BAZI HİPERBOLİK DÜZLEM MODELLERİ VE HİPERBOLİK KLINGENBERG DÜZLEM SINIFLARI

Bilal DOĞAN

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI HİPERBOLİK DÜZLEM MODELLERİ VE HİPERBOLİK KLINGENBERG DÜZLEM SINIFLARI

Bilal DOĞAN
Orcid: 0000-0002-4237-3986

Prof. Dr. Basri ÇELİK
(Danışman)
Orcid: 0000-0001-7234-8063

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2019

TEZ ONAYI

Bilal DOĞAN tarafından hazırlanan "BAZI HİPERBOLİK DÜZLEM MODELLERİ ve HİPERBOLİK KLINGENBERG DÜZLEM SINIFLARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Basri ÇELİK

Başkan : İmza

Üye : İmza

Üye : İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
26/08/2019

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/08/2019

Bilal DOĞAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI HİPERBOLİK DÜZLEM MODELLERİ VE HİPERBOLİK KLINGENBERG DÜZLEM SINIFLARI

Bilal DOĞAN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Basri ÇELİK

Bu tezde, Öklidyen olmayan düzlemlerden önemli biri olan, hiperbolik düzlem kavramına ait temel bilgiler, bazı hiperbolik düzlem modelleri hakkında literatürde yer alan bilgiler ile bunlardan esinlenilerek elde edilen Hiperbolik-Klingenberg düzlemleri ile ilgili yapılan bazı çalışmalar özet olarak sunulmuştur.

Öklid düzleminden elde edilen hiperbolik düzlem modelleri olan Poincaré modelleri, Sandler'in hiperbolik düzlem modeli ve Sandler'in modelinin genişletilmişi olan model için bir bölüm ayrılmış ve bu modellerin kuruluşu detaylarıyla verilmiştir. Ayrıca, projektif altdüzlemler ve hiperbolik düzlemler üzerine yapılan bazı çalışmalar incelenmiş olup sonlu bir projektif düzlemden Baer alt düzlemi olmayan bir projektif alt düzlemin tüm doğrularının üzerindeki noktalarla birlikte atılmasıyla elde edilen yapı tanıtılmış ve bu yapının hangi şartlar altında bir hiperbolik düzlem belirteceği verilmiştir.

Son olarak bir Projektif-Klingenberg düzlemden m adet özel doğru sınıfının üzerindeki noktalarla birlikte atılması sonucu elde edilen yapının Hiperbolik-Klingenberg düzlem belirtme şartlarının tespit edildiği ve bu yapının bazı sayısal özelliklerinin ortaya konulduğu bir çalışmada elde edilen sonuçlar tanıtılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bolyai-Lobachevsky düzlemi, Hiperbolik düzlem, hiperbolik Klingenberg düzlem
2019, vii + 54 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

SOME HYPERBOLIC PLANE MODELS AND HYPERBOLIC KLINGENBERG PLANE CLASSES

Bilal DOĞAN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Basri ÇELİK

In this thesis, basic information about hyperbolic planes which are one of the important non-Euclidean planes, some information about hyperbolic plane models and some studies about Hyperbolic-Klingenberg planes which are constructed as a generalization of hyperbolic planes are presented briefly.

Poincaré models which are the hyperbolic plane models obtained from the Euclidean plane, hyperbolic plane models of Sandler, the extension of the Sandler's model and the constructions of these models are given in detail in one chapter. In addition, some studies on projective subplanes and hyperbolic planes have been examined and the structure obtained by deleting all lines together with their points of projective non- Baer subplane from a finite projective plane has been introduced and the conditions under which remaining structure will indicate a hyperbolic plane have been given.

Finally, results of Hyperbolic-Klingenberg models constructed by deleting a certain number m of equivalence classes of lines with their points from a finite Projective-Klingenberg plane are given.

Key words: Bolyai-Lobachevsky plane, hyperbolic plane, hyperbolic Klingenberg plane
2019, vii + 54 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Çalışmalarımda her türlü desteği sabırla sağlayan, danışman hocam Sayın Prof. Dr. Basri Çelik'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Gerek lisans ve gerek yüksek lisans dönemimde ders aldığım ve her zaman bana doğru yolu gösteren bana kattıklarını asla unutamayacağım üzerimde emekleri olan benim için çok değerli olan hocalarım Sayın Prof. Dr. Ahmet TEKCAN, Sayın Doç. Dr. Atilla AKPINAR, Sayın Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN, Sayın Araş. Gör. Dr. Fatma ÖZEN ERDOĞAN, Sayın Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL, Sayın Prof. Dr. Kadri ARSLAN, Sayın Prof. Dr. Osman BİZİM, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nisa Çelik ve Sayın Prof. Dr. Süleyman ÇİFTÇİ' ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgilerini gösterip, destek olan tüm arkadaşlarıma, destekleri ile bu günlere gelmemde emeği geçen herkese ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Bilal DOĞAN
26/08/2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\subset, \Rightarrow, \Leftrightarrow$	Altküme, gerektirme, çift gerektirme
$\cup, \cap$	Birleşim, kesişim
$\emptyset$	Boş küme
[c,d]	c ve d doğruları üzerinde ortak olarak bulunan noktaların sayısı
q_s	C_s deki tüm doğruların sayısı
$\mathcal{D}$	Doğrular kümesi
$< d >$	d doğrusu ile aynı komşulukta olan doğrular
$\parallel$	Doğrular için paralel olma
$\nparallel$	Doğrular için paralel olmama
$\in / \notin / \exists$	Eleman, eleman değil, var
$(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$	Geometrik yapı
$\forall$	Her (evrensel niceleyici)
K_m	Herhangi üçü doğrudaş olmayan ve ikişer ikişer farklı sınıflarda olan m tane doğrunun atılmasıyla elde edilen yapı
$\times$	Kartezyen çarpım
$\sim$, $\nsim$	Komşuluk bağıntısı (komşu olma- olmama)
$<, >, \leq, \geq$	Küçük, büyük, küçük eşit, büyük eşit
s	köşe noktası sayısı
$M \sim N$	M ve N noktaları aynı komşulukta
K_m^r	$m \leq r+2$ özelliğini sağlayan , d_i, (i =1,2,3, … ,m) ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan ve herhangi üçü bir d_i doğrusuna yakın bir noktada kesişmeyen m tane doğrunun ve bu doğruların yakınındaki noktaların atılmasıyla elde edilen yapı
M^*	M nin kanonik görüntüsü olan projektif düzlem
$\mathcal{N}$	Noktalar kümesi
$\lvert \mathcal{N} \cup \mathcal{D} \rvert$	$\mathcal{N} \cup \mathcal{D}$ kümesinin eleman sayısı
(N)	N den geçen doğruların kümesi
[N]	N den geçen doğruların sayısı
[N,M]	N ve M noktalarını birleştiren doğruların sayısı
$< N >$	N noktası ile aynı komşulukta olan noktalar
n_s	N den geçen C_s sınıfına ait olan doğruların sayısı
$N o d$	N noktası d doğrusu üzerinde
$N \phi d$	N noktası d doğrusu üzerinde değil
$N \sim d$	N noktası d doğrusuna yakın
$\binom{n}{r}$	n nin r li kombinasyonu
Ψ	Örten homomorfizm (epimorfizm)

π	Projektif düzlem
Z	Tamsayılar kümesi
o	Üzerinde bulunma bağıntısı
ϕ	Üzerinde bulunmama
π_m	π den l_i, (i = 1, 2, ... , m) doğruları ve bu doğrular üzerinde bulunan tüm noktaların atılmasıyla elde edilen bir alt yapı
π_0	π den π' nün tüm doğrularının ve bu doğrular üzerindeki tüm noktaların çıkarılması ile elde edilen yapı
π_3	π den noktadaş olmayan l_1, l_2, l_3 doğruları ve bu doğruların üzerindeki tüm noktalar atılarak elde edilen yapı
r	π_m nin bir doğrusunun genişletilmişi üzerindeki köşe noktalarının minimum sayısı
k	π_m nin bir doğrusunun genişletilmişi üzerindeki π_m ye ait tüm noktaların sayısı
C_s	π_m nin, π de s tane köşe noktası kapsayan doğrularının kümesi
C_t	π_0 ın teğet doğrularının kümesi
C_d	π_0 ın dış doğrularının kümesi

Kısaltmalar	**Açıklama**
B – L	Bolyai-Lobachevsky düzlemi
G1, G2, G3, G4, G5	Graves hiperbolik düzlem aksiyomları
H	Hiperbolik düzlem
H1, H2, H3, H4, H5	Hiperbolik düzlem aksiyomları
HK	Hiperbolik Klingenberg düzlem
HK1, HK2, HK3, HK4, HK5	Hiperbolik Klingenberg düzlem aksiyomları
L1, L2	Lineer uzay aksiyomları
PK	Projektif Klingenberg düzlem
P1, P2, P3	Projektif düzlem aksiyomları
PK1, PK2, PK3	Projektif Klingenberg düzlem aksiyomları

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geometri dört temel eleman üzerine kurulur. Bunlar tanımsız terimler (nokta, doğru, düzlem, uzay, küme vb.), tanımlı terimler, aksiyomlar (postulatlar) ve teoremlerdir (Altun 2016).

M.Ö. 365-265 yılları civarında yaşayan ve geometrinin kurucusu olarak bilinen Öklid (Euclid) kaleme aldığı, matematiğin ve geometrinin temelini oluşturan 13 ciltlik Elemanlar (Elements) isimli kitabının ilk cildinde beş aksiyom yazmış ve bu aksiyomlar yardımıyla geometrinin temellerini kurmuştur. Öklid'in aksiyom olarak aldığı beş ifadeye çalışmanın içerisinde yer vereceğiz.

Tarih boyunca tartışma konusu olan beşinci aksiyomunun ifadesi şöyledir: ‘‘*Eğer bir düz doğru iki düz doğruyu kesiyor ve bu kesişimde aynı taraftaki iç açıların toplamı iki dik açıdan küçük ise bu iki doğru sonsuza kadar uzatıldığında açıların iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler.*’’ (Çelik 2015).

Beşinci aksiyom Ortaçağ da İslam matematikçileri tarafından tartışılmıştır. On sekizinci yüzyılda beşinci aksiyomun daha kolay anlaşılmasını sağlayan John Playfair isimli İskoç matematikçi bu aksiyomun ‘‘*Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizilebilir.*’’ ifadesine denk olduğunu göstermiştir. Aksiyomun bu son hali ilk defa John Playfair tarafından yapıldığından ‘‘*Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizilebilir.*’’ ifadesine Playfair aksiyomu da denir (Çelik 2015). On sekizinci yüzyılın sonundan itibaren beşinci aksiyoma farklı ifade ve ispatlar getirilmeye çalışılmış, böylece on dokuzuncu yüzyılda yeni geometriler ortaya çıkmıştır. Öklid dışı geometrilerin ortaya çıkmasına katkıda bulunan başlıca matematikçiler; C.F. Gauss, J. Bolyai, N.I. Lobachevsky, E. Baltremi, G.F.B. Riemann ve H. Poincaré dir. Rus matematikçi N.I. Lobachevsky kendisinden önceki matematikçiler gibi beşinci aksiyomu bir teorem gibi ispatlamaya yönelmemiş onun yerine beşinci aksiyomun sağlanmadığı bir geometri üzerine çalışmıştır. Lobachevsky geometrisinde düzlemin yerini küre yüzeyi almıştır. Böylelikle düzlemdeki doğru parçasının yerini küre üzerindeki küre yayı alacaktır. Bu demektir ki küre üzerindeki geodezikler (iki nokta arasındaki en kısa uzaklıklar) Öklid'in doğru parçasına karşılık gelmektedir. Öklid geometrisinde iki doğru birbirine paralel olmadıkları zaman bir noktada kesişeceklerdir. Oysaki Öklid dışı geometride herhangi iki geodezik iki noktada kesişebilmektedir. Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel çizilebilmektedir (Akbaş 2005).

2. KURAMSAL TEMELLER

Matematikte doğruluğundan şüphe etmeksizin ispatsız olarak kabul edilen temel ifadeler, **aksiyom** olarak adlandırılır. Aksiyomlar gibi ispatsız kabul edilen ama doğruluğuna aksiyomlar kadar kesin gözle bakılmayan temel ifadeler ise **postulat** olarak adlandırılır. Günümüzde bu iki kavram birbirinin yerine kullanılabilmektedir. M.Ö. 300 yıllarında Öklid'in (Euclid), 13 ciltten oluşan The Elements eserini kaleme aldığı tahmin edilmektedir. Öklid bu eserinin başında ispatsız olarak beş adet temel ifadeye yer vermiştir. Bu ifadeler Öklid Aksiyomları olarak bilinir. Öklid'in eserinin başında verdiği aksiyomlar şunlardır:

1. Herhangi bir noktadan diğer bir noktaya düz doğru çizilebilir.

2. Bir düz doğru içinde sürekli sonlu bir doğru çizilebilir.

3. Herhangi bir merkez ve uzunluk yardımıyla bir çember çizilebilir.

4. Tüm dik açılar birbirine eşittir.

5. Eğer bir düz doğru iki düz doğruyu kesiyor ve bu kesişimde aynı taraftaki iç açılarının toplamı iki dik açıdan küçük ise, bu iki doğru sonsuza kadar uzatıldığında, açıların iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler.

Öklid'in beşinci aksiyomu üzerinde biraz düşünüldüğünde bu postulatın aslında "Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizilebilir." ifadesine denk olduğu görülür. Beşinci Aksiyomun bu son hali ilk defa John Playfair tarafından yapıldığından **Playfair Aksiyomu** olarak adlandırılır (Çelik 2015).

Bolyai ve Lobachevsky Öklid'in beşinci aksiyomunun diğer aksiyomların sonucu olmadığını ve bu aksiyom yerine " Bir doğruya, dışındaki bir noktadan geçen iki ya da daha çok sayıda paralel doğru çizilebilir." ifadesinin alınmasıyla yeni bir geometrinin oluşturulabileceğini gösterdiler. Böylece hiperbolik geometri, dolayısıyla Öklidyen olmayan geometri (Öklid dışı geometri) kavramı ortaya çıkmıştır. Öklid aksiyomlarını sağlayan bir tek Reel düzlem varken Bolyai-Lobachevsky aksiyomlarını gerçekleyen birçok Reel düzlem modeli geliştirilmiştir

Bu çalışmada $\mathcal{N}$ ile elemanlarına noktalar adı verilen bir küme, $\mathcal{D}$ ile elemanlarına doğrular adı verilen bir küme gösterilecektir ve $\mathcal{N}$ ile $\mathcal{D}$ kümelerinin ayrık kümeler olduğu kabul edilecektir. Doğrular noktaların bir kümesi olarak göz önüne alınacak ve $\mathcal{N}$ ile $\mathcal{D}$ arasında hangi noktanın hangi doğru üzerinde olduğunu belirleyecek ve adına **üzerinde olma bağıntısı** denilecek bir o bağıntısı kullanılacaktır. Şöyle ki N, $\mathcal{N}$ den alınan bir nokta ve d de $\mathcal{D}$ den alınan bir doğru olmak üzere Nod gösterimi "N noktası d doğrusu üzerindedir ya da d doğrusu N noktasından geçer." anlamına N$\not{o}$d gösterimi ise "N noktasının d doğrusu üzerinde olmadığı ya da d doğrusunun N noktasından geçmediği" anlamına gelecektir. Eğer iki doğrunun ortak hiçbir noktası yok ise bu doğrulara **paralel doğrular** denir. d_1 ve d_2 doğruları paralel ise bu $d_1 \| d_2$ biçiminde gösterilir. İki doğrunun paralel olmadığı ise $\nparallel$ simgesi kullanılarak gösterilir.

Bu bölümde tez konusunun daha iyi anlaşılmasını sağlayacak temel kavramlar ve teoremler literatürden yapılan bir derleme şeklinde verilecektir.

Tanım 2.1. $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular adı verilen herhangi iki küme ve $o \subset (\mathcal{N} \text{x } \mathcal{D})$ üzerinde bulunma bağıntısı olsun. Eğer $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ ise $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ sıralı üçlüsüne **geometrik yapı** denir. $|\mathcal{N} \cup \mathcal{D}|$ sonlu ise $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ geometrik yapısına **sonlu geometrik yapı** adı verilir (Batten 1986).

Tanım 2.2. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $\mathcal{U} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ geometrik yapısına bir **lineer uzay** denir (Batten 1986).

L1) Her doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

L2) Farklı iki noktadan tam olarak bir doğru geçer.

Tanım 2.3. Bir $\mathcal{U} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ geometrik yapısında, $N_1, N_2, N_3, \ldots \in \mathcal{N}$ noktaları için $N_i\, o\, d$, i=1, 2, 3, .. olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu varsa (yani bu noktaların hepsi aynı doğru üzerindeyse) bu noktalara **doğrudaş noktalar** denir (Batten 1986).

Tanım 2.4. En az bir doğrusu olan ve tüm doğruları aynı sayıda nokta bulunduran geometrik yapılara **doğru düzenlidir** (regülerdir) denir (Kaya 2005).

Tanım 2.5. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $\mathcal{U} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ lineer uzayına **projektif düzlem** denir.

1. Herhangi iki doğru kesişir.

2. Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Projektif düzlem genellikle $\mathcal{U} = (\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ yerine $\mathbb{P} = (\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ ya da $\pi = (\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ biçiminde gösterilir (Batten 1986).

Açıklama 2.6. Eğer projektif düzlem tanımı lineer uzay tanımından bağımsız olarak verilmek istenirse, lineer uzay aksiyomları ile projektif düzlem aksiyomları bir araya getirilmelidir. Fakat bu durumda L1 aksiyomu aksiyom sisteminde fazlalık olarak yer alacaktır. Bu nedenle literatürde yer alan bazı kaynaklarda projektif düzlem tanımı aşağıdaki gibi verilmektedir:

$\pi = (\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ geometrik yapısı aşağıdaki **P1, P2, P3** aksiyomlarını sağlarsa, π geometrik yapısı **projektif düzlem** adını alır (Kaya 2005).

P1) $\forall$ $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, $N_1 \neq N_2$ noktaları için, $N_1 o$ d ve N_2 o d olacak şekilde bir tek $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır.

P2) $\forall$ $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ için N o d_1 ve N o d_2 olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır.

P3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

P2 aksiyomunda yer alan d_1 ve d_2 doğruları farklı doğrular olduğunda bir tek noktada kesişecekleri Kaya R. tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.7. Bir projektif düzlemde farklı iki doğru bir tek noktada kesişir (Kaya 2005).

Projektif düzlemin sonlu olması durumunda daha bir anlamlı olan mertebe kavramı ve mertebenin temel özellikleri aşağıdaki teorem ile verilir (Kaya 2005).

Teorem 2.8. Her sonlu π projektif düzlemi için aşağıdaki şartlara uyan bir $n \geq 2$ tamsayısı vardır ve bu tamsayıya π nin **mertebesi** adı verilir.

1. π nin her doğrusu üzerinde tam olarak n + 1 nokta vardır.

2. π nin her noktasından tam olarak n + 1 doğru geçer.

3. π deki noktaların toplam sayısı $n^2 + n + 1$ dir.

4. π deki doğruların toplam sayısı $n^2 + n + 1$ dir.

Teorem 2.9. π mertebesi n olan sonlu olan bir projektif düzlem ve π' de π nin mertebesi m olan bir projektif alt düzlemi olsun. Bu takdirde eğer π nin her doğrusu π' nün bir noktasını kapsarsa $n = m^2$ dir, Aksi halde $n \geq m^2+m$ dir (Kaya 2005).

Teorem 2.9 un sonucu olarak vereceğimiz aşağıdaki ifadeler ilerleyen kısımlarda kullanılacaktır.

1. π nin her doğrusu π' nün bir noktasını kapsarsa $n = m^2$ olur.

2. Eğer π de π' nün hiçbir noktasını kapsamayan bir d doğrusu varsa, π' nün doğruları d yi en çok $m^2 + m + 1$ tane noktada keser ve $n \geq m^2 + m$ olur.

Tanım 2.10. Teorem 2.9 da $n = m^2$ ise π' ye π nin **Baer projektif altdüzlemi** denir. $n \geq m^2 + m$ ise π' ye π nin **Baer olmayan projektif altdüzlemi** adı verilir (Kaya 2005).

Literatürde hiperbolik düzlem veya Bolyai-Lobachevsky (B-L) düzlemi olarak bilinen düzlem modelleri için bazı küçük farklılıklar gösteren tanımlar mevcuttur. Biz burada bu tanımlardan iki tanesini vereceğiz.

Tanım 2.11. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir **H** = $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ geometrik yapısına bir **hiperbolik düzlem** denir (Kaya 2005).

H1) Farklı iki noktadan geçen bir doğru vardır.

H2) Her doğru üzerinde aynı sayıda nokta bulunur.

H3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

H4) (**Ayırıcı Aksiyom**). Bir doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve bu doğruya paralel olan, iki ya da daha çok (belli sayıda) doğru vardır.

H5) (**Sınırlayıcı Aksiyom**). $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ doğrudaş olmayan üç nokta bulundursun, $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ ve $o' \subset o$ olmak üzere;

1. $N_1, N_2 \in \mathcal{N}', N_1 \neq N_2 \Rightarrow N_1N_2 \in \mathcal{D}'$ ve

2. $N\, o'd \in \mathcal{D}' \Rightarrow N \in \mathcal{N}'$

şartları sağlanıyorsa $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')=$**H** dır.

Literatürde yer alan diğer hiperbolik düzlem tanımlarından biri ise yukarıda verilen tanımda yer alan H2) aksiyomunun biraz değiştirilmesiyle oluşturulmuştur. Bu tezin üçüncü bölümünde yer verilecek bazı modeller birinci tanıma bazı modeller ise ikinci tanıma ait örnekler olacaktır.

Tanım 2.12. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir **H** = $(\mathcal{N},\mathcal{D}, o)$ geometrik yapısına Graves anlamında bir **hiperbolik düzlem** denir (Ostrom 1962).

G1) Farklı iki noktadan geçen bir tek doğru vardır.

G2) Herhangi bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.

G3) Herhangi bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel doğru çizilebilir.

G4) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

G5) $S \subset \mathcal{N}$ olmak üzere S, $\mathcal{N}$ nin doğrudaş olmayan üç noktası ile kapsadığı, herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru üzerindeki tüm noktaları kapsıyorsa S = $\mathcal{N}$ dir.

Tanım 2.13. $\mathcal{N}$ noktalar kümesini, $\mathcal{D}$ doğrular kümesini, o üzerinde olma bağıntısını ve ~ ise *komşuluk bağıntısı* adı verilen $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ üzerinde bir denklik bağıntısını göstermek üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir **M**=$(\mathcal{N},\mathcal{D}, o, \sim)$ yapısına bir **Projektif Klingenberg düzlem** denir ve kısaca **PK- düzlem** olarak yazılır (Drake ve Lenz 1975).

PK1) Komşu olmayan herhangi iki A, B $\in \mathcal{N}$ noktaları için Ao d ve Bod olacak biçimde tam olarak bir d $\in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. (*Aynı komşulukta olmayan herhangi iki noktadan bir tek doğru geçer.*)

PK2) Komşu olmayan herhangi iki c, d $\in \mathcal{D}$ doğruları için Noc ve Nod olacak biçimde tam olarak bir N $\in \mathcal{N}$ arakesit noktası vardır. (*Aynı komşulukta olmayan herhangi iki doğrunun bir tek arakesit noktası vardır.*)

PK3) **M** nin kanonik görüntüsü denilen bir $\mathbf{M}^*$ = $(\mathcal{N}^*,\mathcal{D}^*, o)$ projektif düzlemi ile her A, B $\in \mathcal{N}$ ve her c, d $\in \mathcal{D}$ için

$\Psi(A) = \Psi(B) \Leftrightarrow A \sim B$ ve $\Psi(c) = \Psi(d) \Leftrightarrow c \sim d$

şartlarını sağlayan bir $\Psi : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}^*$ geometrik yapı epimorfizmi vardır.

Dikkat edilirse PK-düzlemi tanımında aynı komşulukta olan herhangi iki nokta veya aynı komşulukta olan herhangi iki doğru için hiçbir şart ifade edilmemiştir. Yani bir PK-düzleminin aynı komşulukta olan herhangi iki noktasından hiç doğru geçmeyebilir, bir tek doğru geçebilir veya pek çok doğru geçebilir.

Tanım 2.14. ($\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$, o) bir geometrik yapı, ~ $\mathcal{N} \cup \mathcal{D}$ üzerinde, komşuluk bağıntısı olarak isimlendirilen, bir denklik bağıntısı olsun ve hiçbir nokta hiçbir doğru komşuluğunda olmasın, || ise $\mathcal{D}$ üzerinde, paralellik bağıntısı olarak isimlendirilen, bir bağıntı iken aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa H= ($\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$, o, ||, ~) beşlisine bir **Hiperbolik-Klingenberg düzlem** (HK-düzlem) adı verilir.

HK1) $(\forall$ N, M) ((N, M $\in \mathcal{N} \wedge$ N $\nsim$ M) $\Rightarrow$ [N, M] = 1)

HK2) $(\forall$ d)(d $\in \mathcal{D} \Rightarrow (\exists$ N, M) (N, M $\in \mathcal{N}$, Nod, Mod, N $\nsim$ M))

HK3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan ve ikişer ikişer aynı komşulukta bulunmayan en az dört nokta vardır.

HK4) Herhangi bir (N, d), nokta-doğru ikilisi için N$\not o$d iken, N den geçip d ye paralel olan ve aynı komşulukta bulunmayan en az iki doğru vardır.

HK5) N ~ M $\Leftrightarrow \Psi$(N) = Ψ(M) $\quad \forall$ N, M $\in \mathcal{N}$

l ~ d $\Leftrightarrow \Psi(l) = \Psi(d) \quad \forall\, l$, d $\in \mathcal{D}$

[g, h] = 0 ise Ψ(g) || Ψ(h)

şartlarını sağlayacak biçimde bir H* = (N*,D*, o*) hiperbolik düzlemi ve

Ψ : H $\longrightarrow$ H* epimorfizmi vardır (Çelik 2008).

Tanım 2.15. Bir geometrik yapıda bir doğru ile bu doğru üzerinde bulunan bir noktanın teşkil ettiği konfigürasyona **flag** denir (Kaya ve Özcan 1984).

Tanım 2.16. ($\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$, o) ve ($\mathcal{N}'$, $\mathcal{D}'$, o') herhangi iki geometrik yapı olsun. Eğer,

f: $\mathcal{N} \cup \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{N}' \cup \mathcal{D}'$

fonksiyonu,

1. f($\mathcal{N}$) $\subset \mathcal{N}'$

2. f($\mathcal{D}$) $\subset \mathcal{D}'$

3. $\forall$ N$\in\mathcal{N}$, d$\in\mathcal{D}$ ve Nod $\Rightarrow$ f(N) o' f(d) şartlarını sağlıyorsa, f ye $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ ve $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')$ geometrik yapıları arasında bir **homomorfizm** denir. Örten özelliği bulunan bir homomorfizme **epimorfizm** birebirlik şartını sağlayan epimorfizm ise **izomorfizm** adı verilir (Kaya 2005).

Tanım 2.17. A ve B herhangi iki küme olmak üzere $\beta \subset A \times B$ olsun. β kümesine A dan B ye bir **bağıntı** denir. β, A üzerinde bir bağıntı yani $\beta \subset A \times A$ olmak üzere β bağıntısı;

1. Her $a \in A$ için $(a, a) \in A$

2. $(a, b) \in \beta$ ise $(b, a) \in \beta$

3. $(a, b) \in \beta$ ve $(b, c) \in \beta$ ise $(a, c) \in \beta$

koşullarını gerçekliyor ise β ya A üzerinde bir **denklik bağıntısıdır** denir (Başkan ve ark. 2006).

3. BAZI HİPERBOLİK DÜZLEM MODELLERİ

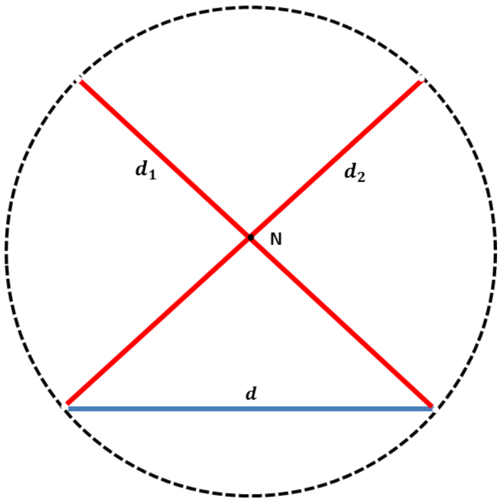
3.1. Poincaré Hiperbolik Düzlem Modelleri

Bu bölümde Jules Henri Poincaré (1854-1912) tarafından Öklid düzleminden elde edilen iki hiperbolik düzlem örneği verilecektir.

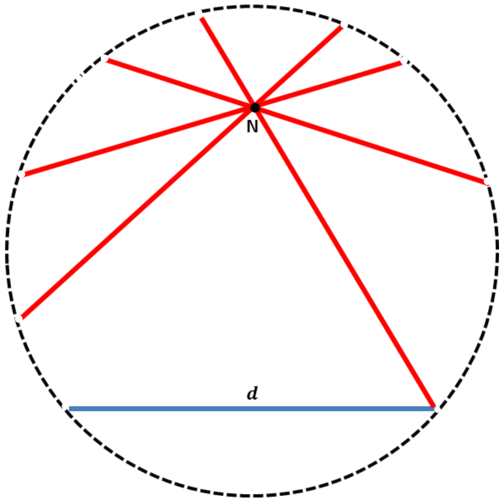
3.1.1. Poincaré'nin Disk Modeli

Öklid düzleminde bir eğri ile sınırlanmış konveks bir bölgenin, örneğin bir dairenin iç noktalarından oluşan bölge düşünülsün. Dairenin içinde kalan (çevre üzerindekiler hariç) noktalar yine nokta olarak; dairenin kirişlerinden her biri birer doğru olarak alınsın. Dairenin çevresi üzerinde kesişen herhangi iki kiriş **paralel doğrular** olarak tanımlansın. Yani sembolik ifade edilecek olursa noktalar kümesi olarak $\mathcal{N} = \{ (x, y): (x-a)^2+(y-b)^2 < r^2, x,y \in \mathbb{R} \}$ ve doğrular kümesi olarak $\mathcal{D} = \{ d\cap\mathcal{N}: d\cap\mathcal{N}\neq\emptyset$, d Öklid düzleminin bir doğrusu$\}$ olarak alınsın. Bu durumda her doğruya dışındaki bir noktadan geçen iki paralel doğru çizilebileceği aşikardır (Şekil 3.1.(a)). Yani ayırıcı aksiyom olan H4 sağlanır. Hiperbolik düzlemin diğer aksiyomlarının sağlandığını görmek kolaydır.

Dikkat edilirse yukarıda verilen modelde her d doğrusu için d dışındaki bir N noktasından geçen d_1 ve d_2 paralelleri haricinde çok sayıda doğru da d doğrusunu kesmez. Ama bunlar yukarıdaki paralellik tanımına uymazlar. Eğer paralellik tanımı "Ortak noktası olmayan iki doğru **paraleldir**." biçiminde yapılırsa böyle doğrular da d ye paralel olur (yani bu durumda bir doğruya dışındaki bir noktadan sonsuz sayıda paralel çizilebilir.) (Şekil 3.1.(b)) ve hiperbolik düzlem aksiyomları yine sağlanır (Kaya 2005).



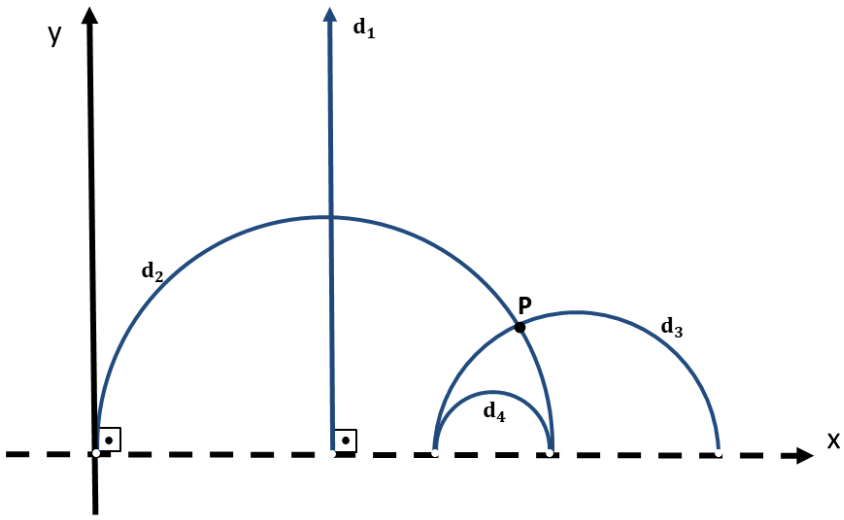
Şekil 3.1.(a) Poincaré disk modeli için paralelliğin çember üzerinde kesişme olarak tanımı



Şekil 3.1.(b) Poincaré disk modeli paralelliğin alternatif tanımı

3.1.2. Poincaré'nin Üst Yarı Düzlem Modeli

Öklid düzleminde x-ekseninin üst tarafında kalan yarı düzlem göz önüne alınsın. Bu yarı düzlemdeki noktalar geometrik yapının noktaları olarak alınsın. Merkezi x-ekseni üzerinde bulunan yarı çemberler ve x-eksenine dik yarı doğrular geometrik yapının doğruları olarak tanımlansın (Şekil 3.2.). x-ekseni yarı düzleme dahil olmadığından yapının "x-ekseni üzerinde kesişen doğruları paralel doğrular olarak tanımlansın. Böylece Öklid düzleminde x-ekseni üzerinde birbirine teğet olan yarı çemberler ve bir noktadan geçip bu yarı çembere x-ekseni üzerinde teğet olan yarı doğrular bu yapının paralel doğruları olacaktır. Aşağıda bu yapının bir hiperbolik düzlem olduğu (Saltan 2006) dan derlenen bilgiler eşliğinde verilecektir. Hiperbolik düzlem olduğu gösterilecek olan bu yapıya literatürde hiperbolik düzlemler için **Poincaré Üst Yarı Düzlem Modeli** adı verilmektedir (Saltan 2006).



Şekil 3.2. Poincaré üst yarı düzlem modelinin doğruları

Matematik notasyonları ile Poincaré üst yarı düzlem modelinin noktalarını, doğrularını, üzerinde olma bağıntısını ve paralellik bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlamak mümkündür. Bu tanımlama için kullanılacak olan iki temel gösterim aşağıda açıklanmıştır.

[a] ile a bir reel sayı olmak üzere Öklid düzleminde x=a doğrusunun üst yarı düzlemde kalan kısmı, $[\![\varepsilon, r]\!]$ ile merkezi x ekseninde ε= (ε,0) noktası ve yarıçapı r >0 olan çemberin üst yarı düzlemde kalan kısmı gösterilmektedir.

$\mathcal{N}$ = { (x, y): x, y ∈ ℝ ve y>0 }

$\mathcal{D}$ = { [a]:a ∈ ℝ }∪ { $[\![\varepsilon, r]\!]$: $(x-\varepsilon)^2+y^2=r^2$; x, y∈ ℝ , y>0 }

$$o: \begin{cases} (x,y)\ o\ [a] \Leftrightarrow x = a \\ (x,y)\ o\ [\![\varepsilon, r]\!] \Leftrightarrow (x-\ \varepsilon\ )^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\parallel: \begin{cases} [a] \parallel [b] \\ [a] \parallel [\![\varepsilon, r]\!] \Rightarrow [a] \wedge [\![\varepsilon, r]\!];\ \text{x} - \text{ekseni üzerinde bir nokta ya da boş küme} \\ [\![\varepsilon, r]\!] \parallel [\![\varepsilon', r']\!] \Rightarrow [\![\varepsilon, r]\!] \wedge [\![\varepsilon', r']\!]; \text{x} - \text{ekseni üzerinde bir nokta ya da boş küme} \end{cases}$$

Bu kısım, Poincaré üst yarı düzlem modelinin bir hiperbolik düzlem olduğu gösterilerek tamamlanacaktır.

H1) $N_1= (x_1, y_1)$, $N_2= (x_2, y_2)$ ve N_1, $N_2 \in \mathcal{N}$ yapının farklı iki noktası olsun. Bu durumda N_1 ve N_2 noktalarının üzerinde olduğu bir tek doğrunun var olduğu gösterilmelidir. Bu N_1 ve N_2 noktalarının birinci bileşenlerinin eşit olup olmamasına göre iki farklı durumda gösterilecektir.

1. Durum: $x_1 = x_2$ olsun. Bu durumda $N_1= (x_1, y_1)$ ve $N_2= (x_1, y_2)$ olur ve

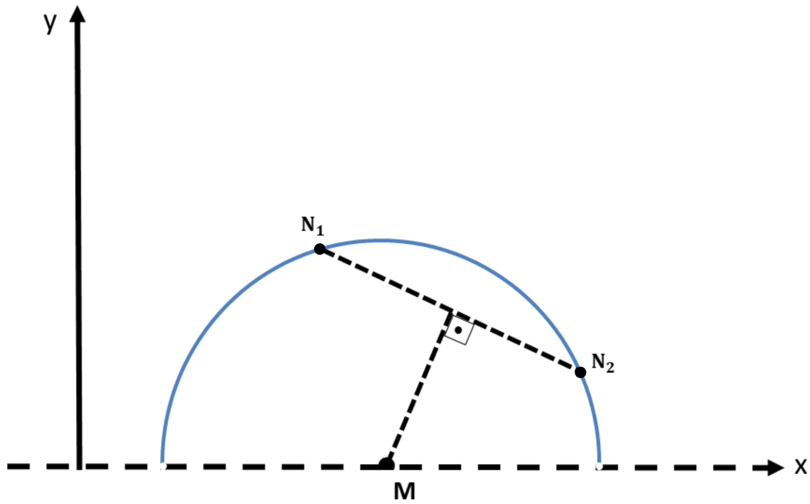
$$(x_1, y_1) \text{ o } [a] \Leftrightarrow x_1 = a$$
$$(x_1, y_2) \text{ o } [a] \Leftrightarrow x_1 = a$$

olduğundan $a= x_1$ seçilerek bulunur

$$[a] = [x_1]$$

doğrusu N_1 ve N_2 noktalarından geçen doğrudur. N_1 ve N_2 noktalarının birinci bileşenleri eşit olduğundan N_1 ve N_2 den geçen ve merkezi x-ekseni üzerinde olan bir çember yoktur.

2. Durum: $x_1 \neq x_2$ olsun. Bu durumda N_1N_2 doğru parçasının orta dikmesinden yararlanılır. Orta dikme üzerindeki tüm noktalar N_1 ve N_2 ye eşit uzaklıktadır. Bu nedenle N_1N_2 doğru parçasının orta dikmesi üzerinde merkez olarak seçilen bir M noktası için $|MN_1|=|MN_2|$ olacağından M merkezli N_1 den geçen çember N_2 den de geçer. $x_1 \neq x_2$ olduğundan N_1N_2 doğru parçasının orta dikmesi x-eksenine paralel değildir. Bu durumda M merkezi olarak N_1N_2 doğru parçasının orta dikmesinin x-eksenini kestiği nokta alındığında, M merkezli $r =|MN_1|$ yarıçaplı çemberin üst yarı düzlemde kalan kısmı yani $[\![O, r]\!]$ N_1 ve N_2 den geçer (Şekil 3.3.).



Şekil 3.3. Poincaré üst yarı düzlem modelinde N_1 ve N_2 noktalarından geçen doğru

$x_1 \neq x_2$ olduğundan N_1 ve N_2 den $[a]$ tipindeki bir doğrunun geçmesi mümkün değildir. Aksi halde;

$$N_1 \text{ o } [a] \Leftrightarrow (x_1, y_1) \text{ o } [a] \;\Leftrightarrow\; x_1 = a$$
$$N_2 \text{ o } [a] \Leftrightarrow (x_2, y_2) \text{ o } [a] \;\Leftrightarrow\; x_2 = a$$

olup $x_1 = a = x_2$ olduğu bulunur ki bu $x_1 \neq x_2$ olması ile çelişir.

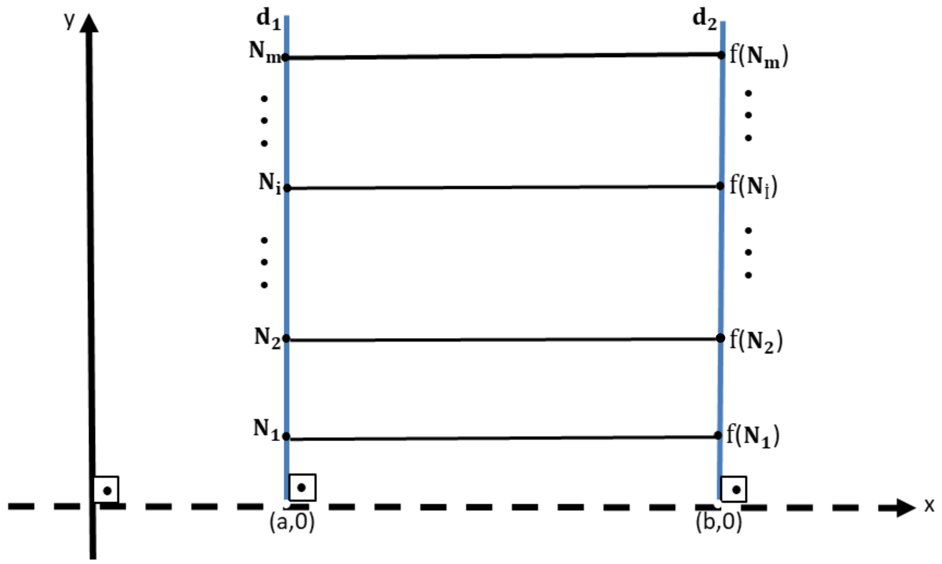
H2) Her doğru üzerinde aynı sayıda nokta olduğu üç durumda gösterilecektir.

1. Durum: Yapının x-eksenine dik olan farklı iki doğrusu d_1, d_2 olsun. d_1 ve d_2 de aynı sayıda nokta bulunduğu gösterilmelidir. d_1 ve d_2 doğruları x-eksenini a ve b gibi iki farklı noktada keserler ve d_1 doğrusu üzerindeki tüm noktalar y_m reel sayısı değişmek üzere (a,y_m) formunda, d_2 doğrusu üzerindeki tüm noktalar ise (b,y_m) formundadır. Bu durumda

$$f : d_1 \to d_2$$

$$N_m \mapsto f(N_m) = f((a,y_m)) = (b,y_m)$$

dönüşümü d_1 üzerindeki noktaları d_2 üzerindeki noktalara birebir ve örten olarak dönüştüren bir fonksiyondur (Şekil 3.4.). Bu nedenle d_1 ve d_2 doğrularının üzerindeki noktalarının sayısı aynıdır.



Şekil 3.4. Poincaré üst yarı düzlem modelinin aynı tip doğruları üzerindeki nokta sayısı

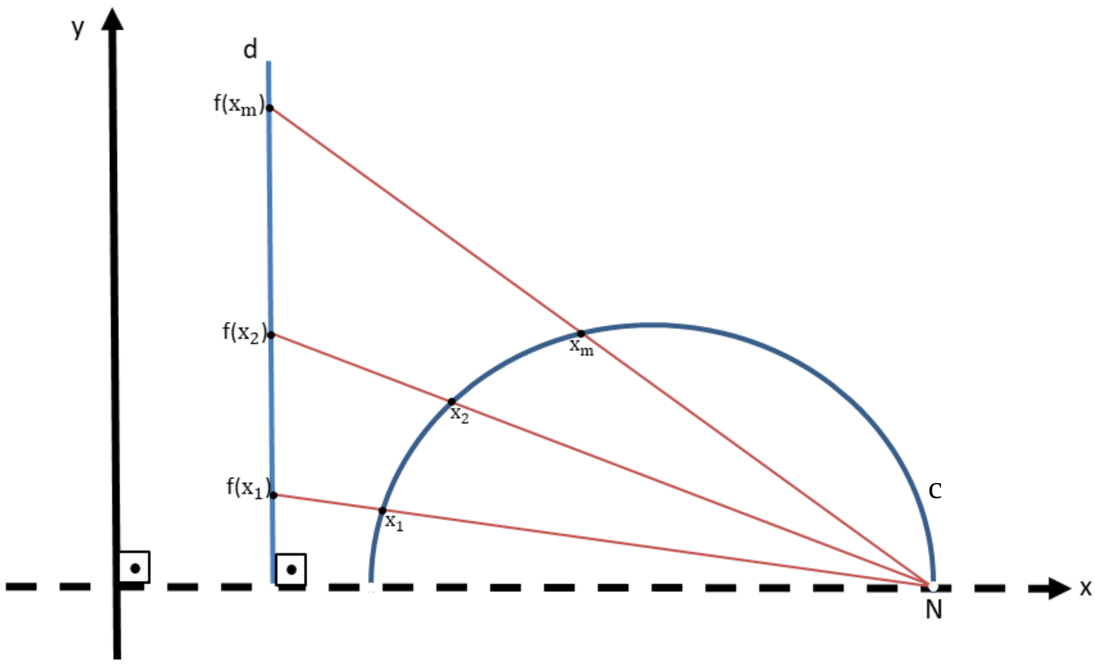
Bu şekilde devam edilirse d_2 doğrusu üzerindeki nokta sayısının d_1 deki nokta sayısına eşit olduğu gösterilmiş olur.

2. Durum: Doğrularımızın biri x-eksenine dik olan ve d ile gösterilen bir doğru, diğeri merkezi x-ekseni üzerinde bulunan bir yarı çember olan ve c ile gösterilen bir doğru olsun. N, c doğrusunun x-eksenini kestiği noktalardan biri olarak alınsın. f fonksiyonunu,

$$f : c \rightarrow d$$

$$X \mapsto f(X) = NX \cap d$$

olarak tanımlansın (Şekil 3.5.).



Şekil 3.5. Poincaré üst yarı düzlem modelinin farklı tipteki doğruları üzerindeki noktaların birbirine dönüştürülmesi

f fonksiyonunun birebir ve örten olduğu Şekil 3.4 den kolayca görülmektedir.

O halde x-eksenine dik olan bir doğru ve merkezi x-ekseni üzerinde bulunan bir yarı çember arasında birebir ve örten bir f fonksiyonu tanımlanabildiğinden, bu çeşit doğrular aynı sayıda noktadan oluşmaktadırlar.

3. Durum: Doğruların ikisi de merkezleri x-ekseni üzerinde bulunan yarı çemberler olarak alınsın. c_1 ve c_2 bu çeşit iki doğru olsun. Bu durumda, x-eksenine dik olan bir d doğrusu alındığında 2. durumdan dolayı birebir ve örten olan;

$$f : c_1 \rightarrow d$$

ve

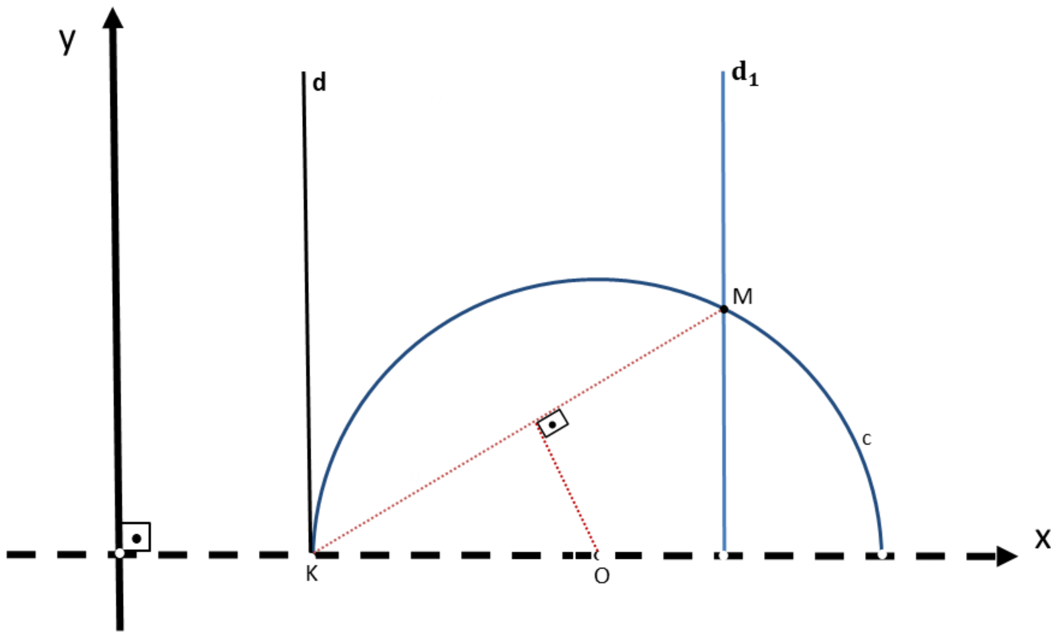
$$g : c_2 \rightarrow d$$

fonksiyonları vardır. $g : c_2 \rightarrow d$ birebir ve örten fonksiyon olduğundan $g^{-1} : d \rightarrow c_2$ birebir ve örten bir fonksiyondur. Birebir ve örten fonksiyonların bileşkesi de birebir örten fonksiyon olacağından $g^{-1} o f : c_1 \rightarrow c_2$ birebir ve örten bir fonksiyondur. Bu nedenle c_1 ve c_2 doğruları aynı sayıda nokta bulundurur.

H3) Öklid üst yarı düzleminde herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktanın varlığı aşikâr olduğundan H3 aksiyomu sağlanır. Örneğin $N_1=(0,1)$, $N_2=(0,2)$, $N_3=(1,1)$, $N_4=(1,2)$ noktalarının hiçbir üçlüsü doğrudaş değildir.

H4) Bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebileceği, doğrulara göre üç farklı durumda incelenir.

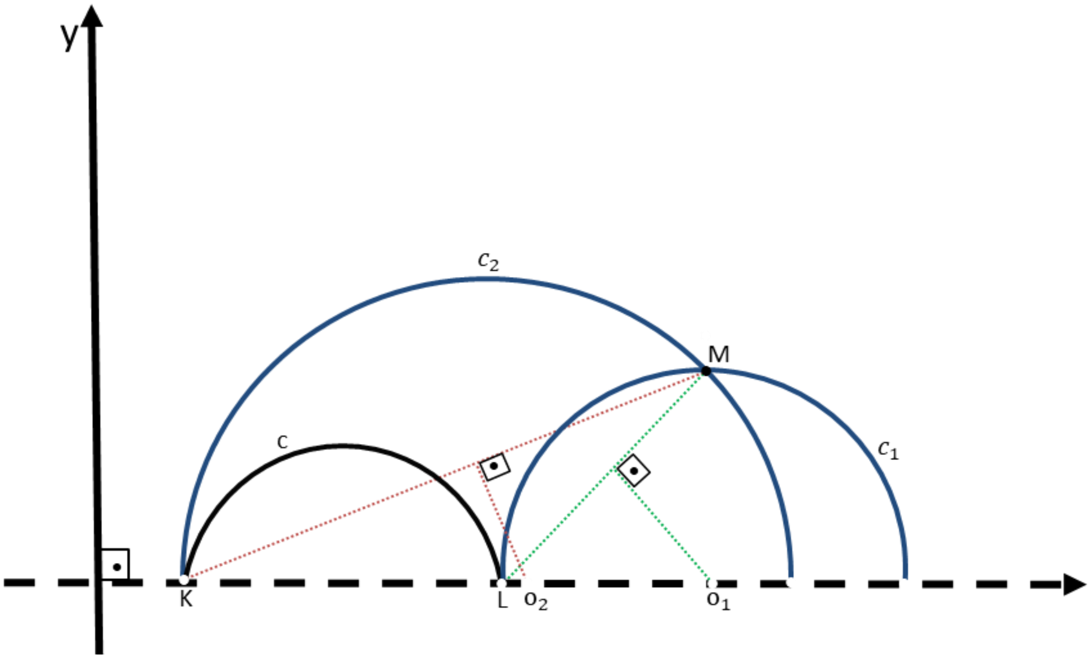
1. Durum: d, x-eksenine dik olan bir doğru ve M, bu doğru üzerinde olmayan bir nokta olsun. Bu durumda M noktasından geçen ve x-eksenine dik olan bir d_1 doğrusu vardır ve bu doğru d ye paraleldir. d doğrusunun x-eksenini kestiği nokta K olarak isimlendirilsin. KM doğru parçasının orta dikmesinin x-eksenini kestiği nokta O olarak isimlendirilsin. (K noktası x-ekseni üzerinde olduğundan KM nin orta dikmesi x-eksenine paralel değildir.) O merkezli |OK| yarıçaplı c çemberi |OK| =|OM| olduğundan M den de geçer. c ile d doğrusu x-ekseni üzerinde kesiştiğinden tanım gereği paraleldirler (Şekil 3.6.).



Şekil 3.6. Poincaré üst yarı düzlem modelinde bir doğruya dışındaki M noktasından çizilen paraleller

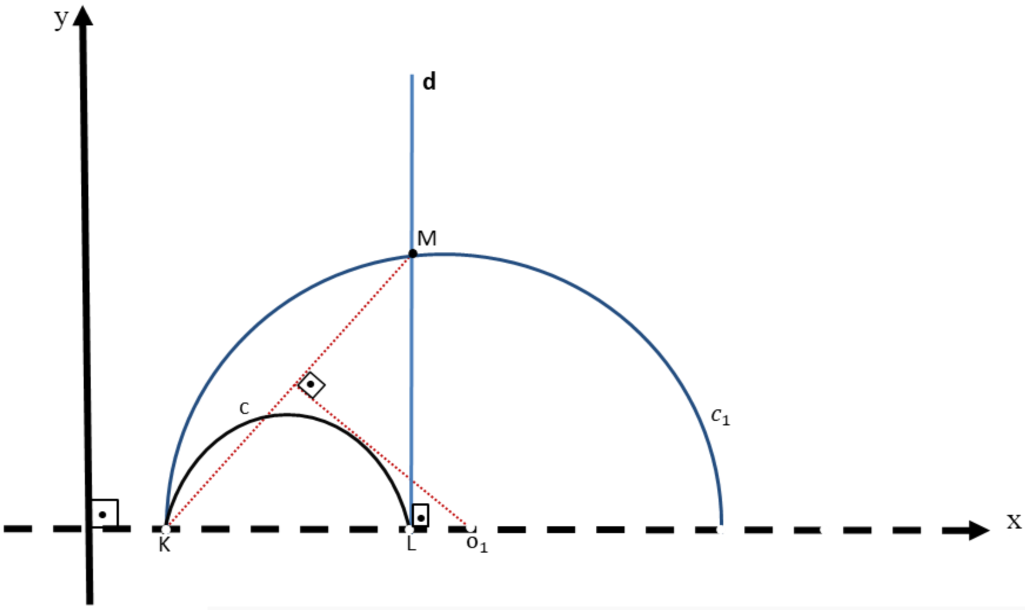
Bu nedenle d_1 ve c doğruları M den geçen ve d ye paralel olan iki doğrudur.

2. Durum: c, merkezi x-ekseni üzerinde bulunan yarı çember biçimindeki bir doğru ve M bu doğru üzerinde olmayan bir nokta olsun. c doğrusunun x-eksenini kestiği noktalar K ve L noktaları olsun. M ise K ve L den geçen dik doğrular üzerinde olmasın. ML doğru parçasının orta dikmesinin x-eksenini kestiği nokta O_1, MK doğru parçasının orta dikmesinin x-eksenini kestiği nokta O_2 olarak isimlendirildiğinde O_1 merkezli $|O_1L| = |O_1M|$ yarıçaplı c_1 yarı çemberi ve O_2 merkezli $|O_2K| = |O_2M|$ yarıçaplı c_2 yarı çemberi c yarı çemberi ile sadece x-ekseni üzerinde kesişirler ve tanım gereği c_1 ve c_2 yarı çemberleri c ye paraleldirler (Şekil 3.7.).



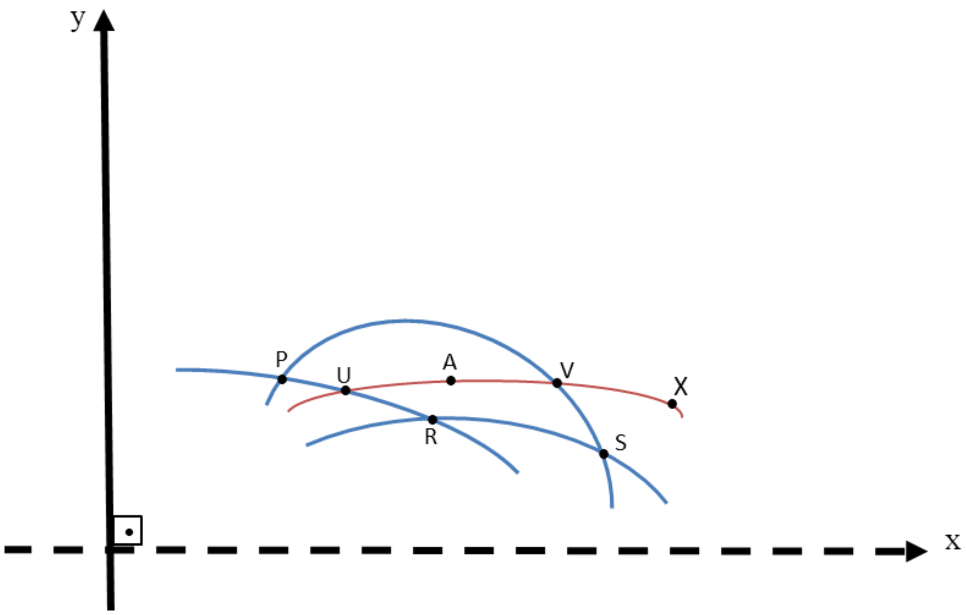
Şekil 3.7. Poincaré üst yarı düzlem modelinde bir yarı çember biçimindeki bir c doğrusuna dışındaki M noktasından çizilen c_1 ve c_2 doğruları

3. Durum: c, merkezi x-ekseni üzerinde bulunan yarı çember biçimindeki ve bu doğrunun x-eksenini kestiği noktalar K ve L olsun. M, K veya L den geçen dik doğrulardan biri üzerinde olsun. Örneğin M yi L den geçen dik doğru olan d üzerinde almak genelliği bozmaz. Bu durumda M den geçen d doğrusu ile c nin paralel olduğu aşikârdır. MK doğru parçasının orta dikmesinin x-eksenini kestiği noktaya O_1 denirse yarıçapı $|O_1M| = |O_1K|$ olan O_1 merkezli c_1 yarım çemberi M ve K noktalarından geçer. Bu nedenle c çemberi ile c_1 çemberi paraleldirler (Şekil 3.8.). Bu nedenle, bu durumda M den geçen d ve c_1 doğruları c ye paraleldirler.



Şekil 3.8. Poincaré üst yarı düzlem modelinde bir yarı çember biçimindeki c doğrusuna dışındaki M noktasından çizilen paralellerin bir başka durumu

H5) $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ kümesi doğrudaş olmayan üç nokta ve $\mathcal{N}'$ nün farklı iki noktasından geçen doğrunun üzerindeki tüm noktalarını kapsasın. $\mathcal{N}$ nin herhangi bir X noktası göz önüne alınsın. $\mathcal{N}'$ nün kapsadığı doğrudaş olamayan noktalar P, R, S ile gösterilsin. PR, PS ve RS doğrularının üzerindeki tüm noktalar kabul gereği $\mathcal{N}'$ nün elemanı olacaktır. PR, PS ve RS doğrularının oluşturduğu PRS üçgeni (bu üçgenin kenarları çember parçası da olacağından, bu tür üçgenlere **hiperbolik üçgen** adı verilir) göz önüne alınsın. $\mathcal{N}$ de PRS üçgeni içinde alınacak bir A noktası ile $\mathcal{N}$ nin A dan farklı bir X noktasını birleştiren doğru PRS hiperbolik üçgeninin kenarlarını U ve V gibi iki farklı noktada kesecektir. U ve V noktaları PRS üçgeninin kenarları üzerinde olduğundan $\mathcal{N}'$ ye ait noktalardır. X noktası da $\mathcal{N}'$ ye ait olan U ve V noktalarını birleştiren doğru üzerinde olduğundan X $\in \mathcal{N}'$ sonucu bulunur (Şekil 3.9.). Bu nedenle $\mathcal{N}' = \mathcal{N}$ elde edilir.



Şekil 3.9. Poincaré üst yarı düzlem modelinin H5 aksiyomu için bir konfigürasyon

3.2. Sandler'in Modeli ve Bu Modelin Genişletilmişi

Sandler bir projektif düzlemden özel üç doğru atarak geriye kalan yapının bir hiperbolik düzlem olma şartlarını incelemiştir (Sandler 1963). Daha sonra da bu inceleme m tane doğruya genişletilmiştir (Kaya ve Özcan 1984). Bu kısımda söz konusu modellerin ikisi de tanıtılacaktır.

3.2.1. Sandler'in Hiperbolik Düzlem Modeli

π, $n \geq 5$ olmak üzere n. mertebeden sonlu bir projektif düzlem olsun. π den noktadaş olmayan l_1, l_2, l_3 doğruları ve bu doğruların üzerindeki tüm noktalar atılarak elde edilen yapı π_3 olarak adlandırılsın. π_3 ün üzerinde bulunma bağıntısı, π nin üzerinde bulunma bağıntısının kısıtlanmışı olduğundan aynı sembolle gösterilebilir. Bu durumda π_3 nin bir hiperbolik düzlem olduğu Sandler tarafından gösterilmiştir ve bu nedenle bu düzlem **Sandler Modeli** olarak bilinir. Şimdi π_3 yapısının Graves anlamında bir hiperbolik düzlem olduğu literatürde aşağıdakine benzer yollarla gösterilmiştir (Kaya ve Özcan 1984).

G1) π_3 nin tüm noktaları aynı zamanda π nin de noktaları olduğundan, projektif düzlem aksiyomlarından dolayı iki nokta bir tek doğru belirtir.

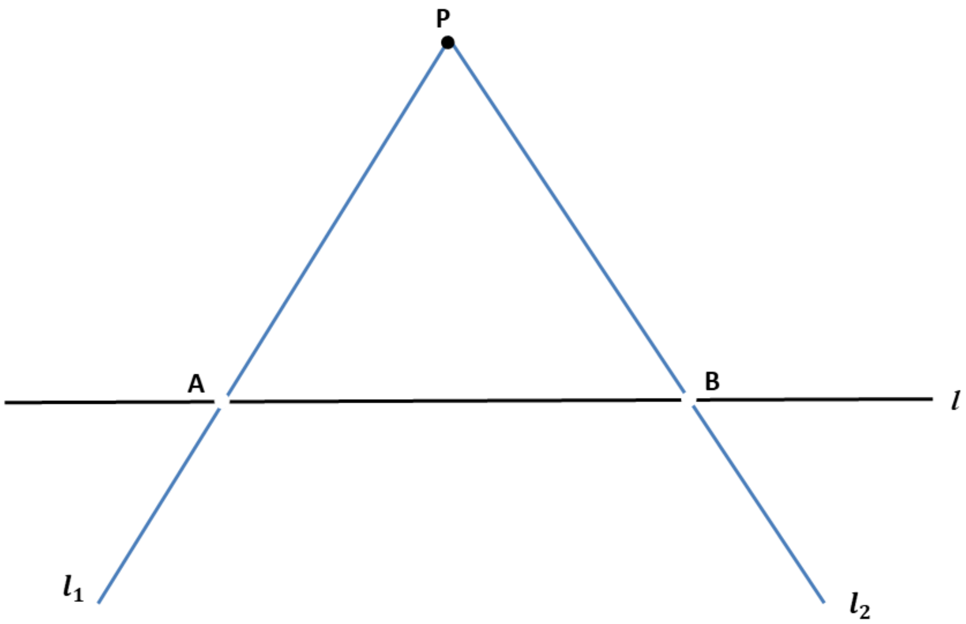
G2) π nin bir doğrusu üzerinden en fazla üç nokta atılmıştır. Yani π_3 nin her doğrusu en az n-2 nokta kapsar (Bu durum π den atılan üçgenin herhangi bir köşesinden geçmeyen doğrular için geçerlidir.). Halbuki $n \geq 5$ olduğundan,

$$n-2 \geq 5-2 \Rightarrow n-2 \geq 3$$

olur.

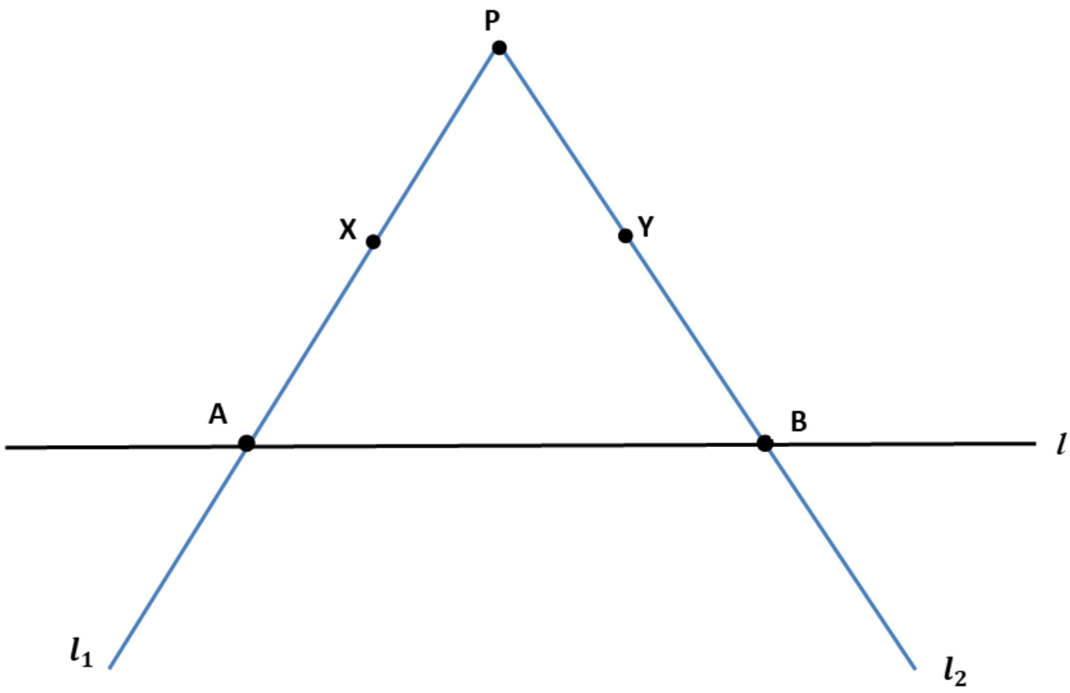
Yani π_3 nin bir doğrusu üzerinde en az üç nokta vardır.

G3) π nin herhangi bir l doğrusu üzerinden atılan en az nokta sayısı 2 dir. Bu noktaları A ve B olarak adlandırılsın. π de $P \not\in l$ olacak şekilde bir P noktasını alalım. Farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden PA ve PB doğruları vardır ve bu doğrular, π_3 de l doğrusuna paraleldir. Böylece bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel doğru çizildiği görülür (Şekil 3.10.).



Şekil 3.10. Sandler'in hiperbolik düzlem modelinde l doğrusuna dışındaki P noktasından çizilebilen paralel doğrular

G4) π_3 de bir l doğrusu ve $P \not\in l$ olacak şekilde bir P noktası alalım. Her doğru üzerinde en az üç nokta olacağından l üzerinde A ve B noktaları vardır. Farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden dolayı P den geçen PA ve PB doğruları söz konusudur. Bu doğrular üzerinde de en az üç nokta olacağından PA doğrusu üzerinde P ve A noktalarından farklı bir X noktası ve PB doğrusu üzerinde de P ve B noktalarından farklı bir Y noktası vardır. Bu durumda, A,B,X, Y noktaları herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktadır (Şekil 3.11.).



Şekil 3.11. Sandler'in hiperbolik düzlem modelinin G4 aksiyomu için bir konfigürasyon

G5) π_3 nin noktalarının bir S alt kümesi, doğrudaş olmayan üç nokta ve S ye ait herhangi iki noktayı birleştiren doğrular üzerindeki tüm noktaları kapsasın. O zaman A,B,C $\in S$ doğrudaş olmayan üç nokta olmak üzere l = AB doğrusu üzerindeki noktalar hipotez gereğince S ye aittir. Bu l doğrusu üzerinde en az n−2 adet nokta olup C noktası ile bu noktalar birleştirilirse, S deki toplam nokta sayısının en az

$$(n-2)(n-3)+1$$

olduğu bulunur. X $\in \pi_3$ ün herhangi bir noktası olsun. π projektif düzleminde bir noktadan n + 1 adet doğru geçer. X ile S nin $(n-2)(n-3)+1$ noktası birleştirilerek, X ve S nin noktalarından geçen $(n-2)(n-3)+1$ adet doğru elde edilir. Eğer X ile S nin noktalarını birleştiren doğruların sayısının n + 1 den büyük olduğu, yani

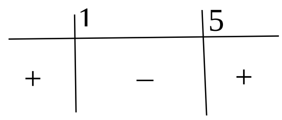
$$(n-2)(n-3)+1 \geq n+2$$

olduğu gösterilirse X noktasından geçen doğrulardan birinin S nin birden fazla noktasını kapsadığı ispatlanmış olur. Bu durumda da hipotez gereğince S nin farklı iki noktasını kapsayan bir doğrunun tüm noktaları da S de olacağından X $\in S$ elde olduğu bulunur. Gösterilmesi gereken bu eşitsizlik incelendiğinde

$$(n-2)(n-3)+1 \geq n+2$$

$$\Leftrightarrow n^2-6n+5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-5)(n-1) \geq 0$$



$$\Leftrightarrow n \geq 5 \text{ veya } n \leq 1$$

olduğu bulunur. Hipotez gereği $n \geq 5$ olduğundan $(n-2)(n-3)+1 \geq n+2$ eşitsizliği gerçeklenir.

3.2.2. Sandler'in Hiperbolik Düzlem Modelinin Genişletilmişi (Kaya-Özcan Modeli)

Bu kesimde Kaya R. ve Özcan E. tarafından verilen ve Sandler'in modelinin bir genişletilmişi olarak düşünülebilecek bir model tanıtılacaktır. π, n. mertebeden sonlu bir projektif düzlem ve m, $m \leq n+2$ eşitsizliğini sağlayan pozitif bir tamsayı olsun.
l_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ π nin farklı ve herhangi üçü noktadaş olmayan doğrularını göstersin. π_m, π den l_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ doğruları ve bu doğrular üzerinde bulunan tüm noktaların atılmasıyla elde edilen bir alt yapı olsun. π nin bir noktası eğer atılan l_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ doğrularının herhangi ikisinin kesişimi ise bu nokta **köşe noktası** adını alır (Kaya ve Özcan 1984).

Yardımcı Teorem 3.2.2.1. π_m aşağıdaki özellikleri sağlar (Kaya ve Özcan 1984).

1. Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.
2. Her bir noktadan $n + 1$ doğru geçer.
3. Toplam doğru sayısı $n^2 + n + 1 - m$ dir.
4. Toplam nokta sayısı $n^2 + (1-m)n + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ dir.

İspat:

1. π de farklı iki nokta bir tek doğru üzerinde olduğundan, π_m de de verilen iki nokta aynı zamanda π nin de noktaları olduğundan π_m de verilen bu iki noktadan bir tek doğru geçer.

2. π_m de verilen bir nokta aynı zamanda π nin de bir noktasıdır. π de bu noktadan tam olarak n + 1 doğru geçtiğinden π_m de de bu noktadan n + 1 doğru geçer.

3. π de tam olarak $n^2 + n + 1$ doğru olduğu bilindiğinden ve π_m yi de π den m tane farklı doğruyu atarak elde ettiğimizden dolayı π_m nin toplam doğru sayısı $n^2 + n + 1 - m$ olur.

4. π den herhangi üçü doğrudaş olmayan m tane doğru atıldığına göre, l bu doğrulardan herhangi biri olsun. l nin atılan diğer diğer doğrulara ait olmayan toplam $n + 1 - (m - 1) = n - m + 2$ noktası vardır. Toplam m tane doğru atıldığından bu doğruların üzerindeki bu tür noktaların toplam sayısı $m.(n - m + 2)$ dir. Bunlardan başka atılan m tane doğrunun kendi aralarında ikişer ikişer arakesit noktaları olan noktalar da atılırlar. Bu arakesit noktalarının sayısının $\binom{m}{2}$ olduğu açıktır. O halde π den atılan toplam nokta sayısı $m(n - m + 2) + \binom{m}{2}$ dir. Dolayısıyla π_m nin toplam nokta sayısı $n^2 + n + 1 - [\, m.(n - m + 2) + \binom{m}{2} \,] = n^2 + (1 - m)n + \frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$ olarak bulunur (Kaya ve Özcan 1984).

Yardımcı Teorem 3.2.2.2. π_m nin bir doğrusu, π nin bir doğrusu olarak düşünülür ise, m nin tek veya çift olmasına göre, sırasıyla $\frac{m-1}{2}$ veya $\frac{m}{2}$ köşe noktası kapsar (Kaya ve Özcan 1984).

İspat: l, π_m nin bir doğrusu olsun ve l nin π de s tane köşe noktası kapsadığını farz edilsin. Köşe noktası tanımından dolayı bu durumda π nin l yi ikişer ikişer aynı noktada kesen 2s tane atılmış doğrusu vardır. Çünkü bu doğruların herhangi üçü noktadaş değildir. Atılan doğruların sayısı m olduğundan dolayı

$$2s \leq m \Rightarrow s \leq \frac{m}{2}$$

olur. Bu durumda eğer m tek ise,

$$2s \leq m \Rightarrow 2s \leq 2k+1 \quad ; (m = 2k+1), k \in \mathbb{Z}$$

$$2s \leq 2k = m - 1$$

$$2s \leq m - 1$$

$$s \leq \frac{m-1}{2}$$

olur.

Sonuç 3.2.2.3. π de s adet köşe noktası kapsayan π_m nin bir doğrusunun tam olarak $n + 1 - (m - s)$ noktası vardır (Kaya ve Özcan 1984).

İspat: *l*, π_m nin bir doğrusu olsun. O zaman *l* üzerindeki π nin bir doğrusu olarak n + 1 nokta vardır. π den m tane doğru atıldığından ve bu doğrulardan 2s tanesi *l* üzerinde köşe noktası yaptığından geriye kalan $(m - 2s)$ tane doğru *l* yi farklı noktalarda keserler. Böylece *l* üzerinde, π_m ye ait $n + 1 - [(m - 2s) + s] = n + 1 - (m - s)$ tane nokta kalır.

Sonuç 3.2.2.4. π_m nin bir doğrusunun genişletilmişi üzerindeki köşe noktalarının minimum sayısı r, bu doğru üzerindeki π_m ye ait tüm noktaların sayısı k olsun. O zaman,

$$m \text{ çift} \Rightarrow n + 1 - m + r \leq k \leq n - \frac{1}{2}(m - 2)$$

$$m \text{ tek} \Rightarrow n + 1 - m + r \leq k \leq n - \frac{1}{2}(m - 1)$$

dir (Kaya ve Özcan 1984).

İspat: *l*,π_m nin bir doğrusu olsun. *l*, π nin bir doğrusu olarak göz önüne alınırsa en az r tane köşe noktası kapsar. Bu nedenle *l* doğrusu atılan $l_1, l_2, \ldots, l_m$ doğrularının en az $m - r$ tanesi ile π nin farklı noktalarında kesişirler. Fakat tüm bu kesişim noktaları atıldığından *l*, π_m de en az $n + 1 - (m - r)$ tane nokta kapsar. Bu nedenle;

$n + 1 - m + r \leq k$ dır. Diğer taraftan *l*, π nin bir doğrusu olarak, s tane köşe noktası kapsarsa *l* den atılan noktaların sayısı $m - s$ dir.

Fakat yukarıda verilen Yardımcı Teorem 3.2.2.2 den dolayı;

(i) m çift $\Rightarrow s \leq \frac{m}{2}$ olur. Buradan $m - s \geq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}$ elde edilir. Buna göre *l* üzerindeki π_m ye ait noktaların sayısı $n + 1 - \frac{m}{2}$ veya daha azdır. Yani;

$k \leq n + 1 - \frac{m}{2} = n - \frac{1}{2}(m - 2)$ bulunur.

(ii) m tek $\Rightarrow s \leq \frac{m-1}{2}$ dir. Buradan $m - s \geq m - \frac{m-1}{2} = \frac{m+1}{2}$ elde edilir. Buna göre *l* üzerindeki π_m ye ait noktaların sayısı $n + 1 - \frac{m+1}{2}$ dir veya daha azdır. Yani;

$k \leq n + 1 - \frac{m+1}{2} = n - \frac{1}{2}(m - 1)$ bulunur.

Teorem 3.2.2.5. r, π_m nin bir doğrusunun genişletilmişi üzerindeki köşe noktalarının minimum sayısı olsun. Bu durumda,

$$3 \leq m \leq n + r + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n + 5})$$

ise π_m bir hiperbolik düzlemdir (Kaya ve Özcan 1984).

İspat: r minimum köşe noktası sayısını gösterdiğinden,

G1) Yardımcı Teorem 3.2.2.1. de verilen 1. özellik gereği aşikârdır.

G2) Sonuç 3.2.2.3. ile birlikte π_m nin bir doğrusunun üzerinde en az

$$n + 1 - (m - r)$$

adet nokta olduğu bulunur. Hipotezden dolayı,

$$m \leq n + r + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n + 5})$$

$$\Rightarrow n \geq m - r - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n + 5})$$

olur.

Burada $n \geq 2$ olduğu kullanılarak

$$\mathrm{m} - \mathrm{r} - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5}\,) \geq \mathrm{m} - \mathrm{r} - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{13}\,)$$

$$\Rightarrow \mathrm{m} - \mathrm{r} - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5}\,) \geq \mathrm{m} - \mathrm{r} + 1$$

olduğu bulunur. Bu son eşitsizlikle birlikte $\mathrm{n} \geq \mathrm{m} - \mathrm{r} - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5}\,)$ olduğu kullanılarak

$$\mathrm{n} \geq \mathrm{m} - \mathrm{r} - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+5}\,) \geq \mathrm{m} - \mathrm{r} + 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{n} \geq \mathrm{m} - \mathrm{r} + 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{n} - \mathrm{m} + \mathrm{r} \geq 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{n} - \mathrm{m} + \mathrm{r} + 1 \geq 2$$

$$\Rightarrow \mathrm{n}+1 - \mathrm{m} + \mathrm{r} \geq 2$$

sonucu elde edilir.

G3) *l*, π_{m} nin bir doğrusu ve P, π_{m} nin *l* üzerinde olmayan bir noktası olsun. *l* ye, üzerinden atılan nokta sayısı kadar, P den geçen paralel doğru çizilebilir. *l* den m-s adet nokta atılmış ise, P noktasından geçen ve *l* ye paralel olan m-s adet doğru çizilebilir. m çift iken, *l* doğrusu üzerinde en fazla $\frac{m}{2}$ köşe noktası olduğundan *l* ye P den geçen en az,

$$\mathrm{m} - \frac{\mathrm{m}}{2} = \frac{\mathrm{m}}{2}$$

adet paralel doğru çizilebilir.

m tek iken, *l* doğrusu üzerinde en fazla $\frac{m-1}{2}$ köşe noktası olduğundan *l* ye P den geçen en az,

$$\mathrm{m} - \frac{\mathrm{m}-1}{2} = \frac{\mathrm{m}+1}{2}$$

adet paralel doğru çizilebilir.

Diğer taraftan m ≥ 3 olduğundan,

$$\frac{m}{2} \geq 2 \text{ veya } \frac{m+1}{2} \geq 2$$

dir.

G4) π_m de her biri en az iki nokta içeren ve birbirine paralel iki doğru olacağından H3 aksiyomu aşikâr olarak sağlanır.

G5) S, π_m nin noktalar cümlesinin doğrudaş olmayan A, B, C noktalarını kapsayan bir alt kümesi olsun. Ayrıca S, S ye ait herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru üzerindeki tüm noktaları da kapsasın. O zaman S; AB, AC ve BC doğruları üzerindeki tüm noktaları da kapsar. Bu doğruların her biri, hipotezden dolayı, π de en az r adet köşe noktası kapsar. O halde AB doğrusu da π_m nin en az $n + 1 - m + r$ noktasını kapsar. O zaman, C ile AB doğrusu üzerindeki $n + 1 - m + r$ nokta birleştirilerek, C den geçen ve AB doğrusunu kesen en az $n + 1 - m + r$ adet doğru elde edilir. Bu doğruların her biri C den başka en az $n - m + r$ nokta kapsar. Dolayısıyla S en az,

$$(n - m + r).(n + 1 - m + r) + 1$$

nokta bulundurur.

X, π_m nin herhangi bir noktası olsun. X ile S de bulunan,

$$(n - m + r)(n + 1 - m + r) + 1$$

adet nokta birleştirilirse X den ve S nin bir noktasından geçen en az,

$$(n - m + r)(n + 1 - m + r) + 1$$

adet doğru elde edilir. Diğer taraftan π de X den tam olarak $n + 1$ doğru geçer. Bu durumda eğer,

$$(n - m + r)(n + 1 - m + r) + 1 \geq n + 2$$

ise, X noktasını S nin noktalarına birleştiren doğruların en az iki tanesi aynı doğruyu verir. (Aksi halde X den n + 2 adet doğru geçmiş olurdu ki bu imkansızdır.). Yani X i, S nin noktalarına birleştiren bir doğru üzerinde S nin en az iki noktası mevcut olur. Hipotezden dolayı bu $X \in S$ demek olup, S ile π_m nin noktaları kümesi eşit olur. Bu nedenle

$$(n - m + r)(n + 1 - m + r) + 1 \geq n + 2$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu gösterilirse ispat biter ki aşağıda bu eşitsizlik bu maksatla incelenmektedir.

$(n - m + r)(n + 1 - m + r) + 1 \geq n + 2$

$\Leftrightarrow (n - m + r)(n + 1 - m + r) - n - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow n^2 + n - nm + nr - mn - m + m^2 - mr + nr + r - mr + r^2 - n - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m(2n + 2r + 1) + n^2 + 2nr + r^2 + r - 1 \geq 0$

Son bulunan ikinci dereceden polinomun m ye göre kökleri,

$$m_{1,2} = \frac{2n + 2r + 1 \mp \sqrt{4n^2 + 8nr + 4n + 4r + 4r^2 + 1 - (4n^2 + 8nr + 4r^2 + 4r - 4)}}{2}$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = \frac{2n + 2r + 1 \mp \sqrt{4n + 5}}{2}$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = n + r + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{4n + 5}$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = n + r + \frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{4n + 5})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = n + r + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n + 5}) \\ m_2 = n + r + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n + 5}) \end{cases}$$

	m_1		m_2	
+		−		+

olarak elde edilir. Yani istenen (n − m + r)(n + 1 − m + r) + 1 ≥ n + 2 eşitsizliğinin geçerli olabilmesi için m ≤ m_1 ya da m ≥ m_2 olmalıdır. π_m nin kuruluşu sırasında m ≤ n+ 2 olarak belirlendiğinden m ≥ m_2 olması mümkün değildir. Bu nedenle m ≤ m_1, yani

$$m \leq n + r + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n + 5})$$

olmalıdır ki bu teoremde doğru olduğu verilen ifadedir. Bu G5 aksiyomunun sağlandığını gösterir (Kaya ve Özcan 1984).

Aşağıda verilecek sonuç ve peşinden verilecek gösterim bu kısmın geri kalanında sık sık kullanılacaktır.

Sonuç 3.2.2.6. π_m bir *l* doğrusuna dışındaki bir P noktasından çizilen paralellerin sayısı P nin seçiminden bağımsız, *l* nin seçimine bağımlıdır.

İspat: π_m nin bir *l* doğrusu ve bu doğru üzerinde olmayan bir P noktasını göz önüne alınsın. Eğer *l* doğrusu s tane köşe noktası kapsarsa bu durumda *l* doğrusu üzerinden m –s tane nokta atılmış olacağından P den geçen ve *l* ye paralel m – s tane doğru vardır. r bir doğru üzerindeki en az köşe noktasını göstermek üzere P den *l* ye en fazla m – r tane, en az $\frac{m}{2}$ veya $\frac{m+1}{2}$ tane paralel çizilebilir. Bu sebeple P den geçen ve *l* ye paralel doğruların sayısı P nin seçiminden bağımsızdır, fakat *l* nin seçimine bağlıdır.

π_m nin doğruları, kapsadıkları köşe noktalarının sayısına göre sınıflandırılabilir. C_s ile π_m nin, π de s tane köşe noktası kapsayan doğrularının kümesin gösterilsin. Bu gösterimle birlikte aşağıdaki sonuç kolayca görülmektedir.

Sonuç 3.2.2.7. C_s deki her bir doğrunun tam olarak n + 1− (m − s) noktası olduğunu biliyoruz. m çift ise maksimum köşe noktası sayısı $\frac{m}{2}$, m tek ise $\frac{m-1}{2}$ dir. r minimum köşe noktası sayısı olduğuna göre m çift iken t = $\frac{m}{2}$, m tek ise t = $\frac{m-1}{2}$ olmak üzere C_r, C_{r+1}, … , C_t doğru sınıfları mevcut demektir. O halde m nin çift veya tek olmasına göre $\frac{m}{2}$ – r + 1 veya $\frac{m-1}{2}$ – r + 1 tane doğru sınıfı vardır.

Önerme 3.2.2.8. C_s deki bir *l* doğrusuna paralel olan π_m nin doğruları sayısı m(n – 1) – ns dir (Kaya ve Özcan 1984).

İspat : C_s nin bir *l* doğrusunu alınsın. *l*, n + 1– (m – s) nokta bulundurur ve bu noktaların her birinden *l* hariç π_m ye ait n tane doğru geçer. O halde *l* yi kesen π_m nin toplam doğru sayısı n(n + 1 - (m -s)) dir. π_m de, *l* ye paralel olmayan doğruların kümesi bu doğrulardan oluştuğundan π_m de, *l* ye paralel doğruların sayısı,

$$n^2 + n + 1 - [\, n(n + 1 - (m - s)) + 1 \,]$$

$$= n^2 + n + 1 - m - n^2 - n + mn - ns - 1$$

$$= m(n - 1) - ns$$

olarak bulunur.

Önerme 3.2.2.9. N, π_m nin herhangi bir noktası, n_s de N den geçen C_s sınıfına ait olan doğruların sayısı olsun. C_s deki tüm doğruların sayısı q_s ile gösterilsin.

m nin çift veya tek olmasına göre t sırasıyla $\frac{m}{2}$ veya $\frac{m-1}{2}$ olmak üzere;

(i) $\sum_{s=r}^{t} n_s = n + 1$

(ii) $\sum_{s=r}^{t} q_s = n^2 + n + 1 - m$

(iii) $\sum_{s=r}^{t} s.n_s = \binom{m}{2}$

(iv) $\sum_{s=r}^{t} s.q_s = (n-1).\binom{m}{2}$

(v) $\sum_{s=r}^{t} s^2.q_s = \left[n - 1 + \binom{m-2}{2}\right].\binom{m}{2}$

olur (Kaya ve Özcan 1984).

İspat:

(i) $\sum_{s=r}^{t} n_s$ toplamı N den geçen tüm doğruların sayısını ifade ettiğinden ve bu sayının n + 1 olduğu bilindiğinden $\sum_{s=r}^{t} n_s = n + 1$ olur.

(ii) $\sum_{s=r}^{t} q_s$ toplamı π_m nin tüm doğrularının sayısıdır, çünkü bu toplamda π_m nin tüm C_s sınıflarının elemanları dolayısıyla π_m nin tüm doğruları sayılmaktadır. π_m nin toplam doğru sayısı $n^2+n+1-m$ olduğundan $\sum_{s=r}^{t} q_s = n^2+n+1-m$ olur.

(iii) $\sum_{s=r}^{t} s.n_s$ toplamı, π nin bir N noktasından geçen noktadaş doğru demeti tarafından kapsanan toplam köşe noktası sayısıdır. Diğer yandan bu demete ait olmayan hiçbir köşe noktası da olmadığından söz konusu demet π nin tüm köşe noktalarını kapsıyor demektir. Tüm köşe noktlarının sayısı $\binom{m}{2}$ olduğundan $\sum_{s=r}^{t} s.n_s = \binom{m}{2}$ elde edilir.

(iv) sq_s , C_s sınıfına ait olan doğrularla bu doğrular üzerindeki köşe noktlarının teşkil ettiği toplam flag sayısını verir. Toplam $\binom{m}{2}$ tane köşe noktası vardır. π de herbir köşe noktasından n + 1 doğru geçer, bu doğruların iki tanesi atılan doğrudur. Bu durumda $\binom{m}{2}$ köşe noktasının her birinden n – 1 doğru geçer. Yani her bir köşe noktası n – 1 adet sözü edilen cinsten flag belirtir. Tüm köşe noktlarının belirttiği bu türden flagların sayısı $\binom{m}{2}(n-1)$ olacağından

$$\sum_{s=r}^{t} s.q_s = (n-1).\binom{m}{2}$$

eşitliği bulunur.

(v) C_s nin her bir doğrusu üzerinde s tane köşe noktası vardır. Bu nedenle C_s nin bir doğrusu ile $\binom{s}{2}$ adet farklı köşe noktası çifti belirtilir.

$$\sum_{s=r}^{t} s(s-1)q_s$$

toplamını da $\binom{s}{2} = \frac{s(s-1)}{2}$ olduğu kullanılarak

$$\sum_{s=r}^{t} s(s-1)q_s = 2\sum_{s=r}^{t}\binom{s}{2}q_s$$

eşitliği bulunur. $\binom{s}{2}q_s$, C_s sınıfına ait köşe noktalarının bu sınıfa ait, belirttikleri toplam farklı köşe noktası çifti sayısıdır. $\sum_{s=r}^{t}\binom{s}{2}q_s$ ise tüm C_s sınıflarına ait köşe noktalarının belirttikleri π_m ye ait farklı köşe noktası çifti sayısıdır.

$\left(\binom{\binom{m}{2}}{2}\right)$; π deki toplam farklı köşe noktası çifti sayısı; m$\binom{m-1}{2}$ ise atılan yapıya ait farklı köşe noktası çifti olduğuna göre,

$$\sum_{s=r}^{t}\binom{s}{2}q_s = \left(\binom{\binom{m}{2}}{2}\right) - m\binom{m-1}{2}$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda işlem yapılarak

$$\sum_{s=r}^{t} s(s-1)q_s = 2\sum_{s=r}^{t}\binom{s}{2}q_s = 2\left[\ \left(\binom{\binom{m}{2}}{2}\right) - m\binom{m-1}{2}\right]$$

$$\sum_{s=r}^{t} s^2.q_s - \sum_{s=r}^{t} s.q_s = 2\left[\ \left(\binom{\binom{m}{2}}{2}\right) - m\binom{m-1}{2}\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\frac{m(m-1)}{2}\frac{m(m-1)-2}{2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2}\right]$$

$$= \frac{m(m-1)}{2}\left[\frac{m(m-1)-2}{2} - 2(m-2)\right]$$

$$= \frac{m(m-1)}{2}\left[\frac{m(m-1)-2-4m+8}{2}\right]$$

$$= \frac{m(m-1)}{2}\left[\frac{m^2-m-2-4m+8}{2}\right]$$

$$= \frac{m(m-1)}{2}\left[\frac{m^2-5m+6}{2}\right]$$

$$= \frac{m(m-1)}{2}\ \frac{(m-2)(m-3)}{2}$$

$$= \binom{m}{2}\binom{m-2}{2}$$

$$\sum_{s=r}^{t} s^2.q_s - \sum_{s=r}^{t} s.q_s = \binom{m}{2}\binom{m-2}{2}$$

$$\sum_{s=r}^{t} s^2.q_s = \sum_{s=r}^{t} s.q_s + \binom{m}{2}\binom{m-2}{2}$$

$$\sum_{s=r}^{t} s^2.q_s = (s-1)\binom{m}{2} + \binom{m-2}{2}\binom{m}{2}$$

$$\sum_{s=r}^{t} s^2.q_s = [(s-1) + \binom{m-2}{2}]\binom{m}{2}$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 3.2.2.10. r minimum köşe noktası olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir (Kaya ve Özcan 1984).

(i) $r \leq \frac{1}{n+1}\binom{m}{2}$

(ii) $\binom{m}{2} < n+1 \Rightarrow r = 0$

İspat:

(i) $r(n+1) = r\sum_{s=r}^{t} n_s = \sum_{s=r}^{t} rn_s \leq \sum_{s=r}^{t} sn_s = \binom{m}{2}$

Önerme 3.2.2.9 (i) ve (iii) den dolayı

$$\Rightarrow r(n+1) \leq \binom{m}{2}$$

$$\Rightarrow r \leq \frac{1}{n+1}\binom{m}{2}$$

elde edilir.

(ii) $\binom{m}{2} < n+1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{n+1}\binom{m}{2} < 1$

$$r < 1 \Rightarrow r = 0$$

dır. Çünkü r, $r \geq 0$ olacak şekilde bir tamsayıdır. Yukarıdaki sonuç minimum köşe noktası sayısı için bir üst sınırın bulunduğunu ifade etmektedir.

3.3. Non-Baer Altdüzlemler ve Hiperbolik Düzlemler

Bu kısımda Çelik B. (1989) tarafından yapılan bir çalışmanın kısa bir özeti verilecektir.

$\pi = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem $\pi' = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')$ de π nin $n \geq m^2 + m$ özelliğindeki m mertebeli bir projektif altdüzlemi olsun. (Bu özellikteki altdüzlemlere non-Baer altdüzlem denir.)

$o' \subset \mathcal{N}' \times \mathcal{D}'$ olup, $o' = o \cap (\mathcal{N}' \times \mathcal{D}')$ olduğundan o' ile o aynı anlamda olup o' yerine o kullanmakta bir sakınca yoktur.

π den π' nün tüm doğrularının ve bu doğrular üzerindeki tüm noktaların çıkarılması ile elde edilen yapı π_0 ile gösterilsin. Diğer bir ifadeyle,

$$Q = \{N \in \mathcal{N} : N \; o \; d, \; d \in \mathcal{D}'\}$$

ve

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \setminus Q, \;\; \mathcal{D}_0' = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}', \; o_0 = o \cap (\mathcal{N}_0 \times \mathcal{D}_0)$$

olmak üzere;

$\pi_0 = (\mathcal{N}_0, \mathcal{D}_0, o_0)$ formundadır. Burada biraz evvel ifade edilen nedenle o_0 yerine o yazmakta bir sakınca yoktur. Dolayısıyla $\pi_0 = (\mathcal{N}_0, \mathcal{D}_0, o)$ yazılabilir (Çelik 1989).

3.3.1. π_0 Yapısının Bazı Özellikleri

Bu kısımda π_0 yapısının doğru ve noktalarıyla ilgili bazı sayısal özellikler verilecektir.

Önerme 3.3.1.1.

1. π_0 da farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.
2. π_0 ın toplam doğru sayısı $n^2 + n - m^2 - m$ dir.
3. π_0 ın toplam nokta sayısı $(n - m)(n - m^2)$ dir
4. π_0 ın herhangi bir doğrusu üzerindeki en az nokta sayısı $n - m^2 - m$

dir (Çelik 1989).

İspat:

1. π de farklı iki noktadan bir tek doğru geçtiği P1 den dolayı aşikârdır. X, Y ∈ $\mathcal{N}_0$ olsun. Bu durumda $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$ olduğundan X, Y ∈ $\mathcal{N}$ olup XY ∈ $\mathcal{D}$ doğrusu mevcuttur.

π' nün tüm doğruları, üzerindeki noktalarla birlikte atıldığından XY $\notin \mathcal{D}'$ dür.

2. π_0 , π den π' nün tüm doğruları atılarak elde edildiğinden, π_0 ın doğrularının sayısı π nin doğrularının sayısı ile π' nün doğruları sayısı arasındaki fark kadardır. Yani:

$$|\mathcal{D}_O| = |\mathcal{D}| - |\mathcal{D}'|$$

$$= n^2 + n + 1 - (m^2 + m + 1)$$
$$= n^2 + n - m^2 - m$$

dir.

3. Daha önce tanımlanan,

$$Q = \{N \in \mathcal{N} : N\ od\ , d \in \mathcal{D}'\}$$

için

$$|Q| = (m^2 + m + 1)(n + 1 - m)$$

dir. Çünkü π den toplam $m^2 + m + 1$ adet doğru atılmış olup, atılan her bir doğru üzerinde, $\mathcal{N}'$ nün elemanı olmayan $\mathcal{N}$ nin n – m adet noktası vardır. O halde atılan yapının $\mathcal{N}'$ ye ait olmayan toplam nokta sayısı $(m^2 + m + 1)(n - m)$ dir. Diğer yandan, $\mathcal{N}'$ nün toplam nokta sayısı $m^2 + m + 1$ olduğundan

$$|Q| = (m^2 + m + 1)(n + 1 - m)$$

olduğu gösterilmiş olur. Öte yandan,

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \cup Q, \ \mathcal{N}_0 \cap Q = \emptyset$$

olduğu aşikardır. Bu durumda basit işlemlerle

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{N}| &= |\mathcal{N}_0 \cup Q| \\
\Rightarrow |\mathcal{N}| &= |\mathcal{N}_0| + |Q| \\
\Rightarrow |\mathcal{N}_0| &= |\mathcal{N}| - |Q| \\
&= n^2 + n + 1 - (m^2 + m + 1)(n + 1 - m) \\
&= n^2 + n + 1 - nm^2 - mn - n - m^2 - m - 1 + m^3 + m^2 + m \\
&= n^2 - nm^2 - nm + m^3 \\
&= m^2(m - n) + n(n - m) \\
&= (n - m)(n - m^2)
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

4. π_0 inşa edilirken π nin atılan yapıya ait olmayan bir doğrusu üzerinden en fazla $m^2 + m + 1$ adet nokta atılmıştır. (Bu tip doğrular, üzerinde atılan yapının hiçbir noktasını bulundurmayan doğrulardır.) Bu nedenle π_0 ın bir doğrusu tarafından kapsanan minimum nokta sayısı,

$$n + 1 - (m^2 + m + 1) = n - m^2 - m$$

olur.

Tanım 3.3.1.2. π_0 ın tam olarak bir tek noktasını kapsayan bir doğruya **teğet doğru**, hiçbir noktasını kapsamayan bir doğruya da **dış doğru** denir (Çelik 1989).

Önerme 3.3.1.3. π_0 ın herhangi bir doğrusu ya $n - m^2 - m$ adet nokta veya $n - m^2$ adet nokta bulundurur (Çelik 1989).

İspat: $d_0 \in \mathcal{D}_0$ olsun d_0 ın tamamlanmışını (yani d_0 dan atılan noktaların iadesiyle bulunan $\mathcal{D}$ nin doğrusu) d ile gösterilsin. O zaman d doğrusu atılan yapının ya hiçbir noktasını kapsamaz ya da bir tek noktasını kapsar. Yani ya d bir dış doğru ya da bir teğet doğrudur. d bir dış doğru ise, atılan yapının (π' nün) atılan $m^2 + m + 1$ doğrusu ile farklı noktalarda kesişir. Bu ise d doğrusu üzerinden farklı $m^2 + m + 1$ adet noktanın atılması demektir. O halde d_0 doğrusu, d üzerinden $m^2 + m + 1$ adet noktanın atılması ile elde edilmiştir. Diğer taraftan d üzerinde π de, n + 1 adet nokta var olup, bunların $m^2 + m + 1$ tanesi atıldığından d_0 üzerinde tam olarak

$$n + 1 – (m^2 + m + 1) = n – m^2 – m$$

adet nokta vardır. Yani d_0 doğrusu $n – m^2 – m$ adet nokta bulundurur. Eğer d bir teğet doğru ise, bu durumda, d ile atılan yapının bir tek N ortak noktası var demektir. N noktasından π' nün m + 1 adet doğrusu geçer. Bu m + 1 adet doğrunun hepsi de d yi bir tek N noktasında keserler. Bu nedenle d_0 doğrusu, d doğrusu üzerinden $m^2 + 1$ adet nokta atılarak elde edilmiş demektir. Böylece d_0 doğrusu üzerinde,

$$n + 1 – (m^2 + 1) = n – m^2$$

adet noktanın varlığı bulunmuş olur.

3.3.2. π_0 Yapısının Hiperbolik Düzlemlerle İlişkisi

Bu kısımda , π_0 yapısının hangi şartlar altında bir hiperbolik düzlem belirttiği verilecektir. Bunun için $\pi_0 = (\mathcal{N}_0, \mathcal{D}_0, o)$ yapısının G1– G5 aksiyomlarını sağlaması için gerekli şartların neler olduğu tespit edilecektir (Çelik 1989).

Önerme 3.3.1.1. in 1. şıkkından dolayı G1 aşikârdır. π_0 ın herhangi bir doğrusu üzerindeki en az nokta sayısı Önerme 3.3.1.1. in 4. şıkkından dolayı, $n – m^2 – m$ dir. Bu durumda G2 aksiyomunun sağlanması için (yani π_0 herhangi bir doğrusu üzerinde en az iki nokta bulunması için),

$$n – m^2 – m \geq 2$$

olması gerekmektedir.

Bir doğruya dışındaki bir noktadan o doğrunun genişletilmişi olan doğru üzerinden atılan nokta sayısı kadar paralel çizilebilir. O halde G3 yani , "*Bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebilir.*" aksiyomunu incelemek için π_0 ın bir doğrusu üzerinden en az ne kadar nokta atıldığı bulunmalıdır. π_0 ın bir doğrusu üzerinden en az $m^2 +1$ adet nokta atılmış olduğundan bir doğruya dışındaki bir noktadan en az $m^2 +1$ adet paralel doğru çizilebilir. Burada $m \geq 2$ olduğundan,

$$m^2 + 1 \geq 2^2 + 1 = 5$$

olur. Bunun anlamı ise, bir doğruya dışındaki bir noktadan en az beş paralel doğru çizilebileceğidir. Şimdi, π_0 yapısı için G4 aksiyomunu incelenecektir. Yani π_0 da herhangi üçü doğrudaş olmayan dört noktanın var olup olmadığını araştırılacaktır.

$$d_0 \in \mathcal{D}_0,\ N \not o\, d_0,\ N \in \mathcal{N}_0$$

olsun.

O zaman G3 gereğince d_0 doğrusuna N noktasından geçen en az iki (hatta beş) paralel doğru çizilebilir. Yani,

$$\exists\ d_1, d_2 \in \mathcal{D}_0 \ni N\ o\ d_1,\ d_1 \cap d_0 = \emptyset = d_2 \cap d_0$$

olacak şekilde d_0, d_1, d_2 doğruları ve N noktası mevcuttur. Diğer taraftan G2 den dolayı,

$$R\ o\ d_2,\ Q\ o\ d_1,\ R \neq N \neq Q$$

olacak şekilde R, Q $\in \mathcal{N}_0$ vardır. Bu durumda yine G2 den dolayı,

$$A\ o\ d_0,\ B\ o\ d_0,\ A \neq B$$

olacak şekilde A,B $\in \mathcal{N}_0$ noktaları vardır. A, B, Q, R noktalarının herhangi üçünün doğrudaş olamayacağı aşikârdır. Dolayısıyla π_0 için G4 aksiyomu sağlanır.

Son olarak π_0 yapısı için G5 aksiyomunu incelenecektir. $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}_0$ doğrudaş olmayan farklı A,B,C noktalarını kapsasın. Bu takdirde, AB, AC ve BC doğrularını göz önüne alınsın. π_0 ın bir doğrusu üzerindeki en az nokta sayısı Önerme 3.3.1.1. in 4. şıkkından dolayı $n - m^2 - m$ dir. Bu nedenle BC doğrusu üzerinde en az $n - m^2 - m$ adet nokta vardır. A noktası ile BC doğrusu üzerindeki $n - m^2 - m$ adet noktayı birleştiren doğruları $\mathcal{S}$ ye ait $n - m^2 - m$ adet doğru verir. Bu doğruların her biri üzerinde A noktası hariç $n - m^2 - m - 1$ adet nokta vardır. O halde $\mathcal{S}$ de en az,

$$(n - m^2 - m)\,(n - m^2 - m - 1) + 1$$

adet nokta mevcuttur. X $\in \mathcal{N}_0$ olsun. X noktasını $\mathcal{S}$ nin noktalarına birleştiren doğrular tespit edilecek olursa, bu durumda eğer,

$$(n - m^2 - m)\,(n - m^2 - m - 1) + 1 \geq n + 2$$

ise yani X ile *S* nin noktalarını birleştiren doğru sayısı n + 1 den büyük ise, X noktasını *S* nin noktalarına birleştiren en az iki doğru çakışıktır demektir. Bu durumda X noktasını *S* nin noktalarına birleştiren en az bir doğru üzerinde *S* nin en az iki farklı noktası vardır. Diğer taraftan kabul gereği *S* nin farklı iki noktasını birleştiren bir doğru üzerindeki tüm noktalar da *S* nin elemanı olacağından $X \in S$ olur. Bu durumda G5 aksiyomunun sağlanması için $(n - m^2 - m)\,(n - m^2 - m - 1) + 1 \geq n + 2$ eşitsizliğinin sağlanması gerektiği sonucuna varılır.

Şimdi tekrar $(n - m^2 - m)\,(n - m^2 - m - 1) + 1 \geq n + 2$ eşitsizliğine dönülecek olursa:

$$(n - m^2 - m)\,(n - m^2 - m - 1) + 1 \geq n + 2$$

$$\Leftrightarrow n^2 - nm^2 - nm - n - nm^2 + m^4 + m^3 + m^2 - nm + m^3 + m^2 + m + 1 \geq n + 2$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n(m^2 + m + m^2 + 1 + m) + m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m + 1 \geq n + 2$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n(2m^2 + 2m + 1) + m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m - n - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n(m^2 + m + 1) + m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m - 1 \geq 0$$

olur. Şimdi,

$$n^2 - 2n(m^2 + m + 1) + m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m - 1 = 0$$

ikinci derece polinomunu n ye göre çözülürse:

$$n_{1,2} = \frac{2\left(m^2 + m + 1\right) \mp \sqrt{4(m^2 + m + 1)^2 - 4(m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m - 1}}{2}$$

$$= (m^2 + m + 1) \mp \sqrt{(m^2 + m + 1)^2 - (m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m - 1}$$

$$= m^2 + m + 1 \mp \sqrt{(m^2 + m + 1)^2 - m^4 - 2m^3 - 2m^2 - m + 1}$$

$$= m^2 + m + 1 \mp \sqrt{m^4 + m^2 + 1 + 2m^3 + 2m^2 + 2m - m^4 - 2m^3 - 2m^2 - m + 1}$$

$$= m^2 + m + 1 \mp \sqrt{m^2 + m + 2}$$

O halde,

$$n^2 - 2n(m^2 + m + 1) + m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m - 1 = 0$$

denkleminin kökleri,

$$n_{1,2} = m^2 + m + 1 \mp \sqrt{m^2 + m + 2}$$

dir. İşaret tablosu düzenlendiğinde $(n - m^2 - m)(n - m^2 - m - 1) + 1 \geq n + 2$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şartın $n \leq n_1$ veya $n \geq n_2$ ifadesinin sağlanması olduğu bulunur.

Sonuç olarak bulunan köklerden dolayı $n \leq n_1$ veya $n \geq n_2$ eşitsizliğinin sağlanması için,

$$n \leq m^2 + m + 1 - \sqrt{m^2 + m + 2}$$

veya

$$n \geq m^2 + m + 1 + \sqrt{m^2 + m + 2}$$

olması gerekmektedir. Oysa Önerme 3.3.1.1. in 4. şıkkından dolayı,

$$n \geq m^2 + m$$

olur ki bu $n \leq m^2 + m + 1 - \sqrt{m^2 + m + 2}$ olması ile çelişir. Çünkü

$$\sqrt{m^2 + m + 2} \geq 2$$

olduğundan,

$$n \leq m^2 + m + 1 - \sqrt{m^2 + m + 2}$$

ifadesinde $\sqrt{m^2 + m + 2}$ yerine en küçük değer olarak 2 bile konulsa $n \leq m^2 + m - 1$ sonucu bulunur ki bu $n \leq m^2 + m$ demektir. O halde G5 aksiyomunun geçerli olması için,

$$n \geq m^2 + m + 1 + \sqrt{m^2 + m + 2}$$

olmalıdır.

O halde şimdi aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 3.3.2.1. $\pi = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem ve $\pi' = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')$ $o' = o \cap \mathcal{N}' \times \mathcal{D}'$ olmak üzere π projektif düzleminin mertebesi m olan ($n \geq m^2 + m$) bir projektif alt düzlemi olsun. π den π' nün tüm doğruları ile bu doğrular üzerindeki tüm noktaların atılması ile elde edilen yapıya π_0 olsun. Bu durumda eğer,

$$n \geq m^2 + m + 1 + \sqrt{m^2 + m + 2}$$

ise π_0 bir hiperbolik düzlemdir.

Aslında yukarıdaki önerme sözler yerine sembollerle şöyle de ifade edilebilir:

$\pi = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, o)$ mertebesi n olan sonlu bir projektif düzlem ve $\pi' = (\mathcal{N}', \mathcal{D}', o')$,

$o' = o \cap \mathcal{N}' \times \mathcal{D}'$ olmak üzere π projektif düzleminin mertebesi m olan

($n \geq m^2 + m$) bir projektif alt düzlemi olsun.

$$o' = o \cap (\mathcal{N}' \times \mathcal{D}')$$

$$Q = \{N \in \mathcal{N} : N\ o\ d\ ,\ d \in \mathcal{D}'\}$$

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \setminus Q$$

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$$

olmak üzere eğer,

$$n \geq m^2 + m + 1 + \sqrt{m^2 + m + 2}$$

ise $\pi_0 = (\mathcal{N}_0, \mathcal{D}_0, o_0)$, ($o_0 = o \cap (\mathcal{N}_0 \times \mathcal{D}_0)$) geometrik yapısı bir hiperbolik düzlemdir (Çelik 1989).

3.3.3. π_0 Hiperbolik Düzleminin Bazı Özellikleri

Önerme 3.3.3.1. π_0 Önerme 3.3.2.1. deki gibi elde edilen bir hiperbolik düzlem olsun. Bu takdirde,

1. π' nün herhangi bir noktasından π_0 ın n – m adet doğrusu geçer.
2. π_0 ın teğet doğrularının toplam sayısı $(m^2 + m + 1)(n - m)$ dir.
3. π_0 ın dış doğrularının toplam sayısı $n^2 + n + 1 - (m^2 + m + 1)(n + 1 - m)$ dir.
4. π_0 regüler değildir.
5. π_0 ın bir noktasından $m^2 + m + 1$ adet teğet doğru geçer.
6. π_0 ın bir noktasından $n - m^2 - m$ adet dış doğru geçer (Çelik 1989).

İspat:

1. $N \in \mathcal{N}'$, π' nün herhangi bir noktası olsun. N den π de $n + 1$ ve π' de $m + 1$ adet doğru geçer. Bu nedenle π_0 da P den,

$$n + 1 - (m + 1) = n - m$$

adet doğru geçer. Bu ise π' nün herhangi bir noktasından n – m adet teğet doğru geçtiğini gösterir.

2. π_0 ın teğet doğrularının kümesini C_t ile gösterelim. O zaman,

$$C_t = \{ d: d \notin \mathcal{D}',\ N\ o\ d, N \in \mathcal{N}' \}$$

olup,

$$|C_t| = |\{ d : d \notin \mathcal{D}',\ N\ o\ d, N \in \mathcal{N}' \}|$$

dir. Diğer taraftan π' nün $m^2 + m + 1$ adet noktası olup, π' nün her noktasından π_0 ın n – m adet doğrusu geçer. Bu doğrular teğet doğrular olup,

$$|C_t| = (m^2 + m + 1)(n - m)$$

elde edilir.

3 . π_0 ın dış doğrularının kümesini C_d ile gösterelim. O zaman,

$$C_d = \{d \in \mathcal{D} :\ d \notin \mathcal{D}',\ N \not o\ d, \forall\, N \in \mathcal{N}' \}$$

dir. Bu durumda,

$$|\,C_d| = |\,\mathcal{D}| - (\,|\,C_t\,| + |\mathcal{D}'|\,)$$

$$= n^2 + n + 1 - [(m^2 + m + 1)(n - m) + (m^2 + m + 1)]$$

$$= n^2 + n + 1 - (m^2 + m + 1)(n + 1 - m)$$

olur.

4. Teğet doğru ve dış doğru üzerinde aynı sayıda nokta var olmadığından aşikârdır.

5. $N \in \mathcal{N}_0$ olsun. O zaman N ile π' nün herhangi bir noktasını birleştiren bir doğru π' ye ait olmayacağından N den geçen bu tür doğruların toplam sayısı π' nün toplam nokta sayısı olan $m^2 + m + 1$ e eşittir.

6. $N \in \mathcal{N}_0$ olsun. N den, π de, $n + 1$ doğru geçer. Ayrıca, 5. ten dolayı N den $m^2 + m + 1$ adet teğet doğru geçer. O halde, N den

$$n + 1 - (m^2 + m + 1) = n - m^2 - m$$

adet dış doğru geçer.

Önerme 3.3.3.2. π_0, Önerme 3.3.2.1. deki gibi elde edilen bir hiperbolik düzlem olsun.
1. π_0 ın C_t sınıfından bir doğrusu en fazla $n - 4$ adet nokta kapsar.
2. π_0 ın C_d sınıfından bir doğrusu en fazla $n - 6$ adet nokta kapsar (Çelik 1989).

İspat:
1. C_t sınıfından bir doğru üzerinde $n - m^2$ adet nokta vardır. Burada $m \geq 2$ olduğu göz önüne alınırsa, C_t sınıfından bir doğru üzerinde en fazla $n - 2^2$ adet nokta olacağı elde edilir.
2. C_d sınıfından bir doğru üzerinde $n - m^2 - m$ adet nokta vardır. Bu durumda $m \geq 2$ olduğu göz önüne alınırsa, C_d sınıfından bir doğru en fazla $n - 2^2 - 2$ adet nokta kapsar.

3.4. Sonlu Bir Hiperbolik Düzlem Örneği

Bu kısımda 13 noktası ve 26 doğrusu bulunan sonlu bir hiperbolik düzlem örneği tanıtılacaktır. Noktalar kümesi, doğrular kümesi ve üzerinde olma bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\mathcal{N}=\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$

$$\mathcal{D}=\left\{\begin{matrix} ABC, ADJ, AHI, AEK, AFG, ALM, BDE, BGH, BKL, BFM, BIJ, CDM, CEJ, CFI, \\ CHK, CGL, DFH, DGK, DIL, EFL, EIG, EHM, FJK, GJM, HJL, IKM \end{matrix}\right\}$$

o : ‘‘Eğer bir nokta bir doğrunun üzerinde bulunuyor ise o nokta o doğruyu oluşturan elemanlardan biridir.’’

Bu durumda ($\mathcal{N}$,$\mathcal{D}$, $\boldsymbol{o}$) geometrik yapısı on üç nokta ve yirmi altı doğrudan oluşan sonlu bir yapıdır.

(G1) Farklı iki noktadan bir tek doğru geçtiğini göstermek için $\binom{13}{2}=78$ farklı nokta ikilisi tek tek incelenmelidir. Örneğin {A,B} ikilisi sadece ABC doğrusunda {E,M }ikilisi EHM doğrusunda yer almaktadır. Tüm nokta ikilileri için kontrol yapıldığında G1 in sağlandığı görülür.

(G2) Her doğru tam üç noktadan oluştuğundan G2 nin sağlandığı aşikârdır.

(G3) İncelediğimiz yapıda bir doğruya dışındaki bir noktadan üç paralel doğru çizilebilir. Dolayısıyla bir doğruya dışındaki bir noktadan en az iki paralel çizilebilir şartını sağlamaktadır. Bunun için her bir doğru ve dışındaki nokta için şartın sağlandığı tek tek kontrol edilmelidir. Her bir doğru için dışında 10 tane nokta vardır. 26 tane doğru var olduğundan inceleme 26.10=260 farklı durumda yapılır. Burada örnek olarak sadece ABC doğrusu ve dışındaki D noktası için inceleme yapılacaktır.
ABC doğrusunun dışındaki D noktasından geçen DFH, DGK ve DIL doğruları ABC doğrusuna paralel olan üç doğrudur.

(G4) ABC ve AEK doğrularının arakesit noktası olan A noktası dışındaki noktaların kümesi { B, C, E, K } herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta belirtir. Başka doğrular yardımıyla başka herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta bulmak mümkündür.

(G5) $\mathcal{N}$ nin altkümesi olan S, doğrudaş olmayan üç nokta ve farklı iki noktasından geçen doğrunun üzerindeki tüm noktaları kapsasın. Doğrudaş olmayan üç nokta olarak seçilebilecek $\binom{13}{3}-26=286-26=260$ farklı üçlü bulunmaktadır. Burada 260 farklı üçlüden sadece biri için G5 in sağlandığı gösterilecek olup, diğer üçlüler için G5 in sağlandığı benzer biçimde gösterilir. Aynı doğru üzerinde olmayan A, B, D noktalarını için A, B o ABC olup S, A ve B nokta çiftinden geçen doğrunun tüm noktalarını kapsayacağından C ∈ S olur. Benzer şekilde A, D o ADJ olup S, A ve D nokta çiftinden geçen doğrunun tüm noktalarını kapsayacağından J ∈ S olur. Bu şekilde devam edilerek $\mathcal{N}$ kümesinin tüm elemanları elde edilir ve $\mathcal{N}$ = S olduğundan G5 aksiyomu sağlanır.

Bu durumda $(\mathcal{N},\mathcal{D},o)$ sonlu geometrik yapısı hiperbolik düzlem aksiyomlarını sağladığından sonlu bir hiperbolik düzlem örneğidir (Kaya 2005).

4. BAZI HİPERBOLİK KLINGENBERG DÜZLEM SINIFLARI

Projektif Klingenberg düzlemlerden bir takım nokta ve doğruların atılmasıyla bazı durumlarda hiperbolik Klingenberg düzlemler elde edilebilmektedir. Bu bölümde sonlu bir Projektif Klingenberg düzleminden onun bir özel altdüzlemi atıldığında geriye kalan yapının hangi şartlar altında hiperbolik Klingenberg düzlem olacağı araştırılacaktır.

4.1. Projektif Klingenberg Düzlemlerden Hiperbolik Klingenberg Düzlem Elde Edilişi

Bu bölümde Çelik B. (2008) nin yapmış olduğu bir çalışma özet olarak tanıtılacaktır. Bu çalışmada eğer; sonlu PK-düzleminin parametreleri t, r ve altdüzleminin parametreleri t, m iken $r \geq m^2 + m + 1 + \sqrt{m^2 + m + 2}$ eşitsizliği sağlanırsa altdüzlemin doğrularının üzerindeki noktalarla birlikte atılması sonucu kalan yapının hiperbolik Klingenberg düzlem olduğu gösterilmiştir.

Düzlem geometrisinde üzerinde yoğun olarak çalışmaların yapıldığı düzlemler arasında üç düzlem, daha ön planda bulunmaktadır. Bunlar; afin düzlemler, projektif düzlemler ve hiperbolik düzlemlerdir. Afin düzlemlerde bir doğruya dışındaki bir noktadan geçen bir tek paralel doğru çizilebilir. (Bu Öklid'in beşinci postulatının Playfair versiyonudur.) Projektif düzlemlerde bütün doğrular kesişir. Yani paralel doğrulardan bahsedilemez. Hiperbolik düzlemlerde ise bir doğruya dışındaki bir noktadan geçen tam olarak k tane ($k \geq 2$) paralel doğru çizilebilir. Literatürde bu düzlemler üzerine birçok çalışma yapılmıştır ve hala yapılmaktadır.

Bu çalışmada (N) ile N den geçen tüm doğruların kümesi, [N] ile N den geçen tüm doğruların sayısı, [N,M] ile N ve M yi birleştiren tüm doğruların sayısı, [c,d] ile c ve d üzerinde ortak olarak bulunan tüm noktaların sayısı, $< N >$ ile N nin komşuluğunda olan tüm noktaların kümesi ve $< d >$ ile d nin komşuluğunda olan tüm doğruların kümesi gösterilmiştir.

Bir N noktası ve bir d doğrusu için $M o d$ ve $M \sim N$ olacak biçimde M noktası varsa N noktasına d doğrusunun **yakınındadır** denir ve bu $N \sim d$ biçiminde gösterilir (Çelik 2008).

Yardımcı Teorem 4.1.1. **K** =($\mathcal{N}$,$\mathcal{D}$, o, ~) bir PK-düzlemi olsun

(i) P~ d ⇔ ∃ h ∈ $\mathcal{D}$ ∋ h~d ve Poh

(ii) h~d ⇔ ∃ $H_i o$h , ∃ $D_i o$d ∋ $H_i \sim D_i$, $H_1 \nsim H_2$, $D_1 \nsim D_2$

h, d ∈ $\mathcal{D}$, H_i, D_i ∈ $\mathcal{N}$, i=1,2

(iii) $N_1 \in \mathcal{N}$. $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, $N_1 o d_1$, $d_1 \sim d_2$ ⇒ ∃ N_2 ∋ $N_2 o d_2$, $N_1 \sim N_2$

Aşağıda verilecek olan teorem sonlu ve düzenli PK düzlemler için önemli bazı sayısal özellikleri içinde bulundurmaktadır. Bu teorem ve teoremin PK-düzlemleri için de geçerli olduğunu Drake D.A. ve Lenz H. tarafından gösterildiğine dair bilgiler (Jungnickel 1979) de yer almaktadır.

Teorem 4.1.2. **K** =($\mathcal{N}$,$\mathcal{D}$, o, ~) bir PK-düzlemi olsun. Bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan PK-düzlemin parametreleri olarak adlandırılan, t ve r doğal sayıları vardır (Jungnickel 1979).

(i) $|\langle N \rangle| = |\langle d \rangle| = t^2$, ∀ N ∈ $\mathcal{N}$, d ∈ $\mathcal{D}$

(ii) $|(N) \cap \langle d \rangle| = |(d) \cap \langle N \rangle| = t$, ∀ N o d

(iii) r, **K*** projektif düzleminin mertebesi olsun. Eğer t ≠ 1 ise, r ≤ t olduğunu elde ederiz. (Eğer t =1 ise **K** basit bir projektif düzlem olarak adlandırılır.)

(iv) [N] =[d] = t.(r + 1) , ∀ N ∈ $\mathcal{N}$, ∀ d ∈ $\mathcal{D}$

(v) | N | = | d | = $t^2.(r^2+r+1)$

4.2. Sonlu Hiperbolik Klingenberg Düzlemler

K, parametreleri t ve r olan sonlu bir PK-düzlem olsun. Bu durumda **K** nın her doğrusu r + 1 farklı nokta komşuluğundan oluşur. $\mathbf{K}_m^r$, m ≤ r +2 özelliğini sağlayan , d_i, (i =1,2,3, … ,m) ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan ve herhangi üçü d_i doğrularından birine yakın bir noktada kesişmeyen m tane doğrunun ve bu doğruların yakınındaki tüm noktaların atılmasıyla elde edilen geometrik yapıyı göstersin. İkişer ikişer aynı komşulukta olmayan d_i doğrularının herhangi üçü noktadaş olamayacağından bu doğruların herhangi m-1 tanesi kalan atılan doğruyu **K** da ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan noktalarda keser ve bu nedenle m-1 ≤ r +1 dir. Bu ise m ≤ r +2 kısıtlamasını verir. Bu nedenle $\mathbf{K}_m^r$ yapılarında m ≤ r +2 olduğu kabul edilecektir. Aşağıdaki yardımcı teorem ile $\mathbf{K}_m^r$ nin temel sayısal özellikleri verilmiştir. Bu yardımcı teoremin ispatı basit hesaplamalarla gösterilebilir (Çelik 2008).

Yardımcı Teorem 4.2.1. $\mathbf{K}_m^r$ yapısında aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(i) $\mathbf{K}_m^r$ deki komşu olmayan iki nokta tam olarak bir doğru üzerindedir.

(ii) $\mathbf{K}_m^r$ deki herbir noktadan tam olarak t.(r + 1) tane doğru geçer ve bunlardan tam olarak r +1 tanesi ikişer ikişer aynı komşulukta değildir.

(iii) $\mathbf{K}_m^r$ de tam olarak $\mathrm{t}^2.(\mathrm{r}^2+\mathrm{r}+1-\mathrm{m})$ tane doğru ve $\mathrm{r}^2+\mathrm{r}+1-\mathrm{m}$ tane ikişer ikişer komşu olmayan doğru vardır.

(iv) $\mathbf{K}_m^r$ de tam olarak $\mathrm{t}^2.\mathrm{r}^2+\frac{\mathrm{t}^2}{2}(\mathrm{m}-1).(\mathrm{m}-2\mathrm{r}-2)$ tane nokta ve $\mathrm{r}^2+\frac{1}{2}(\mathrm{m}-1).(\mathrm{m}-2\mathrm{r}-2)$ tane ikişer ikişer komşu olmayan nokta vardır.

Eğer **K** daki bir A noktası atılan doğru kümesindeki komşu olmayan iki doğrunun arakesiti ise A noktası **köşe noktası** olarak adlandırılır. Tanım 2.14 ün HK5 şartında geçen **K** nın Ψ altındaki kanonik görüntüsü olan hiperbolik düzlem $\mathbf{K}^*$ ile gösterilsin. $\mathbf{K}^*$ daki bir nokta eğer $\mathbf{K}^*$ daki atılan doğruların kümesindeki komşu olmayan herhangi iki doğrunun arakesitinin sınıfında ise bu nokta **has köşe noktası** olarak adlandırılır (Çelik 2008).

Yardımcı Teorem 4.2.2. $\mathbf{K}_m^r$ deki herbir doğru sınıfı (ya da doğru) **K** da m nin çift veya tek olmasına göre sırasıyla en çok $\frac{m}{2}$ ya da $\frac{m-1}{2}$ tane ikişer ikişer komşu olmayan köşe noktası bulunur (Çelik 2008).

İspat: d, $\mathbf{K}_m^{r*}$ bir doğru olsun ve $\mathbf{K}^*$ s adet has köşe noktası bulundursun. Has köşe noktası tanımı gereğince her has köşe noktası üzerinden **K** nın aynı komşulukta olmayan tam olarak 2 tane atılan doğrusu geçer. Aynı komşulukta olmayan atılan doğrulardan herhangi üçü noktadaş olmadığından bu özellikte olan tam olarak 2s doğrunun olduğu elde edilir. Atılan toplam doğru sayısı m olduğundan 2s ≤ m olacağı elde edilir. Üstelik eğer m tek sayı ise $2s \leq m$ ifadesi $2s \leq m-1$ olmasını gerektirir. Bu durumda ispat Yardımcı Teorem 4.2.1 den dolayı aşikârdır.

Sonuç 4.2.3. $\mathbf{K}_m^r$ deki herbir doğru sınıfı m nin çift veya tek olmasına göre sırasıyla **K** da en çok $t^2.\frac{m}{2}$ ya da $t^2.\frac{m-1}{2}$ tane köşe noktası bulundurur (Çelik 2008).

Sonuç 4.2.4. $\mathbf{K}_m^r$ nin herbir doğru sınıfı, **K** da, s tane komşu olmayan köşe noktasından geçer. $\mathbf{K}_m^r$ deki herbir doğru sınıfı $\mathbf{K}_m^r$ de tam olarak $t^2.(r+1+s-m)$ tane noktaya sahiptir. $\mathbf{K}_m^r$ deki herbir doğru tam olarak ikişer ikişer komşu olmayan $r+1+s-m$ tane nokta bulundurur (Çelik 2008).

Yardımcı Teorem 4.2.5. $\mathbf{K}_m^r$ nin **K** da s tane köşe noktası bulunduran bir doğrusu üzerinden atılan ikişer ikişer komşu olmayan noktaların sayısı $m-s$ dir. Eğer m çift ise $m-s \geq \frac{m}{2}$, m tek ise $m-s \geq \frac{m+1}{2}$ dir (Çelik 2008).

Sonuç 4.2.6. n ile $\mathbf{K}_m^r$ deki bir doğru sınıfının üzerinde bulunan ikişer ikişer aynı komşulukta bulunmayan köşe noktalarının minimum sayısını ve k ile $\mathbf{K}_m^r$ deki bir doğru üzerindeki ikişer ikişer komşu olmayan noktaların sayısı gösterilsin. Bu durumda,

m çift ise; $r+1+n-m \leq k \leq r-\frac{1}{2}(m-2)$

m tek ise; $r+1+n-m \leq k \leq r-\frac{1}{2}(m-1)$

olur (Çelik 2008).

İspat: d , $\mathbf{K}_m^r$ de bir doğru olsun. d, **K** nın en az n tane köşe noktasına sahip bir doğrusu olarak düşünüldüğünde en azından $m-n$ tane ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan noktada kesişir. Fakat bu arakesit noktalarının hepsi atıldığından d doğrusu $\mathbf{K}_m^r$ de en az

$$r+1-(m-n)$$

tane ikişer ikişer komşu olmayan nokta bulundurur. Buradan, bir doğru üzerinden ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan en fazla $m-n$ nokta atıldığında

$$r+1-m+n \leq k$$

olduğu bulunur. Diğer taraftan, eğer d doğrusu **K** nın ikişer ikişer komşu olmayan s köşe noktasını bulunduran bir doğru olarak düşünülürse, d üzerinden atılan ikişer ikişer komşu olmayan noktaların sayısı $m - s$ dir. m nin çift olduğu durumda Yardımcı Teorem 4.2.5. den dolayı $\mathrm{m - s} \geq \frac{\mathrm{m}}{2}$ olur. Böylece $\mathbf{K}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{r}}$ de d üzerinde ikişer ikişer komşu olmayan noktaların sayısının $r + 1 - \frac{m}{2}$ den az olduğu bulunur. Yani

$$\mathrm{k} \leq \mathrm{r} + 1 - \frac{\mathrm{m}}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{k} \leq \mathrm{r} - \frac{\mathrm{m}-2}{2}$$

olur.

Benzer düşünceyle m nin tek sayı olduğu durumda Yardımcı Teorem 4.2.5. den dolayı $\mathrm{m - s} \geq \frac{\mathrm{m}+1}{2}$ olur ve

$$\mathrm{k} \leq \mathrm{r} + 1 - \frac{\mathrm{m}+1}{2}$$

$$\mathrm{k} \leq \mathrm{r} - \frac{\mathrm{m}-1}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Önerme 4.2.7. $\mathbf{K}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{r}}$ deki bir doğru üzerindeki ikişer ikişer komşu olmayan köşe noktalarının minimum sayısı n olsun. Eğer;

$$3 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{r} + \mathrm{n} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4\mathrm{r} + 5})$$

ise $\mathbf{K}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{r}}$ bir HK-düzlemidir (Çelik 2008).

İspat:

(HK1) K için PK1 den dolayı açıktır.

(HK2) Sonuç 4.2.6. dan $\mathbf{K}_{\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{r}}$ nin bir doğrusu en az $\mathrm{r} + 1 + \mathrm{n} - \mathrm{m}$ adet ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan nokta bulundurur. Bu nedenle; $\mathrm{r} + 1 + \mathrm{n} - \mathrm{m} \geq 2$ ise yani $\mathrm{r} \geq \mathrm{m} - \mathrm{n} + 1$ ise (HK2) sağlanır. $\mathrm{r} \geq \mathrm{m} - \mathrm{n} + 1$ eşitsizliğinin sağlandığı ise r bir projektif düzlemin mertebesi olarak $\mathrm{r} \geq 2$ olacağı göz önüne alınırsa,

$$3 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{r} + \mathrm{n} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4\mathrm{r} + 5})$$

$$\Rightarrow \quad r \geq m - n - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4r+5}\,)$$

$$\Rightarrow \quad r \geq m - n \; - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13}\,) > m - n + 1$$

$$\Rightarrow \quad r \geq m - n + 1$$

işlemleri sonucunda elde edilir.

(HK3) $\mathbf{K}_{m}^{r}$ de komşu olmayan ve kesişmeyen iki doğrunun varlığından ve bu doğruların her biri en az iki tane komşu olmayan nokta bulundurduğundan HK3 şartının sağlandığı aşikârdır.

(HK4) Bu aksiyomun sağlandığını göstermek için $\mathbf{K}_{m}^{r}$ de bir d doğrusu ve d yakınında olmayan bir N noktası alınsın ($N \nsim d$).

Yardımcı Teorem 4.2.5. dolayısıyla d üzerinden atılan ikişer ikişer aynı komşulukta olmayan $m - s$ nokta vardır. $N \nsim d$ olduğundan bu $m - s$ nokta ile N yi birleştiren doğrular $\mathbf{K}_{m}^{r}$ de d doğrusu ile kesişmezler. Bu nedenle yine aynı yardımcı teoremden m nin çift veya tek olmasına göre sırasıyla $m - s \geq \frac{m}{2}$ ya da $m - s \geq \frac{m+1}{2}$ olduğu bulunur. Bu durumda eğer $m \geq 3$ olursa (HK4) şartının sağlanacağı elde edilir ki m atılan doğru sayısı olduğundan $m \geq 3$ olduğu aşikârdır.

(HK5) Eğer PK4 aksiyomunda yer alan Ψ dönüşümü olarak $\Psi|\mathbf{K}_{m}^{r}$ alınırsa sadece $\mathbf{K}_{m}^{r^*}$ ın bir hiperbolik düzlem olduğunu göstermek HK5 için yeterli olacaktır. Oysa teoremin hipotezi gereği;

$$3 \leq m \; \leq r + n + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4r+5}\,)$$

olduğundan Teorem 3.2.2.5. den dolayı $\mathbf{K}_{m}^{r^*}$ bir hiperbolik düzlemdir.

5. SONUÇ

M.Ö. 300 lü yıllarda dümdüz bir sathı koordinatlayıp düzlem geometrinin temellerini oluşturmak için sarf ettiği gayretlerle oluşturduğu aksiyomlar neticesinde ilk defa Öklid düzlemlerini bulan Öklid'den yıllar sonra Öklidyen olmayan düzlem ve geometrilerin de önemi anlaşılmıştır. Öklidyen olmayan düzlemlerin ve geometrilerin başında projektif düzlemler ve hiperbolik düzlemler gelmektedir. Bu tezde Öklidyen olmayan düzlem örnekleri olan hiperbolik düzlemler ve hiperbolik- Klingenberg düzlemleri üzerinde durulmuş ve literatürde yer alan bazı bilgiler derlenmiştir.

Bolyai ve Lobachevsky isimli matematikçilerin ilk defa Öklid'in beşinci aksiyomuna karşı çıkan ve bir doğruya dışındaki bir noktadan birden çok paralel doğru geçmesine izin veren geometrilerine Poincaré'nin üst yarı düzlemlerle ilgili verdikleri örnekler üçüncü bölümde özet olarak sunulmuştur. Üçüncü bölümde ayrıca Sandler'in projektif düzlemden doğrudaş olmayan üç doğrunun noktalarıyla birlikte atılmasıyla elde edilecek yapının hiperbolik düzlem olduğunu gösterdiği modeli ve bu modelin Kaya-Özcan tarafından genişletilmişi verilmiştir. Projektif düzlemler de Öklidyen olmayan düzlemlere, önemli örnekler arasında yer almaktadır. Projektif düzlemlerin her doğrusunu ve her noktasını bir komşuluk sınıfına genişleten projektif-Klingenberg düzlemleri dördüncü bölümün ilk kısmında tanıtılmış ve Kaya R. ve Özcan E. tarafından geliştirilen Sandler'in modelinin benzeri olarak Çelik B. tarafından yapılan hiperbolik Klingenberg düzlemlerine verilen örnek üzerinde durulmuştur ve bu maksatla parametreleri t ve r olan sonlu bir projektif-Klingenberg düzlemden herhangi üçü aynı komşulukta olmayan m adet doğru bu doğruların yakınında olan tüm noktalarla birlikte atıldığında elde edilen yapının bir hiperbolik-Klingenberg düzlemi olması için gerekli şartların ne olduğu sorusuna cevap verilmiştir. Bu tezde toplu halde sunulan bilgiler kullanılarak PK-düzlemlerden elde edilebilecek hiperbolik-Klingenberg düzlemlerinin aynı komşulukta olan ve olmayan doğruları üzerinden atılan noktaların belirlenmesi ve genellemesi mümkün olacaktır.

KAYNAKLAR

Akbaş, M. 2005. Salih Zeki ve 'Zaman' Başlıklı Konferansı, *Osmanlı Bilimi Araştırmaları*, VII(1): 79-96.
Altun, M. 2016. Liselerde Matematik Öğretimi, Aktüel Alfa Akademi, Bursa, 534 s.
Başkan, T., Bizim, O., Cangül, İ.N. 2006. Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş, Nobel, Ankara, 156 s.
Batten, L.M. 1986. Combinatorics of Finite Geometries, Cambridge University Press, Cambridge, 173 s.
Çelik, B. 1989. Hiperbolik Düzlemlerin Projektif Alt Düzlemlerle İlişkisi Üzerine. *Yüksek Lisans Tezi,* Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir.
Çelik, B. 2008. A Hyperbolic Characterization of Projective Klingenberg Planes, *International Journal of Mathematics Sciences*, 1(2): 10-14.
Çelik, B. 2015. Soyut Matematik, Dora, Bursa, 492 s.
Dembowski, P. 1968. Finite Geometries, Springer-Verlag Inc. Berlin, 371 s.
Drake, D.A. , Lenz, H. 1975. Finite Klingenberg Planes. Abhandlungen aus dem Mathemathischen Seminar, Hamburg Universitat Hamburg, Hamburg.
Graves, L.M. 1962. A Finite Bolyai-Lobachevsky Plane, *The American Mathematical Monthly,* (69): 130-132.
Iversen B. 1992. Hyperbolic Geometry, Cambridge Univ. Press, 111 s.
Jungnickel, D. 1979. Regular Hjelmslev Planes, *Journal of Combinatorial Theory*, Berlin, (26): 20-37.
Kaya, R. 2005. Projektif Geometri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 392 s.
Kaya, R., Özcan, E. 1984. On The Construction of Bolyai- Lobachevsky Planes From Projective Planes, *Rendiconti Semin. Mat.* , Brescia, (7): 427-434.
Ostrom, T.G. 1962. Ovals and Finite Bolyai-Lobachevsky Planes, *The American Mathematical Monthly*, (69): 899-901.
Saltan, M. 2006. Sonlu Hiperbolik Düzlemler Üzerine. *Yüksek Lisans Tezi*, ESOGÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir.
Sandler, R. 1963. Finite Homogeneous Bolyai-Lobachevsky Planes, *The American Mathematical Monthly,* (70): 853-854.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Bilal DOĞAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: MARDİN/Nusaybin, 19/12/1984
Yabancı Dil	: İngilizce
Eğitim Durumu	
Lise	: Bağcılar Lisesi (Y.D.A), 2002-2006
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2007-2012
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2012-
Çalıştığı Kurum/Kurumlar	: Bursa Özel Öz Zafer Dershanesi 2012-2014 Özel İlgi Dershanesi 2014-2015 Özel Yediiklim Açıköğretim Kursu 2014-2015 Arena Eğitim Kurumları 2015-
İletişim (e-posta)	: bilalldogann@gmail.com
Yayınları	: