (2.14)'de yerine yazılıp düzenlenirse (4.4) eşitliği elde edilir.

**Teorem 4.1.2.**  $F$ , (4.1) parametrizasyonu ile verilen bir regüler yüzey olsun. O halde,  $F$  yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H = -\frac{\cos v \zeta(u, v)(r^2 + r_v^2) + \cos v \xi(u, v)(r^2 \cos^2 v + r_u^2) + 2r_u r_v \delta(u, v)}{2r^2((r^2 + r_v^2) \cos^2 v + r_u^2)} \tag{4.11}$$

dir.

**İspat.** (2.15), (4.7) ve (4.10) denklemleri kullanılarak aranılan sonuç bulunur.

**Sonuç 4.1.3.**  $F$  yüzeyi, (4.1) parametrizasyonu ile verilen bir regüler yüzey olsun.

i) Eğer yarıçap fonksiyonu  $r(u, v)$  bir  $u$ -parametrelili fonksiyon ise, o halde,  $F$  nin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla,

$$K = \frac{\cos^2 v(2r_u^2 + r^2 \cos^2 v - rr_{uu}) - r_u^2 \sin^2 v}{(r^2 \cos^2 v + r_u^2)^2} \tag{4.12}$$

ve

$$H = \frac{\cos v(3r_u^2 + 2r^2 \cos^2 v - rr_{uu})}{2(r^2 \cos^2 v + r_u^2)^{3/2}} \tag{4.13}$$

şeklindedir.

ii) Eğer yarıçap fonksiyonu  $r(u, v)$  bir  $v$ -parametrelili fonksiyon ise, o halde,  $F$  nin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{(r_v \sin v + r \cos v)(2r_v^2 + r^2 - rr_{vv})}{r \cos v(r^2 + r_v^2)^2} \tag{4.14}$$

ve

$$H = \frac{(r_v \sin v + r \cos v)(r^2 + r_v^2) + r \cos v(2r_v^2 + r^2 - rr_{vv})}{r \cos v(r^2 + r_v^2)^2} \quad (4.15)$$

şeklindedir.

**Sonuç 4.1.4.**  $F$  yüzeyi, (4.1) parametrizasyonu ile verilen bir regüler yüzey olsun. Eğer  $u$ -parametrelili yarıçap fonksiyonu

$$r(u) = \left( \frac{(2c^2 - 1)(-c_1 c_2 \sin(2\sqrt{2c^2 - 1}u) + \sin^2(2\sqrt{2c^2 - 1}u)(c_1^2 + c_2^2) + c_2^2)}{c^4} \right)^{\frac{-c^2}{2(2c^2 - 1)}} \quad (4.16)$$

ise  $F$  bir düz yüzeydir ve eğer

$$r(u) = \pm \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c_3 \sin(2cu) - c_4 \cos(2cu)}} \quad (4.17)$$

ise  $F$  minimal bir yüzeydir, burada  $c = \cos v$  ve  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$  dir.

**İspat.**  $F$  yüzeyinin yarıçap fonksiyonu  $r(u, v) = r(u)$ ,  $u$ -parametrelili olmak üzere  $c = \cos v$  alınır (4.12) denkleminde yüzeyin düz olması için gerek ve yeter şart  $c^2(2(r')^2 + r^2 c^2 - rr'') - (r')^2(1 - c^2) = 0$  denkleminin sağlanmasıdır. Bu diferansiyel denklem çözümünden (4.16) sonucu elde edilir. Ayrıca minimal olması için de  $3(r')^2 + 2r^2 c^2 - rr'' = 0$  olmalıdır. Bu denklemin Maple ile çözümünden de (4.17) bulunur (EK 1).

**Sonuç 4.1.5.**  $F$  yüzeyi, (4.1) ile verilmiş bir regüler yüzey olsun. Eğer  $v$ -parametrelili yarıçap fonksiyonu  $r(v) = \frac{1}{c_1 \sin v - c_2 \cos v}$  ise  $F$  yüzeyi düzdür ve ayrıca eğer  $c_2 = 0$

ise  $F$  yüzeyi minimaldir.

**İspat.**  $F$  yüzeyinin yarıçap fonksiyonu  $r(u, v) = r(v)$ ,  $v$ -parametrelili olmak üzere  $r' \sin v + r \cos v = 0$  veya  $2(r')^2 + r^2 - rr'' = 0$  olmalıdır. Bu denklemlerin genel çözümünden  $r(v) = \frac{1}{c_1 \sin v - c_2 \cos v}$  olarak bulunur. Minimal olması için de özel

çözümü olan  $r(v) = \frac{c_1}{\sin v}$  elde edilir (EK 2).

Benzer şekilde,  $d$  uzaklığıyla belirlenen  $F_d$  conchoidal yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edilebilir.

**Teorem 4.1.6.**  $F_d$ , (4.3) parametrizasyonu ile verilen  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi olsun. O halde,  $F_d$  yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$\tilde{K} = -\frac{(\tilde{\delta}(u, v))^2 - \cos^2 v \tilde{\zeta}(u, v) \tilde{\xi}(u, v)}{(r \pm d)^2 ((r \pm d)^2 + r_v^2) \cos^2 v + r_u^2} \quad (4.18)$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(u, v) &= (r \pm d)r_{uv} \cos v - 2r_u r_v \cos v + (r \pm d)r_u \sin v, \\ \tilde{\zeta}(u, v) &= 2r_u^2 + (r \pm d)r_v \sin v \cos v + (r \pm d)^2 \cos^2 v - (r \pm d)r_{uu}, \\ \tilde{\xi}(u, v) &= 2r_v^2 + (r \pm d)^2 - (r \pm d)r_{vv} \end{aligned} \quad (4.19)$$

dır.

**Teorem 4.1.7.**  $F_d$  yüzeyi, (4.3) parametrizasyonu ile verilen  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi olsun. O halde,  $F_d$  yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$\tilde{H} = -\frac{\cos v \tilde{\zeta}(u, v) ((r \pm d)^2 \cos^2 v + r_u^2) + \cos v \tilde{\xi}(u, v) ((r \pm d)^2 + r_v^2) + 2r_u r_v \tilde{\delta}(u, v)}{2(r \pm d)^2 ((r \pm d)^2 + r_v^2) \cos^2 v + r_u^2} \quad (4.20)$$

olarak bulunur.

**Sonuç 4.1.8.**  $F_d$  yüzeyi, (4.3) parametrizasyonu ile verilen  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi olsun.

i) Eğer yarıçap fonksiyonu  $r(u, v)$  bir  $u$ -parametrelili fonksiyon ise, o halde,  $F_d$  yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri,

$$\tilde{K} = \frac{\cos^2 v (2r_u^2 + (r \pm d)^2 \cos^2 v - (r \pm d)r_{uu}) - r_u^2 \sin^2 v}{((r \pm d)^2 \cos^2 v + r_u^2)^2} \quad (4.21)$$

ve

$$\tilde{H} = -\frac{\cos v (3r_u^2 + 2(r \pm d)^2 \cos^2 v - (r \pm d)r_{uu})}{2((r \pm d)^2 \cos^2 v + r_u^2)^{3/2}} \quad (4.22)$$

dir.

ii) Eğer yarıçap fonksiyonu  $r(u, v)$  bir  $v$ -parametrelili fonksiyon ise  $F_d$  yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri,

$$\tilde{K} = \frac{(r_v \sin v + (r \pm d) \cos v)(2r_v^2 + (r \pm d)^2 - (r \pm d)r_{vv})}{(r \pm d) \cos v((r \pm d)^2 + r_v^2)^2} \quad (4.23)$$

ve

$$\tilde{H} = -\frac{(r_v \sin v + (r \pm d) \cos v)((r \pm d)^2 + r_v^2) + (r \pm d) \cos v(2r_v^2 + (r \pm d)^2 - (r \pm d)r_{vv})}{2(r \pm d) \cos v((r \pm d)^2 + r_v^2)^{3/2}} \quad (4.24)$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.1.4. ve Sonuç 4.1.5. yardımıyla conchoidal yüzey için de aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Sonuç 4.1.9.**  $F_d$  yüzeyi, (4.3) parametrizasyonu ile verilen  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi olsun. Eğer  $u$ -parametrelili yarıçap fonksiyonu,

$$r(u) = \pm d + \left( \frac{(2c^2 - 1)(-c_1 c_2 \sin(2\sqrt{2c^2 - 1}u) + \sin^2(\sqrt{2c^2 - 1}u)(c_1^2 - c_2^2) + c_2^2)}{c^4} \right)^{\frac{-e^2}{2(2e^2 - 1)}} \quad (4.25)$$

ise  $F_d$  yüzeyi düzdür ve eğer

$$r(u) = \pm \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c_3 \sin(2cu) - c_4 \cos(2cu)}} \pm d \quad (4.26)$$

ise  $F_d$  yüzeyi minimaldir, burada  $c = \cos v$  ve  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$  dir.

**Sonuç 4.1.10.**  $F_d$  yüzeyi, (4.3) parametrizasyonu ile verilen  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi olsun. Eğer  $v$ -parametrelili yarıçap fonksiyonu

$$r(v) = \pm d + \frac{1}{c_1 \sin v - c_2 \cos v} \quad (4.27)$$

ise  $F_d$  yüzeyi düzdür ve ayrıca eğer  $c_2 = 0$  ise  $F_d$  yüzeyi minimaldir.

**Örnek 4.1.11.**

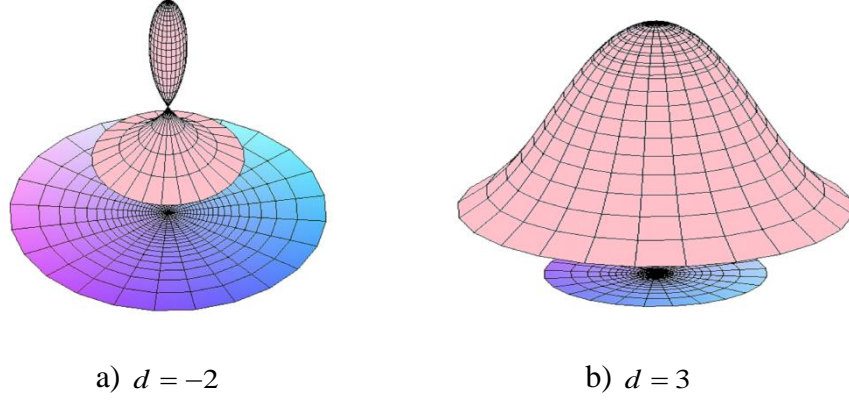
1)  $f(u, v) = \frac{1}{\sin v}(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$  parametrelendirmesiyle verilen  $F$  yüzeyi

bir düzlem olmak üzere conchoidal yüzeyi



$$f_d(u, v) = \left(\frac{1}{\sin v} \pm d\right)(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \quad (4.28)$$

parametrelendirmesine sahiptir ( Şekil 4.1.a,b).



Şekil 4.1. Düzlem ve conchoidal yüzeyi

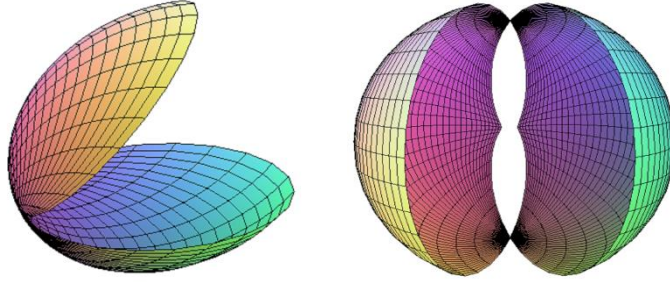
2) Yarıçap fonksiyonu  $r(u, v) = \sin u \cos v$  olmak üzere,

$$f(u, v) = (\sin u \cos u \cos^2 v, \sin^2 u \cos^2 v, \sin u \cos v \sin v) \quad (4.29)$$

ve bu yüzeyin conchoid yüzeyi

$$f_d(u, v) = (\sin u \cos v \pm d)(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \quad (4.30)$$

dir (Şekil 4.2.).



Şekil 4.2. Deniz kabuğu yüzeyi ve conchoidal yüzeyi

#### 4.2. $E^3$ de Düzlemsel Conchoid Eğrileri ile Elde Edilen Dönel Yüzeyle

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında, düzlemsel bir  $c(t)$  eğrisi ve onun conchoidi olan  $d(t)$  eğrisinin döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyler ele alınmıştır. Bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanıp örnekler verilmiştir.

$M$ , yüzeyi (3.1) parametrelendirmesi ile verilen  $c(t)$  eğrisinin döndürülmesiyle oluşan bir döneel yüzey olsun. Bu takdirde yüzey

$$M : X(t, s) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t \cos s, r(t) \sin t \sin s) \quad (4.31)$$

parametrelendirmesine sahiptir.

Ayrıca,  $M_d$  yüzeyi (3.2) parametrelendirmesi ile verilen  $d(t)$  eğrisinin döndürülmesiyle oluşan bir döneel yüzey olmak üzere yüzey yaması,

$$M_d : \tilde{X}(t, s) = ((r(t) \pm d) \cos t, (r(t) \pm d) \sin t \cos s, (r(t) \pm d) \sin t \sin s) \quad (4.32)$$

dir.

**Teorem 4.2.1.**  $M$  yüzeyi (4.31) parametrelendirmesi ile verilen bir döneel yüzey olsun. Bu takdirde,  $M$  yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{(r' \cos t - r \sin t)(rr'' - 2(r')^2 - r^2)}{r \sin t (r^2 + (r')^2)^2} \quad (4.33)$$

dir.

**İspat.**  $M$  yüzeyinin tanjant uzayı vektör alanları ile gerilmiş olsun,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= (r' \cos t - r \sin t, (r' \sin t + r \cos t) \cos s, (r' \sin t + r \cos t) \sin s), \\ \frac{\partial X}{\partial s} &= (0, -r \sin t \sin s, r \sin t \cos s), \end{aligned} \quad (4.34)$$

vektör alanları ile gerilir.

Böylece, yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle X_t, X_t \rangle = r^2 + (r')^2, \\ g_{12} &= \langle X_t, X_s \rangle = 0, \\ g_{22} &= \langle X_s, X_s \rangle = r^2 \sin^2 t \end{aligned} \quad (4.35)$$

bulunur. Yüzey yamasının ikinci kısmi türevleri alınır

$$\begin{aligned} X_{tt} &= ((r'' - r) \cos t - 2r' \sin t, ((r'' - r) \sin t + 2r' \cos t) \cos s, ((r'' - r) \sin t + 2r' \cos t) \sin s), \\ X_{ts} &= (0, -(r' \sin t + r \cos t) \sin s, (r' \sin t + r \cos t) \cos s), \\ X_{ss} &= (0, -r \sin t \cos s, -r \sin t \sin s), \end{aligned} \quad (4.36)$$

elde edilir. Ayrıca,  $M$  nin birim normal vektörü,

$$N = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} (r' \sin t + r \cos t, (r \sin t - r' \cos t) \cos s, (r \sin t - r' \cos t) \sin s) \quad (4.37)$$

dir.

Buradan (2.13), (4.36) ve (4.37) eşitlikleri yardımıyla yüzeyin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}c_{11}^1 &= \frac{rr'' - 2(r')^2 - r^2}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}, \\c_{12}^1 &= 0, \\c_{22}^1 &= \frac{r \sin t (r' \cos t - r \sin t)}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}\end{aligned}\tag{4.38}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç olarak, (4.35) ve (4.38) eşitliklerinin (2.14)'de yerine yazılmasıyla (4.33) elde edilir.

**Teorem 4.2.2.**  $M$  yüzeyi (4.31) parametrelendirmesi ile verilen bir dönele yüzey olsun. Bu takdirde,  $M$  yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H = \frac{r \sin t (rr'' - 2(r')^2 - r^2) + (r^2 + (r')^2)(r' \cos t - r \sin t)}{2r \sin t (r^2 + (r')^2)^{3/2}}\tag{4.39}$$

dir.

**İspat.** (2.15), (4.35) ve (4.38)'deki eşitlikler yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.1. ve 4.2.2. nin yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 4.2.3.**  $M$  yüzeyi (4.31) yaması ile verilmiş bir dönele yüzey olsun. Eğer  $M$  yüzeyi düz bir yüzey ise

$$r(t) = \frac{c_1}{c_2 \sin t - c_3 \cos t}\tag{4.40}$$

olup yüzey düzlem, silindir veya koninin bir parçasıdır. Burada  $c_1, c_2, c_3$  reel sabit sayılardır.

**İspat.** (4.31) yaması ile verilen  $M$  düz bir yüzey olsun. Bu takdirde  $K = 0$  olup (4.33) eşitliğinden  $rr'' - 2(r')^2 - r^2 = 0$  veya  $r' \cos t - r \sin t = 0$  dır. Bu diferansiyel

denklemlerin çözümünden  $r(t) = \frac{c_1}{c_2 \sin t - c_3 \cos t}$  ve  $r(t) = \frac{c_1}{\cos t}$  elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Sonuç 4.2.4.**  $M$  yüzeyi (4.31) yaması ile verilmiş bir dönele yüzey olsun. Eğer,  $r(t) = \frac{c_1}{\cos t}$  ise, o halde,  $M$  yüzeyi düzlemin bir parçası olan minimal bir yüzeydir, burada  $c_1$  reel bir sabittir.

Benzer şekilde, bu sonuçlar conchoid eğrileri ile verilen dönele yüzeyler için de verilebilir.

**Teorem 4.2.5.**  $M_d$  yüzeyi (4.32) yaması ile verilmiş bir dönele yüzey olsun. O halde,  $M_d$  yüzeyinin Gauss eğriliği  $K_d$ ,

$$K = \frac{(r' \cos t - (r \pm d) \sin t)((r \pm d)r'' - 2(r')^2 - (r \pm d)^2)}{(r \pm d) \sin t((r \pm d)^2 + (r')^2)^2} \quad (4.41)$$

dir.

**Teorem 4.2.6.**  $M_d$  yüzeyi (4.32) yaması ile verilmiş bir dönele yüzey olsun. O halde,  $M_d$  yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$H_d = \frac{(r \pm d) \sin t((r \pm d)r'' - 2(r')^2 - (r \pm d)^2) + ((r \pm d)^2 + (r')^2)(r' \cos t - (r \pm d) \sin t)}{2(r \pm d) \sin t((r \pm d)^2 + (r')^2)^{3/2}} \quad (4.42)$$

dir.

Teorem 4.2.5. ve Teorem 4.2.6. nın bir sonucu olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Sonuç 4.2.7.**  $M_d$  yüzeyi (4.32) yaması ile verilmiş bir dönele yüzey olsun. Eğer

$$r(t) = \pm d + \frac{c_1}{c_2 \sin t - c_3 \cos t} \quad (4.43)$$

ise, o halde,  $M_d$  düz bir yüzeydir. Burada  $c_1, c_2, c_3$  reel sabitlerdir.

**Sonuç 4.2.8.**  $M_d$  yüzeyi, (4.32) yaması ile verilmiş bir dönele yüzey olsun. Eğer

$$r(t) = \pm d + \frac{c_1}{\cos t} \text{ ise, o halde, } M_d \text{ minimal bir yüzeydir.}$$

Bu yüzeylerle ilgili bazı örnekler verilmiş ve grafikleri çizdirilmiştir.

### Örnek 4.2.9.

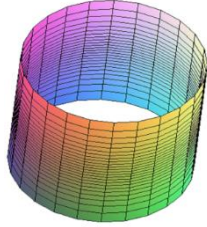
1)  $c$  eğrisi düz bir doğru olsun. O halde,  $M$  dönel yüzeyi

$$X(t, s) = \frac{1}{\sin t} (\cos t, \sin t \cos s, \sin t \sin s) \quad (4.44)$$

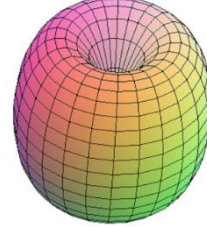
parametrelelendirmesiyle verilen düz bir yüzeydir (Şekil 4. 3a). Ayrıca  $d = -2$  için,  $M_d$  conchoid dönel yüzeyi

$$\tilde{X}(t, s) = \left(\frac{1}{\sin t} - 2\right) (\cos t, \sin t \cos s, \sin t \sin s) \quad (4.45)$$

parametrelelendirmesine sahiptir (Şekil 4.3b).



a) Düz dönel yüzey



b) Düz dönel yüzeyin conchoidi

Şekil 4.3. Düz dönel yüzey ve conchoid yüzeyi

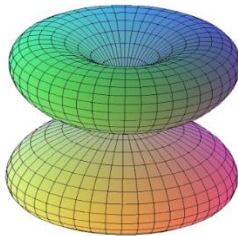
2)  $c$  eğrisi,  $c(t) = (\sin 2t \cos t, \sin 2t \sin t)$  olmak üzere,  $M$  dönel yüzeyi

$$X(t, s) = (\sin 2t \cos t, \sin 2t \sin t \cos s, \sin 2t \sin t \sin s) \quad (4.46)$$

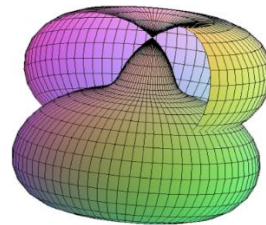
parametrelelendirmesiyle verilir (Şekil 4.4a). Ayrıca,  $d = 2$  için  $M_d$  conchoid dönel yüzeyi

$$X(t, s) = (\sin 2t + 2)(\cos t, \sin t \cos s, \sin t \sin s) \quad (4.47)$$

şeklindedir (Şekil 4.4b).



a) Dönel yüzey



b) Dönel yüzeyin conchoidi

Şekil 4.4. Dönel yüzey ve conchoid yüzeyi

### 4.3. $E^4$ deki Conchoidal Yüzeyler

Herhangi bir  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi  $F_d$  olmak üzere, bu yüzey belirli bir referans noktası  $O$  ya göre  $d$  yarıçap fonksiyonunu arttırmak suretiyle elde edilir.  $F \subset R^4$  yüzeyi, belirli bir sabit nokta  $O = (0,0,0,0) \in R^4$  ve  $d \in R$  mesafesine göre regüler bir yüzey olsun. Bu takdirde  $F$  yüzeyi

$$f(u, v) = r(u, v)\rho(u, v) \quad (4.48)$$

polar gösterimiyle verilsin. Burada  $\|\rho(u, v)\| = 1$  dir.  $S^2$  birim küresinin  $\rho(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v)$  parametrelendirmesi gözönüne alınır,  $\rho(u, v)$  ve  $r(u, v)$  fonksiyonları sırasıyla,  $f(u, v)$  parametrelendirmesinin küresel kısmı ve yarıçap fonksiyonu olarak adlandırılır.  $F$  nin conchoid yüzeyi olan  $F_d$  yüzeyi de  $d$  parametresine bağlı olarak

$$f_d(u, v) = (r \pm d)\rho(u, v) \quad (4.49)$$

ile gösterilir.

**Teorem 4.3.1.**  $F$ , (4.48) parametrizasyonu ile verilen regüler bir yüzey olsun. O halde,  $F$  nin Gauss eğriliği,

$$W^2 K = r_{vv}r_{uu} - r(r_{uu} + r_{vv}) - r_u^2 - r_v^2 - r_{uv}^2 - \frac{2}{r^2 + r_u^2 + r_v^2} \begin{pmatrix} rr_u^2 r_{vv} - 4r_u^2 r_v^2 - r^2 r_u^2 + r_u^2 r_{uu} r_{vv} - 4rr_u r_v r_{uv} \\ -rr_u^2 r_{uu} + r_v^2 r_{uu} r_{vv} + rr_v^2 r_{uu} - rr_v^2 r_{vv} \\ -r^2 r_v^2 - (r_u^2 - r_v^2)^2 - (r_u^2 + r_v^2)(r^2 + r_{uv}^2) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$$+ \frac{1}{r^2(r^2 + r_u^2 + r_v^2)^2} \begin{pmatrix} (r^2 + r_u^2)(r_u^2(r^2 + 2r_v^2 + rr_{uu})(rr_{vv} - 2r_v^2 - r^2) - (r_v^3 - r_u^2 r_v + r^2 r_v + rr_u r_{uv})^2) \\ + (r^2 + r_v^2)(r_v^2(rr_{uu} - 2r_u^2 - r^2)(2r_u^2 + rr_{vv} + r^2) - (r_u^3 + rr_v r_{uv} + r^2 r_u - r_u r_v^2)^2) \\ + r_u r_v \begin{pmatrix} r_u r_v (2r_v^2 + rr_{uu} + r^2)(2r_u^2 + rr_{vv} + r^2) \\ + (rr_{uu} - 2r_u^2 - r^2)(rr_{vv} - 2r_v^2 - r^2)r_u r_v \\ - 2(r_v^3 - r_u^2 r_v + r^2 r_v + rr_u r_{uv})(r_u^3 - r_u r_v^2 + r^2 r_u + rr_v r_{uv}) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

dir.

**İspat.**  $F$  yüzeyinin tanjant uzayı

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= (A(u, v) \cos v, B(u, v) \cos v, A(u, v) \sin v, B(u, v) \sin v), \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= (C(u, v) \cos u, C(u, v) \sin u, D(u, v) \cos u, D(u, v) \sin u)\end{aligned}\quad (4.51)$$

vektör alanları ile gerilmiştir.

Bu nedenle, yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned}g_{11} &= \langle f_u, f_u \rangle = r^2 + r_u^2, \\ g_{12} &= \langle f_u, f_v \rangle = r_u r_v, \\ g_{22} &= \langle f_v, f_v \rangle = r^2 + r_v^2\end{aligned}\quad (4.52)$$

dır.

$f(u, v)$ 'nin ikinci kısmi türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}f_{uu} &= (\varphi(u, v) \cos v, \phi(u, v) \cos v, \varphi(u, v) \sin v, \phi(u, v) \sin v), \\ f_{uv} &= \left( \begin{array}{l} \theta(u, v) \cos v - A(u, v) \sin v, \lambda(u, v) \cos v - B(u, v) \sin v, \\ \theta(u, v) \sin v + A(u, v) \cos v, \lambda(u, v) \sin v + B(u, v) \cos v \end{array} \right), \\ f_{vv} &= (\mu(u, v) \cos u, \mu(u, v) \sin u, \eta(u, v) \cos, \eta(u, v) \sin u)\end{aligned}\quad (4.53)$$

Burada,

$$\begin{aligned}A(u, v) &= r_u \cos u - r \sin u, \\ B(u, v) &= r_u \sin u + r \cos u, \\ C(u, v) &= r_v \cos v - r \sin v, \\ D(u, v) &= r_v \sin v + r \cos v, \\ \varphi(u, v) &= r_{uu} \cos u - 2r_u \sin u - r \cos u, \\ \phi(u, v) &= r_{uu} \sin u + 2r_u \cos u - r \sin u, \\ \theta(u, v) &= r_{uv} \cos u - r_v \sin u, \\ \lambda(u, v) &= r_{uv} \sin u + r_v \cos u, \\ \mu(u, v) &= r_{vv} \cos v - 2r_v \sin v - r \cos v, \\ \eta(u, v) &= r_{vv} \sin v + 2r_v \cos v - r \sin v.\end{aligned}\quad (4.54)$$

reel değerli fonksiyonlardır.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\langle X_{uu}, X_{uu} \rangle &= (r - r_{uu})^2 + 4r_u^2, & \langle X_{uu}, X_u \rangle &= r_u r_{uu} + r r_u, \\
\langle X_{uu}, X_{vv} \rangle &= r_{uu} r_{vv} - r r_{vv} - r r_{uu} + r^2, & \langle X_{uu}, X_v \rangle &= r_v r_{uu} - r r_v, \\
\langle X_{vv}, X_{vv} \rangle &= (r - r_{vv})^2 + 4r_v^2, & \langle X_{vv}, X_u \rangle &= r_u r_{vv} - r r_u, \\
\langle X_{uv}, X_{uv} \rangle &= r^2 + r_u^2 + r_v^2 + r_{uv}^2, & \langle X_{uv}, X_v \rangle &= r_u r_{uv} + r r_v, \\
\langle X_{uu}, X_{uv} \rangle &= r_{uu} r_{uv} + 2r_u r_v - r r_{uv}, & \langle X_{uv}, X_u \rangle &= r_v r_{uv} + r r_u, \\
\langle X_{uv}, X_{vv} \rangle &= r_{uv} r_{vv} + 2r_u r_v - r r_{uv}, & \langle X_{vv}, X_v \rangle &= r_v r_{vv} + r r_v
\end{aligned} \tag{4.55}$$

dir. (2.17) eşitliğinden Christoffel sembolleri

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{r_u (2r_v^2 + r r_{uu} + r^2)}{r(r^2 + r_u^2 + r_v^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{r_v (r r_{uu} - 2r_u^2 - r^2)}{r(r^2 + r_u^2 + r_v^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{r_v^3 - r_u^2 r_v + r^2 r_v + r r_u r_{uv}}{r(r^2 + r_u^2 + r_v^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{r_u^3 - r_u r_v^2 + r^2 r_u + r r_u r_{uv}}{r(r^2 + r_u^2 + r_v^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{r_u (r r_{vv} - 2r_v^2 - r^2)}{r(r^2 + r_u^2 + r_v^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{r_v (2r_u^2 + r r_{vv} + r^2)}{r(r^2 + r_u^2 + r_v^2)}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

elde edilir. Böylece (2.20) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&\langle h(X_u, X_u), h(X_v, X_v) \rangle - \langle h(X_u, X_v), h(X_u, X_v) \rangle \\
&= \langle X_{uu}, X_{vv} \rangle - \langle X_{uv}, X_{uv} \rangle - \Gamma_{22}^1 \langle X_{uu}, X_u \rangle - \Gamma_{22}^2 \langle X_{uu}, X_v \rangle \\
&\quad - \Gamma_{11}^1 \langle X_{vv}, X_u \rangle - \Gamma_{11}^2 \langle X_{vv}, X_v \rangle + 2\Gamma_{12}^1 \langle X_{uv}, X_u \rangle + 2\Gamma_{12}^2 \langle X_{uv}, X_v \rangle \\
&\quad + \left( \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 \right) \langle X_u, X_u \rangle + \left( \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^1)^2 \right) \langle X_u, X_v \rangle \\
&\quad + \left( \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 \right) \langle X_u, X_v \rangle + \left( \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2 \right) \langle X_v, X_u \rangle
\end{aligned} \tag{4.57}$$

bulunur. Böylece (4.52), (4.55) ve (4.56) eşitlikleri (4.57) de yerine yazılırsa Gauss eğriliği (2.21) yardımıyla elde edilir.



**Teorem 4.3.2.**  $F$ , (4.48) parametrizasyonu ile verilen bir regüler yüzey olsun. O halde,  $F$  yüzeyinin ortalama eğriliği

$$\|H\|^2 = \frac{1}{4W^4} \frac{\left( \begin{aligned} &-4r^5 r_v r_u r_{uv} r_{vv} - 4r^5 r_v r_u r_{uu} r_{uv} - 4r^3 r_v r_u^3 r_{uv} r_{vv} + 4r^3 r_{uu} r_{vv} r_u^2 r_v^2 \\ &- 4r^3 r_v^3 r_u r_{uu} r_{uv} + 2rr_v^4 r_{uu} r_{vv} r_u^2 + r^3 r_{vv}^2 r_u^4 - 4r^8 r_{uu} - 4r^8 r_{vv} \\ &+ r^7 r_{vv}^2 + 12r^7 r_u^2 + r^7 r_{uu}^2 + 10r^7 r_v^2 + 9r^5 r_u^4 + 7r^5 r_v^4 + 4r^5 r_{uu} r_{vv} r_v^2 \\ &- 2r^5 r_v r_u r_{vv}^2 + 2r^5 r_{uu} r_{vv} r_u^2 + 12r^4 r_v^3 r_{uv} r_u + 12r^4 r_u^3 r_v r_{uv} - 4r^4 r_u^3 r_v r_{vv} \\ &- 8r^4 r_v^2 r_{vv} r_u^2 + 4r^3 r_v^2 r_u^2 r_{uv}^2 + 2r^3 r_{uu} r_{vv} r_v^4 - 2r^3 r_v r_u^3 r_{vv}^2 - 2r^3 r_v^3 r_u r_{vv}^2 \\ &+ 6r^2 r_v^4 r_{uu} r_u^2 - 4r^2 r_v^3 r_{vv} r_u^3 - 4r^2 r_u^5 r_v r_{vv} - 2r^2 r_u^2 r_{vv} r_v^4 + 4r^2 r_u^4 r_{uu} r_v^2 \\ &- 2rr_v^3 r_u^3 r_{vv}^2 + 4r_v^4 r_{uu} r_u^4 - 4r_v^3 r_u^5 r_{vv} + 2r^7 r_u r_v + 2r^7 r_{uu} r_{vv} - 8r^6 r_v^2 r_{uu} \\ &- 6r^6 r_u^2 r_{uu} - 10r^6 r_u^2 r_{vv} - 8r^6 r_v^2 r_{vv} + 16r^5 r_u^2 r_v^2 + 2r^5 r_{vv}^2 r_u^2 + 2r^5 r_{uu}^2 r_v^2 \\ &+ 6r^5 r_u^3 r_v + 2r^5 r_u r_v^3 - 4r^4 r_v^4 r_{uu} - 6r^4 r_u^4 r_{vv} - 2r^4 r_v^4 r_{vv} - 2r^3 r_v^4 r_u^2 \\ &+ 6r^3 r_v^3 r_u^3 + 4r^3 r_u^5 r_v + r^3 r_{uu}^2 r_v^4 - 4rr_u^4 r_v^4 + 4rr_u^5 r_v^3 + 4r^9 + 8r^6 r_v r_u r_{uv} \end{aligned} \right)}{r(r^2 + r_u^2 + r_v^2)} \quad (4.58)$$

dir.

**İspat.** (4.51) ve (4.56) denklemleri (2.22) de yerine yazılırsa (4.58) elde edilmiş olur.

**Sonuç 4.3.3.**  $F$  yüzeyi, (4.48) parametrizasyonu ile verilen bir regüler yüzey olsun.

i) Eğer yarıçap fonksiyonu  $r(u, v)$  bir  $u$ -parametrelili fonksiyon ise, o halde,  $F$  nin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla,

$$K = \frac{1}{W^2} \left( -rr_{uu} - r_u^2 + \frac{1}{(r^2 + r_u^2)^2} (2r^4 r_u^2 + 3r^2 r_u^4 + r^3 r_u^2 r_{uu} + rr_u^4 r_{uu} + 2r^2 r_u^4 + r_u^6) \right) \quad (4.59)$$

ve

$$\|H\|^2 = \frac{1}{4W^4} \left( r^2 (r^2 + r_u^2)^2 + r^4 (r - r_{uu})^2 + 4r^4 r_u^2 - 2r^3 r_{uu} (r^2 + r_u^2) + 2r^4 (r^2 + r_u^2) - \frac{r^2 r_u^2 (r r_{uu} - r_u^2)^2}{r^2 + r_u^2} \right) \quad (4.60)$$

şeklindedir.

ii) Eğer yarıçap fonksiyonu  $r(u, v)$  bir  $v$ -parametrelili fonksiyon ise, o halde,  $F$  nin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{1}{W^2} \left( -rr_{vv} - r_v^2 + \frac{1}{(r^2 + r_v^2)^2} (2r^4 r_v^2 + 3r^2 r_v^4 + r^3 r_v^2 r_{vv} + rr_v^4 r_{vv} + 2r^2 r_v^4 + r_v^6) \right) \quad (4.61)$$

ve

$$\|H\|^2 = \frac{1}{4W^4} \left( 4r^6 - 4r^5 r_{vv} + 4r^4 r_v^2 + r^4 r_{vv}^2 + r^2 r_v^4 - 2r^3 r_v^2 r_{vv} - \frac{r^2 r_v^2 (r^4 + r^3 r_{vv} + r_v^4 - r_v^2 r_{vv} + 2r^2 r_{vv}^2)}{r^2 + r_v^2} \right) \quad (4.62)$$

şeklindedir.

**Sonuç 4.3.4.**  $F$  yüzeyi, (4.48) parametrizasyonu ile verilen bir regüler yüzey olsun. Eğer yarıçap fonksiyonu sırasıyla  $r(u) = c_2 e^{c_1 u}$  ve  $r(v) = c_2 e^{c_1 v}$  şeklinde  $u$  ve  $v$ -parametrelili fonksiyonlar ise  $F$  yüzeyi düz bir yüzeydir.

**Teorem 4.3.5.**  $F_d$ , (4.49) parametrizasyonu ile verilen  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi olsun. O halde,  $F_d$  yüzeyinin Gauss eğriliği,

$$W^2 K_d = r_{vv} (r_{uu} - (r \pm d)) - (r \pm d) r_{uu} - r_u^2 - r_v^2 - r_{uv}^2 - \frac{2}{(r \pm d)^2 + r_u^2 + r_v^2} \begin{pmatrix} (r \pm d) r_u^2 r_{vv} - 4r_u^2 r_v^2 - (r \pm d)^2 r_u^2 + r_u^2 r_{uu} r_{vv} \\ -(r \pm d) r_u^2 r_{uu} + r_v^2 r_{uu} r_{vv} + (r \pm d) r_v^2 r_{uu} - (r \pm d) r_v^2 r_{vv} \\ -(r \pm d)^2 r_v^2 - (r_u^2 - r_v^2)^2 - (r_u^2 + r_v^2)((r \pm d)^2 + r_{uv}^2) \\ -4(r \pm d) r_u r_v r_{uv} \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

$$+ \frac{1}{(r \pm d)^2 ((r \pm d)^2 + r_u^2 + r_v^2)^2} \begin{pmatrix} r_u r_v \left( \begin{aligned} & r_u r_v (2r_v^2 + (r \pm d) r_{uu} + (r \pm d)^2) (2r_u^2 + (r \pm d) r_{vv} + (r \pm d)^2) \\ & + ((r \pm d) r_{uu} - 2r_u^2 - (r \pm d)^2) ((r \pm d) r_{vv} - 2r_v^2 - (r \pm d)^2) r_u r_v \\ & - 2(r_v^3 - r_u^2 r_v - (r \pm d)^2 r_v + (r \pm d) r_u r_{vv}) (r_u^3 - r_u r_v^2 + (r \pm d)^2 r_u + (r \pm d) r_v r_{vv}) \end{aligned} \right) \\ + ((r \pm d)^2 + r_u^2) \left( \begin{aligned} & r_u^2 ((r \pm d)^2 + 2r_v^2 + (r \pm d) r_{uu}) ((r \pm d) r_{vv} - 2r_v^2 - (r \pm d)^2) \\ & - (r_v^3 - r_u^2 r_v + (r \pm d)^2 r_v^2 + (r \pm d) r_u r_{vv})^2 \end{aligned} \right) \\ + ((r \pm d)^2 + r_v^2) \left( \begin{aligned} & r_v^2 ((r \pm d) r_{uu} - 2r_u^2 - (r \pm d)^2) (2r_u^2 + (r \pm d) r_{vv} + (r \pm d)^2) \\ & - (r_u^3 + (r \pm d) r_v r_{vv} + (r \pm d)^2 r_u - r_u r_v^2)^2 \end{aligned} \right) \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

**Teorem 4.3.6.**  $F_d$  yüzeyi, (4.49) parametrizasyonu ile verilen  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi olsun. O halde,  $F_d$  yüzeyinin ortalama eğriliği,

$$\|H_d\|^2 = \frac{\left( \begin{aligned} &-4(r \pm d)^5 r_v r_u r_{uv} r_{vv} - 4(r \pm d)^5 r_v r_u r_{uu} r_{uv} - 4(r \pm d)^3 r_v r_u^3 r_{uv} r_{vv} \\ &+ 4(r \pm d)^3 r_{uu} r_{vv} r_u^2 r_v^2 - 4(r \pm d)^3 r_v^3 r_u r_{uu} r_{uv} + 2(r \pm d) r_v^4 r_{uu} r_{vv} r_u^2 \\ &+ (r \pm d)^3 r_{vv}^2 r_u^4 - 4(r \pm d)^8 r_{uu} - 4(r \pm d)^8 r_{vv} + (r \pm d)^7 r_{vv}^2 \\ &+ 12(r \pm d)^7 r_u^2 + (r \pm d)^7 r_{uu}^2 + 10(r \pm d)^7 r_v^2 + 9(r \pm d)^5 r_u^4 \\ &+ 7(r \pm d)^5 r_v^4 + 4(r \pm d)^5 r_{uu} r_{vv} r_v^2 - 2(r \pm d)^5 r_v r_u r_{vv}^2 + 2(r \pm d)^5 r_{uu} r_{vv} r_u^2 \\ &+ 12(r \pm d)^4 r_v^3 r_{uv} r_u + 12(r \pm d)^4 r_u^3 r_v r_{uv} - 4(r \pm d)^4 r_u^3 r_v r_{vv} \\ &- 8(r \pm d)^4 r_v^2 r_{vv} r_u^2 + 4(r \pm d)^3 r_v^2 r_u^2 r_{uv}^2 + 2(r \pm d)^3 r_{uu} r_{vv} r_v^4 \\ &- 2(r \pm d)^3 r_v r_u^3 r_{vv}^2 - 2(r \pm d)^3 r_v^3 r_u r_{vv}^2 + 6(r \pm d)^2 r_v^4 r_{uu} r_u^2 - 4(r \pm d)^2 r_v^3 r_{vv} r_u^3 \\ &- 4(r \pm d)^2 r_u^5 r_v r_{vv} - 2(r \pm d)^2 r_u^2 r_{vv} r_v^4 + 4(r \pm d)^2 r_u^4 r_{uu} r_v^2 \\ &- 2(r \pm d) r_v^3 r_u^3 r_{vv}^2 + 4r_v^4 r_{uu} r_u^4 - 4r_v^3 r_u^5 r_{vv} + 2(r \pm d)^7 r_u r_v + 2(r \pm d)^7 r_{uu} r_{vv} \\ &- 8(r \pm d)^6 r_v^2 r_{uu} - 6(r \pm d)^6 r_u^2 r_{vv} - 10(r \pm d)^6 r_u^2 r_{vv} - 8(r \pm d)^6 r_v^2 r_{vv} \\ &+ 16(r \pm d)^5 r_u^2 r_v^2 + 2(r \pm d)^5 r_{vv}^2 r_u^2 + 2(r \pm d)^5 r_{uu}^2 r_v^2 + 6(r \pm d)^5 r_u^3 r_v \\ &+ 2(r \pm d)^5 r_u r_v^3 - 4(r \pm d)^4 r_v^4 r_{uu} - 6(r \pm d)^4 r_u^4 r_{vv} - 2(r \pm d)^4 r_v^4 r_{vv} \\ &- 2(r \pm d)^3 r_v^4 r_u^2 + 6(r \pm d)^3 r_v^3 r_u^3 + 4(r \pm d)^3 r_u^5 r_v + (r \pm d)^3 r_{uu}^2 r_v^4 \\ &- 4(r \pm d) r_u^4 r_v^4 + 4(r \pm d) r_u^5 r_v^3 + 4r^9 + 8(r \pm d)^6 r_v r_u r_{uv} \end{aligned} \right)}{4W^4 (r \pm d)((r \pm d)^2 + r_u^2 + r_v^2)} \quad (4.64)$$

olarak bulunur.

**Sonuç 4.3.7.**  $F_d$  yüzeyi, (4.49) parametrizasyonu ile verilen  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi olsun.

i) Eğer yarıçap fonksiyonu  $r(u, v)$  bir  $u$ -parametrelili fonksiyon ise, o halde,  $F_d$  yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri,

$$K_d = \frac{1}{W^2} \left( - (r \pm d) r_{uu} - r_u^2 + \frac{1}{((r \pm d)^2 + r_u^2)^2} \left( 2(r \pm d)^4 r_u^2 + 3(r \pm d)^2 r_u^4 + (r \pm d)^3 r_u^2 r_{uu} \right) \right) \quad (4.65)$$

ve

$$\|H_d\|^2 = \frac{1}{4W^4} \left( (r \pm d)^2 ((r \pm d)^2 + r_u^2)^2 + (r \pm d)^4 ((r \pm d) - r_{uu})^2 + 4(r \pm d)^4 r_u^2 - 2(r \pm d)^3 r_{uu} ((r \pm d)^2 + r_u^2) + 2(r \pm d)^4 ((r \pm d)^2 + r_u^2) - \frac{(r \pm d)^2 r_u^2 ((r \pm d) r_{uu} - r_u^2)^2}{(r \pm d)^2 + r_u^2} \right) \quad (4.66)$$

dir.

ii) Eğer yarıçap fonksiyonu  $r(u, v)$  bir  $v$ -parametrelili fonksiyon ise  $F_d$  yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri,

$$K_d = \frac{1}{W^2} \left( - (r \pm d) r_{vv} - r_v^2 + \frac{1}{((r \pm d)^2 + r_v^2)^2} \left( 2(r \pm d)^4 r_v^2 + 3(r \pm d)^2 r_v^4 + (r \pm d)^3 r_v^2 r_{vv} \right) \right) \quad (4.67)$$

ve

$$\|H_d\|^2 = \frac{1}{4W^4} \left( \begin{aligned} & 4(r \pm d)^6 - 4(r \pm d)^5 r_{vv} + 4(r \pm d)^4 r_v^2 + (r \pm d)^4 r_{vv}^2 + (r \pm d)^2 r_v^4 \\ & - 2(r \pm d)^3 r_v^2 r_{vv} - \frac{(r \pm d)^2 r_v^2 ((r \pm d)^4 + (r \pm d)^3 r_{vv} + r_v^4 - (r \pm d) r_v^2 r_{vv} + 2(r \pm d)^2 r_{vv}^2)}{(r \pm d)^2 + r_v^2} \end{aligned} \right) \quad (4.68)$$

olarak bulunur.

**Sonuç 4.3.8.**  $F_d$  yüzeyi, (4.49) parametrisasyonu ile verilen  $F$  yüzeyinin conchoidal yüzeyi olsun. Eğer  $u$ -parametrelili ve  $v$ -parametrelili yarıçap fonksiyonları sırasıyla  $r(u) = \pm d + c_2 e^{c_1 u}$  ve  $r(v) = \pm d + c_2 e^{c_1 v}$  ise  $F_d$  yüzeyi düzdür.

#### 4.4. $E^4$ de Yüzey Örnekleri

Bu bölümde 4-boyutlu Öklid uzayındaki genelleştirilmiş rotasyon yüzeyleri ve meridyen yüzeylerinin conchoidal yüzey olması ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

**Tanım 4.4.1.** ( $E^4$  de genelleştirilmiş rotasyon yüzeyleri)

$M \subset E^4$  yüzeyi

$$X(u, v) = (f(u) \cos av, f(u) \sin av, g(u) \cos bv, g(u) \sin bv) \quad (4.69)$$

parametrelendirmesiyle verilsin. Burada  $f(u)$  ve  $g(u)$  türevlenebilir fonksiyonlar ve  $a, b \in \mathcal{R}$  olmak üzere  $M$  yüzeyi genelleştirilmiş rotasyon yüzeyi olarak adlandırılır.

Ayrıca  $\alpha(u) = (f(u), g(u))$  düzlemsel döngü eğrisi olarak tanımlanırsa

$$a^2 f(u)^2 + b^2 g(u)^2 > 0 \text{ ve } (f'(u))^2 + (g'(u))^2 > 0 \quad (4.70)$$

şartlarını sağlar (Ganchev ve Milousheva 2008).

Böylece, (4.69) parametrelendirmesi ile verilen  $M$  rotasyon yüzeyinin

$$X_d(u, v) = (f_d(u) \cos av, f_d(u) \sin av, g_d(u) \cos bv, g_d(u) \sin bv) \quad (4.71)$$

şeklindeki ifadesine  $X$  parametrelendirmesiyle verilen  $M$  yüzeyinin conchoidalı denir ve  $X_d$  parametrisasyonu ile gösterilip yüzey de  $M_d$  ile ifade edilir.

$M$  yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{1}{((f')^2 + (g')^2)((af)^2 + (bg)^2)} \left( \frac{(f'g'' - f''g')(a^2fg' - b^2gf')}{(f')^2 + (g')^2} - \frac{a^2b^2(f'g - fg')}{a^2f^2 + b^2g^2} \right) \quad (4.72)$$

ve

$$\vec{H} = \left( \frac{(a^2f^2 + b^2g^2)(f'g'' - f''g') + (a^2fg' - b^2gf')((f')^2 + (g')^2)}{2((f')^2 + (g')^2)^{3/2}(a^2f^2 + b^2g^2)} \right) N_1 \quad (4.73)$$

olarak elde edilir (Arslan ve ark. 2011).

Burada, döngü eğrisi polar koordinatlarda  $\alpha(u) = (r(u) \cos u, r(u) \sin u)$  şeklinde verilen düzlemsel bir eğri olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} f(u) &= r(u) \cos u, \\ g(u) &= r(u) \sin u \end{aligned} \quad (4.74)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} f'(u) &= r'(u) \cos u - r(u) \sin u, \\ g'(u) &= r'(u) \sin u + r(u) \cos u \end{aligned} \quad (4.75)$$

ve

$$\begin{aligned} f''(u) &= r''(u) \cos u - 2r'(u) \sin u - r(u) \cos u, \\ g''(u) &= r''(u) \sin u + 2r'(u) \cos u - r(u) \sin u \end{aligned} \quad (4.76)$$

dir. Burada  $a \neq 1$  ve  $b \neq 1$  olmak üzere (4.74) ve (4.76) eşitlikleri (4.72) ve (4.73) de yerine yazılırsa Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$\begin{aligned} K &= \frac{(r'(a^2 - b^2) \cos u \sin u + r(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u))(2(r')^2 + r^2 - rr'')}{r(r^2 + (r')^2)^{3/2}(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)} \\ &+ \frac{a^2b^2}{r^2(r^2 + (r')^2)(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)^2} \end{aligned} \quad (4.77)$$

ve

$$\vec{H} = \left( \frac{(2(r')^2 + r^2 - rr'')}{2(r^2 + (r')^2)^{3/2}} + \frac{(r'(a^2 - b^2) \cos u \sin u + r(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u))}{2r(r^2 + (r')^2)^{1/2}(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)} \right) N_1 \quad (4.78)$$

elde edilir.

Burada,  $\alpha_d(u) = (f_d(u), g_d(u)) = ((r(u) \pm d) \cos u, (r(u) \pm d) \sin u)$  olup gerekli işlemler yapılırsa,  $M_d$  yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$\begin{aligned} K_d &= \frac{(r'(a^2 - b^2) \cos u \sin u + (r \pm d)(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u))(2(r')^2 + (r \pm d)^2 - (r \pm d)r'')}{(r \pm d)(r^2 + (r')^2)^{3/2}(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)} \\ &+ \frac{a^2b^2}{(r \pm d)^2((r \pm d)^2 + (r')^2)(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)^2} \end{aligned} \quad (4.79)$$

ve

$$\vec{H}_d = \left( \frac{(2(r')^2 + (r \pm d)^2 - (r \pm d)r'')}{2((r \pm d)^2 + (r')^2)^{3/2}} + \frac{(r'(a^2 - b^2)\cos u \sin u + (r \pm d)(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u))}{2(r \pm d)((r \pm d)^2 + (r')^2)^{1/2}(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)} \right) N_1 \quad (4.80)$$

olarak bulunur.

Özel olarak burada  $a = b = 1$  alınırsa elde edilen rotasyon yüzeyine Vranceanu yüzeyi denir (Vranceanu 1977).

Böylece Vranceanu yüzeyini Gauss eğriliği

$$K = \frac{(r'(u))^2 - r(u)r''(u)}{((r(u))^2 + (r'(u))^2)^2} \quad (4.81)$$

ve ortalama eğrilik vektörü

$$\vec{H} = \left( \frac{-r(u)r''(u) + 3(r'(u))^2 + 2(r(u))^2}{2((r(u))^2 + (r'(u))^2)^{3/2}} \right) N_1 \quad (4.82)$$

dir (Arslan ve ark. 2011).

**Sonuç 4.4.2.** Vranceanu yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter şart  $r(u) = c_1 e^{c_2 u}$ ,  $c_1, c_2 \in R$  olmasıdır (Arslan ve ark. 2011).

**Sonuç 4.4.3.** Vranceanu yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$r(u) = \frac{\pm 1}{\sqrt{c_1 \sin(2u) - c_2 \cos(2u)}}, \quad c_1, c_2 \in R \text{ olmasıdır (Arslan ve ark. 2011).}$$

Benzer şekilde (4.71) parametrizasyonu kullanılarak Vranceanu yüzeyinin conchoidal olan yüzey ele alınırsa Gauss eğriliği,

$$K_d = \frac{(r'(u))^2 - (r(u) \pm d)r''(u)}{((r(u) \pm d)^2 + (r'(u))^2)^2}, \quad (4.83)$$

ve ortalama eğrilik vektörü de

$$\vec{H}_d = \left( \frac{-(r(u) \pm d)r''(u) + 3(r'(u))^2 + 2((r(u) \pm d))^2}{2((r(u) \pm d)^2 + (r'(u))^2)^{3/2}} \right) N_1 \quad (4.84)$$

olarak elde edilir.

**Sonuç 4.4.4.** Vranceanu yüzeyinin conchoidal yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter şart  $r(u) = \pm d + c_1 e^{c_2 u}$ ,  $c_1, c_2 \in R$  olmasıdır.

**Sonuç 4.4.5.** Vranceanu yüzeyinin conchoidal yüzeyinin minimal olması için gerek ve

yeter şart  $r(u) = \pm d + \frac{\pm 1}{\sqrt{c_1 \sin(2u) - c_2 \cos(2u)}}$ ,  $c_1, c_2 \in R$  olmasıdır.

**Tanım 4.4.6.** ( $E^4$  de meridyen yüzeyleri)

4-boyutlu Öklid uzayında  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  ortonormal çatısı verilsin.  $\{e_1, e_2, e_3\}$  tarafından gerilen orijin merkezli birim küre  $S^2(1)$  olmak üzere bu birim küre üzerinde birim hızlı  $\gamma = \gamma(v)$ ,  $v \in J \subset R$  eğrisi verilsin.  $T = \gamma'$  için  $\gamma$  eğrisinin çatısı  $\{T(v), N(v), \gamma(v)\}$  ile verilir ve

$$\begin{aligned} \gamma'(v) &= T(v), \\ T'(v) &= \kappa(v)N(v) - \gamma(v), \\ N'(v) &= -\kappa(v)T(v) \end{aligned} \quad (4.85)$$

denklemleri sağlanır. Burada  $\kappa(v)$ ,  $\gamma$  eğrisinin küresel eğriliğidir ve  $\kappa_\alpha(u)$  da  $\alpha : \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u))$  meridyen eğrisinin eğriliği olup

$$\kappa_\alpha = \frac{\alpha_1'(u)\alpha_2''(u) - \alpha_1''(u)\alpha_2'(u)}{((\alpha_1'(u))^2 + (\alpha_2'(u))^2)^{3/2}} \quad (4.86)$$

dır.

Bu takdirde

$$M^2 : X(u, v) = \alpha_1(u)\gamma(v) + \alpha_2(u)e_4 \quad (4.87)$$

parametrelendirmesiyle verilen  $M^2$  yüzeyi  $\alpha$  meridyen eğrisinin  $E^4$  de  $Oe_4$  ekseninde etrafında döndürülmesiyle elde edilen  $M^3 \subset E^4$  rotasyonel hiper yüzeyinde yatan bir yüzeydir. Böylece  $M^2$  yüzeyi  $M^3$  ün meridyenlerinden oluştuğundan meridyen yüzeyi adı verilir (Ganchev ve Milousheva 2010). Burada  $\alpha_1(u)$  ve  $\alpha_2(u)$  reel değerli türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece  $\gamma = \gamma(v) = (\gamma_1(v), \gamma_2(v), \gamma_3(v))$  olmak üzere (4.88) parametrelendirmesiyle verilen meridyen yüzeyi

$$M^2 : X(u, v) = (\alpha_1(u)\gamma_1(v), \alpha_1(u)\gamma_2(v), \alpha_1(u)\gamma_3(v), \alpha_2(u)) \quad (4.88)$$

yamasıyla ifade edilir.

**Önerme 4.4.7.**  $M$  yüzeyi (4.88) parametrelendirmesiyle verilen bir meridyen yüzeyi olsun. Bu takdirde  $M$  nin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$K = \frac{\kappa_\alpha(u)\alpha'_2(u)}{\alpha_1(u)\sqrt{(\alpha'_1(u))^2 + (\alpha'_2(u))^2}} \quad (4.89)$$

ve

$$\vec{H} = \frac{\kappa(v)}{2\alpha_1(u)} N_1 + \frac{\kappa_\alpha(u)\alpha_1(u)\sqrt{(\alpha'_1(u))^2 + (\alpha'_2(u))^2} + \alpha'_2(u)}{2\alpha_1(u)\sqrt{(\alpha'_1(u))^2 + (\alpha'_2(u))^2}} N_2 \quad (4.90)$$

dir. Burada  $\kappa_\alpha$  eğriliği (4.86) eşitliğinde tanımlanmıştır (Bulca 2013).

Burada,  $E^3$  de birim hızlı küresel bir eğri  $\gamma(v) = (\sec h v, \cos v \tanh v, \sin v \tanh v)$  ve meridyen eğrisi  $\alpha(u) = (r(u) \cos u, r(u) \sin u)$  olmak üzere, meridyen yüzeyi

$$X(u, v) = (r(u) \cos u \sec h v, r(u) \cos u \cos v \tanh v, r(u) \cos u \sin v \tanh v, r(u) \sin u) \quad (4.91)$$

şeklinde verilir. Bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla,

$$K = \frac{(r' \sin u + r \cos u)(2(r')^2 - rr'' + r^2)}{r \cos u (r^2 + (r')^2)^2} \quad (4.92)$$

ve

$$\vec{H} = \frac{\kappa}{2r \cos u} N_1 + \frac{r(u) \cos u (-rr'' + 2(r')^2 + r^2) + ((r')^2 + r^2)(r' \sin u + r \cos u)}{2r \cos u ((r')^2 + r^2)^{3/2}} N_2 \quad (4.93)$$

dir. Burada,  $\kappa^2 = \frac{4 + \cosh^2 v}{\cosh^2 v}$  dir.

**Sonuç 4.4.8.**  $M$  yüzeyi (4.88) parametrelendirmesiyle verilen bir meridyen yüzeyi olsun. Bu takdirde  $M$  yüzeyinin düz bir yüzey olması için gerek ve yeter şart meridyen eğrisinin  $\alpha(u) = (\alpha_1(u), c)$  şeklinde bir eğri ya da  $M$  yüzeyinin açılabilir bir regle yüzey olmasıdır (Bulca 2013).

Böylece Sonuç 4.4.8. yardımıyla  $M$  yüzeyi (4.91) parametrelendirmesiyle verilen meridyen yüzeyi olmak üzere aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 4.4.9.**  $M$  yüzeyi (4.91) parametrelendirmesiyle verilen bir meridyen yüzeyi olsun.

Bu takdirde  $M$  yüzeyinin düz bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yarıçap fonksiyonunun  $r(u) = \frac{1}{c_1 \sin u - c_2 \cos u}$  olmasıdır. Burada  $c_1, c_2$  reel sabit sayılardır.



**İspat.** (4.91) yaması ile verilen  $M$  düz bir yüzey olsun. Bu takdirde  $K = 0$  olmasından  $rr'' - 2(r')^2 - r^2 = 0$  veya  $r' \sin u + r \cos u = 0$  dir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümünden  $r(u) = \frac{1}{c_1 \sin u - c_2 \cos u}$  ve  $r(u) = \frac{c}{\sin u}$  olup istenilen sonuç elde edilir.

**Tanım 4.4.10.**  $\tilde{\alpha} : \tilde{\alpha}(u) = (\tilde{\alpha}_1(u), \tilde{\alpha}_2(u)) = ((r(u) \pm d) \cos u, (r(u) \pm d) \sin u)$  eğrisi bir meridyen eğrisi olmak üzere

$$\tilde{M}^2 : \tilde{X}(u, v) = \tilde{\alpha}_1(u)\gamma(v) + \tilde{\alpha}_2(u)e_4 \quad (4.94)$$

parametrelendirmesiyle verilen  $\tilde{M}^2$  yüzeyi  $M^2$  meridyen yüzeyinin conchoidal yüzeyi olur. Böylece (4.87) parametrelendirmesiyle verilen meridyen yüzeyinin conchoidalı

$$\tilde{M}^2 : \tilde{X}(u, v) = (\tilde{\alpha}_1(u)\gamma_1(v), \tilde{\alpha}_1(u)\gamma_2(v), \tilde{\alpha}_1(u)\gamma_3(v), \tilde{\alpha}_2(u)e_4) \quad (4.95)$$

yamasıyla ifade edilir.

**Önerme 4.4.11.**  $\tilde{M}$  yüzeyi (4.91) parametrelendirmesiyle verilen bir meridyen yüzeyinin conchoidalı olsun. Bu takdirde  $\tilde{M}$  nin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik vektörü sırasıyla

$$\tilde{K} = \frac{(r'(u) \sin u + (r(u) \pm d) \cos u) + (-(r(u) \pm d)r''(u) + 2(r'(u))^2 + (r(u) \pm d)^2)}{(r(u) \pm d) \cos u ((r'(u))^2 + (r(u) \pm d)^2)^2} \quad (4.96)$$

ve

$$\tilde{H} = \frac{\kappa}{2(r \pm d) \cos u} \tilde{N}_1 + \left( \frac{-(r \pm d)r'' + 2(r')^2 + (r \pm d)^2}{2((r')^2 + (r \pm d)^2)^{3/2}} + \frac{r' \sin u + (r \pm d) \cos u}{2(r \pm d) \cos u ((r')^2 + (r \pm d)^2)^{1/2}} \right) \tilde{N}_2 \quad (4.97)$$

dır. Burada,  $\kappa^2 = \frac{4 + \cosh^2 v}{\cosh^2 v}$  dir.

**İspat.** Burada  $\tilde{\alpha}(u) = ((r(u) \pm d) \cos u, (r(u) \pm d) \sin u)$  olarak alınırsa eğrinin birinci ve ikinci mertebeden türevleri hesaplanıp (4.89) ve (4.90) da yerine yazılırsa istenilen sonuç bulunur.

**Sonuç 4.4.12.**  $M$  yüzeyi (4.91) parametrelendirmesiyle verilen bir meridyen yüzeyi olsun. Bu takdirde  $M$  yüzeyinin düz bir yüzey olması için gerek ve yeter şart yarıçap fonksiyonunun  $r(u) = \pm d + \frac{1}{c_1 \sin u - c_2 \cos u}$  olmasıdır. Burada  $c_1, c_2$  reel sabit sayılardır.

**İspat.** (4.91) yaması ile verilen  $M$  düz bir yüzey olsun. Bu takdirde  $K = 0$  olmasından  $(r \pm d)r'' - 2(r')^2 - (r \pm d)^2 = 0$  veya  $r' \sin u + (r \pm d) \cos u = 0$  dır. Bu diferansiyel denklemlerin çözümünden  $r(u) = \pm d + \frac{1}{c_1 \sin u - c_2 \cos u}$  ve  $r(u) = \pm d + \frac{c}{\sin u}$  olup istenilen sonuç elde edilir.

## 5. SONUÇLAR

Bu yüksek lisans tezinde literatürde tanımlanmış olan conchoid eğrileri ele alınmıştır. Düzlemde conchoid eğrileri ve 3-boyutlu uzayda conchoidal yüzey kavramları kaynaklarda verilmiş olup bu tez çalışmasında bunlardan faydalanarak 3-boyutlu uzayda conchoid eğrileri tanımlanmış ve eğrilikleri hesaplanmıştır. Ayrıca 4-boyutlu uzayda conchoidal yüzey tanımı verilip bu yüzeylerin düz ve minimal olması ile ilgili sonuçlar verilmiştir. Bu eğri ve yüzeylere örnekler verilip bunların grafikleri çizdirilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Albano, A., Roggero, M., 2010.** Conchoidal transform of two plane curves. *AAECC*, 21: 309-328.
- Arslan, K., Bayram, B.K., Bulca, B., Öztürk, G., 2011.** Generalized rotation surfaces in  $\mathbb{R}^4$ . *Results in Math.*, 61: 315-327.
- Azzam, R.M.A., 1992.** Limaçon of Pascal locus of the complex refractive indices of interfaces with maximally flat reflectance-versus-angle curves for incident unpolarized light. *J. Opt. Soc. Am. Opt. Imagen Sci. Vis.*, 9: 957-963.
- Bulca B. 2013.**  $E^4$  deki yüzeylerin bir karakterizasyonu, *Doktora Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.
- Chen B. Y., 1973.** Geometry of Submanifolds, Dekker, New York, USA, 192 pp.
- Dede, M., 2013.** Spacelike conchoid curves in the Minkowski plane. *Balkan Journal of Mathematics*, 1: 28-34.
- Dürer, A., 1525.** Underweysung der Messung, ETH-Bibliothek Zürich, Switzerland, 217 pp.
- Ganchev, G., Milousheva. V., 2008.** Minimal surfaces in the four dimensional Euclidean space. ArXiv:0806.3334v1.
- Ganchev, G., Milousheva. V., 2010.** Invariants and Bonnet-type theorem for surfaces in  $\mathbb{R}^4$ . *Cent. Eur. J. Math.*, 8(6): 993-1008.
- Glaeser, G., Stachel, H., Odehnal, B., 2016.** The universe of conics, Springer Spektrum, Vienna, Austria, 488 pp.
- Gray, A., 1997.** Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica, Second Edition, CCR Press, USA, 1016 pp.
- Gruber, D., Peternell, M., 2013.** Conchoid surfaces of quadrics, *Journal of Symbolic Computation*, 59: 36-53.
- Hacısalıhoğlu H. H. , 1983.** Diferensiyel geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, Malatya.
- Hickerson, K.P., 2010.** Apparatus for redirecting parallel rays using rigid translation, US Patent, US007677241B2.
- Kang, M., 2004.** Hip joint center location by fitting conchoid shape to the acetabular rim images, *Conference Proceedings Engineering in Medicine and Biology Society*, 6: 4477-4480.
- Kerrick, A.H., 1959.** The limaçon of Pascal as a basis for computed and graphic methods of determining astronomic positions, *J. Inst. Navigat*, 6, 5: 310-316.
- Lawrence, J.D., 1972.** A catalog of special plane curves. Dover, New York, USA, 218 pp.
- Lin., W., Yu, Z., Yuang, E.K.N., Luk, K.M., 2001.** Conchoid of Nicomedes and Limaçon of Pascal as electrode of static field and a waveguide of high frequency wave, *Prog. Electromagnet. Res. Symp. PIER*, 30: 273-284.
- Lockwood, E.H., 1961.** A book of curves. Cambridge University Press, 198 pp.
- Mello, L. F., 2003.** Mean directionally curved lines on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^4$ , *Publ. Math.*, 47: 415-440.
- Mello, L. F., 2009.** Orthogonal asymptotic lines on surfaces immersed in  $\mathbb{R}^4$ , *Rocky Mountain J. Math.*, 39(5): 1597-1612.
- Menschik, F., 1997.** The hip joint as a conchoid shape, *J. Biomech.*, 30(9): 971-973.
- Odehnal, B., 2017.** Generalized conchoids, *KoG*, 21: 35-46.
- Odehnal, B., Hamann, M., 2012.** Conchoidal ruled surfaces. 15. International Conference on Geometry and Graphics, 1-5 August, 2012, Montreal, Canada.

- O'Neill, B., 1997.** Elementary differential geometry, Academic Press, USA, 520 pp.
- Peternell, M., Gotthart, L., Sendra, J., Sendra, J. R., 2015.** Offsets, conchoids and pedal surfaces, *Journal of Geometry*, 106: 321-339.
- Peternell, M., Gruber, D., Sendra, J., 2011.** Conchoid surfaces of rational ruled surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 28: 427-435.
- Peternell, M., Gruber, D., Sendra, J., 2013.** Conchoid surfaces of spheres, *Computer Aided Geometric Design*, 30: 35-44.
- Sendra, J. R., Sendra, J., 2008.** An algebraic analysis of conchoids to algebraic curves, *AAECC*, 19: 413-428.
- Sendra, J., Sendra, J.R., 2010.** Rational parametrization of conchoids to algebraic curves, *AAECC*, 21: 285-308.
- Sultan, A., 2005.** The Limaçon of Pascal: mechanical generating fluid processing, *J. of Mechanical Engineering Science*, 219, 8: 813-822.
- Szumlowicz, F., 1996.** Conchoid of Nicomedes from reflections and refractions in a cone, *Am. J. Phys.*, 64: 467-471.
- Yates, R.C., 1947.** A handbook on curves and their properties, Edwards Brothers INC, Ann Arbor, Michigan, USA, 245 pp.

## EKLER

**EK 1**  $E^3$  de v-parametrelili düz ve minimal conchoidal yüzey

**EK 2**  $E^3$  de u-parametrelili düz ve minimal conchoidal yüzey

### EK 1 $E^3$ de v-parametrelili düz ve minimal conchoidal yüzey

> #v-parametrelili#

> ode1:=diff(r(v),v)\*sin(v)+r(v)\*cos(v)=0;

$$ode1 := \left( \frac{d}{dv} r(v) \right) \sin(v) + r(v) \cos(v) = 0$$

> dsolve(ode1);

$$r(v) = \frac{-C1}{\sin(v)}$$

> ode2:=2\*diff(r(v),v)^2+r(v)^2-r(v)\*diff(r(v),v,v)=0;

$$ode2 := 2 \left( \frac{d}{dv} r(v) \right)^2 + r(v)^2 - r(v) \left( \frac{d^2}{dv^2} r(v) \right) = 0$$

> dsolve(ode2);

$$r(v) = \frac{1}{-C1 \sin(v) - C2 \cos(v)}$$

## EK 2 $E^3$ de u-parametrelili düz ve minimal conchoidal yüzey

> #u-parametrelili#

> ode3:=c^2\*(2\*diff(r(u),u)^2+r(u)^2\*c^2-r(u)\*diff(r(u),u,u))- (1-c^2)\*diff(r(u),u)^2=0;

$$ode3 := c^2 \left( 2 \left( \frac{d}{du} r(u) \right)^2 + r(u)^2 c^2 - r(u) \left( \frac{d^2}{du^2} r(u) \right) \right) - (1 - c^2) \left( \frac{d}{du} r(u) \right)^2 = 0$$

> dsolve(ode3);

$$r(u) = ((2c^2 - 1) (-2 \sin(\sqrt{2c^2 - 1} u) \_C1 \_C2 \cos(\sqrt{2c^2 - 1} u) + \sin(\sqrt{2c^2 - 1} u) \_C1^2 - \frac{c^2}{2(2c^2 - 1)}) - \_C2^2 \sin(\sqrt{2c^2 - 1} u)^2 + \_C2^2) / c^4$$

> ode4:=(3\*diff(r(u),u)^2+2\*r(u)^2\*c^2-r(u)\*diff(r(u),u,u))=0;

$$ode4 := 3 \left( \frac{d}{du} r(u) \right)^2 + 2 r(u)^2 c^2 - r(u) \left( \frac{d^2}{du^2} r(u) \right) = 0$$

> dsolve(ode4);

$$r(u) = \frac{\sqrt{(-C1 \sin(2cu) - C2 \cos(2cu))c}}{-C1 \sin(2cu) - C2 \cos(2cu)},$$

$$r(u) = -\frac{\sqrt{(-C1 \sin(2cu) - C2 \cos(2cu))c}}{-C1 \sin(2cu) - C2 \cos(2cu)}$$



## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : S. Neslihan ORUÇ  
Doğum Yeri ve Tarihi : Osmangazi/ BURSA, 02.04.1991  
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu  
Lise : Çelebi Mehmet Lisesi, 2005-2009  
Lisans : Uludağ Üniversitesi, 2010-2016

İletişim (e-posta) : s.neslhn.oruc@gmail.com

Yayınları :

1. **Bulca, B., Oruç, S.N. and Arslan,K., 2018.** Conchoid curves and surfaces in Euclidean 3- Space, *Balıkesir Üniv. Fen Bil. Dergisi*, 20(2): 467-481.
2. **Bulca, B., Oruç, S.N., Arslan,K., 2018.** Conchoid curves and surfaces in Euclidean 3- Space. 15<sup>th</sup> International Geometry Symposium, Amasya University, Amasya, Turkey, 3-6 July 2017.

BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
TEZ ÇOĞALTMA VE ELEKTRONİK YAYIMLAMA İZİN FORMU

Yazar Adı Soyadı	S. Neslihan ORUÇ
Tez Adı	Öklid Uzayında Conchoid Eğriler ve Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Tez Türü	Yüksek Lisans
Tez Danışman(lar)ı	Doç. Dr. Betül BULCA
Çoğaltma (Fotokopi Çekim) izni	<input checked="" type="checkbox"/> Tezimden fotokopi çekilmesine izin veriyorum <input type="checkbox"/> Tezimin sadece içindekiler, özet, kaynakça ve içeriğinin % 10 bölümünün fotokopi çekilmesine izin veriyorum <input type="checkbox"/> Tezimden fotokopi çekilmesine izin vermiyorum
Yayımlama izni	<input checked="" type="checkbox"/> Tezimin elektronik ortamda yayımlanmasına izin veriyorum

Hazırlamış olduğum tezimin belirttiğim hususlar dikkate alınarak, fikri mülkiyet haklarım saklı kalmak üzere Bursa Uludağ Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı tarafından hizmete sunulmasına izin verdiğimi beyan ederim.

Tarih :

İmza :

