YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA NULL EĞRİLER VE NULL EĞRİLERİN SINIFLANDIRILMASI

Esra OVALIOĞLU

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA NULL EĞRİLER VE NULL EĞRİLERİN SINIFLANDIRILMASI

Esra OVALIOĞLU
0000-0003-3646-0554

Doç. Dr. Esen İYİGÜN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

TEZ ONAYI

Esra OVALIOĞLU tarafından hazırlanan "YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA NULL EĞRİLER VE NULL EĞRİLERİN SINIFLANDIRILMASI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **"YÜKSEK LİSANS TEZİ"** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **Doç. Dr. Esen İYİGÜN**

Başkan **: Doç. Dr. Esen İYİGÜN** **İMZA**
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
ORCİD NO : 0000-0001-6821-0248

Üye **: Doç. Dr. Atilla AKPINAR** **İMZA**
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
ORCİD NO : 0000-0002-7612-2448

Üye **: Dr. Öğr. Üyesi İrem Küpeli ERKEN** **İMZA**
Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı
ORCİD NO : 0000-0003-4471-3219

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
04 / 10 / 2019

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

04 / 10/ 2019

Esra OVALIOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA NULL EĞRİLER VE NULL EĞRİLERİN SINIFLANDIRILMASI

Esra OVALIOĞLU

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Esen İYİGÜN

Bu çalışmada 1- indeksli 3- boyutlu Yarı-Öklidyen uzayda Null Eğri, Pseudo Null Eğri, Cartan Null Eğri ve 1-indeksli 4-boyutlu Yarı-Öklidyen uzayda Null, Pseudo Null, Partially Null eğrilerin sınıflandırılması yapılmıştır. Burada Frenet denklemlerine bağlı olarak eğrilerin hangi alt uzayda yatıp yatmadığı araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Pseudo Null Eğri, Partially Null Eğri, Null Eğri, Cartan Null Eğri, Frenet Çatısı

2019, v + 56 sayfa

ABSTRACT

Master Thesis

CLASSIFICATION OF NULL CURVES AND NULL CURVES IN SEMI-EUCLIDEAN SPACE

Esra OVALIOĞLU

Bursa Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Esen İYİGÜN

In this study, classification of Null Curve, Pseudo Null Curve, Cartan Null Curve and 1-index Null, Pseudo Null, Partially Null curves in 1-indexed 3-dimensional Semi-Euclidean space were made. Here the fact that in which subspace, the curves lie in relation with Frenet equations is investigated.

Key Words: Pseudo Null Curve, Partially Null Curve, Null Curve, Cartan Null Curve, Frenet Frame

2019, v + 56 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten, üzerimde her türlü yardım, desteği ve emeği olan çok değerli hocam **Doç. Dr. Esen İYİGÜN**'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam süresince bana devamlı destek ve yardımcı olan **Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ**'a da saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmayı yürütürken geçirdiğim sürede benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen maddi manevi hep yanımda olan **sevgili eşime** de saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Esra OVALIOĞLU

04 / 10 / 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
B	Binormal vektör alanı
B_1	Birinci binormal vektör alanı
B_2	İkinci binormal vektör alanı
E^n	n- boyutlu Öklid uzayı
k_1	Eğrinin birinci Frenet eğriliği
k_2	Eğrinin ikinci Frenet eğriliği
k_3	Eğrinin üçüncü Frenet eğriliği
N	Normal vektör alanı
N_v	Null uzay
IR_1^3	1-indeksli 3-boyutlu Yarı-Öklidyen uzay
IR_1^4	1-indeksli 4-boyutlu Yarı-Öklidyen uzay
IR_1^n	Minkowski (Lorentz) n-uzay
T	Teğet vektör alanı
$\{T,\ N,\ B\}$	Frenet 3-ayaklısı
$\{T,\ N,\ B_1,\ B_2\}$	Frenet 4-ayaklısı
T_tE^n	E^n nin t noktasındaki tanjant uzayı
V	Vektör uzayı
$\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$	Frenet r-ayaklısı
α	Eğri
α'	Eğrinin teğet vektörü
$\mathfrak{X}(M)$	M üzerinde vektör alanlarının uzayı
$\|X\|$	Lorentz uzayında X'in boyu (normu)
$<,>$	Bir vektör uzayı üzerinde bir iç-çarpım
Λ	Vektörel çarpım

KISALTMALAR

$IR_1^n = L^n$	Minkowski (Lorentz) n-uzay

1. GİRİŞ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Bu tezin amacı 1-indeksli 3 boyutlu Yarı-Öklidyen uzayda Pseudo null, Cartan null ve Null eğriler ile 1-indeksli 4 boyutlu Yarı-Öklidyen uzayda Pseudo null, Partially null ve Null eğrilerin sınıflandırılmasının yapılmasıdır. Bu eğrilerin Frenet çatılarına göre hangi alt uzayda yatıp yatmadığının araştırılmasıdır.

Birinci bölüm olan Giriş bölümünde tezin ana çerçevesini oluşturan diğer bölümlerin özetleri tanıtılmıştır.

İkinci bölüm olan kuramsal temeller bölümünde tezin esasını teşkil eden çeşitli null eğrilerin incelenmesinde ihtiyaç duyulan temel kavramlar verilmektedir. Bunun için Greub (1975), Q'Neill (1983), Hacısalihoğlu (1983), Hacısalihoğlu (1985), Lopez (2008), kaynaklarından alınan tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm dört başlıkta ele alınmıştır. Bu başlıklar sırasıyla 1-indeksli 3-boyutlu Yarı-Öklidyen uzayda Pseudo null, Cartan null ve null eğrilerdir. Her bir eğri için ayrı ayrı hangi alt uzayda yatıp yatmadığı incelenmiş ve bunlarla ilgili teoremler ispatlanmıştır. Dördüncü başlıkta ise 1-indeksli 3-boyutlu Yarı-Öklidyen uzayda eğrilerin alt uzaylar bazında yatıp yatmadığına göre sınıflandırılması yapılmıştır.

Dördüncü bölüm dört başlıktan oluşmaktadır. Bu başlıklar sırasıyla 1-indeksli 4-boyutlu Yarı-Öklidyen uzayda Pseudo null, Partially null ve null eğrilerdir. Her bir eğrinin Frenet çatısına göre hangi alt uzayda yatıp yatmadığı araştırılmış ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Dördüncü başlıkta ise 1-indeksli 4-boyutlu Yarı-Öklidyen uzayda eğrilerin alt uzaylar bazında yatıp yatmadığına göre sınıflandırılması yapılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılmak üzere gerekli olan temel kavramlar, önce Öklid uzayında daha sonra da Yarı-Öklidyen uzayda verilecektir.

Tanım 2.1. $I \subset IR$ bir açık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha : I \to E^n$ diferensiyellenebilir dönüşümüne E^n de eğri denir. Buradaki $I \subset IR$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.2. M eğrisi E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha: I \to E^n$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$$

bir eğri ve

$$\alpha'(t) = \left(\alpha_1'(t),\ \alpha_2'(t), \ldots, \alpha_n'(t)\right)$$

olmak üzere $\alpha'(t) \in T_t E^n$ tanjant vektörüne M eğrisinin $t \in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında (I, α) koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir. Burada $\alpha'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h)-\alpha(t)}{h}$ şeklinde alınmıştır. $\forall t \in I$ için

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

ise α eğrisine birim hızlı eğri ve $t \in I$ parametresine de yay parametresi denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.3. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.4. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\Psi = \left\{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)}\right\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$ olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{V_1, \ldots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \ldots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r ayaklısı denir. Her bir V_i, $1 \le i \le r$ ye Serret-Frenet vektörü adı verilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.5. V bir reel vektör uzayı olsun. Eğer

$<,> : VxV \rightarrow IR$

$(x,y) \rightarrow <,>(x,y) = <x, y>$

fonksiyonu **i)** 2-lineer,

ii) Simetrik,

iii) Pozitif tanımlı

ise $<,>$ ye bir iç-çarpım denir (Hacısalihoğlu 1985).

Tanım 2.6. V bir vektör uzayı ve $<,>$ V üzerinde bir iç-çarpım olsun. İç-çarpımın negatif tanımlı olduğu maksimal boyutlu alt uzayının boyutuna V vektör uzayının indeksi denir (Q'Neill 1983).

Tanım 2.7. V'de <, > iç-çarpımı verilsin.

$$N_V = \{x \in V \mid \quad <x, y> = 0, \ \forall y \in V\}$$

null uzayı için

$$N_V = \{0\}$$

ise iç-çarpımı dejenere değildir denir (Greub 1975).

Tanım 2.8. V'de $<,>$ dejenere olmayan iç-çarpımı verilsin. Eğer V'nin indeksi 1 ise V'ye bir Lorentz vektör uzayı ve iç-çarpımına da Lorentz iç-çarpımı denir (Q'Neill 1983).

Tanım 2.9. $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in IR^n$ ve $\forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in IR^n$

için

$$<,> = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan; $<,>$ fonksiyonuna IR^n de bir Lorentz iç-çarpımı ve bu iç-çarpım ile IR^n ye bir Lorentz vektör uzayı denir. Bu uzay IR_1^n ile gösterilir. IR^n deki Lorentz iç-çarpımının standart baza göre karşılık geldiği matris

$$S = \left[\begin{array}{c|cccc} -1 & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right]$$

şeklindedir. Bu iç-çarpımla birlikte IR_1^n ye n-boyutlu standart Lorentz uzayı denir ve L^n ile gösterilir. (Graves 1979).

Tanım 2.10. M n-boyutlu bir manifold ve $\mathfrak{X}(M)$ üzerindeki iç-çarpım Lorentz iç-çarpım olsun. Bu geometrik yapı ile belli olan manifolda Lorentz manifoldu veya 1-indeksli yarı-Riemannian manifold denir (Q'Neill 1983). Burada $\mathfrak{X}(M)$ ile M üzerindeki vektör alanlarının uzayı, manifold ile de yarı-Riemannian anlamındaki manifold ifade edilmiştir.

Tanım 2.11. L^n bir Lorentz uzayı, x Lorentz uzayının bir vektörü ve $<, >$, L^n üzerinde bir iç-çarpım olsun. x'in boyu diye

$$\|x\| = \sqrt{|< x, x >|}$$

reel sayısına denir (Q'Neill 1983).

Tanım 2.12. x, V vektör uzayının bir alt uzayı ve $<, >$ V'de bir Lorentz iç-çarpımı olsun. x için:

i) $<, > |x$ pozitif tanımlı yani $(x, <, >)$ bir pozitif tanımlı iç-çarpım uzayı ise x alt uzayına uzay benzeri,

ii) $<, > |x$ indeksi 1 ve dejenere değil ise x'e zaman benzeri,

iii) $<, > |x$ dejenere ise x'e ışık benzeridir denir.

x için **ii)** ve **iii)** durumlarından herbirine x' in causal karakteri denir (Q'Neill 1983).

Tanım 2.13. L^n bir Lorentz uzayı ve üzerindeki iç-çarpım $<, >$ olsun. $x \in L^n$ için;

i) $<x, x> \; < 0$ ise x'e zaman benzeri vektör,

ii) $<x, x> \; > 0$ veya $x=0$ ise x'e uzay benzeri vektör,

iii) $<x, x> \; = 0$ veya $x \neq 0$ ise x'e ışık benzeri veya null vektör denir (Q'Neill 1983).

Tanım 2.14. Zaman ve ışık benzeri vektörlere causal vektörler denir.

Tanım 2.15. n boyutlu υ-indeksli IR^n_υ yarı-öklidyen uzayında, $\upsilon = 1$ ve $n \geq 2$ için IR^n_1 Yarı-Öklidyen uzayına Minkowski n-uzay denir. IR^n_υ Yarı-Öklidyen uzayında n ile boyut, υ ile indeks ifade edilmiştir. Boyutu 3, indeksi 1 olan IR^3_1 uzayına Minkowski (Lorentz) 3-uzayı denir (Q'Neill 1983).

Tanım 2.16. M bir yarı Riemann manifoldu ve $\alpha : I \subset IR \rightarrow M$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun α eğrisinin teğet vektör alanı $\alpha'(t) = T$ olmak üzere,

i) $<T, T> \; > 0$ ise α eğrisine uzay benzeri eğri,

ii) $<T, T> = 0$ ise α eğrisine null eğri,

iii) $<T, T> < 0$ ise α eğrisine zaman benzeri eğri denir (Q'Neill 1983).

Tanım 2.17. IR_1^3 Minkowski 3-uzayında iki vektör x ve y olsun.

$x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$<x, y> = -x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

ve

$x \Lambda y = (x_3y_2-x_2y_3, x_3y_1-x_1y_3, x_1y_2-x_2y_1)$ vektörüne x ve y'nin vektörel çarpımı (veya dış çarpımı) denir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ise

$e_1 = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$, i= 1, 2, 3 olmak üzere

$$x \Lambda y = -\det \begin{bmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

veya

$$x \Lambda y = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$e_1 \Lambda e_2 = -e_3$, $e_2 \Lambda e_3 = -e_1$, $e_3 \Lambda e_1 = -e_2$ dir. Saat yönünün tersi pozitif yönü olarak alınmıştır. (Q'Neill 1983, Lopez 2008).

3. IR_1^3 YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA NULL EĞRİLER

Bu bölümde IR_v^n ; Yarı-Öklidyen uzayında n=3, v=1 için oluşturulan uzaya 3-boyutlu Lorentz uzayı denir ve $IR_1^3 = L^3$ ile gösterilir. Bu uzaydaki Lorentz iç-çarpımı

$$<x, y> = -x_1y_1 + \sum_{i=2}^{3} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. Burada $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ olarak alınmıştır. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısında, T ye teğet, N ye normal ve B ye de binormal vektör denir. $\forall s \in IR$ için

$$T(s) = \alpha'(s),\ N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \text{ ve } B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

dir ve k_1 ile eğrinin birinci Frenet eğriliği, k_2 ile de eğrinin ikinci Frenet eğriliği ifade edilmiştir.

3.1 IR_1^3 de Pseudo Null Eğri

IR_1^3 de $\{T(s),\ N(s),\ B(s)\}$ Frenet çatısı için

$$\langle N(s),\ N(s)\rangle = \langle B(s),\ B(s)\rangle = \langle T(s),\ N(s)\rangle = \langle T(s),\ B(s)\rangle = 0,$$

$$\langle T(s),\ T(s)\rangle = \langle N(s),\ B(s)\rangle = 1$$

şartlarında tanımlı olan Pseudo null eğri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 \\ 0 & k_2(s) & 0 \\ -k_1(s) & 0 & -k_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix},$$

$$T'(s) = k_1(s)N(s),$$

$$N'(s) = k_2(s)N(s),$$

$$B'(s) = -k_1(s)T(s) - k_2(s)B(s)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Walrave 1995).

Teorem 3.1.1. α, IR_1^3 de bir Pseudo null eğri ve $\{T(s),\ N(s),\ B(s)\}$, α nın Frenet çatısı olsun. $k_1(s) = 1$ için Frenet denklemleri;

$$T'(s) = N(s)$$

$$N'(s) = k_2(s)N(s)$$

$$B'(s) = -T(s) - k_2(s)B(s)$$

olur.

Sonuç 3.1.2. IR_1^3 deki Pseudo null eğri $k_1(s) = 1$ için sadece $k_2(s)$ ikinci Frenet eğriliğine sahiptir.

Teorem 3.1.3. IR_1^3 de α bir Pseudo null eğri ve α nın Frenet çatısı $\{T(s),\ N(s),\ B(s)\}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

$$\langle T'(s),\ N(s)\rangle = \langle T'(s),\ T(s)\rangle = \langle N'(s),\ N(s)\rangle = \langle B'(s),\ B(s)\rangle = \langle N'(s),\ T(s)\rangle = 0,$$

$$\langle T'(s),\ B(s)\rangle = -\langle B'(s),\ T(s)\rangle,$$

$$\langle N'(s),\ B(s)\rangle = k_2(s),$$

$$\langle B'(s),\ N(s)\rangle = -k_2(s),$$

$$\langle N'(s),\ B(s)\rangle = -\langle B'(s),\ N(s)\rangle.$$

İspat: i) $\langle T'(s), N(s)\rangle = 0$ olduğunu ispatlamak için Pseudo null eğri tanımında verilen

$$T'(s) = k_1(s)\, N(s)$$

eşitliğini yerine yazılırsa

$\langle T'(s), N(s)\rangle = \langle k_1(s)N(s),\ N(s)\rangle$

olup, $k_1(s) = 1$ için $\langle N(s), N(s)\rangle$ olur. IR_1^3 deki Pseudo null eğri tanımından $\langle N(s),\ N(s)\rangle = 0$ dır.

ii) $\langle T'(s), B(s)\rangle = 1$ olduğunu ispatlamak için Pseudo null eğri tanımında verilen

$T'(s) = k_1(s)N(s)$

eşitliğinden

$\langle T'(s), B(s)\rangle = \langle k_1(s)N(s), B(s)\rangle$

ve $k_1(s) = 1$ için $\langle N(s), B(s)\rangle$ olur. Böylece $\langle N(s), B(s)\rangle = 1$ elde edilir.

iii) $\langle N'(s),\ B(s)\rangle = k_2(s)\langle N(s), B(s)\rangle$ olup **ii** den $\langle N(s), B(s)\rangle = 1$ için

$\langle N'(s), B(s)\rangle = k_2(s)$

dir. Benzer şekilde diğer eşitliklerinde ispatları yapılır.

Teorem 3.1.4. IR_1^3 de α bir Pseudo null eğri olsun. α nın birinci ve ikinci Frenet eğrilikleri;

$k_1(s) = \langle T'(s), B(s)\rangle,$

$k_2(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle$

dir.

İspat: Teorem 3.1.3 gereğince $\langle T'(s), B(s)\rangle = 1$ olduğundan ve $k_1(s) = 1$ için

$k_1(s) = \langle T'(s), B(s)\rangle$

olduğunu görülür. Ayrıca

$k_2(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle$

olduğu Teorem 3.1.3 den görülmektedir.

Teorem 3.1.5. IR_1^3 de bir Pseudo null eğrisinin teğet, normal ve binormal vektörleri arasında aşağıdaki bağıntılar gerçeklenir.

$\langle T''(s),\ N(s)\rangle = \langle T''(s), T(s)\rangle = \langle N''(s), T(s)\rangle = \langle N''(s), N(s)\rangle = 0,$

$\langle N''(s), B(s)\rangle = \langle B''(s), N(s)\rangle,$

$\langle B''(s), T(s)\rangle = \langle T''(s), B(s)\rangle,$

$\langle B''(s), B(s)\rangle = -1.$

İspat: $\langle T'(s), N(s)\rangle = 0$ olduğunu Teorem 3.1.3 den biliniyor. Eşitliğin her iki tarafının türevi alınarak

$\langle T''(s), N(s)\rangle = 0$

sonucu elde edilir. Diğerleri de türev alınarak benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 3.1.6. α, IR_1^3 de bir Pseudo null eğri ve $\{T(s), N(s), B(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{T(s), N(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = (s + c_2)T(s) + \left(-\frac{s^2}{2} - c_2(s) + c_3\right)N(s)$$

veya

$$\alpha(s) = (s + c_2)T(s) + \left(\frac{1+k_2\, s+c_2k_2}{k_2^2} + c_1e^{k_2 s}\right)N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eşitliğinde s parametresine göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere Teorem 3.1.1 deki $T'(s)$ ve $N'(s)$ Frenet denklemleri yerlerine yazıldığında

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)k_2(s)N(s)$$

eşitliği elde edilir.

Böylece

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + [(\lambda(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_2(s)]N(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_2(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur.

$\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + c_2$ için

$\lambda(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_2(s) = 0$ denkleminde

i) $k_2(s) = 0$ alınırsa,

$$\mu'(s) = -\lambda(s)$$

$$\Rightarrow \mu'(s) = -s - c_2$$

$$\Rightarrow \mu(s) = -\frac{s^2}{2} - c_2(s) + c_3 \quad (c_2, c_3 \text{ sbt})$$

bulunur. $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ değerleri denklemde yerlerine yazılırsa

$$\alpha(s) = (s + c_2)T(s) + \left(-\frac{s^2}{2} - c_2(s) + c_3\right)N(s)$$

elde edilir.

ii) $k_2(s) \neq 0$ alınırsa,

$$\mu'(s) + \mu(s)k_2(s) = -s - c_2$$

$$= e^{\int k_2 ds} = e^{-k_2 s}$$

$$\mu(s)\, e^{-k_2 s} = \int e^{-k_2 s}(-s - c_2)ds + c_1$$

$$\mu(s)\, e^{-k_2 s} = \frac{(1+k_2\, s)e^{-k_2 s}}{k_2^2} + \frac{c_2\, e^{-k_2 s}}{k_2} + c_1$$

$$\mu(s) = \frac{(1+k_2 s)}{k_2^2} + \frac{c_2}{k_2} + c_1 e^{k_2\, s}$$

$$\mu(s) = \frac{1+k_2\, s + c_2 k_2}{k_2^2} + c_1 e^{k_2\, s} \quad (c_1, c_2 \text{ sbt})$$

bulunur. $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ denklemde yerlerine yazılırsa

$$\alpha(s) = (s + c_2)T(s) + \left(\frac{1+k_2\, s+c_2 k_2}{k_2^2} + c_1 e^{k_2\, s}\right)N(s)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.7. IR_1^3 deki

$$\alpha(s) = dN(s) - B(s), \quad (\text{d bir sabittir})$$

şartını sağlayan Pseudo null eğrisi $\{N(s),\ B(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatar.

İspat: Bu teoremin ispatında $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$

şeklinde olup eşitliğin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)B'(s)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)\, k_2(s)N(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)[-T(s) - k_2(s)B(s)]$

$\Longrightarrow T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)\, k_2(s)N(s) + \mu'(s)B(s) - \mu(s)T(s) - \mu(s)k_2(s)B(s)$

$\Longrightarrow T(s) = -\mu(s)T(s) + (\lambda'(s) + \lambda(s)\, k_2(s))N(s) + (\mu'(s) - \mu(s)k_2(s))B(s)$

Burada $\alpha'(s) = T(s)$ olarak alınırsa

$$\begin{cases} -\mu(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \lambda(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. $\mu(s) = -1$ ise $\mu'(s) = 0$ olur ve bunlar üçüncü denklemde yerlerine yazıldığında $k_2 = 0$ bulunur. Bu eşitlik ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda'(s) = 0$ elde edilir. Böylece $\lambda(s) = d$ dir. Burada d sabittir. O halde $\{N(s), B(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatan Pseudo null eğrimizin

$$\alpha(s) = dN(s) - B(s)$$

olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.8. IR_1^3 deki $\alpha(s) = -B(s)$

şartını sağlayan Pseudo null eğrisi $\{T(s), B(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatar.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$

eğrisinde s parametresine göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)B'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s) = T(s)$ için $T'(s), N'(s), B'(s)$ değerleri yerlerine yazılırsa

$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)[-T(s) - k_2(s)B(s)]$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B(s) - \mu(s)T(s) - \mu(s)k_2(s)B(s)$

$\Rightarrow T(s) = (\lambda'(s) - \mu(s))T(s) + \lambda(s)N(s) + [\mu'(s) - \mu(s)\, k_2(s)]B(s)$

için

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1 \\ \lambda(s) = 0 \\ \mu'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = 0 \Rightarrow \lambda'(s) = 0$ ve

$$\lambda'(s) - \mu(s) = 1 \Rightarrow \mu(s) = -1,\ \mu'(s) = 0 \text{ ve } k_2(s) = 0$$

bulunur. O halde

$$\alpha(s) = -B(s)$$

dir.

3.2 IR_1^3 de Cartan Null Eğri

$\langle T(s), N(s), B(s)\rangle$ Frenet çatısında

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 \\ -k_2(s) & 0 & -k_1(s) \\ 0 & k_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

Frenet denklemlerinde

$$\langle T(s), T(s)\rangle = \langle B(s), B(s)\rangle = \langle T(s), N(s)\rangle = \langle N(s), B(s)\rangle = 0,$$

$$\langle N(s), N(s)\rangle = \langle T(s), B(s)\rangle = 1$$

şartlarını sağlayan eğriye Cartan null eğri denir (Duggal ve Jin 2007).

Teorem 3.2.1. α, IR_1^3 de bir Cartan null eğri ve $\{T(s), N(s), B(s)\}$ de α nın Frenet çatısı olsun. $k_1(s) = 1$ için Frenet denklemleri

$$T'(s) = N(s),$$

$$N'(s) = -k_2(s)T(s) - B(s),$$

$$B'(s) = k_2(s)N(s)$$

dir (Ovalıoğlu ve İyigün 2018).

İspat: $T'(s) = k_1(s)N(s)$,

$$N'(s) = -k_2(s)T(s) - k_1(s)B(s),$$

$$B'(s) = k_2(s)N(s)$$

denklemlerinde $k_1(s) = 1$ için

$$T'(s) = N(s),$$

$$N'(s) = -k_2(s)T(s) - B(s),$$

$$B'(s) = k_2(s)N(s)$$

olduğu açıkça görülmektedir.

Sonuç 3.2.2. $k_1(s) = 1$ için Cartan null eğrinin Frenet denklemleri sadece $k_2(s)$ ikinci Frenet eğriliğine sahiptir (Ovalıoğlu ve İyigün 2018).

Teorem 3.2.3. IR_1^3 de α bir Cartan null eğri ve eğrinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\langle T'(s), T(s)\rangle = \langle T'(s), B(s)\rangle = \langle N'(s), N(s)\rangle = 0,$$

$$\langle B'(s), T(s)\rangle = \langle B'(s), B(s)\rangle = 0,$$

$$\langle T'(s), N(s)\rangle = -\langle N'(s), T(s)\rangle,$$

$\langle N'(s), B(s)\rangle = -\langle B'(s), N(s)\rangle$ (Ovalıoğlu ve İyigün 2018).

Teorem 3.2.4. IR_1^3 de α Cartan null eğrisinin birinci ve ikinci Frenet eğrilikleri

$k_1(s) = \langle T'(s), N(s)\rangle,$

$k_2(s) = \langle B'(s), N(s)\rangle$

dir (Ovalıoğlu ve İyigün 2018).

İspat: Teorem 3.2.1 deki denklemler yerlerine yazıldığında $k_1(s) = 1$ için ispatlar elde edilir.

Teorem 3.2.5. IR_1^3 de bir α Cartan null eğrisinin teğet, normal ve binormal vektörleri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

$\langle T''(s), N(s)\rangle = 0,$

$\langle N''(s), T(s)\rangle = 0,$

$\langle N''(s), B(s)\rangle = \langle B''(s), N(s)\rangle = 0,$

$\langle T''(s), T(s)\rangle = -1,$

$\langle T''(s), B(s)\rangle = \langle B''(s), T(s)\rangle,$

$\langle N''(s), N(s)\rangle = -2k_2(s)$,

$\langle B''(s), B(s)\rangle = -k_2^2(s)$

dir (Ovalıoğlu ve İyigün 2018).

İspat: Teorem 3.1.3 deki denklemlerin türevleri alındığında ispatlar açıkça görülmektedir.

Teorem 3.2.6. α, IR_1^3 de bir Cartan null eğri ve $\{T(s),\ N(s),\ B(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{T(s),\ N(s)\}$ alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur (Ovalıoğlu ve İyigün 2018).

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)\ T(s) + \mu(s)\ N(s)$ eğrisinde eşitliğin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir.

$\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere Teorem 3.2.1. deki $T'(s)$, $N'(s)$ ve $B'(s)$ için

$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)[-k_2(s)T(s) - B(s)]$

$\Rightarrow T(s) = [\lambda'(s) - k_2(s)\mu(s)]T(s) + [\lambda(s) + \mu'(s)]N(s) - \mu(s)B(s)$

olmak üzere,

$$\begin{cases} \lambda'(s) - k_2(s)\mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ -\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözüldüğünde $\mu(s) = 0$ ve $\mu'(s) = 0$ dır.

Eğer $\mu'(s) = 0$ ise $\lambda(s) = 0$ olur. Bu değerler için

$$\lambda'(s) - k_2(s)\mu(s) = 1$$

denklemi sağlanmaz. Böylece $\{T(s), N(s)\}$ alt uzayında yatan bir eğri mevcut değildir.

Teorem 3.2.7. α, IR_1^3 de bir Cartan null eğri ve $\{T(s), N(s), B(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı olmak üzere bu çatının $\{T(s), B(s)\}$ alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s) = (s+c)T(s) + dB(s)$$

dir. Burada ikinci Frenet eğriliği $k_2(s) = -\frac{(s+c)}{d}$ olup d sıfırdan farklı bir sabittir (Ovalıoğlu ve İyigün 2018).

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$

eğrisinde s parametresine göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)B'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s) = T(s)$ için $\alpha'(s)$ ifadesi

$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)k_2(s)N(s)$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + [\lambda(s) + \mu(s)k_2(s)]N(s) + \mu'(s)B(s)$

şeklini alır. Böylece

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözülürse $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + c$ ve $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = d$ elde edilir. Burada c ve d birer sabittir. O zaman $\lambda(s) = s + c$ ve $\mu(s) = d$ için ikinci Frenet eğriliğinin $k_2(s) = -\frac{(s+c)}{d}$, ($d \neq 0$ sabit) olduğu görülür. Böylece,

$$\alpha(s) = (s+c)T(s) + dB(s)$$

eğrisi $\{T(s), B(s)\}$ alt uzayında yatar.

Teorem 3.2.8. IR_1^3 de bir Cartan null eğri α ve $\{T(s), N(s), B(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{N(s), B(s)\}$ alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur (Ovalıoğlu ve İyigün 2018).

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$

eğrisinin eşitliğinde s parametresine göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)B'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere $N'(s)$ ve $B'(s)$ değerleri yerlerine yazılırsa

$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)[-k_2(s)T(s) - B(s)] + \mu'(s)B(s) + \mu(s)k_2(s)N(s)$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)N(s) - k_2(s)\lambda(s)T(s) - \lambda(s)B(s) + \mu'(s)B(s) + k_2(s)\mu(s)N(s)$

$\Rightarrow T(s) = [\lambda'(s) + k_2(s)\mu(s)]N(s) - k_2(s)\lambda(s)T(s) + [-\lambda(s) + \mu'(s)]B(s)$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} -k_2(s)\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + k_2(s)\mu(s) = 0, \\ -\lambda(s) + \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $-k_2(s)\lambda(s) = 1$ denklemi sağlanmadığından $\{N(s), B(s)\}$ alt uzayında yatan bir eğri mevcut değildir.

3.3 IR_1^3 de Null Eğri

$\{T(s), N(s), B(s)\}$ Frenet çatısında

$$\langle T(s), T(s)\rangle = \langle B(s), B(s)\rangle = \langle T(s), N(s)\rangle = \langle N(s), B(s)\rangle = 0$$

ve

$$\langle N(s), N(s)\rangle = \langle T(s), B(s)\rangle = 1$$

şartlarında tanımlı olan Null eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 \\ k_2(s) & 0 & -k_1(s) \\ 0 & -k_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

için

$$T'(s) = k_1(s)N(s)$$

$$N'(s) = k_2(s)T(s) - k_1(s)B(s)$$

$$B'(s) = -k_2(s)N(s)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Duggal ve Jin 2007).

Teorem 3.3.1. α, IR_1^3 de bir Null eğri ve $\{T(s), N(s), B(s)\}$ α nın Frenet çatısı olmak üzere $k_1(s) = 1$ için Frenet denklemleri;

$$T'(s) = N(s),$$

$$N'(s) = k_2(s)T(s) - B(s),$$

$$B'(s) = -k_2(s)N(s)$$

dir (İyigün 2019).

İspat: Teoremin ispatı aşikardır.

Sonuç 3.3.2. $k_1(s) = 1$ için Null eğrinin Frenet denklemleri sadece $k_2(s)$ ikinci Frenet eğriliğine sahiptir.

Teorem 3.3.3. IR_1^3 de α bir Null eğri ve α nın Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\langle T'(s), B(s)\rangle = \langle T'(s), T(s)\rangle = \langle N'(s), N(s)\rangle = \langle B'(s), T(s)\rangle = \langle B'(s), B(s)\rangle = 0,$$

$$\langle N'(s), T(s)\rangle = -1,$$

$$\langle N'(s), B(s)\rangle = k_2(s),$$

$$\langle B'(s), N(s)\rangle = -k_2(s),$$

$\langle T'(s), N(s)\rangle = 1$ (İyigün 2019).

İspat: Null eğrinin Frenet denklemleri yerlerine yazıldığında

$$\langle T'(s), B(s)\rangle = \langle N(s), B(s)\rangle$$

$$\langle N(s), B(s)\rangle = 0$$

$$\langle T'(s), B(s)\rangle = 0$$

$$\langle T'(s), N(s)\rangle = \langle N(s), N(s)\rangle = 1$$

$$\langle N'(s), B(s)\rangle = \langle k_2(s)T(s) - B(s),\ \ B(s)\rangle$$

$$= k_2(s)\langle T(s),\ B(s)\rangle - \langle B(s), B(s)\rangle = k_2(s)$$

$$\langle N'(s), B(s)\rangle = k_2(s)$$

$$\langle N'(s), T(s)\rangle = \langle k_2(s)T(s) - B(s),\ \ T(s)\rangle$$

$$= k_2(s)\langle T(s),\ T(s)\rangle - \langle B(s), T(s)\rangle = -1$$

$$\langle N'(s), T(s)\rangle = -1$$

elde edilir. Diğer denklemlerin ispatları da benzer şekilde yapılır.

Teorem 3.3.4. IR_1^3 de α bir Null eğri olsun. Birinci ve ikinci Frenet eğrilikleri

$$k_1(s) = \langle T'(s), N(s)\rangle$$

ve

$$k_2(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle$$

şeklindedir.

İspat: Teorem 3.3.3 ün ispatında görüldüğü üzere

$$\langle T'(s), N(s)\rangle = 1 = k_1(s)$$

ve

$$\langle N'(s), B(s)\rangle = k_2(s)$$

dir.

Teorem 3.3.5. IR_1^3 de bir Null eğrisinin teğet, normal ve binormal vektörleri arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

$$\langle T''(s), B(s)\rangle = \langle B''(s), T(s)\rangle = k_2(s),$$

$$\langle T''(s), T(s)\rangle = -1,$$

$$\langle N''(s), N(s)\rangle = 2k_2(s),$$

$$\langle B''(s), B(s)\rangle = -k_2^2(s),$$

$$\langle N''(s), T(s)\rangle = \langle N''(s), B(s)\rangle = \langle B''(s), N(s)\rangle = \langle T''(s), N(s)\rangle = 0$$ (İyigün 2019).

İspat: Teorem 3.3.3 deki eşitliklerin türevleri alınarak isenilenler açıkça görülmektedir.

Teorem 3.3.6. IR_1^3 de bir α Null eğrisi $\{T(s), N(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatmaz (İyigün 2019).

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eşitliğinde s parametresine göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)(k_2(s)T(s) - B(s))$$

$$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) +\mu(s) k_2(s)T(s) - \mu(s)B(s)$$

$$\Rightarrow T(s) = [\lambda'(s) + \mu(s)k_2(s)]T(s) + [\lambda(s) + \mu'(s)]N(s) - \mu(s)B(s)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ -\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri vardır. Bu denklemler çözülürse $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ ve $\lambda(s) = 0$ elde edilir. $\lambda'(s) = 0$ birinci denklemde yerine yazıldığında denklemi sağlamadığı görülür. Dolayısıyla, α eğrisi $\{T(s), N(s)\}$nin gerdiği alt uzayda yatmaz.

Teorem 3.3.7. IR_1^3 de bir α Null eğrisi $\{N(s), B(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatmaz.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$

olsun. Eşitliğin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)B'(s)$$

elde edilir. Buradan $\alpha'(s) = T(s)$ için

$$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)[k_2(s)T(s) - B(s)]+ \mu'(s)B(s) + \mu(s)[-k_2(s)N(s)]$$

$$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s) k_2(s)T(s) - \lambda(s)B(s)+ \mu'(s)B(s) - \mu(s)k_2(s)N(s)$$

$$\Rightarrow T(s) = [\lambda'(s) - \mu(s)k_2(s)]N(s) + \lambda(s) k_2(s)T(s) + [-\lambda(s) + \mu'(s)]B(s)$$

bulunur. Elde edilen

$$\begin{cases} \lambda(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ -\lambda(s) + \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde $\lambda(s) = \frac{1}{k_2(s)}$ ise $\lambda'(s) = 0$ olduğu görülür. Ayrıca $-\mu(s)k_2(s) = 0$ dan $\mu(s) = 0$ elde edilir. $\mu(s) = 0$ ise o zaman $\mu'(s) = 0$ olur. Bulunan değerler en son denklemi sağlamaz. Böylece α nın $\{N(s), B(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatmadığı görülür.

Teorem 3.3.8. IR_1^3 deki α Null eğrisi $\{T(s), B(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatmaz.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$ olsun. Eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)B'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)[-k_2(s)N(s)]$$

$$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + [\lambda(s) - \mu(s)k_2(s)]N(s) + \mu'(s)B(s)$$

eşitliğinden

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = d_1$, (d_1 sabit) ve $\lambda(s) = k_2(s)\, d_1$ olur. Bu da $\lambda'(s) = 1$ denklemini sağlamaz. Böylece α, Null eğrisinin $\{T(s), B(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatmadığı görülür.

3.4 IR_1^3 deki Eğrilerin Sınıflandırılması

Bu kısımda IR_1^3 deki Pseudo Null, Cartan Null ve Null eğrilerin sınıflandırılması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Eğri	**Alt uzay**	**Yatıp Yatmadığı**
Pseudo Null Eğri	{T(s), N(s)}	Yatıyor
	{N(s), B(s)}	Yatıyor
	{T(s), B(s)}	Yatıyor
Cartan Null Eğri	{T(s), N(s)}	Yatmıyor
	{N(s), B(s)}	Yatmıyor
	{T(s), B(s)}	Yatıyor
Null Eğri	{T(s), N(s)}	Yatmıyor
	{N(s), B(s)}	Yatmıyor
	{T(s), B(s)}	Yatmıyor

4. IR_1^4 YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA NULL EĞRİLER

Bu bölümde IR_v^n ; Yarı-Öklidyen uzayında n=4, v=1 için oluşturulan uzaya 4-boyutlu Lorentz uzayı denir ve $IR_1^4 = L^4$ ile gösterilir. Bu uzaydaki Lorentz iç-çarpımı

$$< x, y > = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{4} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanır. Burada $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ olarak alınmıştır. $\{T, N, B_1, B_2\}$ Frenet çatısında, T ye teğet, N ye normal B_1 e birinci binormal, B_2 ye de ikinci binormal vektör denir. Burada $\forall s \in IR$ için

$$T(s) = \alpha'(s),\ N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \text{ ve } B(s) = T(s)\Lambda N(s)$$

dir. k_1 ile birinci Frenet eğriliği, k_2 ile ikinci Frenet eğriliği, k_3 ile üçüncü Frenet eğriliği ve Λ ile de R_1^4 deki vektörel çarpım ifade edilmiştir.

4.1 IR_1^4 de Pseudo Null Eğri

$\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısında

$$\langle T(s), T(s)\rangle = \langle B_1(s), B_1(s)\rangle = 1,$$

$$\langle N(s), N(s)\rangle = \langle B_2(s), B_2(s)\rangle = 0,$$

$\langle T(s), N(s)\rangle = \langle T(s), B_1(s)\rangle = \langle T(s), B_2(s)\rangle = \langle N(s), B_1(s)\rangle = \langle B_1(s), B_2(s)\rangle = 0$

ve $\langle N(s), B_2(s)\rangle = 1$

şartlarında tanımlı olan R_1^4 deki Pseudo null eğri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'_1(s) \\ B'_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2(s) & 0 \\ 0 & k_3(s) & 0 & -k_2(s) \\ -k_1(s) & 0 & -k_3(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix},$$

$$T'(s) = k_1(s)N(s)$$

$$N'(s) = k_2(s)B_1(s)$$

$$B'_1(s) = k_3(s)N(s) - k_2(s)B_2(s)$$

$$B'_2(s) = -k_1(s)T(s) - k_3(s)B_1(s)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Bonnor 1985 ve Walrave 1995).

Teorem 4.1.1. α, IR_1^4 de bir Pseudo null eğri ve eğrinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$\langle T'(s), N(s)\rangle = \langle T'(s), B_1(s)\rangle = \langle T'(s), T(s)\rangle = \langle N'(s), T(s)\rangle = \langle N'(s), N(s)\rangle = 0,$

$\langle N'(s), B_2(s)\rangle = \langle B'_1(s), T(s)\rangle = \langle B'_1(s), B_1(s)\rangle = \langle B'_2(s), N(s)\rangle = \langle B'_2(s), B_2(s)\rangle = 0,$

$$\langle T'(s), B_2(s)\rangle = k_1(s),$$

$$\langle N'(s), B_1(s)\rangle = k_2(s),$$

$$\langle B'_1(s), N(s)\rangle = -k_2(s),$$

$$\langle B'_1(s), B_2(s)\rangle = k_3(s),$$

$$\langle B'_2(s), T(s)\rangle = -k_1(s),$$

$$\langle B'_2(s), B_1(s)\rangle = -k_3(s).$$

İspat: Tanımda verilen Pseudo null eğri denklemleri yerlerine yazıldığında ispatlar görülmektedir.

Sonuç 4.1.2. $k_1(s) = 1$ için

$$\langle T'(s), B_2(s)\rangle = 1$$

ve

$$\langle T(s), B'_2(s)\rangle = -1$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.3. IR_1^4 de bir Pseudo null eğrisinin teğet, normal, birinci ve ikinci binormal vektörleri arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

$$\langle T''(s), N(s)\rangle = \langle T''(s), B_2(s)\rangle = \langle T''(s), T(s)\rangle = \langle N''(s), T(s)\rangle = \langle N''(s), B_1(s)\rangle = 0,$$

$$\langle B''_1(s), N(s)\rangle = \langle B''_1(s), B_2(s)\rangle = \langle B''_2(s), T(s)\rangle = \langle B''_2(s), B'_1(s)\rangle = 0,$$

$$\langle T''(s), B_1(s)\rangle = \langle B''_1(s), T(s)\rangle = k_1(s)k_2(s)\ ,$$

$$\langle N''(s), N(s)\rangle = -k_2^2(s),$$

$$\langle N''(s), B_2(s)\rangle = \langle B''_2(s), N(s)\rangle = k_2(s)k_3(s)\ ,$$

$$\langle B''_1(s), B_1(s)\rangle = 2k_2(s)k_3(s),$$

$$\langle B''_2(s), B_2(s)\rangle = -[k_1^2(s) + k_3^2(s)].$$

İspat: Teorem 4.1.1 deki eşitliklerin türevleri alınıp Pseudo null eğri Frenet denklemleri yerlerine yazıldığında ispat görülmektedir.

Sonuç 4.1.4. Eğer $k_1(s)$= 1 alınırsa Teorem 4.1.3 den

$$\langle T''(s), B_1(s)\rangle = \langle B_1(s), T(s)\rangle = k_2(s)$$

ve

$$\langle B''_2(s), B_2(s)\rangle = -1 - k_3^2(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5. α, IR_1^4 de Pseudo null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ bu eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{T(s), N(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = (s+d)T(s) - \left(\frac{s^2}{2} + sd\right)N(s)$$

dir. Burada d sıfırdan farklı bir sabittir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eşitliğinde s parametresine göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

olup $\alpha'(s) = T(s)$ için

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)[k_2(s)B_1(s)]$$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s)[\lambda(s) + \mu'(s)]N(s) + \mu(s)k_2(s)B_1(s)$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = (s+d)$, ($d \neq 0$ bir sabittir) ve

$$\lambda(s) + \mu'(s) = 0 \Rightarrow (s+d) + \mu'(s) = 0$$

ise

$$\mu(s) = -\left(\frac{s^2}{2} + sd\right)$$

elde edilir. Böylece $\{T(s), N(s)\}$ alt uzayında yatan aradığımız eğri

$$\alpha(s) = (s+d)T(s) - \left(\frac{s^2}{2} + sd\right)N(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.1.6. IR_1^4 de α, bir Pseudo null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{T(s), B_1(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = (s+d)T(s) + d_1B_1(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_1(s)$ eşitliğinde s parametresine göre her iki tarafın türevi alındığında

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)B_1'(s)$$

elde edilir ve $\alpha'(s) = T(s)$ için

$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)[k_3(s)N(s) - k_2(s)B_2(s)]$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)k_3(s)N(s) - \mu(s)k_2(s)B_2(s)$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + [\lambda(s) + \mu(s)k_3(s)]N(s) + \mu'(s)B_1(s) - \mu(s)k_2(s)B_2(s)$

eşitliğinden elde edilen

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ -\mu(s)k_2(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde $\lambda(s) = (s+d)$, ($d \neq 0$ bir sabit) ve $\mu'(s) = 0 \Rightarrow \mu(s) = d_1$

($d_1 \neq 0$ bir sabit) için

$$\lambda(s) + \mu(s)k_3(s) = 0$$

ise

$$(s+d) + d_1k_3(s) = 0$$

olup

$$k_3(s) = -\frac{(s+d)}{d_1}, (d_1 \neq 0)$$

bulunur. Böylece

$-\mu(s)k_2(s) = 0$ ise $k_2(s) = 0$

elde edilir. O zaman

$$\alpha(s) = (s+d)T(s)+d_1B_1(s)$$

dir.

Teorem 4.1.7. α, IR_1^4 de Pseudo null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ bu eğrinin Frenet çatısı ise bu çatının $\{T(s), B_2(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = -B_2(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_2(s)$ eşitliğinde s parametresine göre her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)B_2'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere düzenlendiğinde

$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)[-T(s) - k_3(s)B_1(s)]$

$\Rightarrow T(s) = [\lambda'(s) - \mu(s)]T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B_2(s) - \mu(s)k_3(s)B_1(s)$

den

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ -\mu(s)k_3(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 0$

dır ve

$\lambda'(s) - \mu(s) = 1 \Rightarrow \mu(s) = -1$

olup bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$k_3(s) = 0$$

bulunur. Böylece aranılan eğri

$$\alpha(s) = -B_2(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.8. α, IR_1^4 de Pseudo null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ bu eğrinin Frenet çatısı olsun. α eğrisi bu çatının $\{N(s), B_1(s)\}$ tarafından gerdiği alt uzayda bulunmamaktadır.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_1(s)$ olsun. Eşitliğin her iki tarafında s parametresine göre türevi

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)B_1{}'(s)$$

olarak elde edilir. Böylece $\alpha'(s) = T(s)$ için düzenlendiğinde

$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)k_2(s)B_1(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)[k_3(s)N(s) - k_2(s)B_2(s)]$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)k_2(s)B_1(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)k_3(s)N(s) - \mu(s)k_2(s)B_2(s)$

olur. Eşitliğin sağ tarafında T(s) teğet vektörü olmadığından eşitlik gerçekleşmez ve böylece $\{N(s), B_1(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda bir eğri bulunamaz.

Teorem 4.1.9. IR_1^4 deki

$$\alpha(s) = (s+d)N(s) - B_2(s)$$

şartını sağlayan Pseudo null eğrisi $\{N(s), B_2(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatar.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_2(s)$ eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)B_2{}'(s)$$

olup $\alpha'(s) = T(s)$ için

$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)k_2(s)B_1(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)[-T(s) - k_3(s)B_1(s)]$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)k_2(s)B_1(s) + \mu'(s)B_2(s) - \mu(s)T(s) - \mu(s)k_3(s)B_1(s)$

dir. Buradan

$$\begin{cases} -\mu(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) - \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde $\mu(s)=-1$ ise $\mu'(s)=0$ ve $\lambda'(s)=0$ ise $\lambda(s)=(s+d)$, ($d\neq 0$ bir sabit) olup üçüncü denklem çözüldüğünde

$$\lambda(s)k_2(s)-\mu(s)k_3(s)=0 \text{ ise } (s+d)k_2(s)=-k_3(s)$$

olduğu görülür. Böylece ikinci Frenet eğriliği

$$k_2(s)=-\frac{k_3(s)}{(s+d)},\ (s+d\neq 0)$$

şeklinde bulunur. O halde

$$\alpha(s)=(s+d)N(s)-B_2(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.10. α, IR_1^4 de Pseudo null eğri ve $\{T(s),N(s),B_1(s),B_2(s)\}$ bu eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{B_1(s),B_2(s)\}$ alt uzayında yatan eğriler

$$\alpha(s)=-B_2(s)$$

veya

$$\alpha(s)=d_1B_1(s)-B_2(s),\ (d_1\neq 0 \text{ sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s)=\lambda(s)B_1(s)+\mu(s)B_2(s)$ eşitliğinde s parametresine göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)B_1(s)+\lambda(s)B_1'(s)+\mu'(s)B_2(s)+\mu(s)B_2'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ olmak üzere

$T(s)=\lambda'(s)B_1(s)+\lambda(s)[k_3(s)N(s)-k_2(s)B_2(s)]+\mu'(s)B_2(s)+\mu(s)[-T(s)-k_3(s)B_1(s)]$

$\Rightarrow T(s)=\lambda'(s)B_1(s)+\lambda(s)k_3(s)N(s)-\lambda(s)k_2(s)B_2(s)+\mu'(s)B_2(s)-\mu(s)T(s)-\mu(s)k_3(s)B_1(s)$.

Böylece

$$\begin{cases} -\mu(s)=1, \\ \lambda'(s)-\mu(s)k_3(s)=0, \\ \lambda(s)k_3(s)=0, \\ -\lambda(s)k_2(s)+\mu'(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\mu(s)=-1$ ise $\mu'(s)=0$ dır. Ayrıca $\lambda'(s)=-k_3(s)$ olup $\lambda(s)\,k_3(s)=0$ ve $\lambda(s)\,k_2(s)=0$ bulunur.

Eğer;

i) $\lambda(s)=0$ olursa $\alpha(s)=-B_2(s)$ olur.

ii) $k_3(s) = 0$ ise $\lambda(s) \neq 0$ olduğu takdirde $\lambda'(s) = 0$ olur, o zaman $\lambda(s) = d_1$, ($d_1 \neq 0$ sabit) ise $k_2(s) = 0$ olup

$$\alpha(s) = d_1 B_1(s) - B_2(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.11. α, IR_1^4 de Pseudo null eğrisinin $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısının $\{T(s), N(s), B_1(s)\}$ alt uzayında yatan eğrileri

$$\alpha(s) = (s+d)T(s) + \left(-\frac{s^2}{2} - d_2 + d_1\right) N(s)$$

veya

$$\alpha(s) = (s+d)T(s) - \left(-\frac{s^2}{2} - d_2 + d_1 k_3(s) s\right) N(s) + d_1 B_1(s)$$

dır.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \gamma(s)B_1(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s) + \gamma'(s)B_1(s) + \gamma(s)B_1'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için

$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)k_2(s)B_1(s) + \gamma'(s)B_1(s) + \gamma(s)[k_3(s)N(s) - k_2(s)B_2(s)]$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)k_2(s)B_1(s) + \gamma'(s)B_1(s) + \gamma(s)k_3(s)N(s) - \gamma(s)k_2(s)B_2(s)$

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) + \gamma(s)k_3(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) + \gamma'(s) = 0, \\ -\gamma(s)k_2(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözüldüğünde

i) $\gamma(s) = 0$ ise $\lambda(s) = (s+d)$, $\mu'(s) = -(s+d)$ ve $\mu(s) = -\left(\frac{s^2}{2} - d_s\right) + d_1$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = (s+d)T(s) + \left(-\frac{s^2}{2} - d_2 + d_1\right) N(s)$$

bulunur. Burada d, d_1, d_2 sıfırdan farklı sabitlerdir.

ii) $\gamma(s) \neq 0$ ve $k_2(s) = 0$ ise buradan $\gamma(s) = d_1$, $\lambda(s) = (s+d)$,

$\mu'(s) = -(s+d) - d_1 k_3(s)$

elde edilir. Burada $\mu(s) = -\frac{s^2}{2} - d_2 + d_1 k_3(s)s$ olup

$$\alpha(s) = (s+d)T(s) + \left(-\frac{s^2}{2} - d_2 + d_1 k_3(s)s\right) N(s) + d_1 B_1(s)$$

elde edilir. Burada d, d_1, d_2 sıfırdan farklı sabitlerdir.

Teorem 4.1.12. α, IR_1^4 de Pseudo null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ bu eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{T(s), N(s), B_2(s)\}$ alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s) = -\frac{k_3(s)}{k_2(s)} T(s) + \frac{(s+d)\, k_3(s)}{k_2(s)} N(s) + (s+d) B_2(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \gamma(s)B_2(s)$ eğrisini alalım. Burada eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s) + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)B_2'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere $T'(s)$, $N'(s)$, $B_2'(s)$ denklemleri yerlerine yazılırsa

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda'(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)k_2(s)B_1(s) + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)[-T(s) - k_3(s)B_1(s)]$$

ve elde edilen eşitlik düzenlendiğinde

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \gamma(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemleri çözdüğümüzde

$$\gamma(s) = (s+d), (d = \text{sabit})$$

ve

$$\mu(s) = \frac{(s+d)\, k_3(s)}{k_2(s)}, \quad (k_2(s) \neq 0) \text{ olmak üzere } \mu'(s) = \frac{k_3(s)}{k_2(s)} \text{ ve } \lambda(s) = -\frac{k_3(s)}{k_2(s)}$$

elde edilir. Bulunan bu denklemler α eğrisinin denkleminde yazıldığında

$$\alpha(s) = -\frac{k_3(s)}{k_2(s)} T(s) + \frac{(s+d)k_3(s)}{k_2(s)} N(s) + (s+d)B_2(s)$$

olur.

Teorem 4.1.13. α, IR_1^4 de Pseudo null eğri olsun. Frenet çatısının $\{N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ alt uzayında yatan eğrilerden biri

$$\alpha(s) = dN(s) + d\frac{k_2(s)}{k_3(s)} B_1(s)$$

ve diğer eğri ise

$$\alpha(s) = \left(\frac{k_3^2(s)\, s^2}{2} - d_1(s)\right) N(s) + (-k_3(s)s + d_1)B_1(s) - B_2(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_1(s) + \gamma(s)B_2(s)$

eğrisinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)B_1{}'(s) + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)B_2{}'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere Frenet vektör denklemleri yerine yazıldığında

$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)k_2(s)B_1(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)[k_3(s)N(s) - k_2(s)B_2(s)] + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)[-T(s) - k_3(s)B_1(s)]$

eşitlikleri bulunur. Elde edilen

$$\begin{cases} -\gamma(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0, \\ \gamma'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde

i) $\mu(s) = 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ için $\lambda(s) = d$, ($d =$ sabit) ve $\gamma(s) = \dfrac{dk_2(s)}{k_3(s)}$

bulunur.

ii) $k_2(s) = 0$ ve $\mu'(s) \neq 0$ ise $\mu'(s) = -k_3(s)$ ve $\mu(s) = -k_3(s)s + d_1$ olup

$\lambda(s) = \frac{k_3^2(s)s^2}{2} - d_1(s)$

bulunur. O zaman eğrimizin biri

$$\alpha(s) = dN(s) + d\frac{k_2(s)}{k_3(s)}B_1(s)$$

dir. Diğeri ise

$$\alpha(s) = \left(\frac{k_3^2(s)s^2}{2} - d_1(s)\right) N(s) + (-k_3(s)s + d_1)B_1(s) - B_2(s)$$

şeklinde elde edilir.

4.2 IR_1^4 de Partially Null Eğri

$\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısında

$$\langle T(s), T(s)\rangle = \langle N(s), N(s)\rangle = \langle B_1(s), B_2(s)\rangle = 1,$$

$$\langle B_1(s), B_1(s)\rangle = \langle B_2(s), B_2(s)\rangle = \langle T(s), N(s)\rangle = \langle T(s), B_1(s)\rangle = 0,$$

$$\langle T(s), B_2(s)\rangle = \langle N(s), B_1(s)\rangle = \langle N(s), B_2(s)\rangle = 0$$

şartlarında

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'_1(s) \\ B'_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 \\ -k_1(s) & 0 & k_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(s) & 0 \\ 0 & -k_2(s) & 0 & -k_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix}$$

Frenet denklemlerini sağlayan eğriye Partially null eğri denir (Bonnor 1985 ve Walrave 1995).

Teorem 4.2.1. α, IR_1^4 de bir Partially null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ α nın Frenet çatısı olmak üzere $k_1(s) = 1$ için Frenet denklemleri

$$T'(s) = N(s),$$

$$N'(s) = -T(s) + k_2(s)B_1(s),$$

$$B_1{}'(s) = k_3(s)B_1(s),$$

$$B_2{}'(s) = -k_2(s)N(s) - k_3(s)B_2(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.2. $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısında ve IR_1^4 de bir Partially null eğri için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\langle T'(s), N(s)\rangle = 1,$$

$$\langle T'(s), B_1(s)\rangle = \langle T'(s), B_2(s)\rangle = \langle T'(s), T(s)\rangle = \langle N'(s), B_1(s)\rangle = 0,$$

$$\langle N'(s), N(s)\rangle = \langle B_1{}'(s), T(s)\rangle = \langle B_1{}'(s), N(s)\rangle = \langle B_1{}'(s), B_1(s)\rangle = 0,$$

$$\langle B_2{}'(s), T(s)\rangle = \langle B_2{}'(s), B_2(s)\rangle = 0,$$

$$\langle N'(s), B_2(s)\rangle = k_2(s) = -\langle B_2{}'(s), N(s)\rangle,$$

$$\langle N'(s), T(s)\rangle = -1,$$

$$\langle B_1{}'(s), B_2(s)\rangle = k_3(s) = -\langle B_2{}'(s), B_1(s)\rangle.$$

İspat: Teorem 4.2.1 deki Frenet denklemleri ispatı istenen denklemde yerlerine yazılır ve Partially null eğri tanımından da yararlanılarak ispat yapılır.

Teorem 4.2.3. i) Eğer $k_3(s) = 0$ ise

$$\langle B_1'(s), B_2(s)\rangle = 0,$$
$$\langle B_2'(s), B_1(s)\rangle = 0$$

ve

ii) $k_2(s) = 0$ için

$$\langle N'(s), B_2(s)\rangle = 0,$$
$$\langle B_2'(s), N(s)\rangle = 0$$

dir.

Teorem 4.2.4. IR_1^4 teki Partially null eğrisinin teğet, normal, birinci ve ikinci binormal vektörleri için

$$\langle T''(s), N(s)\rangle = \langle T''(s), B_1(s)\rangle = \langle N''(s), B_1(s)\rangle = \langle N''(s), T(s)\rangle = 0,$$
$$\langle B_1''(s), T(s)\rangle = \langle B_1''(s), N(s)\rangle = \langle B_1''(s), B_1(s)\rangle = 0,$$
$$\langle T''(s), B_2(s)\rangle = \langle B_2''(s), T(s)\rangle = k_2(s),$$
$$\langle T''(s), T(s)\rangle = \langle N''(s), N(s)\rangle = -1,$$
$$\langle N''(s), B(s)\rangle = \langle B_2''(s), N(s)\rangle = k_2(s)\, k_3(s),$$
$$\langle B_1''(s), B_2(s)\rangle = \langle B_2''(s), B_1(s)\rangle = k_3^2(s),$$
$$\langle B_2''(s), B_2(s)\rangle = -k_2^2(s)$$

mevcuttur.

İspat: Teorem 4.2.2 deki denklemlerin türevleri alınıp Frenet denklemleri yerlerine yazıldığında ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.5. i) Eğer $k_3(s) = 0$ ise

$$\langle N''(s), B(s)\rangle = \langle B_2''(s), N(s)\rangle = 0,$$
$$\langle B_1''(s), B_2(s)\rangle = \langle B_2''(s), B_1(s)\rangle = 0$$

ve

ii) $k_2(s) = 0$ ise

$$\langle T''(s), B_2(s)\rangle = \langle B_2''(s), T(s)\rangle = 0$$
$$\langle N''(s), B(s)\rangle = \langle B_2''(s), N(s)\rangle = \langle B_2''(s), B_2(s)\rangle = 0$$

dir.

İspat: Teoremin ispatı aşikardır.

Teorem 4.2.6. α, IR_1^4 te bir Partially null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ eğrinin Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{T(s), N(s)\}$nin gerdiği alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s) = (s+d)T(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eşitliğinde her iki tarafın s parametresine göre türevi alınırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. O zaman

$\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere Frenet vektörleri yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)[-T(s) + k_2(s)B_2(s)]$$

$$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) - \mu(s)T(s) + \mu(s)k_2(s)B_2(s)$$

$$\Rightarrow T(s) = [\lambda'(s) - \mu(s)]T(s) + [\lambda(s) + \mu'(s)]N(s) + \mu(s)k_2(s)B_2(s)$$

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Elde edilen bu denklemler çözülürse $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ ve $\lambda'(s) = 0$ ise $\lambda(s) = (s+d)$, ($d \neq 0$ bir sabit) dir. O zaman

$$\alpha(s) = (s+d)T(s)$$

dir.

Teorem 4.2.7. IR_1^4 de α Partially null eğrisi ve eğrinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ olsun. Bu çatının $\{T(s), B_1(s)\}$ alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_1(s)$ eşitliğinde her iki tarafın s parametresine göre türevi

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)B_1{}'(s)$$

şeklindedir. $\alpha'(s) = T(s)$, $T'(s)$ ve $B_1{}'(s)$ Frenet vektörleri için

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)k_3(s)B_1(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + d$ olmalıdır. Fakat $\lambda(s) = 0$ olduğundan denklem sağlanmaz. Böylece Frenet çatısının $\{T(s), B_1(s)\}$ alt uzayında yatan bir eğrisi mevcut değildir.

Teorem 4.2.8. α, IR_1^4 de Partially null eğri olsun. α nın Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ olsun. Frenet çatısının $\{T(s), B_2(s)\}$ altuzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = (s+d)T(s) + \frac{(s+d)}{k_2(s)} B_2(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_2(s)$ olsun. Eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)B_2'(s)$$

olup $\alpha'(s) = T(s)$ için $T'(s)$ ve $B_2'(s)$ vektörleri yerlerine yazılırsa

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)[-k_2(s)N(s) - k_3(s)B_2(s)]$$

$$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B_2(s) - \mu(s)k_2(s)N(s) - \mu(s)k_3(s)B_2(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) - \mu(s)k_3(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözüldüğünde

$\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + d$, (d sıfırdan farklı sabit) değeri ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$\mu(s) = \frac{(s+d)}{k_2(s)}, \ (k_2(s) \neq 0)$$

elde edilir. $\mu(s)$ değeri 3. denklemde yerine yazıldığında ise

$$\mu'(s) = k_3(s)\frac{(s+d)}{k_2(s)}$$

bulunur. O zaman $\{T(s), B_2(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatan eğri

$$\alpha(s) = (s+d)T(s) + \frac{(s+d)}{k_2(s)} B_2(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.9. IR_1^4 de bir Partially null eğri α olsun. Eğrinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ için bu çatının $\{N(s), B_1(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = -N(s) + \left(\frac{k_2(s)}{k_3(s)} + ce^{-k_3(s)s}\right) B_1(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_1(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türevi

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s){B_1}'(s)$$

dir. $\alpha'(s) = T(s)$ şartında $N'(s)$, ${B_1}'(s)$ Frenet vektörlerinin denklemleri yerlerine yazıldığında

$$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)[-T(s) + k_2(s)B_1(s)] + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)k_3(s)B_1(s)$$

$$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)N(s) - \lambda(s)T(s) + \lambda(s)k_2(s)B_1(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)k_3(s)B_1(s)$$

bulunup

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Burada $\lambda(s) = -1$ ve $\lambda'(s) = 0$ varolduğundan

$$(-1)k_2(s) + \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) = 0$$

$$\Rightarrow \mu'(s) + \mu(s)k_3(s) = k_2(s)$$

dir. Burada

$$e^{\int k_3(s)ds} = e^{k_3(s)s}$$

gözönüne alındığında

$$\mu(s)e^{k_3(s)s} = \int k_2(s)\, e^{k_3(s)s} + c$$

$$\Rightarrow \mu(s) = \left(\frac{k_2(s)}{k_3(s)} e^{k_3(s)s} + c\right) e^{-k_3(s)s}$$

$$\Rightarrow \mu(s) = \frac{k_2(s)}{k_3(s)} + ce^{-k_3(s)s}, \quad (c = \text{sabit},\ k_3(s) \neq 0)$$

elde edilir. Buradan bulunan değerler $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_1(s)$ eğrisinde yerine yazılırsa

$$\alpha(s) = -N(s) + \left(\frac{k_2(s)}{k_3(s)} + ce^{-k_3(s)\,s}\right) B_1(s)$$

dir.

Teorem 4.2.10. α eğrisi IR_1^4 de bir Partially null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ de eğrinin Frenet çatısı olsun. Frenet çatısının $\{N(s), B_2(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = -N(s) + \left(ce^{k_3(s)d}\right)B_2(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_2(s)$ olsun. Eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alındığında

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)B_2{}'(s)$$

bulunur. α nın hız vektörü teğet vektörüne eşit olduğundan

$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)[-T(s) + k_2(s)B_1(s)] + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)[-k_2(s)N(s) - k_3(s)B_2(s)]$

$\Rightarrow T(s)=\lambda'(s)N(s)-\lambda(s)T(s) + \lambda(s)k_2(s)B_1(s) + \mu'(s)B_2(s) - \mu(s)k_2(s)N(s) - \mu(s)k_3(s)B_2(s)$

elde edilir. O zaman

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) = 0, \\ \mu'(s) - \mu(s)k_3(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ ve $k_2(s) = 0$ dır. Üçüncü denklemden

$$\mu'(s) \neq 0 \text{ ise } \mu'(s) - \mu(s)k_3(s) = 0$$

olup

$$\frac{d\mu(s)}{\mu(s)} = k_3(s)\, d$$

$\Rightarrow \ln\mu(s) = k_3(s) + \ln c$

$\Rightarrow \mu(s) = ce^{k_3(s)s}$ (c = sabit)

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = -N(s) + \left(ce^{k_3(s)d}\right)B_2(s)$$

dir.

Teorem 4.2.11. IR_1^4 de α bir Partially null eğri olsun. $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısının $\{B_1(s), B_2(s)\}$ alt uzayında yatan bir eğrisi bulunmamaktadır.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)B_1(s) + \mu(s)B_2(s)$ eğrisinin s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)B_1(s) + \lambda(s)B_1'(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)B_2'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için

$T(s) = \lambda'(s)B_1(s) + \lambda(s)[k_3(s)B_1(s)] + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)[-k_2(s)N(s) - k_3(s)B_2(s)]$

$\Longrightarrow T(s)=\lambda'(s)B_1(s) + \lambda(s)k_3(s)B_1(s) + \mu'(s)B_2(s) - \mu(s)k_2(s)N(s) - \mu(s)k_3(s)B_2(s)$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafında T(s) ye karşılık gelen bir denklem bulunamadığından eşitlik gerçekleşemez. Dolayısıyla $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısının $\{B_1(s), B_2(s)\}$ nin alt uzayında yatan bir eğrisi bulunamaz.

Teorem 4.2.12. α IR_1^4 te Partially null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ de α nın Frenet çatısı olsun. Frenet çatısının $\{T(s), N(s), B_1(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)= (d_1e^s + c_2\, e^{-s})T(s)+(d_1e^s - d_2e^{-s} - 1)N(s) + \left(-k_2(s)\frac{d_1}{1+k_3(s)}e^s + \frac{k_2(s)d_2}{k_3(s)-1}e^{-s} + \frac{k_2(s)}{k_3(s)} + d_3e^{k_3(s)s}\right)B_1(s)$$

şeklindedir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \gamma(s)B_1(s)$

eğrisini alalım. Eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s) + \gamma'(s)B_1(s) + \gamma(s)B_1'(s)$$

elde edilir. $T'(s)$, $N'(s)$ ve $B_1'(s)$ denklemleri yerlerine yazılırsa ve $\alpha'(s) = T(s)$ için

$T(s)=\lambda'(s)T(s)+\lambda(s)N(s)+\mu'(s)N(s)-\mu(s)T(s)+\mu(s)k_2(s)B_1(s) + \gamma'(s)B_1(s) +$
$\gamma(s)k_3(s)B_1(s)$

eşitliğinden

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) + \gamma'(s) + \gamma(s)k_3(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde

$$\begin{cases} \lambda''(s) - \mu'(s) = 0, \\ \lambda(s) = -\mu'(s) \end{cases}$$

den

$$\lambda''(s) + \lambda(s) = 0$$

için

$$\lambda(s) = d_1e^s + d_2e^{-s}$$

ve

$$\mu(s) = d_1 e^s - d_2(e^{-s} - 1)$$

olup

$$\gamma'(s) + \gamma(s)k_3(s) = -k_2(s)[d_1 e^s - d_2(e^{-s} - 1)]$$

dir. $e^{\int k_3(s)ds} = e^{k_3(s)s}$ olmak üzere

$$\gamma(s)e^{k_3(s)s} = -k_2(s)\int e^{k_3(s)s}(d_1 e^s - d_2 e^{-s} - 1)ds + d_3$$

$$= -k_2(s)\left(d_1 \frac{1}{1+k_3(s)} e^{(1+k_3(s))s} - d_2 \frac{1}{k_3(s)-1} e^{(k_3(s)-1)\,s} - \frac{1}{k_3(s)}\ e^{k_3(s)s}\right) + d_3$$

$\gamma(s) = -k_2(s)\frac{d_1}{1+k_3(s)}\ e^s + \frac{k_2(s)d_2}{k_3(s)-1}\ e^{-s} + \frac{k_2(s)}{k_3(s)} + d_3\ e^{k_3(s)s}$, ($d_1$, d_2, d_3 birer sabittir)

O zaman α eğrisi

$$\alpha(s) = (d_1 e^s + c_2 e^{-s})T(s) + (d_1 e^s - d_2 e^{-s} - 1)N(s) + \left(-k_2(s)\frac{d_1}{1+k_3(s)}\ e^s + \frac{k_2(s)\,d_2}{k_3(s)-1} e^{-s} + \frac{k_2(s)}{k_3(s)} + d_3 e^{k_3(s)\,s}\right) B_1(s),\ (d_1,\ d_2,\ d_3 \text{ birer sabittir})$$

dir.

Teorem 4.2.13. IR_1^4 te α Partially null eğri ve eğrinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ olsun. Frenet çatısının $\{T(s), N(s), B_2(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = (-c_2\cos s + c_1 \sin s)T(s) + (c_2 \sin s + c_1 \cos s - 1)N(s) + \left(c_3 e^{k_3(s)\,s}\right)B_2(s)$$

veya

$$\alpha(s) = (-c_2\cos s + c_1 \sin s)T(s) + (c_2 \sin s + c_1 \cos s - 1)N(s) + c_3 B_2(s)$$

şeklindedir. Burada c_1, c_2,ve c_3 birer sabittir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \gamma(s)B_2(s)$ eğrisi alınsın. s parametresine göre her iki tarafın türevinden

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s) + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)B_2{}'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ ve $T'(s),\ N'(s),\ B_2{}'(s)$ için

$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)[-T(s) + k_2(s)B_1(s)] + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)[-k_2(s)N(s) - k_3(s)B_2(s)]$

$\Rightarrow T(s) = [\lambda'(s) - \mu(s)]T(s) + [\lambda(s) + \mu'(s) - \gamma(s)\,k_2(s)]N(s) + \mu(s)k_2(s)B_1(s) + [\gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s)]B_2(s)$

ifadesinden

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) - \gamma(s)k_2(s) = 0, \\ \mu(s)k_2(s) = 0, \\ \gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözüldüğünde

i) $k_2(s) = 0\ k_3(s) \neq 0\ \mu(s) \neq 0$ olsun. O zaman

$$\lambda(s) + \mu'(s) = 0$$

ve

$$\lambda'(s) - \mu(s) = 1$$

denklemlerinden

$$\mu(s) = c_2 \sin s + c_1 \cos s - 1,$$

$$\lambda(s) = -c_2 \cos s + c_1 \sin s$$

elde edilir. Ayrıca

$$\gamma'(s) = \gamma(s)k_3(s)$$

denkleminden de

$$\gamma(s) = c_3 e^{k_3(s)s}, \ (c_1, c_2 \text{ ve } c_3 \text{ sbt})$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (-c_2 \cos s + c_1 \sin s)T(s) + (c_2 \sin s + c_1 \cos s - 1)N(s) + \left(c_3 e^{k_3(s)\, s}\right)B_2(s)$$

dir.

ii) $k_2(s) = 0$, $k_3(s) \neq 0$ ve $\mu(s) = 0$ alınırsa, $\lambda'(s) = 1$ ve $\lambda(s) = 0$ olur bu bir çelişkidir.

iii) $k_2(s) \neq 0, k_3(s) = 0, \mu(s) = 0$ olsun. O zaman

$$\lambda'(s) = 1 \text{ ise } \lambda(s) = s + c_1$$

ve

$$\gamma'(s) = 0 \text{ ise } \gamma(s) = c_2$$

olur. O zaman

$$\lambda(s) - \gamma(s)k_2(s) = 0$$

denkleminde $\lambda(s)$ ve $\gamma(s)$ yerine yazılırsa $s + c_1 - c_2k_2(s) = 0$

olur. Bu da bir çelişkidir.

iv) $k_2(s) = 0, k_3(s) = 0$ ve $\mu(s) \neq 0$ alınırsa,

$$\lambda'(s) - \mu(s) = 1$$

ve

$\lambda(s) + \mu'(s) = 0$

denklemlerinden

$\lambda(s) = -c_2 \cos s + c_1 \sin s,$

$\mu(s) = c_2 \sin s + c_1 \cos s - 1,$

$\gamma'(s) = 0$ ise $\gamma(s) = c_3$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = (-c_2 \cos s + c_1 \sin s)T(s) + (c_2 \sin s + c_1 \cos s - 1)N(s) + c_3 B_2(s)$$

dir.

v) $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ ve $\mu(s) = 0$ alınırsa,

$\lambda'(s) = 1,$

$\lambda(s) - \gamma(s)k_2(s) = 0,$

$\gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0$

denklemlerinden

$\lambda(s) = s + c_1$

ve

$\gamma(s) = \frac{s+c_1}{k_2(s)}$

olur. Fakat $\gamma(s)$ üçüncü denklemi sağlamadığından çözümü yoktur.

Teorem 4.2.14. IR_1^4 te α bir Partially null eğri olsun. $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısının $\{N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = -N(s) + c_3 e^{-k_3(s)s} B_1(s) + c_2 e^{k_3(s)s} B_2(s)$$

veya

$$\alpha(s) = -N(s) + \left(\frac{k_2(s)}{k_3(s)} + c_1 e^{-k_3(s)s}\right) B_1(s)$$

veya

$$\alpha(s) = -N(s) + (c_1 e^{-k_3(s)s}) B_2(s)$$

şeklindedir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_1(s) + \gamma(s)B_2(s)$ eğrisinde s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)B_1'(s) + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)B_2'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ ve $N'(s)$, ${B_1}'(s)$, ${B_2}'(s)$ Frenet vektör denklemleri yerine yazıldığında

$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)[-T(s) + k_2(s)B_1(s)] + \mu'(s)\, B_1(s) + \mu(s)k_3(s)B_1(s) + \gamma'(s)B_2(s) - \gamma(s)k_2(s)N(s) - \gamma(s)k_3(s)B_2(s)$

$\Rightarrow T(s) = -\lambda(s)T(s) + [\lambda'(s) - \gamma(s)k_2(s)]N(s) + [\lambda(s)k_2(s) + \mu(s)k_3(s) + \mu'(s)]B_1(s) + [\gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s)]B_2(s)$

eşitliğinden aşağıdaki denklemler

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \gamma(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_2(s) + \mu(s)k_3(s) + \mu'(s) = 0, \\ \gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu denklemler çözüldüğünde $\lambda(s) = -1$ ise $\gamma(s)k_2(s) = 0$ dır. Bu denklemler kullanılarak

$$-k_2(s) + \mu(s)k_3(s) + \mu'(s) = 0$$

ve

$$\gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0$$

deklemlerinde

i) $k_2(s) = 0$ veya $\gamma(s) = 0$ olur. Eğer $k_2(s) = 0$ ve $\gamma(s) \neq 0$ alırsak,

$$\mu(s)k_3(s) + \mu'(s) = 0,$$

$$\gamma'(s) - \gamma(s)k_3(s) = 0$$

denklemleri çözülerek

$$\mu(s) = c_3 e^{-k_3(s)s},$$

$$\gamma(s) = c_2 e^{k_3(s)s},$$

$$\lambda(s) = -1$$

elde edilir. O halde $\alpha(s)$ eğrisi

$$\alpha(s) = -N(s) + c_3 e^{-k_3(s)s} B_1(s) + c_2 e^{k_3(s)s} B_2(s)$$

şeklindedir.

ii) $k_2(s) \neq 0$ veya $\gamma(s) = 0$ alınırsa,

$$\lambda(s) = -1,$$

$$-k_2(s) + \mu(s)k_3(s) + \mu'(s) = 0$$

denklemlerinden

$$\mu(s) = \frac{k_2(s)}{k_3(s)} + c_1 e^{-k_3(s)s},$$

$$\gamma(s) = 0,$$

$$\lambda(s) = -1$$

bulunur. Böylece

$$\alpha(s) = -N(s) + \left(\frac{k_2(s)}{k_3(s)} + c_1 e^{-k_3(s)s}\right) B_1(s)$$

dir.

iii) $\lambda(s) = -1$, $k_2(s) = 0$ ve $\gamma(s) = 0$ alınırsa,

$$\mu(s) k_3(s) + \mu'(s) = 0$$

denkleminden

$$\mu(s) = c_1 e^{-k_3(s)s},$$

$$\gamma(s) = 0,$$

$$\lambda(s) = -1$$

sonuçları elde edilir. O zaman

$$\alpha(s) = -N(s) + (c_1 e^{-k_3(s)s}) B_2(s)$$

bulunur.

4.3 IR_1^4 de Null Eğri

$\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısında

$$\langle N(s), N(s)\rangle = \langle T(s), B_1(s)\rangle = \langle B_2(s), B_2(s)\rangle = 1,$$

$$\langle T(s), T(s)\rangle = \langle B_1(s), B_1(s)\rangle = \langle T(s), N(s)\rangle = \langle T(s), B_2(s)\rangle = 0,$$

$$\langle N(s), B_1(s)\rangle = \langle N(s), B_2(s)\rangle = \langle B_1(s), B_2(s)\rangle = 0$$

şartlarındaki Frenet denklemlerini

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'_1(s) \\ B'_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & 0 & 0 \\ k_2(s) & 0 & -k_1(s) & 0 \\ 0 & -k_2(s) & 0 & k_3(s) \\ -k_3(s) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B_1(s) \\ B_2(s) \end{bmatrix}$$

sağlayan eğriye Null eğri denir (Bonner1985 ve Walrave 1995).

Teorem 4.3.1. α, IR_1^4 de bir Null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ α nın Frenet çatısı olsun. $k_1(s) = 1$ için Frenet denklemleri

$$T'(s) = N(s),$$

$$N'(s) = -B_1(s) + k_2(s)T(s),$$

$$B_1'(s) = -k_2(s)N(s) + k_3(s)B_2(s),$$

$$B_2'(s) = -k_3(s)T(s)$$

şeklindedir.

İspat: Frenet denklemleri Null eğri tanımından

$$T'(s) = k_1(s)N(s),$$

$$N'(s) = k_2(s)T(s) - k_1(s)B_1(s),$$

$$B_1'(s) = -k_2(s)N(s) + k_3(s)B_2(s),$$

$$B_2'(s) = -k_3(s)T(s)$$

şeklindedir. $k_1(s) = 1$ için teorem elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.2. IR_1^4 te Null eğrisinin teğet, normal birinci ve ikinci binormal vektörleri arasında aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

$$\langle T''(s), N(s)\rangle = \langle T''(s), B_2(s)\rangle = \langle N''(s), B_1(s)\rangle = \langle N''(s), T(s)\rangle = 0,$$

$$\langle B_1''(s), N(s)\rangle = \langle B_1''(s), B_2(s)\rangle = \langle B_2''(s), B_2(s)\rangle = 0,$$

$$\langle B_2''(s), T(s)\rangle = \langle B_2''(s), B_1(s)\rangle = 0,$$

$$\langle T''(s), B_1(s)\rangle = \langle B_1''(s), T(s)\rangle = k_2(s),$$

$\langle T''(s), T(s)\rangle = -k_1^2(s),$

$$\langle N''(s), N(s)\rangle = 2\, k_2(s)\, k_1(s),$$

$$\langle N''(s), B_2(s)\rangle = \langle B_2{}''(s), N(s)\rangle = -k_3(s),$$

$$\langle B_1{}''(s), B_1(s)\rangle = -(k_2^2(s) + k_3^2(s))$$

dir.

İspat : $\langle T'(s), T(s)\rangle = 0$

her iki tarafın türevi alınırsa

$$\langle T''(s), T(s)\rangle + \langle T'(s), T'(s)\rangle = 0$$

elde edilir. Frenet denklemleri yerine yazılırsa

$$\langle T''(s), T(s)\rangle + \langle N(s), N(s)\rangle = 0$$

olup Null eğri tanımından $\langle N'(s), N(s)\rangle = 1$ olduğundan $\langle T''(s), T(s)\rangle = -1$ olarak bulunur.

Diğerlerinin ispatları da benzer şekilde görülür.

Sonuç 4.3.3. $k_1(s) = 1$ için

$$\langle T''(s), T(s)\rangle = -1,$$

$$\langle N''(s), N(s)\rangle = 2k_2(s)$$

dir.

Teorem 4.3.4. α, IR_1^4 de Null eğri olsun. $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ eğrinin Frenet çatısının $\{T(s),\ N(s)\}$alt uzayında yatan bir eğrisi bulunmamaktadır.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ olsun. Eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

olur ve $\alpha'(s) = T(s)$ için

$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)[k_2(s)T(s) - B_1(s)]$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)k_2(s)T(s) - \mu(s)B_1(s)$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ -\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ ve $\lambda(s) = 0$ bulunur. Bu da

$\lambda'(s)+\mu(s)k_2(s)=1$ eşitliğini sağlamaz. O zaman $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısının $\{T(s), N(s)\}$ alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

Teorem 4.3.5. IR_1^4 te α bir Null eğri olsun Eğrinin $\{T(s), B_1(s)\}$ alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)=(s+d)T(s)+d_1B_1(s)$$

dir. Burada d ve d_1 sıfırdan farklı sabitlerdir.

İspat: $\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)B_1(s)$ eğrisinde her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)T(s)+\lambda(s)N(s)+\mu'(s)B_1(s)+\mu(s)B_1{}'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ olmak üzere

$T(s)=\lambda'(s)T(s)+\lambda(s)N(s)+\mu'(s)B_1(s)+\mu(s)[-k_2(s)N(s)+k_3(s)B_2(s)]$

$\Rightarrow T(s)=\lambda'(s)T(s)+\lambda(s)N(s)+\mu'(s)B_1(s)-\mu(s)k_2(s)N(s)+\mu(s)k_3(s)B_2(s)$

ve

$$\begin{cases} \lambda'(s)=1, \\ \lambda(s)-\mu(s)k_2(s)=0, \\ \mu'(s)=0, \\ \mu(s)k_3(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözüldüğünde

$\lambda'(s)=1$ ise $\lambda(s)=s+d$, $(d\neq 0$ sabit$)$

ve

$\mu'(s)=0$ ise $\mu(s)=d_1$, $(d_1\neq 0$ sabit$)$

dir. Bu elde edilenler ikinci denklemde yerine yazılırsa $k_2(s)=\frac{(s+d)}{d_1}$ bulunur ve $\mu(s)=d_1$ için $k_3(s)=0$ olduğu görülür. O zaman $\{T(s), B_1(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatan eğri

$$\alpha(s)=(s+d)T(s)+d_1B_1(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.3.6. IR_1^4 deki α null eğrisi $\{T(s), B_2(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatıyorsa o zaman eğri

$$\alpha(s)=-\frac{1}{k_3(s)}B_2(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B_2(s)$ eğrisinde s parametresine göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)B_2'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için $T'(s)$ ve $B_2'(s)$ Frenet denklemleri yerlerine yazılırsa

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)B_2(s) - \mu(s)k_3(s)T(s)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s)k_3(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde $\lambda(s) = 0$ ise $\mu(s) = -\frac{1}{k_3(s)}$ elde edilir. O zaman α eğrisi

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_3(s)}B_2(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.3.7. IR_1^4 de α Null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ α nın Frenet çatısı olsun. O zaman Frenet çatısının $\{N(s), B_1(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)\, B_1(s)$

eğrisinde s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)B_1'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için $N'(s)$ ve $B_1'(s)$ denklemleri $\alpha'(s)$ de yerlerine yazıldığında

$$T(s)=\lambda'(s)N(s)+\lambda(s)[k_2(s)T(s) - B_1(s)]+\mu'(s)B_1(s)+\mu(s)[-k_2(s)N(s) + k_3(s)B_2(s)]$$

$$\Rightarrow T(s)=\lambda'(s)N(s)+\lambda(s)k_2(s)T(s) - \lambda(s)B_1(s) + \mu'(s)B_1(s) - \mu(s)k_2(s)N(s) + \mu(s)k_3(s)B_2(s)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \lambda(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ -\lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözüldüğünde $k_2(s) \neq 0$ için $\lambda(s) = \frac{1}{k_2(s)}$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. Bunlar yardımıyla üçüncü denklemden

$$\mu'(s) = \frac{1}{k_2(s)} \text{ ve } \mu(s) = \frac{1}{k_2(s)} + d$$

bulunur. Fakat ikinci denklemden $k_2(s) = 0$ bulunuyor. O zaman $k_2(s) \neq 0$ kabulumuz ile çelişiriz.

Böylece Frenet çatısının $\{N(s), B_1(s)\}$ alt uzayında yatan α eğrisi bulunmamaktadır.

Teorem 4.3.8. α, IR_1^4 de bir Null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ de α nın Frenet çatısı olsun. Bu çatının $\{N(s), B_2(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_3(s)} B_2(s)$$

dir ($k_3(s) \neq 0$).

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_2(s)$ olsun. Eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)B_2'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s) = T(s)$ olmak üzere $N'(s)$ ve $B_2'(s)$ Frenet denklemleri $\alpha'(s)$ de yerlerine yazıldığında

$T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)k_2(s)T(s) - \lambda(s)B_1(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s)[-k_3(s)T(s)]$

$\Rightarrow T(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)k_2(s)T(s) - \lambda(s)B_1(s) + \mu'(s)B_2(s) - \mu(s)k_3(s)T(s)$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} \lambda(s)k_2(s) - \mu(s)k_3(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ -\lambda(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde $\lambda(s) = 0$ ve $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = d$, ($d \neq 0$ sabit) bulunur. Bulunan bu değerler ilk denklemde yerine yazıldığında

$$\mu(s) = -\frac{1}{k_3(s)}$$

elde edilir. O zaman Null eğri

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_3(s)} B_2(s)$$

dir.

Teorem 4.3.9. IR_1^4 teki α Null eğrisinin $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısındaki $\{B_1(s), B_2(s)\}$ nin gerdiği alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = dB_1(s) - \frac{1}{k_3(s)} B_2(s)$$

veya

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_3(s)} B_2(s)$$

dir ($k_3(s) \neq 0$).

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)B_1(s) + \mu(s)B_2(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)B_1(s) + \lambda(s){B_1}'(s) + \mu'(s)B_2(s) + \mu(s){B_2}'(s)$$

olup $\alpha'(s) = T(s)$ için ${B_1}'(s)$ ve ${B_2}'(s)$ denklemleri yerlerine yazıldığında ve düzenlendiğinde

$T(s) = \lambda'(s)B_1(s) + \lambda(s)[-k_2(s)N(s)+k_3(s)B_2(s)]+\mu'(s)B_2(s)+\mu(s)[-k_3(s)T(s)]$

$\Longrightarrow T(s) = \lambda'(s)B_1(s) - \lambda(s)k_2(s)N(s) + \lambda(s)k_3(s)B_2(s) + \mu'(s)B_2(s) - \mu(s)k_3(s)T(s)$

elde edilir. Böylece;

$$\begin{cases} -\mu(s)k_3(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ -\lambda(s)k_2(s) = 0, \\ \lambda(s)k_3(s) + \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

bu denklemler çözüldüğünde

i) $k_2(s) = 0$ ise $\lambda(s) = d$, ($d \neq 0$ sabit) ve $\mu(s) = -\frac{1}{k_3(s)}$

dir. O zaman aranılan eğriden birisi

$$\alpha(s) = dB_1(s) - \frac{1}{k_3(s)} B_2(s)$$

olur.

ii) $k_2(s) \neq 0$ ise $\lambda(s) = 0$ ve $\mu(s) = -\frac{1}{k_3(s)}$, ($k_3(s) \neq 0$ sabit) bulunur.

O zaman aranılan diğer eğri de

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_3(s)} B_2(s)$$

dir.

Teorem 4.3.10. IR_1^4 deki α eğrisinin $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ Frenet çatısının $\{T(s), N(s), B_1(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=\left(\frac{s}{2}+c_1+c_2e^{\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}+c_3e^{-\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}\right)T(s)$$
$$+\left[-\frac{1}{2k_2(s)\sqrt{k_2(s)}}\left(-\sqrt{k_2(s)}+2\sqrt{2}c_2k_2(s)e^{\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\,2c_3e^{-\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}\right)\right]N(s)+\left(\frac{s}{2}+c_1+c_2e^{\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}+c_3e^{-\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}\right)B_1(s)$$

dir. Burada c_1, c_2, c_3 sıfırdan farklı sabitlerdir.

İspat: $\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)N(s)+\gamma(s)B_1(s)$ olsun. Eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)T(s)+\lambda(s)T'(s)+\mu'(s)N(s)+\mu(s)N'(s)+\gamma'(s)B_1(s)+\gamma(s)B_1{}'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $T'(s), N'(s), B_1{}'(s)$ Frenet denklemleri $\alpha'(s)$ de yerlerine yazıldığında

$T(s)=\lambda'(s)T(s)+\lambda(s)N(s)+\mu'(s)N(s)+\mu(s)[k_2(s)T(s)-B_1(s)]+\gamma'(s)B_1(s)+\gamma(s)[-k_2(s)N(s)+k_3(s)B_2(s)]$

$\Rightarrow T(s)=\lambda'(s)T(s)+\lambda(s)N(s)+\mu'(s)N(s)+\mu(s)k_2(s)T(s)-\mu(s)B_1(s)+\gamma'(s)B_1(s)-\gamma(s)k_2(s)N(s)+\gamma(s)k_3(s)B_2(s)$

olup

$$\begin{cases}\lambda'(s)+\mu(s)k_2(s)=1,\\ \lambda(s)+\mu'(s)-\gamma(s)k_2(s)=0,\\ -\mu(s)+\gamma'(s)=0,\\ \gamma(s)k_3(s)=0\end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözüldüğünde

i) $\gamma(s)=0$ ve $k_3(s)\neq 0$ ise $\mu(s)=0$ ve $\lambda(s)=0$

olur bu değerler ile

$$\lambda'(s)+\mu(s)k_2(s)=1$$

denklemi sağlanmaz.

ii) $\gamma(s)\neq 0$ ve $k_3(s)=0$ ise o zaman

$$\lambda(s)=\frac{s}{2}+c_1+c_2e^{\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}+c_3e^{-\sqrt{2\,k_2(s)}\,s},$$

$$\mu(s)=-\frac{1}{2\,k_2(s)\sqrt{k_2(s)}}\left(-\sqrt{k_2(s)}+2\sqrt{2}c_2k_2(s)e^{\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}-\right.$$
$$\left.2\sqrt{2}c_3k_2(s)e^{-\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}\right)$$

ve

$$\gamma(s) = -\frac{1}{2\,k_2(s)}\left(-s - 2c_1 + 2c_2 e^{\sqrt{2\,k_2(s)}\,s} - 2c_3 e^{-\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}\right)$$

olarak bulunur. Böylece aranılan $\alpha(s)$ eğrisi

$$\begin{aligned}\alpha(s) = &\left(\frac{s}{2} + c_1 + c_2 e^{\sqrt{2\,k_2(s)}\,s} + c_3 e^{-\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}\right)T(s) \\ &+ \Bigg[-\frac{1}{2k_2(s)\sqrt{k_2(s)}}\Big(-\sqrt{k_2(s)} + 2\sqrt{2}c_2 k_2(s) e^{\sqrt{2\,k_2(s)}\,s} \\ &- 2c_3 e^{-\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}\Big)\Bigg]N(s) \\ &+ \left(\frac{s}{2} + c_1 + c_2 e^{\sqrt{2\,k_2(s)}\,s} + c_3 e^{-\sqrt{2\,k_2(s)}\,s}\right)B_1(s)\end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 4.3.11. IR_1^4 de bir Null eğri α olsun. α nın Frenet çatısının $\{T(s), N(s), B_2(s)\}$ gerdiği alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = d_1 B_2(s)$$

dir. Burada d_1 sıfırdan farklı bir sabittir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \gamma(s)B_2(s)$ olsun. Eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s) + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)B_2'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ ve $N'(s)$, $B_2'(s)$ denklemleri $\alpha'(s)$ de yerine yazıldığında

$T(s)= \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)[k_2(s)T(s) - B_1(s)] + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)[-k_3(s)T(s)]$

$\Rightarrow T(s)= \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)N(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)k_2(s)T(s) - \mu(s)B_1(s) + \gamma'(s)B_2(s) - \gamma(s)k_3(s)T(s)$

bulunur ve

$$\begin{cases}\lambda'(s) - \gamma(s)k_3(s) + \mu(s)k_2(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s) = 0, \\ \gamma'(s) = 0\end{cases}$$

denklemleri çözüldüğünde $\mu(s) = 0$ ise $\lambda(s) = 0$ olur ve dolayısıyla $\lambda'(s) = 0$ dır.

Birinci denklemden $\gamma(s) = -\frac{1}{k_3(s)}$, $(k_3(s) \neq 0)$ elde edilir. O zaman

$$\alpha(s) = -\frac{1}{k_3(s)} B_2(s)$$

dir. Böylece $\alpha(s)$ Null eğrisi bulunur.

Teorem 4.3.12. α, IR_1^4 te bir Null eğri ve $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$, α eğrisinin Frenet çatısı olsun. Frenet çatısının $\{N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ gerdiği alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s) = \left(c_1 e^{\sqrt{k_2(s)}\,s} + c_2 e^{-\sqrt{k_2(s)}\,s}\right) N(s)$$
$$+\left[-\frac{k_2(s)\sqrt{k_2(s)}\left(c_1 e^{\sqrt{k_2(s)}\,s} - c_2 e^{-\sqrt{k_2(s)}\,s}\right)}{k_3^2(s)}\right] B_1(s)$$
$$+\left(\frac{k_2(s) c_1 e^{\sqrt{k_2(s)}\,s} + k_2(s) c_2 e^{-\sqrt{k_2(s)}\,s}}{k_3(s)} - \frac{1}{k_3(s)}\right) B_2(s)$$

dir. Burada $k_3(s)$ sıfırdan farklı bir sabittir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B_1(s) + \gamma(s)B_2(s)$ eğrisinde her iki tarafın s ye göre türevi alındığında

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)B_1(s) + \mu(s)B_1'(s) + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)B_2'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ için $N'(s)$, $B_1'(s)$, $B_2'(s)$ Frenet denklemleri $\alpha'(s)$ de yerine yazılıp düzenlendiğinde

$T(s)=\lambda'(s)N(s)+\lambda(s)[k_2(s)T(s) - B_1(s)] + \mu'(s)B_1(s)+\mu(s)[-k_2(s)N(s) + k_3(s)B_2(s)] + \gamma'(s)B_2(s) + \gamma(s)[-k_3(s)T(s)]$

$\Longrightarrow T(s)=\lambda'(s)N(s)+\lambda(s)k_2(s)T(s) - \lambda(s)B_1(s) + \mu'(s)B_1(s)-\mu(s)k_2(s)N(s) - \mu(s)k_3(s)B_2(s) + \gamma'(s)B_2(s) - \gamma(s)k_3(s)T(s)$

$$\begin{cases} \lambda(s)k_2(s) - \gamma(s)k_3(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \mu(s)k_2(s) = 0, \\ -\lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)k_3(s) + \gamma'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözüldüğünde $-\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ ve $\mu'(s) = \lambda(s)$ bulunur. Ayrıca

İkinci denklemin her iki tarafının da s parametresine göre türevi alınırsa

$$\lambda''(s) = \lambda(s)k_2(s) = 0$$

elde edilir. Bu değerler diğer denklemlerde yerlerine yazılırsa

$$\lambda(s) = c_1 e^{\sqrt{k_2(s)}\,s} + c_2 e^{-\sqrt{k_2(s)}\,s},$$

$$\mu(s) = -\frac{k_2(s)\sqrt{k_2(s)}\left(c_1 e^{\sqrt{k_2(s)}\,s} - c_2 e^{-\sqrt{k_2(s)}\,s}\right)}{k_3^2(s)}$$

ve

$$\gamma(s) = \frac{k_2(s)c_1 e^{\sqrt{k_2(s)}\,s} + k_2(s)c_2 e^{-\sqrt{k_2(s)}\,s}}{k_3(s)} - \frac{1}{k_3(s)}$$

bulunur. Böylece aranılan IR_1^4 deki Null eğri

$$\begin{aligned}\alpha(s) = {} & \left(c_1 e^{\sqrt{k_2(s)}\,s} + c_2 e^{-\sqrt{k_2(s)}\,s}\right) N(s) \\ & + \left[-\frac{k_2(s)\sqrt{k_2(s)}\left(c_1 e^{\sqrt{k_2(s)}\,s} - c_2 e^{-\sqrt{k_2(s)}\,s}\right)}{k_3^2(s)}\right] B_1(s) \\ & + \left(\frac{k_2(s)c_1 e^{\sqrt{k_2(s)}\,s} + k_2(s)c_2 e^{-\sqrt{k_2(s)}\,s}}{k_3(s)} - \frac{1}{k_3(s)}\right) B_2(s)\end{aligned}$$

şeklindedir.

4.4 IR_1^4 deki Eğrilerin Sınıflandırılması

Bu kısımda IR_1^4 deki Pseudo null, Partially null ve Null eğrilerin bir sınıflandırılması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Eğri	Alt uzay	Yatıp Yatmadığı
Pseudo Null Eğri	$\{T(s), N(s)\}$	Yatıyor
	$\{T(s), B_1(s)\}$	Yatıyor
	$\{T(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{N(s), B_1(s)\}$	Yatıyor
	$\{N(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{B_1(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{T(s), N(s), B_1(s)\}$	Yatıyor
	$\{T(s), N(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{N(s), B_1(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
Partially Null Eğri	$\{T(s), N(s)\}$	Yatıyor
	$\{T(s), B_1(s)\}$	Yatıyor
	$\{T(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{N(s), B_1(s)\}$	Yatıyor
	$\{N(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{B_1(s), B_2(s)\}$	Yatmıyor
	$\{T(s), N(s), B_1(s)\}$	Yatıyor
	$\{T(s), N(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{N(s), B_1(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
Null Eğri	$\{T(s), N(s)\}$	Yatmıyor
	$\{T(s), B_1(s)\}$	Yatıyor
	$\{T(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{N(s), B_1(s)\}$	Yatıyor
	$\{N(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{B_1(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{T(s), N(s), B_1(s)\}$	Yatıyor
	$\{T(s), N(s), B_2(s)\}$	Yatıyor
	$\{N(s), B_1(s), B_2(s)\}$	Yatıyor

5. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde Null eğrileri çalışacak araştırmacılar için temel bilgiler düzenli ve ispatları ile birlikte verilmeye çalışılmıştır. Ayrıca bu konularla ilgili araştırmalar yoğun olarak devam etmektedir. İleriki çalışmalarda bu konuda katkı sağlayacak yeni buluşlarda bulunmak hedeflenmektedir. Şimdilik bu çalışma bu konu ile ilgili merak edilenlere temel oluşturacak bilgileri içermektedir.

Bu tezin diğer tezlerden ayrılan en büyük özelliği eğrilerin Frenet çatısının alt uzaylarında yatıp yatmadığına göre sınıflandırılmasının yapılmasıdır.

KAYNAKLAR

Bonnor, W.B. 1985. Curves with null normals in Minkowski space-time. *Wiley Easten Limited*, 33-47.

Duggal, K.L., Jin, D.H. 2007. Null curves and hypersurfaces of Semi-Riemannian manifolds. World Scientific, London.

Greub, W. H. 1975. Linear Algebra. Springer –Verlag, New York Heidelberg Berlin, 451pp.

Graves, L.K. 1979. Codimension one isometric immersions between Lorentz spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 252: 367-392.

Hacısalihoğlu, H. 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniv. Fen-Edb. Fak., Yayınları Mat., No:2, Malatya, 895s.

Hacısalihoğlu, H. 1985. Lineer Cebir. Gazi Üniv. Fen-Edb. Fak., No:7, Ankara, 765s.

İyigün, E. 2019. On timelike and null curves in R_1^3. *Pioneer J. of Adv. in App. Math.*, 25(1-2): 9-20.

Lopez, R. 2008. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, arXiv: 0810.3351, *math. DG.*

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, New York, 468pp.

Ovalıoğlu, E., İyigün, E. 2018. Cartan null curves in Minkowski 3-space. *Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 23(2): 69-78

Walrave, J. 1995. Curves and surfaces in Minkowski space. *Ph. D. Thesis*, K.U.Leuven, Fac. of Science, Leuven.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esra OVALIOĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi : BURSA 28.05.1977
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Bursa Cem Sultan Lisesi (1994)
Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (1998)
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2016 - 2019)

Çalıştığı Kurum / Kurumlar ve Yıl :

1998 – 2000 Büyük Fen Dershanesi **(BURSA)** Matematik Öğretmeni
2000 – 2001 Belvak Dershanesi **(BURSA) Zümre Başkanı** Matematik Öğretmeni
2001 – 2002 Tam Dershanesi **(YALOVA) Zümre Başkanı** Matematik Öğretmeni
2002 – 2005 Tan Dershanesi **(BURSA)** Matematik Öğretmeni
2005 – 2010 Akare Dershanesi **(BURSA) Kurucu** Matematik Öğretmeni
2010 – 2014 Modern Bursa Dershanesi **(BURSA) Zümre Başkanı** Matematik Öğretmeni
2014 - Özel Şahinkaya Koleji **(BURSA)** Matematik Öğretmeni

İletişim : esraovali77@gmail.com
Yayınları : **Ovalıoğlu, E., İyigün, E.** 2018. Cartan Null Curves in Minkowski 3-space, Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 23(2): 69-78