

YÜZEYLERİN KONVOLÜSYONU

Selin AYDÖNER

Yüksek Lisans Tez Sınavı Sunumu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YÜZEYLERİN KONVOLÜSYONU

Selin AYDÖNER

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu çalışmada iki konveks objenin Minkowski toplamlarından hareket ederek \mathbb{R}^3 teki iki yüzeyin konvolüsyonu incelenmiştir.

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde sonraki bölüm için gerekli olan kuramsal temeller verilmiştir.

Üçüncü bölümde \mathbb{R}^3 teki paraboloid yüzeyi ile bir keyfi parametrelili yüzeyin konvolüsyonu ile ilgili yapılan hesaplamalar verilmiştir. Ayrıca bu yüzeylerin Gauss eğrilikleri hesaplanması gösterilmiştir. Bununla birlikte konvolüsyon yüzeyinin Gauss eğriliği karakterize edilmiştir.

Dördüncü bölümde \mathbb{R}^3 teki paraboloid yüzeyi sırasıyla Monge yaması ile verilen graf yüzeyi ve dönel yüzey ile konvolüsyonları incelenmiştir. Orijinal sonuç olarak bu konvolüsyon yüzeylerinin Gauss eğrilikleri hesaplanmıştır. Ayrıca bu sonuçları destekleyici bazı örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde diğer bölümlerde elde edilen sonuçlar tartışılmış ve sonuç ve öneriler dile getirilmiştir.

1. GİRİŞ

2 ve 3 boyutlu uzaylarda Minkowski toplamları, matematiksel morfoloji, bilgisayar grafikleri, konveks geometri ve hesaplamalı geometri dallarında oldukça sık kullanılmaktadır. A ve B kümeleri için A ve B nin Minkowski toplamı

$$A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \quad (1.1)$$

ile gösterilir. Bu toplam, $\forall a \in A$ vektörleri için B kümesinin ötelenmesi ile elde edilir ya da $\forall b \in B$ vektörleri için A kümesinin ötelenmesi ile elde edilir. Tanımda herhangi türevlenebilirlik ifade edilmemektedir. Fakat ∂A ve ∂B sınırlarının parçalı türevlenebilir olması gerekmektedir. Böylece $A \oplus B$ Minkowski toplamının sınırı $\partial(A \oplus B)$ olmak üzere bu sınır bölgesi

$$x' = a + x, a \in A$$

öteleme yardımıyla elde edilen B nin zarfı içinde kalacaktır.

Bu çalışmada geometrik cisimlerin sınırları göz önünde bulundurulacağı için Minkowski toplamı da sınır yüzeyi ile temsil edilecektir. Bir $a \in A$ vektörüne B nin sınır noktaları ile öteleme uygulanır. 2 boyutlu durumda A ve B kümelerinin sınırları A ve B eğrileri olsun. Bu taktirde $A \oplus B$ toplamı $a + B$ ve $b + A$ eğri aileleri tarafından örtülür. Böylece, $a + B$ ailesi a , A da değişikçe B ötelenmesiyle elde edilen kongruent eğrilerden oluşur. Benzer biçimde $A \oplus B$ toplamı $b \in B$ noktasının hareketi yardımıyla oluşan $b + A$ ailesiyle örtülür. Bu iki eğri ailesi bir zarf (envelope) oluşturur. Buna A ile B nin konvolüsyonu denir ve $A * B$ ile gösterilir. Bu, birkaç bileşenden oluşabilir. $A * B$ konvolüsyonunun dış sınırı A ve B nin $\partial(A \oplus B)$ sınırı olacaktır (Peternell ve Steiner 2007). Bununla birlikte, 2 boyutlu durumda polinomlar ve türevlenebilir eğriler ((Farouki 2003, (Kaul ve Farouki 1995), (Kohler ve Spreng 1995), (Lee ve ark. 1998)) da çalışılmıştır.

İki konveks cismin Minkowski toplamı iyi bilinen bir işlemdir bakınız (O'Rourke 1994). Konveks olmayan durumda ise input politopları konveks bileşenlerine ayrılarak hesaplanır (Halperin 2002). Bu durumda konveks olmayan iki objenin Minkowski toplamı, tüm konveks parça çiftlerinin Minkowski toplamı hesap elde edilir. Sonuç olarak, bu parçalı Minkowski toplamları birbirlerine bağlanacaktır. (Varadhan ve

Monocha 2004) çalışmasında bu kavramlar, karmaşık polihedral objelerin Minkowski toplamında kullanılmıştır.

Geometrik cisimleri sınırları ile çalışmak bize büyük avantajlar sağlamaktadır. Ele alınan cisimlerin sınırları iki türlü ifade edilir: Bu objeler eksplisit olarak parametrik ifade edilebilir ya da üçgensel ya da poliyüzeylerle ifade edilir (Mühlthaler ve Pottmann 2003).

Yüzeylerin Konvolüsyonu

Bir $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin bir parametrizasyonu $a(u, v)$ ile tanımlansın. Böylece

$$x' = a(u, v) + x$$

ötelemelerinin 2 parametrelili bir ailesi elde edilir.

$$a_u = \frac{\partial a}{\partial u}, a_v = \frac{\partial a}{\partial v}$$

lineer bağımsız kısım türev vektörleri elde edilir. Böylece

$$a(u, v) = a(u(t), v(t))$$

M üzerinde bir eğri olmak üzere

$$x' = a(u, v) + x$$

ötelemelerinin 1 parametrelili ailesine karşılık gelir. Buradan,

$$v(t) = a'(t) = a_u u_t + a_v v_t$$

hız vektör alanı x noktasından bağımsızdır. Burada sadece sınır bölgelerinde işlem yapıldığı için, $a \in M$ ötelemesini her $b \in N$ noktasına uygulanmamaktadır. Fakat a, b nokta çiftlerini ele alındığı için $a + b$ noktası $a + N$ yüzeylerinin 2 parametrelili ailesinin zarfının bir sınır noktasıdır. Buradan,

$$x' = a(u, v) + x$$

öteleme hareketi verildiğinde $b \in N$ noktası için a_u ve a_v N ye b noktasında teğet ise sadece $b \in N$ noktası zarfa katkıda bulunacaktır. Diğer bir deyişle, a, b noktalarındaki teğet düzlemle π_a ve π_b birbirine paralel ise $a + b$ noktası zarfın bir noktası olacaktır. M ve N yüzeyleri yönlendirilebilir olduklarından n_a ve n_b birim normalleri de yönlendirilebilirdir. Böylece $M * N$ konvolüsyon yüzeyi

$$\underline{M * N = \{a + b | n_a = n_b; a \in M, b \in N\}} \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlanır. Bununla birlikte $M * N$ konvolüsyonu yönlendirilebilir birim normal vektörleri yardımıyla tanımlandığı için $M * N$ nin kendisi yönlendirilmiş bir zarftır. Eğer M, N yüzeyleri A, B kümelerinin sınırları ise bu taktirde $\partial(A \oplus B), A \oplus B$ Minkowski toplamının sınırları, aslında $M * N$ nin bir alt kümesidir (Peternell ve Steiner 2007). Yüzeylerin Konvolüsyonlarının bilgisayar grafik tasarımları için bakınız (Blumenthal ve ark. 1991) ve (Sır ve ark. 2006). Eğriler ve yüzeylerin Konvolüsyonlarla temsil edilmesi Lavicka ve arkadaşları tarafından 2010 yılında yapılan çalışmada verilmiştir.

Parametrik Yüzeylerin Zarflarının Hesaplanması

$M, N \subset \mathbb{R}^3$ türevlenebilir, yönlendirilmiş yüzeyleri sırasıyla

$$a(u, v): G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3; b(s, t): H \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow N \subset \mathbb{R}^3$$

parametrizasyonları ile verilsin. M ve N nin birim normalleri $n_a(u, v)$ ve $n_b(s, t)$ ile tanımlansın. Ayrıca a ile tanımlanan ötelemelerle elde edilen N nin zarfı, diğer bir deyişle $M * N$ konvolüsyon yüzeyi için $\varphi: H \rightarrow G; (s, t) \rightarrow (u, v)$ yeniden parametrizasyon (parametre değişimi) $n_a(\varphi(s, t)) = n_b(s, t)$ biçiminde verilsin. Bu dönüşüm bir lokal difeomorfizm olup, bire bir olmak zorunda değildir. Böylece $M * N$

$$\underline{c(s, t) = a(\varphi(s, t)) + b(s, t)} \quad (1.3)$$

parametrizasyonu ile tanımlı olacaktır (Peternell ve Steiner 2007). İki kürenin konvolüsyonu yine bir küredir (Lee ve ark. 1998). Bununla birlikte bir rasyonel yüzeyle bir paraboloidin konvolüsyonu (Peternell ve Manhart 2003) te verilmiştir. Bener özellikle

daha geniş yüzey sınıfları için de uygulanabilir (Sampoli ve ark. 2006). İki regle yüzeyin konvolüsyonu (Mühlthaler ve Pottmann 2003) da verilmiştir. Eğer M düzlemsel ise n_a sabittir. Eğer $n_b(s, t)$ birim vektörü S^3 birim küresinin bir parametrizasyonu ise, bu takdirde en azından bir $b_0 = b(s, t)$ noktası vardır öyle ki $n_b(s, t) = n_a$ dır. Diğer bir deyişle b_0 noktası her bir $a \in M$ noktasına karşılık gelir. Böylece $M * N$ konvolüsyonu düzlemsel olup, $a(u, v) + b_0$ parametrizasyonu ile ifade edilir. Eğer M bir genişletilebilir yüzey ise bu takdirde $n_a(u, v)$ normal vektörü S^2 de bir eğri belirtir. Genelliği bozmadan bu vektör $n_a(u)$ ile gösterilebilir. $a(u_u, u)$ parametrizasyonu M da bir doğru tanımlar. Eğer, $n_b(s, t)$ injektif ise bu tadtirde $b(s(u), t(u))$ parametrizasyonu N de bir eğri belirtir. Bununla birlikte $a(u_0, v)$ nin tüm noktaları $b(s(u_0), t(u_0))$ tek bir noktasına karşılık geleceğinden $a(u_0, v) + b(s(u_0), t(u_0))$ toplamı $M * N$ de bir doğruya karşılık gelir. Bu doğru üzerindeki noktalar $n_a(u_0)$ birim normal vektörlerini işaret eder. Böylece her $(u, v) \in G$ için bu doğru olacağından $M * N$ bir genişletilebilir yüzey olacaktır (Peternell ve Steiner 2007).

Klasik diferansiyel geometride I. temel form ve II. Temel form katsayıları yüzeyler hakkında diferansiyel geometrik bilgiler vermektedir. Gauss eğrilik yüzeylerin intrinsik özelliklerinden biridir. Bu eğrilik yüzeyin izometrik invaryantlarından (Carmo 1976). Bu özellikler, Gauss eğriliği diferansiyel geometrisinin önemli kavramlarından biri haline getirir. Özellikle sabit Gauss eğrilikli yüzeyler, yüzey modellemelerinde önemli yer teşkil etmektedir (Velickovic 2009). Sabit negatif Gauss eğrilikli yüzeyler pseudo-küre olarak bilinir. Sabit pozitif Gauss eğrilikli yüzeyler ise küresel olanlardır.

Rotasyon yüzeyleri diferansiyel geometrinin önemli yüzey sınıfındandır. \mathbb{R}^3 te bu yüzeyler dönel yüzeyler olarak ilinir. Sabit negatif Gauss eğrilikli yüzeyler (Velickovic 2005) de sınıflandırılmıştır. Sabit pozitif Gauss eğrilikli yüzeylerin bir sınıflandırması için bakınız (Kılıç ve ark. 2018).

Diferansiyel geometrinin diğer bir önemli yüzey sınıfı digital graflardır. Bu yüzeyler analizde zarf şeklinde iki değişkenli fonksiyonların grafikleri oldukları için basit yüzeyler olarak bilinirler. Eğer

$$f(u, v) = f(u) + g(v)$$

şeklinde seçilirse elde edilen yüzeye öteleme yüzeyi denir. Öteleme yüzeyleri mimaride çatı kaplama yüzeyleri olarak da bilinir (Glymph ve ark. 2004). H. Scherk 1835 yılında minimal öteleme yüzelerinin bir parametrizasyonunu elde etmiştir.

Bu çalışmada \mathbb{R}^3 teki paraboloid yüzeyi ile öteleme yüzeyinin konvolüsyon yüzeyinin bir karakterizasyonu verilmiştir. Elde edilen konvolüsyon yüzeyinin Gauss eğriliği hesaplanmıştır. Bulguları destekleyen bazı örnekler verilmiştir. Daha sonraki alt bölümlerde sırasıyla Monge yaması ve dönel yüzey ile paraboloidin konvolüsyonu hesaplanmıştır. Gauss eğriliği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçları destekleyici örnekler verilmiştir. Ayrıca Maple programı yardımıyla bu yüzeylerin grafikleri çizilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel yüzeylerin I. temel formu, II. Temel formu ve bunlar yardımıyla yüzeylerin Gauss eğriliğinin hesaplanması ile ilgili tanımlar ve bazı bilinen sonuçlar verilmiştir. Daha sonraki kısımlarda dönele yüzeyler ve Monge yaması ile verilen yüzeylerin özellikleri tanıtılmıştır. Bu yüzeylerin Gauss eğrilikleri hesaplanması ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

2.1. Temel Formlar

M yüzeyi $x: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yaması ile verilsin. M nin $p \in x(u, v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, x_u ve x_v tanjant vektörleri ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece M nin I. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \langle x_u, x_u \rangle, \\ F &= \langle x_u, x_v \rangle, \\ G &= \langle x_v, x_v \rangle \end{aligned} \tag{2.1}$$

olmak üzere M nin I. temel formu

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.2}$$

eşitliği ile hesaplanır. Bununla birlikte (2.1) yardımıyla

$$\|x_u \times x_v\|^2 = EG - F^2 \tag{2.3}$$

dir. Eğer $x_u \times x_v \neq 0$ is $x(u, v)$ e yüzey yaması regülerdir denir (Gray 1993). Bu çalışmada aksi söylenmekte ve $x(u, v)$ yaması regüler kabul edilip

$$EG - F^2 = W^2 \tag{2.4}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.1. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $x(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. \mathbb{R}^3 ün Riemann koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. M nin teğet vektör alanları uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$\forall X_i, X_j \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş Riemann koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin ikinci temel formu

$$h(X_i, X_j) = \tilde{\nabla}_{X_i} X_j - \nabla_{X_i} X_j \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlanır (Chen 1973).

Literatürde (2.5) eşitliği Gauss denklemi olarak bilinir.

Tanım 2.2. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $x(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu taktirde \vec{N} , M nin normal vektör alanı ve $X_i \in \chi(M)$ ise M nin şekil operatörü

$$A_N X_i = \tilde{\nabla} x_i N \quad (2.6)$$

biçiminde tanımlanır (Chen 1973).

Literatürde (2.6) eşitliği Weingarten denklemi olarak bilinir.

Tanım 2.3. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $x(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. Bu taktirde $x(u, v)$ nin ikinci kısmi türevleri x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} olmak üzere M nin II. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} e &= \langle x_{uu}, N \rangle \\ f &= \langle x_{uv}, N \rangle \\ g &= \langle x_{vv}, N \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır (Gray 1993).

Herhangi $X_i, X_j \in \chi(M)$ için

$$\langle A_N X_i, X_j \rangle = \langle h(X_i, X_j), N \rangle \quad (2.8)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \langle A_N X_u, X_u \rangle &= \langle h(X_u, X_u), N \rangle = e \\ \langle A_N X_u, X_v \rangle &= \langle h(X_u, X_v), N \rangle = f \\ \langle A_N X_v, X_v \rangle &= \langle h(X_v, X_v), N \rangle = g \end{aligned} \quad (2.9)$$

olacaktır.

Tanım 2.4. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $x(u, v)$ regüler yaması ile verilsin. M nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \quad (2.10)$$

ile hesaplanır. Eğer $K = 0$ ise M yüzeyi düzdür denir.

2.2. Dönel Yüzeyler

Tanım 2.5. $C: \alpha(u) = (f(u), g(u))$ regüler düzlemsel eğri olsun. C nin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzey

$$x(u, v) = (f(u), g(u)\cos v, g(u)\sin v) \quad (2.11)$$

parametrizasyonu ile tanımlanır.

(Arslan ve ark. 2017) çalışmasında C nin birim hızlı olması durumunda aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Önerme 2.6. $M \subset \mathbb{R}^3$ (2.11) yaması ile verilen bir dönel yüzey olsun. M nin Gauss eğriliği

$$K = \frac{g''(u)}{g(u)} \quad (2.12)$$

dir. M nin düze olması için gerek ve yeter şart $f_2(u) = c_1u + c_2$ olmasıdır.

Velickovic aşağıdaki sonucu ispatlanmıştır.

Önerme 2.7. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (2.11) parametrizasyonu ile verilen rotasyonel yüzeyi olsun. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- i. $C: \alpha(u) = (\pm u + d_1, c_2)$ ise dönel yüzey dik dairesel silindirdir.
- ii. $C: \alpha(u) = (d_1, \pm u + c_2)$ ise dönel yüzey düzlemin bir parçasıdır.
- iii. $C: \alpha(u) = (c_1u, d_1u)$ ise dönel yüzey dairesel konidir.

Sabit negatif eğrilikli yüzeyler için (Velickovic 2015) de aşağıdaki sonuç verilmiştir.

Önerme 2.8. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (2.11) regüler yama ile verilsin. M yüzeyi $c \neq 0$ için $K = \frac{1}{c^2}$ sabit eğrilikli ise

$$f_2(u) = c_1 \cosh\left(\frac{u}{c}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{u}{c}\right) \quad (2.12)^*$$

dir. Bununla birlikte

- i. $c_1 = -c_2 = \lambda \neq 0$ ise $f_2(u) = \lambda e^{-\frac{u}{c}}$ olup, oluşan dönel yüzey parabolik pseudo-küreseldir.
- ii. $c_2 = 0, c_1 = \lambda \neq 0$ ise $f_2(u) = \lambda \cosh\left(\frac{u}{c}\right)$ olup, oluşan dönel yüzey hiperbolik pseudo-küreseldir.
- iii. $c_1 = 0, c_2 = \lambda \neq 0$ ise $f_2(u) = \lambda \sin\left(\frac{u}{c}\right)$ olup, oluşan dönel yüzey eliptik pseudo-küreseldir.

(Arslan ve ark 2017) çalışmasında aşağıdaki örneği vermiştir.

Örnek 2.9. Profil eğrisi

$$C: \alpha(u) = \left(\int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-\frac{2u}{c}}} du, \lambda e^{-\frac{u}{c}} \right) \quad (2.14)$$

parametrizasyonu ile verilen traktriks eğrisi ise elde edilen dönel yüzey

$$x(u, v) = \left(\int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{c^2} e^{-\frac{2u}{c}}} du, \lambda e^{-\frac{u}{c}} \cos v, \lambda e^{-\frac{u}{c}} \sin v \right) \quad (2.15)$$

parametrizasyonu ile verilen bir Beltrami yüzeyidir. Beltrami yüzeyleri bir çeşit parabolik pseudo-küresel yüzeylerdir. 1868 yılında Eugenio Beltrami bu yüzeylerin hiperbolik geometri için bir model teşkil ettiğini göstermiştir. Bu nedenle pseudo-küresel yüzeyler

$$K = \frac{-1}{c^2}$$

negatif Gauss eğrilikli yüzeyler olarak bilinir.

2.3. Monge Yaması ile Verilen Yüzeyler

\mathbb{R}^3 te digital graf olarak bilinen yüzeyler, analizde $z = f(x, y)$ biçiminde, iki değişkenli fonksiyonlar ile tanımlanan basit yüzeylerdir. Bu yüzeyler diferansiyel geometride

$$x(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad (2.17)$$

biçiminde Monge yaması ile verilen yüzeyler olarak bilinir (Gray 1993). Bu yüzeylerin I. temel form katsayıları

$$E = 1 + f_u^2$$

$$F = f_u f_v$$

$$G = 1 + f_v^2$$

ve II. temel form katsayıları

$$e = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

$$f = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

$$g = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

dir. Böylece Gauss eğriliği

$$K = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2} \quad (2.18)$$

dir (Gray 1993).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde A ve B kümeleri \mathbb{R}^n nin konveks alt kümeleri olmak üzere A ve B kümelerinin Minkowski toplam $A \oplus B$ tanıtılmıştır. Temel olarak (Peternell ve Manhart 2003) çalışması ele alınmıştır. A ve B kümelerinin Minkowski toplamı yardımıyla sırasıyla $M = \partial A$ ve $N = \partial B$ sınırları olmak üzere $A \oplus B$ nin sınırı $\partial(A \oplus B)$ ifadesi $M * N$ konvolüsyon yüzeyi olarak ele alınmıştır.

3.1. Minkowski toplamı

A ve B n -boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^n nin birer alt kümeleri olsun. Bu kümelerin *Minkowski toplamı*

$$A \oplus B = \{a + b | a \in A, b \in B\} \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanır. Burada a ve b sırasıyla A ve B deki noktalarının pozisyon vektörleridir. Özel olarak $n = 2$ ve $n = 3$ için Minkowski toplamı matematiksel morfoloji, bilgisayar grafikleri ve konveks geometri gibi çeşitli alanlarda kullanılmaktadır. Örneğin; polihedral şekillerin Minkowski toplamları Lavicka ve arkadaşlarının 2010 da ve Peternell ve Steiner'in 2007 de yaptıkları çalışmalarda ele alınmıştır. A ve B kümeleri \mathbb{R}^n nin konveks alt kümeleri olmak üzere A ve B kümelerinin sınırları sırasıyla

$$M = \partial A, N = \partial B$$

ile gösterilsin. Bu alt kümelerin Minkowski toplamı olan $A \oplus B$ nin sınırı $\partial(A \oplus B)$ bize $M * N$ konvolüsyon yüzeyini verir. Ancak, konveks olmayan nesnelere için bu özellik geçerli değildir. Genel olarak, A ve B nin Minkowski toplamının sınırı $\partial(A \oplus B)$ bize B nin

$$x' = a + x, a \in A$$

ötelemesine göre oluşturulan zarfının içinde yattığını gösterir (Blommenthal ve Shoemake 1991).

$M \subset \mathbb{R}^3$ ve $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyleri sırasıyla $x = x(u, v)$ ve $y = y(s, t)$ regüler yamalarıyla verilsin. Bu yüzeylerin normal vektörleri sırasıyla $\vec{n}_M(u, v)$ ve $\vec{n}_N(s, t)$ ile gösterilsin. Böylece, $M * N$ konvolüsyon yüzeyi x ve y noktalarının pozisyon vektörlerinin toplamı yardımıyla

$$M * N = \{x + y | x \in M, y \in N \text{ ve } \vec{n}_M // \vec{n}_N\} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır (Peternell ve Manhart 2003). Burada, M ve N nin birer parçası olan $y(s, t)$ ile

$$x(s, t) = x(u(s, t); v(s, t))$$

parametrelendirmeleri st-düzleminde ortak bir tanım kümesine sahip olacağından dolayı $\vec{n}_M(u, v)$ ve $\vec{n}_N(s, t)$ normal vektörleri birbirine paraleldir.

3.2. \mathbb{R}^3 deki Paraboloid ile Genel Yüzeylerin Konvolüsyonu

M yüzeyi

$$x(u, v) = (u, v, u^2 + cv^2); c \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

regüler yamasıyla verilsin. Burada $c > 0$ veya $c < 0$ olmasına göre M yüzeyi sırasıyla eliptik yada hiperbolik paraboloid olacaktır. Bu durumda, M yüzeyinin normal vektörü

$$\vec{n}_M = x_u \times x_v = \begin{pmatrix} -2u \\ -2cv \\ 1 \end{pmatrix}$$

dir. Ayrıca, $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi

$$y(s, t) = (y_1(s, t), y_2(s, t), y_3(s, t)) \quad s, t \in R \quad (3.4)$$

parametrizasyonu ile verilsin. \vec{n}_M ve \vec{n}_N normal vektörleri sırasıyla $x(u, v) = p$ ve $y(s, t) = q$ noktalarında lineer bağımlı ise; p ve q noktaları kesişir. Yani,

$$\vec{n}_M = \lambda \vec{n}_N; 0 \neq \lambda \in R \quad (3.5)$$

dir. Bu nedenle, $p + q$ noktası $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin bir noktasıdır. Böylece, $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin normal vektörü

$$\vec{n}(s, t) = (n_1(s, t), n_2(s, t), n_3(s, t))$$

parametrizasyonu ile verilse (3.5) eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} -2u \\ -2cv \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} n_1(s, t) \\ n_2(s, t) \\ n_3(s, t) \end{pmatrix}, 0 \neq \lambda \in R \quad (3.6)$$

bulunur. Ayrıca, $n_3(s, t) \neq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \frac{-n_1(s, t)}{2n_3(s, t)} \\ v(s, t) &= \frac{-n_2(s, t)}{2cn_3(s, t)} \\ \lambda &= \frac{1}{n_3(s, t)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir (Peternell ve Manhart 2003). Böylece (3.7) de tanımlanan parametre değişimi yardımıyla

$$\varphi: (s, t) \rightarrow (u(s, t), v(s, t)) \quad (3.8)$$

dönüşümü için $x(\varphi(s, t))$ parametrizasyonu sadece M yüzeyinin bir parçasını verecektir. Sonuç olarak, (3.8) de tanımlanan φ dönüşümünün Jacobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması durumunda, (3.7) deki eşitlikler regüler bir parametrizasyonu temsil edilir (Bloomenthal ve Shoemake 1991).

Böylece, aşağıdaki önermeler elde edilir.

Önerme 3.1. (3.8) de tanımlanan φ dönüşümünün Jacobian matrisinin determinanı

$$\det(J\varphi) = \frac{1}{4cn_3(s, t)} \det(\vec{n}, \vec{n}_s, \vec{n}_t)(s, t) \quad (3.9)$$

dir.

İspat: Jacobian matrisin tanımına dayanarak,

$$\det(J\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{(n_3)_s n_1 - n_3 (n_1)_s}{2n_3^2} & \frac{(n_3)_t n_1 - n_3 (n_1)_t}{2n_3^2} \\ \frac{(n_3)_s n_2 - n_3 (n_2)_s}{2cn_3^2} & \frac{(n_3)_t n_2 - n_3 (n_2)_t}{2cn_3^2} \end{vmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \det(J\varphi) &= \begin{vmatrix} \frac{(n_3)_s n_1 - n_3(n_1)_s}{2n_3^2} & \frac{(n_3)_t n_1 - n_3(n_1)_t}{2n_3^2} \\ \frac{(n_3)_s n_2 - n_3(n_2)_s}{2cn_3^2} & \frac{(n_3)_t n_2 - n_3(n_2)_t}{2cn_3^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4cn_3(s, t)} \det(\vec{n}, \vec{n}_s, \vec{n}_t)(s, t) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da önermenin ispatını tamamlar. \square

Önerme 3.2. (3.4) parametrizasyonu ile verilen yüzeyin Gauss eğriliği

$$K_N = \frac{1}{W^4} \det(\vec{n}, \vec{n}_s, \vec{n}_t)(s, t) \quad (3.10)$$

ile hesaplanır. Burada $W^2 = EG - F^2$ yüzeyinin alan elemanıdır.

İspat. $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$e^* = \langle y_{ss}, \vec{n} \rangle = -\langle y_s, \vec{n}_s \rangle$$

$$f^* = \langle y_{st}, \vec{n} \rangle = -\langle y_s, \vec{n}_t \rangle$$

$$g^* = \langle y_{tt}, \vec{n} \rangle = -\langle y_t, \vec{n}_t \rangle$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} e^* g^* - (f^*)^2 &= \langle y_s, \vec{n}_s \rangle \langle y_t, \vec{n}_t \rangle - \langle y_s, \vec{n}_t \rangle \langle y_t, \vec{n}_s \rangle(s, t) \\ &= \langle y_s \times y_t, \vec{n}_s \times \vec{n}_t \rangle(s, t) \\ &= \langle \vec{n}_N, \vec{n}_s \times \vec{n}_t \rangle(s, t) \\ &= \det(\vec{n}, \vec{n}_s, \vec{n}_t)(s, t) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= \frac{e^*}{\tilde{W}} \\ \tilde{f} &= \frac{f^*}{\tilde{W}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\tilde{g} = \frac{g^*}{\tilde{W}}$$

yardımıyla $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyinin nin Gauss eğriliği

$$K_N = \frac{1}{\tilde{W}^2} (\tilde{e}\tilde{g} - \tilde{f}^2) \quad (3.12)$$

olup, (3.11) deki eşitlikler kullanılarak

$$K_N = \frac{1}{\tilde{W}^4} (e^*g^* - (f^*)^2) = \frac{1}{\tilde{W}^4} \det(\vec{n}, \vec{n}_s, \vec{n}_t)(s, t)$$

elde edilir. Bu da önermenin ispatını tamamlar. \square

Önerme 3.1 ve Önerme 3.2 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3. (3.8) de tanımlanan φ dönüşümünün Jacobian Matrisi'nin determinanı

$$\begin{aligned} \det(J\varphi) &= \frac{1}{4cn_3} \det(\vec{n}, \vec{n}_s, \vec{n}_t)(s, t) \\ &= \frac{1}{4cn_3} \tilde{W}^4 K_N \end{aligned}$$

dır.

Peternell ve Manhart'ın 2003 yılında verdikleri sonucun bir benzeri (3.4) ve (3.7) deki eşitlikler yardımıyla aşağıdaki gibidir.

Sonuç 3.4. M bir paraboloid ve $N \subset \mathbb{R}^3$ herhangi bir regüler yüzey olmak üzere $M * N$ konvolüsyon yüzeyi;

$$z(s, t) = (x + y)(s, t)$$

$$= \left(\frac{-n_1(s, t)}{2n_3(s, t)} + y_1(s, t), \frac{-n_2(s, t)}{2n_3(s, t)} + y_2(s, t), \frac{1}{4cn_3^2} (cn_1^2 + n_2^2) + y_3(s, t) \right) \quad (3.13)$$

parametrizasyonuna sahip olur.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında bazı özel yüzeyler ve bu yüzeylerin konvolüsyonları ele alınmıştır. Bu yüzeyler ile ilgili bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçları destekleyici bazı örnekler verilmiştir.

4.1. \mathbb{R}^3 deki Paraboloid ile Monge Yaması İle Verilen Yüzeylerin Konvolüsyonu

Tanım 4.1. $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi

$$N: y(s, t) = (s, t, h(s, t)) \quad (4.1)$$

parametrizasyonu ile verilsin. Bu yüzeye \mathbb{R}^3 te bir graf yüzey yamasına da *Monge yaması* adı verilir (Gray 1993).

Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.2. (4.1) parametrizasyonu ile verilen $N \subset \mathbb{R}^3$ (Monge yaması) yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K_N = \frac{h_{ss}h_{tt} - h_{st}^2}{(h_s^2 + h_t^2 + 1)^2} \quad (4.2)$$

dir.

İspat. Monge yaması ile verilen N yüzeyinin normal vektörü

$$n(s, t) = y_s \times y_t = (-h_s, -h_t, 1) \quad (4.3)$$

dir. Böylece $n(s, t)$ normal vektörünün s ve t parametrelerine göre türevleri alınıp (3.10) de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. \square

Önerme 4.3. M bir paraboloid ve $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi de (4.1) Monge yaması ile verilen bir yüzey olsun. O halde, $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin bir parametrizasyonu

$$z(s, t) = \left(\frac{h_s}{2} + s, \frac{h_t}{2c} + t, \frac{1}{4}h_s^2 + \frac{1}{4c}h_t^2 + h \right)(s, t) \quad (4.4)$$

dır.

İspat. $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi de (4.1) Monge yaması ile verilsin (4.3) ve (3.13) eşitlikleri yardımıyla (4.4) elde edilir. \square

Tanım 4.4. (4.1) Monge yamasında

$$h(s, t) = f(s) + g(t) \quad (4.5)$$

alınırsa *öteleme yüzeyi* elde edilir (Gray, 1993).

Önerme 4.2 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5. (4.4) parametrizasyonu ile verilen öteleme yüzeyi $N \subset \mathbb{R}^3$ nin Gaussian eğriliği

$$K_N = \frac{f''(s)g''(t)}{((f'(s))^2 + (g'(s))^2 + 1)^2} \quad (4.6)$$

dir.

Önerme 4.3 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6. $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.5) yamasıyla verilen öteleme yüzeyi olsun. O halde, $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin bir parametrizasyonu

$$z(s, t) = \left(\frac{f'}{2} + s, \frac{g'}{2c} + t, \frac{1}{4}(f')^2 + \frac{1}{4c}(g')^2 + f + g\right)(s, t) \quad (4.7)$$

dır.

Böylece, $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin Gauss eğriliği için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.7. M bir paraboloid ve $N \subset \mathbb{R}^3$ de (4.5 eşitliğinde verildiği gibi) bir öteleme yüzeyi olsun. O halde, $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin Gauss Eğriliği;

$$K_{M*N} = \frac{4cf''g''}{(f''+2)(g''+2c)((f')^2+(g')^2+1)^2} \quad (4.8)$$

dir.

İspat. $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin I. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} A &= \langle z_s, z_s \rangle = \frac{1}{4} (1 + (f')^2)(f'' + 2)^2 \\ B &= \langle z_s, z_t \rangle = \frac{f'g'}{4c} (f'' + 2)(g'' + 2c) \\ C &= \langle z_t, z_t \rangle = \frac{1}{4c^2} (1 + (g')^2)(g'' + 2c)^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

dir. Böylece $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin normali $\vec{n}_{M*N} = z_s \times z_t$ yardımıyla

$$\vec{n}_{M*N} = \frac{1}{4c} (-f'(f'' + 2)(g'' + 2c), -g'(f'' + 2)(g'' + 2c), (f'' + 2)(g'' + 2c))$$

elde edilir. Buradan $\vec{n}_{M*N}(s, t)$ normal vektörünün s ve t parametrelerine göre türevleri alınıp

$$K_{M*N} = \frac{1}{W^4} \det(\vec{n}_{M*N}, (\vec{n}_{M*N})_s, (\vec{n}_{M*N})_t)(s, t) \quad (4.10)$$

de yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir. \square

$M * N$ nin düz bir yüzey olması durumunda, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.8. M ve N yüzeyleri sırasıyla paraboloid ve öteleme yüzeyi olsun. O halde $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin düz olması için gerek ve yeter şart $f(s) = a_1s + a_2$, veya $g(t) = b_1t + b_2$, olmasıdır. Burada a_i, b_j reel sabitlerdir.

İspat: $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin düz yüzey olması durumunda Önerme 4.7 yardımıyla $f''g'' = 0$ eşitliği sağlanır. Buradan istenilen sonuç elde edilir. \square

Sonuç 4.9. (4.7) parametrizasyonu ile verilen $M * N$ konvolüsyon yüzeyi için $f(s) = a_1s + a_2$ veya $g(t) = b_1t + b_2$, alınırsa $M * N$ yüzeyi bir düzlem parçasıdır.

İspat. $f(s) = a_1s + a_2$ ve $g(t) = b_1t + b_2$ alınırsa (4.7) yüzey yaması

$$z(s, t) = \left(\frac{a_1}{2} + s, \frac{b_1}{2c} + t, \frac{1}{4}(a_1)^2 + \frac{1}{4c}(b_1)^2 + a_1s + b_1t + a_2 + b_2\right)$$

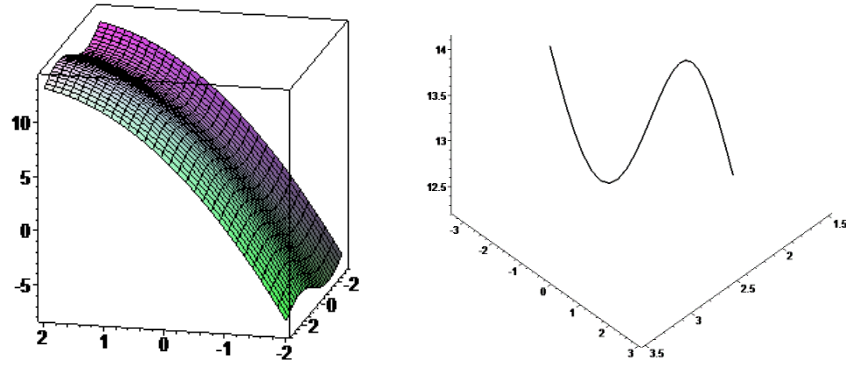
halini alır. Bu yüzey yaması düzlemin bir parçası verir.

Bu sonucun uygulaması olarak aşağıdaki örnek görülebilir.

Örnek 4.10. $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzey $f(s) = 5s + 7, g(t) = \sin(t), c = 3$ yamasıyla verilen öteleme yüzeyi olsun. O halde, $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin bir parametrizasyonu

$$z(s, t) = \left(\frac{5}{2}, \frac{\cos(t)}{6} + t, \frac{1}{4}(5 - 2s)^2 + \frac{1}{12}(\cos(t))^2 + \sin t - s^2 + 5s + 7\right)$$

dır. Bu öteleme yüzeyi ile konvolüsyonunun şekilleri Şekil 4.1 de gösterilmiştir.

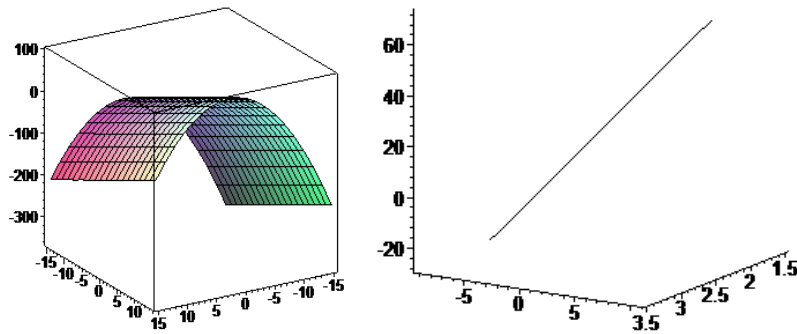


Şekil 4.1. Öteleme yüzeyinin konvolüsyonu bir eğriye dejenere olur

Örnek 4.11. $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $f(s) = 5s + 7, g(t) = 5t + 7, c = 3$ yamasıyla verilen bir öteleme yüzeyi olsun. O halde, $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin bir parametrizasyonu

$$z(s, t) = \left(\frac{5}{2}, \frac{\cos(t)}{6} + t, \frac{1}{4}(5 - 2s)^2 + \frac{25}{12} + 5t - s^2 + 5s + 14\right)$$

dır. Bu öteleme yüzeyi ile konvolüsyonunun şekilleri Şekil 4.2 de gösterilmiştir.

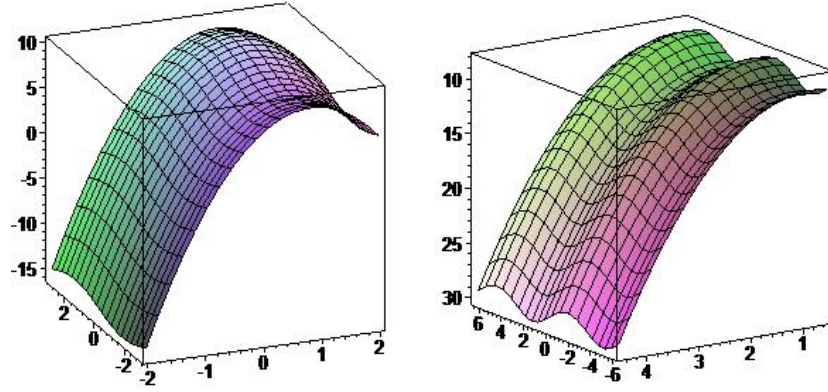


Şekil 4.2. Öteleme yüzeyinin konvolüsyonu bir doğruya dejenere olur

Örnek 4.12. $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $f(s) = -3s^2 + 5s + 7, g(t) = \sin(t), c = 3$ yamasıyla verilen öteleme yüzeyi olsun. O halde, $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin bir parametrizasyonu

$$z(s, t) = \left(\frac{5}{2} - 2s, \frac{\cos(t)}{6} + t, \frac{1}{4}(5 - 6s)^2 + \frac{1}{12}(\cos(t))^2 + \sin t - 3s^2 + 5s + 7\right)$$

dır. Bu öteleme yüzeyi ile konvolüsyonunun şekilleri Şekil 4.3 de gösterilmiştir.

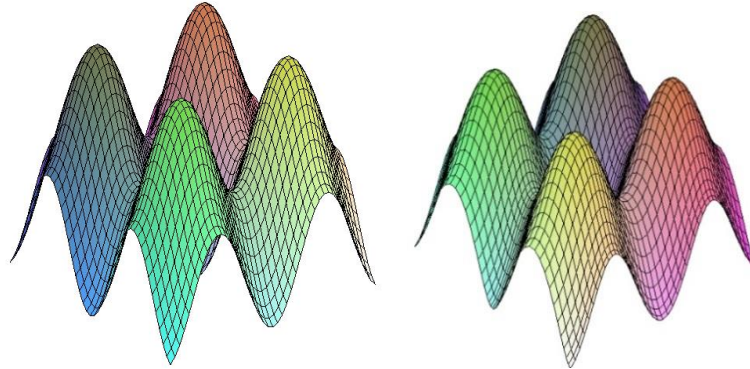


Şekil 4.3. Öteleme yüzeyi ve konvolüsyonu I

Örnek 4.13. $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi $f(s) = \cos(s), g(t) = \cos(t), c = -3$ yamasıyla verilen öteleme yüzeyi olsun. O halde, $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin bir parametrizasyonu

$$z(s, t) = \left(\frac{-\sin(s)}{2} + s, \frac{\sin(t)}{6} + t, \frac{1}{4}\sin^2(s) - \frac{1}{12}\sin^2(t) + \cos(s) + \cos(t)\right)(s, t)$$

dır. Bu öteleme yüzeyi ile konvolüsyonunun şekilleri Şekil 4.4 de gösterilmiştir.



Şekil 4.4. Öteleme yüzeyi ve konvolüsyonu II

4.2. \mathbb{R}^3 deki Paraboloid ile Dönel Yüzeylerin Konvolüsyonu

Tanım 4.14. $\alpha(s) = (f_1(s), f_2(s), 0)$ eğrisinin z-ekseni etrafında döndürülmesiyle bir dönel yüzey elde edilir. Bu yüzeyin parametrizasyonu

$$x(s, t) = (f_1(s) \cos t, f_1(s) \sin t, h(s)) \quad (4.11)$$

dir (Gray, 1993).

$N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.11) parametrizasyonu ile verilen bir dönel yüzey olsun. Böylece, N yüzeyinin normal vektörü

$$n(s, t) = y_s \times y_t = (-f_1(s)f_2'(s) \cos t, -f_1(s)f_2'(s) \sin t, -f_1(s)f_1'(s)) \quad (4.12)$$

dir. Böylece (4.12) ve (3.13) eşitlikleri yardımıyla $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin bir parametrizasyonu

$$z(s, t) = \left(\frac{f_2' + 2f_1f_1'}{2cf_1'} \cos t, \frac{f_2' + 2f_1f_1'}{2cf_1'} \sin t, \frac{(f_2')^2}{4c(f_1')^2} (c \cos^2 t + \sin^2 t) + f_2 \right) \quad (4.13)$$

şeklinde elde edilir. Aslında $M * N$ konvolüsyon yüzeyi de bir çeşit dönel yüzeydir.

Açıklama. Peternell ve Manhart 2003 yılında yaptıkları çalışmada $f_1(s) = s$ özel durumu göz önünde bulundurarak $c = 1$ durumunda $M * N$ konvolüsyon yüzey yamasının dönel yüzey olması ile ilgili şartları vermişlerdir. Biz bu sonucu genelleyerek aşağıdaki sonucu elde ettik.

Teorem 4.15. M ve N yüzeyleri sırasıyla paraboloid ve dönel yüzeyi olsun. O halde, $c=1$ için $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K_{M*N} = \frac{(\phi^2 + f_2)' \{ (\phi^2 + f_2)'' (\phi + f_1)' - (\phi^2 + f_2)' (\phi + f_1)'' \}}{(\phi + f_1) \{ ((\phi + f_1)')^2 + ((\phi^2 + f_2)')^2 \}^2} \quad (4.14)$$

dir. Burada,

$$\phi(s) = \frac{f_2'(s)}{2f_1'(s)}, f_1' \neq 0$$

reel değerli türevlenebilir bir fonksiyondur.

İspat. $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin tanjant vektörleri

$$\begin{aligned} z_s &= ((\phi' + f_1')\cos t, (\phi' + f_1')\sin t, 2\phi\phi' + f_2') \\ z_t &= (-(\phi + f_1)\sin t, (\phi + f_1)\cos t, 0) \end{aligned}$$

I. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} A &= \langle z_s, z_s \rangle = (\phi' + f_1')^2 + (2\phi\phi' + f_2')^2 \\ B &= \langle z_s, z_t \rangle = 0 \\ C &= \langle z_t, z_t \rangle = (\phi + f_1)^2 \end{aligned} \tag{4.15}$$

dir. Böylece $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin normali $\vec{n}_{M*N} = z_s \times z_t$ yardımıyla

$$\vec{n}_{M*N} = (-(\phi + f_1)(\phi^2 + f_2)'\cos t, -(\phi + f_1)(\phi^2 + f_2)'\sin t, (\phi + f_1)(\phi + f_1)')$$

elde edilir. Buradan $\vec{n}_{M*N}(s, t)$ normal vektörünün s ve t parametrelerine göre türevleri alınıp (4.10) da yerine yazılırsa istenilen sonuca ulaşılr \square

Aşağıdaki sonuçta $\alpha(s)$ eğrisi birim hızlı ve $c=1$ alınmıştır.

Sonuç 4.16. M ve $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyleri sırasıyla paraboloid ($c=1$) ve döneel yüzeyi olsun. O halde, $M * N$ konvolüsyon yüzeyi düz ise bu taktirde

- i) $(\phi^2 + f_2)' = 0$, veya
 - ii) $(\phi^2 + f_2)''(\phi + f_1)' - (\phi^2 + f_2)'(\phi + f_1)'' = 0$
- dır.

İspat. $M * N$ konvolüsyon yüzeyinin düz olduğunu kabul edelim. Bu durumda (4.14) eşitliğinden

$$(\phi^2 + f_2)' \{ (\phi^2 + f_2)''(\phi + f_1)' - (\phi^2 + f_2)'(\phi + f_1)'' \} = 0 \tag{4.16}$$

bulunur. Böylece

$$i) (\phi^2 + f_2)' = 0, \text{ veya} \tag{4.17}$$

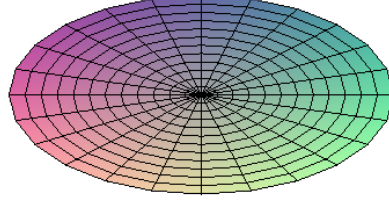
$$ii) (\phi^2 + f_2)''(\phi + f_1)' - (\phi^2 + f_2)'(\phi + f_1)'' = 0 \tag{4.18}$$

durumlarından biri söz konusudur. \square

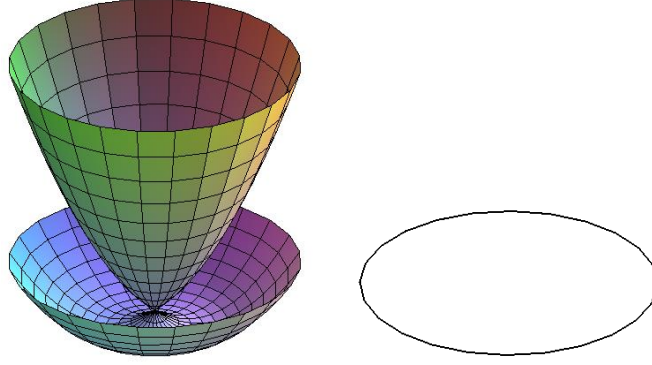
Örnek 4.17. $N \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyinin üretic eğrisi $\alpha(s) = (s, f_2(s), 0)$ olsun. Bu takdirde (4.17) eşitliğinin sağlanması durumunda

$$f_2(s) = b \text{ veya } f_2(s) = -s^2 + as + b,$$

dir. Burada a, b reel sabitlerdir. Bu yüzeyler ve bunların konvolüsyon yüzeylerinin şekilleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.5. $f_1 = s$, $f_2(s) = 3$ için dönel yüzey ve konvolüsyonu aynı şekli verir

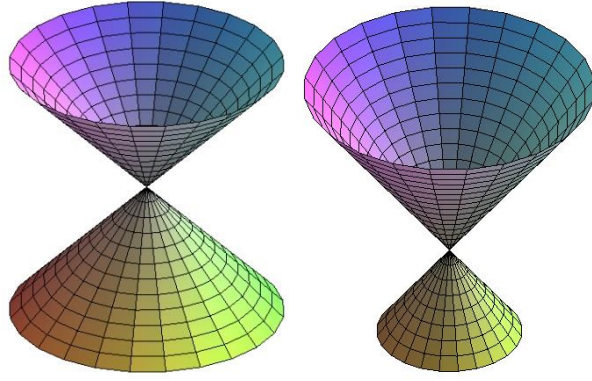


Şekil 4.6. $f_1 = s$, ve $f_2(s) = -s^2 + 2s + 3$ için dönel yüzey ve konvolüsyonu

Örnek 4.18. $N \subset \mathbb{R}^3$ dönel yüzeyinin üretic eğrisi $\alpha(s) = (s, f_2(s), 0)$ olsun. Bu takdirde (4.18) eşitliğinin sağlanması durumunda

$$f_2(s) = as + b \text{ veya } f_2(s) = -s^2 + as + b,$$

dir. Burada a, b reel sabitlerdir. Bu yüzeyler ve bunların konvolüsyon yüzeylerinin şekilleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.7. $f_1 = s$, ve $f_2(s) = 2s + 3$ için döneel yüzey ve konvolüsyonu

Örnek 4.19. $N \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi

$$N: y(s, t) = \begin{pmatrix} p(s) \sin s + p'(s) \cos s + t \cos s \\ -p(s) \cos s + p'(s) \sin s + t \sin s \\ z(s) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

parametrizasyonu ile verilen bir konoid yüzeyi olsun. Burada, p ve z reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Böylece, N yüzeyinin normal vektörü

$$n(s, t) = y_s \times y_t = (-z'(s) \sin s, z'(s) \cos s, -t) \quad (4.20)$$

dir. Böylece, N yüzeyinin normal vektörü

$$n(s, t) = y_s \times y_t = (-z'(s) \sin s, z'(s) \cos s, -t)$$

dir. Sonuç olarak (4.20) ve (3.13) yardımıyla $M * N$ konvolüsyon yüzeyi aşağıdaki parametrizasyona sahip olacaktır;

$$\tilde{z}(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{(2tp(s) - z'(s))}{2t} \sin s + (p'(s) + t) \cos s \\ \frac{(z'(s) - 2ctp(s))}{2ct} \cos s + (p'(s) + t) \sin s \\ \left(\frac{z'(s)^2}{4ct^2}\right) (c \sin^2 s + \cos^2 s) + z(s) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

(Bkz, Peternel ve Manhart 2003). Burada $p(s) = 0$ fonksiyonunu sabit bir fonksiyon ve $k \neq 0$ olmak üzere $z(s) = ks$ olarak alınırsa; N yüzeyi aşağıdaki parametrizasyona sahip olur;

$$N: y(s, t) = \begin{pmatrix} t \cos s \\ t \sin s \\ ks \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

bulunur. Böylece N yüzeyi bir dik helikoid olacaktır. Helikoid yüzeyi minimal yüzey olup Gauss eğriliği

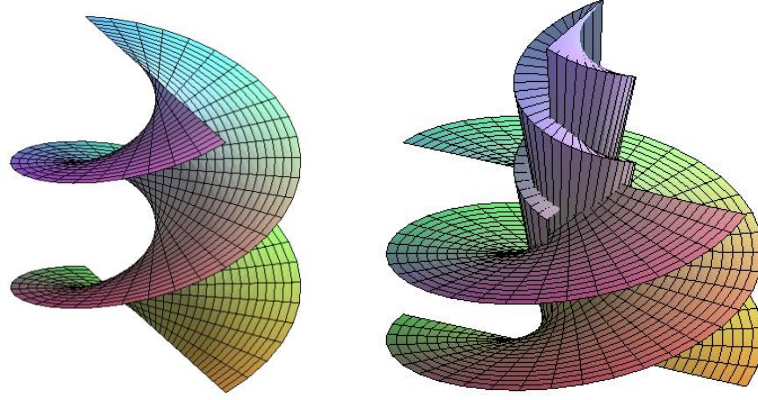
$$K_N(s, t) = \frac{-k^2}{(1 + k^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dir.

Ayrıca (4.21) eşitliği ile verilen $M * N$ konvolüsyon yüzeyi parametrizasyonu

$$\tilde{z}(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{k}{2t} \sin s + t \cos s \\ \frac{k}{2ct} \cos s + t \sin s \\ \left(\frac{k^2}{4ct^2}\right) (c \sin^2 s + \cos^2 s) + ks \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

halini alır. Bu dik helikoid ile konvolüsyonunun şekilleri Şekil 4.8 de gösterilmiştir.



Şekil 4.8. Dik helikoid ve konvolüsyonu

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

A ve B konveks kümelerinin Minkowski toplamı matematiksel morfoloji, bilgisayar destekli geometrik tasarım ve birçok alanda uygulanmaktadır. Bu kümelerin sınırları $M = \partial A$ ve $N = \partial B$ sınırları için $M * N$ konvolüsyon yüzeyi tanımlanmaktadır. M yüzeyi için paraboloid N yüzeyi için de genel bir yüzey seçildiğinde elde edilen konvolüsyon yüzeyi ile ilgili son zamanlarda oldukça önemli sonuçları elde edilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçları iki grupta toplamak mümkündür. Birinci kısımda N yüzeyi Monge yaması ile seçilmiştir. Bu yamanın özel bir hali öteleme yüzeyidir. Öteleme yüzeyleri mimarlıkta çatı kaplama yüzeyleri olarak bilinir. Çalışmanın önemli sonuçlarından ilki paraboloid ile öteleme yüzeyinin Gauss eğriliğinin hesaplanmasıdır. Bu yüzeyin düz olması durumunda gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. Bu yüzeyler ile ilgili bazı örnekler verilmiştir. Örneklerin bazılarında M ve N yüzeylerinin konvolüsyonlarının eğri veya bir doğruya dejenere oldukları gösterilmiştir.

İkinci kısım ise N yüzeyi olarak dönel yüzey alınmıştır. Elde edilen konvolüsyon yüzeylerinin Gauss eğriliği hesaplanmıştır. Bazı düz olan dönel yüzeyler örnek olarak alınmış ve bunların paraboloid ile konvolüsyonları hesaplanmış ve bunların grafikleri çizilmiştir.

Tüm bu hesaplamalarda amaç verilen yüzeylerin grafikleri ile bu yüzeylerin konvolüsyonlarının grafikleri zengin bir modelleme imkanı sunmaktadır. Farklı yüzeyler seçildiğinde geometrik tasarım olarak farklı modeller elde etmek mümkün olacaktır.

KAYNAKLAR

- Arslan, K., Bulca, B., Kosova, D. 2017.** Rotatioan Surfaces in Euclidean Spaces, *J. Korean Math. Soc.* 54(3): 999-1013.
- Bloomenthal, J., Shoemake, K. 1991.** Convolution surfaces, *Computer Graphics*, 25(4): 251-256.
- Carmo, M. P. 1976.** Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Inc., 528 pp.
- Chen, B.Y. 1973.** Geometry of Submanifolds. Dekker, New York, 298 pp.
- Farouki, R.T. 2003.** Minkowski combination of complex sets-geometry, algorithms and applications, *Curve and Surface Design: Saint Malo 2002*, (T. Lyche, M.-L. Mazure and L.L. Schumaker eds.), Nashboro Press, 123–146.
- Glymph, J., Schelden, D., Ceccato, C., Mussel, J., Schober, H. 2004.** A parametric strategy for free-from glass structures using quadrilateral planar facets, *Automation in Construction*, 13: 187-202.
- Gray, A. 1993.** Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces. CRC Pres Inc., USA, 1016 pp.
- Halperin, D. 2002.** Robust Geometric Computing in Motion, *The International Journal of Robotics Research*, 21(3): 219–232.
- Kaul, A., Farouki, R.T. 1995.** Computing Minkowski sums of planar curves, *Int. J. of Computat. Geom. and Appl.* 5: 413–432.
- Kohler, K., Spreng, M. 1995.** Fast Computation of the C-Space of Convex 2D Algebraic Objects, *The Int. J. of Robotics Research*, 14(6): 590-608.
- Kim, Y.J., Varadhan, G., Lin, M.C., Manocha, D. 2004.** Fast swept volume approximation of complex polyhedral models, *Computer Aided Design*, 36: 1013–1027.
- Lavicka, M., Bastl, B., Sir, Z. 2010.** Reparameterization of curves and surfaces with respect to convolutions. In: Dæhlen, M., et al.(Eds.), MMCS 2008, *Lecture Notes in Computer Science*, 5862: 285-298.
- Lee, I.-K., Kim, M.-S., Elber, G., 1998.** Polynomial/Rational Approximation of Minkowski Sum Boundary Curves, *Graphical Models*, 60(2): 136–165.
- Mühlthaler, H., Pottmann, H. 2003.** Computing the Minkowski sum of ruled surfaces, *Graphical Models*, 65: 369–384.
- O'Rourke, J. 1994.** Computational Geometry in C, Cambridge University Press, 396 pp.
- Peternall, M., Steiner, T. 2007.** Minkowski sum boundary surfaces of 3D-objects, *Graphical Models*, 69: 180-190.
- Peternall, M., Manhart, F. 2003,** The Convolution of a Paraboloid and a Parametrized Surface, *Journal for Geometry and Graphics*, 7: 157-171.
- Sampoli, M.L., Peternell, M., Jüttler, B. 2006.** The convolution of a paraboloid and a parametrized surface, *Computer Aided Geometric Design*, 23: 179–192.
- Scherk, H.F. 1835.** Bemerkungen ber die kleinste Flche innerhalb gegebener Grenzen.- *J. R. Angew. Math.* 13: 185208.
- Sir, Z., Gravesen, J., Jüttler, B. 2006.** Computing Convolutions and Minkowski sums via Support Functions, *Curve and Surface Design: Avignon 2006*, 244-253.
- Varadhan, G., Manocha, D. 2004.** Accurate Minkowski Sum Approximation of Polyhedral Models, *Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, IEEE Computer Society, 392–401.

- Velichová, D., 2009.** Minkowski Sum in Geometric Modelling, Proceedings of the 6th Conference "Geometry and Graphics", 24-26 June 2009, Ustroń, Poland, 65-66.
- Velickovic, V.** On surface of rotation of a given constant Gaussian curvature and their visualization, Proc. Conf. Contemporary Geometry and Related Topics, June 26–July 2, 2005, Belgrade, Serbia and Montenegro, 523–534.