

## TEMEL DİŞLİ TASARIM PARAMETRELERİNİN TEK DİŞ VE KAVRAMA RİJİTLİĞİNE ETKİSİNİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE İNCELENMESİ

*Oğuz DOĞAN\**  
*Fatih KARPAT\**

Alınma:01.11.2018; düzeltme: 17.12.2018; kabul:20.12.2018

**Öz:** Dişli tasarım parametrelerinin en önemlileri arasında tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği gösterilebilir. Tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği özellikle dişli dinamik yükleri üzerinde etkin rol oynar. Ayrıca, diş rijitliği temas halindeki dişliler arasındaki yük paylaşımını belirleyen en önemli parametredir. Bu çalışmada, tek diş rijitliği ve kavrama rijitliğinin hesaplanabilmesi için geliştirilen kapsamlı bir yöntem ele alınmıştır. Çalışmanın ilk bölümünde, tek diş rijitliğinin hesaplanabilmesi için sonlu elemanlar modeli oluşturulmuştur. Tek diş için elde edilen rijitlik eğrilerinin kullanılmasıyla dişli mekanizmaları için zamanla değişen kavrama rijitliği hesaplanmıştır. Hesaplanan rijitlik değerleri literatürdeki benzer çalışmalarla kıyaslanarak doğrulanmıştır. Çalışmanın ikinci aşamasında, farklı temel dişli tasarım parametrelerinin tek diş rijitliği ve kavrama rijitliğine etkisi incelenmiştir. Beş farklı durum için, diş sayısı, basınç açısı, profil kaydırma faktörü, diş başı yüksekliği ve kesici takım uç yarıçapının, etkileri incelenmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçların tasarımcılar tarafından hızlı bir şekilde değerlendirilebilmesi için MATLAB ortamında kullanıcı arayüzü oluşturulmuştur. Sonuç olarak, diş sayısı, basınç açısı, kesici takım uç yarıçapının, artması rijitlik değerlerinin artmasına, diş başı yüksekliğinin artmasının ise rijitliğin azalmasına yol açtığı görülmüştür. Ayrıca pozitif profil kaydırma işlemi sonucunda kavrama rijitliğinin artıp negatif profil kaydırma ile de azaldığı görülmüştür.

**Anahtar Kelimeler:** Tek diş rijitliği, Kavrama rijitliği, Diş tasarım parametreleri, Kavrama olayı

### Investigation of Basic Design Parameters Effect on the Single Tooth and Mesh Stiffness by Finite Element Method

**Abstract:** Single tooth stiffness and mesh stiffness are the one of the most important parameters of the gear design. They play an active role especially on dynamic loads of gears. Furthermore, gear stiffness is the most important parameter that determines the load sharing in the teeth in contact. In this study, a comprehensive method was developed to calculate single tooth stiffness and mesh stiffness. In the first part, a finite element model was created to calculate the single tooth stiffness. By using the stiffness curves obtained for one tooth, the time-varying mesh stiffness is calculated for the gear mechanisms. The calculated stiffness values were verified by comparing with similar studies in the literature. In the second phase, the effect of different basic gear design parameters on single tooth stiffness and mesh stiffness is investigated. The effects of number of teeth, pressure angle, profile shift factor, tooth addendum height and cutting tool tip radius were investigated. In addition, a user interface created in the MATLAB environment so that designers can quickly evaluate the results obtained. As a result when the number of teeth, the pressure angle, cutting tool tip radius are increase the stiffness values increase too. Increment in the tooth addendum height is led to a decrease in tooth stiffness. Positive profile shifting operation is increased the stiffness and the negative profile shifting operation is decreased the stiffness of the gear.

**Keywords:** Single tooth stiffness, Mesh stiffness, Gear design parameters, Meshing process

\*Uludağ Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Görükle Kampüsü, 16059, Bursa  
İletişim Yazarı: Fatih Karpat (karpat@uludag.edu.tr)

## 1. GİRİŞ

Dişli çarklar, güç aktarma organları içerisinde günlük hayatta en fazla kullanılan makine elemanıdır. Basit bir oyuncaktan, çok karmaşık yapıdaki havacılık ve uzay araçlarına kadar geniş kullanım alanı bulmaktadır. Gelişen teknoloji ile birlikte, dişli çarklardan beklenen performansta da önemli artışlar meydana gelmektedir. Artan güç değerleri, yüksek hızlara çıkılma zorunluluğu dişli çark tasarımının, kusursuz şekilde yapılmasını gerekli kılmıştır.

Dişli çarkların çalışması sırasında, her bir diş üzerine statik ve dinamik yükler etki etmektedir. Düşük dönme hızlarında, aktarılan momentin neticesinde her bir diş üzerine statik yükler etki etmektedir. Dönme hızı arttıkça dişler üzerine dinamik yükler etkili olmaya başlamaktadır (Arıkan, 1987). Dişli çark mekanizma tasarımının en önemli noktalardan bir tanesi de dinamik yüklerin azaltılmasıdır. Dinamik yüklemeler yorulma hasarlarına sebep olan tekrarlı diş dibi gerilmelerine ve diş yüzeylerinde hasarlara yol açan, yan yüzey gerilmelerine neden olurlar. Ayrıca dişli çark mekanizmalarındaki gürültünün de temel sebebi dinamik yüklemelerden meydana gelen dişli titreşimleridir. Dişli çark mekanizmalarının emniyetle çalışabilmesi, yorulma ömrünün uzun olması ve sessiz çalışması için dinamik yüklerin azaltılması gerekmektedir. Bu sayede düşen dinamik yükler sayesinde, gürültü azaltacak, verimlilik artacak ve diş hasarlarının önlenmesine yardımcı olunacaktır (Lin vd., 1998).

Dişler üzerinde dinamik yüklerin oluşmasını etkileyen birçok parametre bulunmaktadır. Tek diş rijitliği, kavrama rijitliği, dişli dönme hızı, dişli profil hataları, montaj hataları, millerin burulma titreşimleri, dişli ve millerin kütle ve ataletleri vb. bir çok parametre bu kapsamda ele alınabilir. Tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği bu kapsamda değerlendirildiğinde, diğer parametrelere kıyasla dinamik yükler üzerinde en fazla etkiye sahip değişkendir. Bu nedenle tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği, dişli çarklar ile ilgili birçok çalışma alanında kullanılan ve doğru hesaplanması gereken bir büyüklüktür.

Tek diş rijitliği ve kavrama rijitliğinin hesaplanabilmesi için literatürde birçok yöntem mevcuttur. Bu yöntemler analitik, nümerik ve deneysel olmak üzere üç ana başlıkta incelenebilir. Cooley vd., (2016) çalışmalarında bu yöntemleri kapsamlı olarak karşılaştırmışlardır. Meagher vd., (2010) yapmış oldukları çalışmada analitik, sonlu elemanlar yöntemi ve çok cisimli kinematik model kullanarak, kavrama rijitliği hesaplama yöntemlerini, kendi aralarında karşılaştırmışlardır. Yazarlar her üç yöntemde de yaklaşık sonuçlar elde etmişlerdir. Analitik yöntemler genellikle klasik elastisite teorisine dayanmaktadır. Lin, (1985) doktora çalışmasında, düz dişli çarkların dinamik analizi için dört serbestlik dereceli bir model geliştirmiştir. Modelin hareket denklemlerinde yer alan kavrama rijitliğinin hesabı için, analitik yöntem kullanmıştır. Yöntemde öncelikle tek diş rijitliği hesaplanmış ardından kavrama rijitliği hesabı yapılmıştır. Wang vd., (2015) helisel dişli çarkların diş profil ve montaj hatalarının, kavrama rijitliğine, iletim hatasına, temas ve diş dibi gerilmelerine olan etkilerini analitik olarak incelemiştir. Çalışmada kavrama rijitliği analitik olarak hesaplanmıştır.

Analitik çalışmalar ile birlikte nümerik çalışmalara da günümüzde oldukça sık rastlanmaktadır. Genel olarak analitik modeller nümerik modeller ile desteklenerek doğruluğu arttırılmaktadır. Aktaş vd. (2004) çalışmasında düşük kavrama oranına sahip dişli çarkların tek diş rijitliğini, analitik yöntem ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak hesaplamış ve her iki yöntem ile de oldukça yakın sonuçlar elde etmiştir. Gu vd., (2015) ideal düz ve helisel dişli çarklar için zamana bağlı değişen, kavrama rijitliğinin hesaplanmasında kullanılmak üzere yaklaşık bir analitik formülasyon önermişlerdir. Önermiş oldukları metottan almış oldukları sonuçlar ile 2D sonlu elemanlar analizi sonucunda elde etmiş oldukları sonuçları kıyaslamışlar ve sonuçların çok iyi uyduğunu göstermişlerdir. Ayrıca önerilen model özel bir yük paylaşım programı ile de doğrulanmıştır. Chen vd., (2013) planet dişli mekanizmalarının dinamik analizini nümerik olarak incelemiştir. Çalışmada planet mekanizmasına ait dişli çarkların kavrama rijitlikleri Timoshenko kiriş teorisini uygulanarak hesaplanmıştır, aynı zamanda sonlu eleman analiz çalışması ile de diş rijitlikleri hesaplanarak dinamik model de kullanılmıştır.

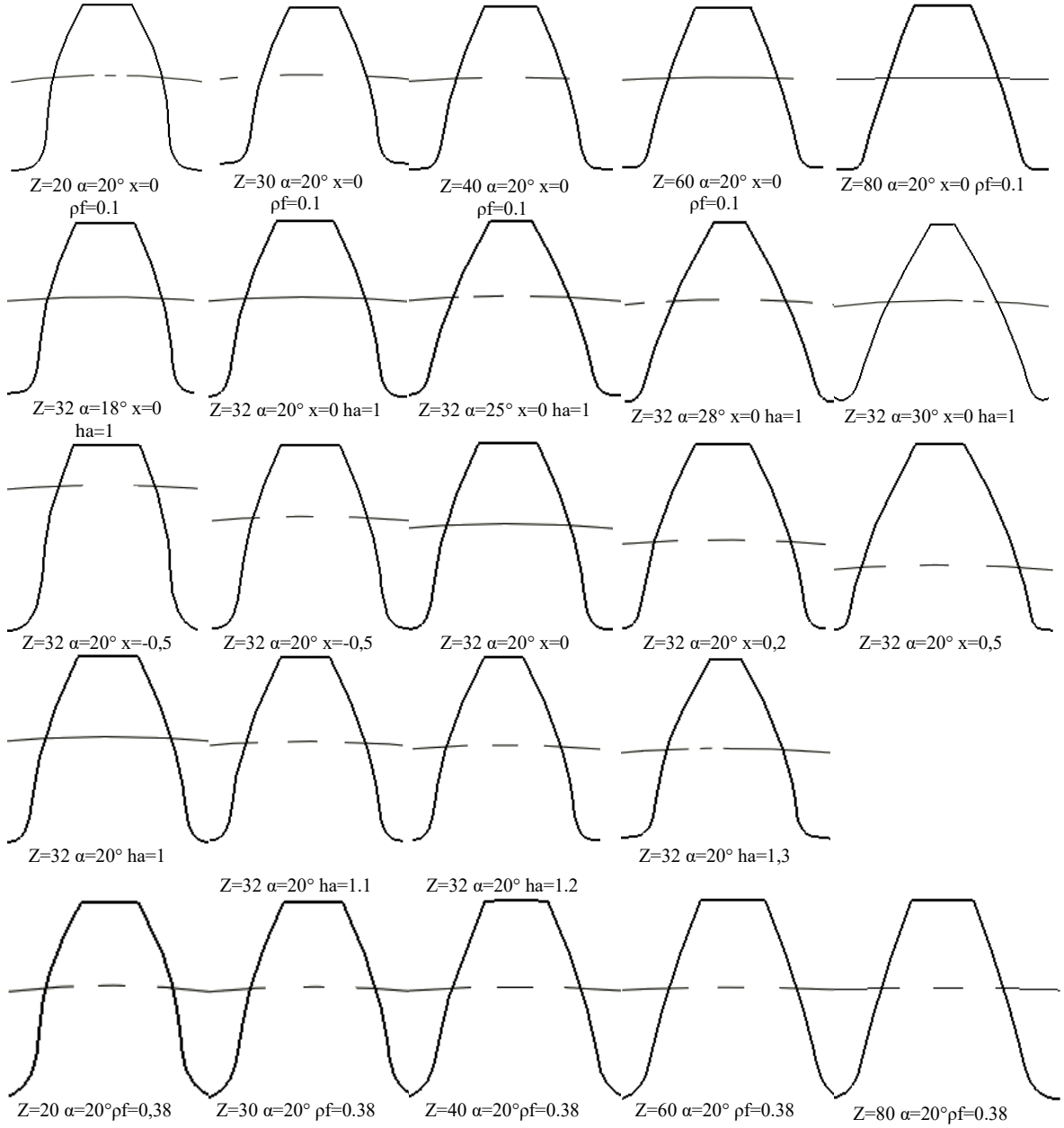
Pedersen vd., (2014) dişlinin rijitlik hesaplamasına dâhil edilen rim kalınlığı boyunca sınır şartlarının ve kavrama uzunluğunun, dişli kavrama oranına etki eden iki temel parametre olduğunu söylemiştir. Tek diş rijitliği hesabı için toplam elastik enerji yaklaşımı kullanılmıştır. Elde edilen rijitlik değerleri sonlu elemanlar analiz sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Nümerik araçların günümüzde kullanımının yaygınlaşması ve kullanıcı dostu ara yüzleri sayesinde kolay öğrenilebilir, uygulanabilir olması ayrıca elde edilen sonuçların analitik hesaplar ile uyumlu olması gibi nedenlerden dolayı birçok araştırmacı tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği hesaplarında sonlu elemanlar yöntemini tercih etmektedir. Karpat vd., (2014-2017) asimetrik evolvent düz dişli çarkların tek diş rijitliğinin, dişli yarıçapına bağlı hesaplanabilmesini sağlayan bir formülasyon geliştirmişlerdir. Formülasyon ANSYS ortamında bir dizi sonlu elemanlar analiz sonucunun, çoklu regresyon analizi ile denklem haline getirilmesinden türetilmiştir. Karpat vd., (2014-2015) farklı rim kalınlığına sahip iç dişli mekanizmaları için, tasarım ve detaylı sayısal analiz çalışmaları gerçekleştirmiştir. Çalışmalarda farklı rim kalınlıklarının iç dişli çark mekanizmasının tek diş rijitliği ve kavrama rijitliğine olan etkileri sayısal olarak araştırılmıştır. Ayrıca gerilme analizlerde yapılarak farklı rim kalınlıklarının gerilme üzerine olan etkisi incelenmiştir. (Kiebusch vd., (2007-2011) düz dişli çarkların kavrama rijitliğinin hesaplanması için 2D ve 3D sonlu elemanlar modeli oluşturmuştur. Modelden elde edilen sonuçlar, dişli kutularının dinamik analizi vb çalışmalarda kullanılmak üzere denklemler halinde verilmektedir. Modelden elde edilen sonuçlar DIN 3990 standardı ile karşılaştırılmış ve hata oranının %10 mertebelerinde olduğu belirlenmiştir.

Tek diş rijitliği ve kavrama rijitliğinin hesaplanmasında kullanılan diğer bir yöntem ise deneysel çalışmalardır. Literatür incelendiğinde tek diş rijitliği ve kavrama rijitliğinin hesaplanması konusunda deneysel çok fazla çalışma mevcut değildir. Munro vd., (2001) diş rijitliği hesabının deneysel yöntemlerle doğrulanmasının çok zor olduğunu vurgulamıştır. Çünkü bir dişi ölçülebilecek kadar deformasyona uğratabilmek için çok yüksek kuvvet değerlerine ihtiyaç vardır. Bu çok yüksek kuvvet değerleri tüm test düzeneğinde ne kadar eleman varsa hepsi üzerinde belli bir deformasyona sebep olacağından yalnızca dışten kaynaklanan deformasyonun hesabını yapmak çok zor olacaktır. Bu nedenle Munro vd., (2001) deneysel yürüttükleri çalışmada, sırt sırta deney düzeneği adı verilen test düzeneği üzerinden düşük devir sayıları için statik iletim hatasını deneysel olarak hesaplamıştır. Deneylemlerden elde edilen iletim hatalarından diş rijitliğine geçiş sağlamışlardır.

Bu çalışmada, temel düz dişli çark tasarım parametrelerinin, tek diş rijitliğine ve kavrama rijitliğine olan etkisi nümerik olarak incelenmiştir. Dişli geometrileri kramayer tipi kesici takımdan hareket ile modellenerek, ANSYS ortamına aktarılmış ve sonlu elemanlar analizi sayesinde tek diş için deformasyon miktarları belirlenmiştir. Bu deformasyon değerleri ilgili nokta üzerine uygulanan kuvvete bölünerek dişli profili üzerindeki noktaların rijitlikleri hesaplanmış ve tek diş için rijitlik eğrisi elde edilmiştir. Elde edilen tek diş rijitlik eğrileri kullanılarak, MATLAB ortamında hazırlanan program sayesinde kavrama rijitlikleri elde edilmiştir. Son olarak durum analizleri ile farklı temel dişli tasarım parametrelerinin tek diş rijitliğine ve kavrama rijitliğine olan etkileri karşılaştırmalı olarak incelenmiştir.





**Şekil 2.**  
Farklı tasarım parametrelerine sahip dişli çark tasarımları

## 2.2. Tek Diş Rijitliği

Dişli çarkın her bir dişi bağımsız olarak ele alındığında, özel bir profile sahip olan ankastre kiriş gibi düşünülebilir. Dişli çarkın çalışması sırasında, dişin üzerine gelen yüklerden dolayı, diş üzerinde yük doğrultusunda belli bir elastik deformasyon meydana gelecektir. Bu deformasyon dişin eğilmesi, kayma ve Hertz temas deformasyonunun toplamı olarak ifade edilmektedir (Lin, 1985). Diş üzerine uygulanan toplam yüke "F" ve diş geometrisi üzerinde oluşan toplam deformasyonu "x" ile gösterecek olursak. Tek diş rijitliği, dişin ilgili yarıçapı üzerine etkiyen toplam kuvvetin, toplam deformasyona oranı olarak hesaplanabilir (Eş.1-4).

$$k_{p1} = \frac{F}{x_{p1}} \quad (1)$$

$$k_{d1} = \frac{F}{x_{d1}} \quad (2)$$

$$k_{p2} = \frac{F}{x_{p2}} \quad (3)$$

$$k_{d2} = \frac{F}{x_{d2}} \quad (4)$$

Bu çalışmada tek bir diş üzerinde oluşan toplam elastik yer değiştirmenin hesaplanabilmesi için ANSYS ortamında sonlu elemanlar modeli oluşturulmuştur. 2D CAD modelleri oluşturulan dişli çark geometrileri ANSYS ortamına aktarılarak, genel sonlu elemanlar analiz prosedürü uygulanmıştır. Ağ yapısının oluşturulması ve çözüm süresinin kısa tutulması için, tam dişli modeli yerine literatürde kullanılan 3 diş modeli tercih edilmiştir (Pedersen vd, 2014). 3 diş modelinin dışında literatürde tek diş modelinin de kullanıldığı çalışmalar mevcuttur (Aktaş vd., 2004).

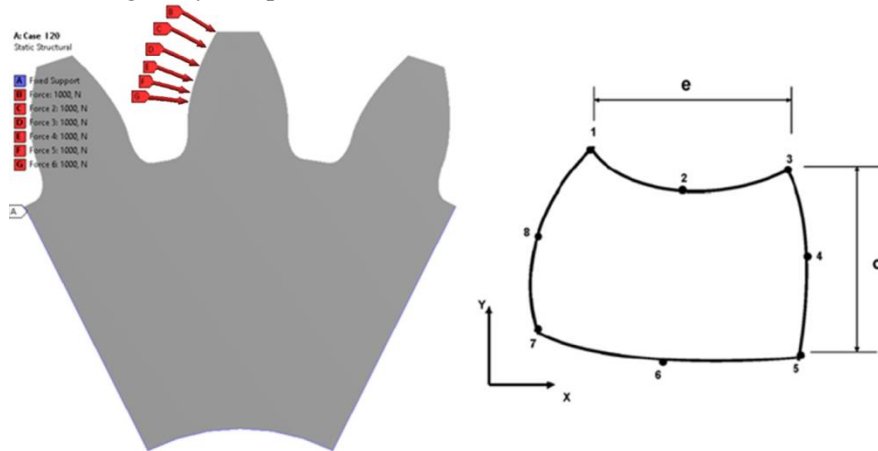
ANSYS ortamına aktarılan geometri öncelikle sonlu elemanlara ayrılmıştır. Eleman tipi olarak iki serbestlik derecesine ve 8 düğüm noktasına sahip Plane-82 elemanlar seçilmiştir (Şekil 3). Hertz temas deformasyonunun doğru bir şekilde hesaplanabilmesi için, eleman boyutu (Coy vd., 1982) 'de önerildiği üzere Eş.5 kullanılarak belirlenmiştir.

$$\frac{e}{b_h} = -0,2 \left( \frac{c}{e} \right) + 1,2 \quad 0,9 \leq \frac{c}{e} \leq 3 \text{ için} \quad (5)$$

Burada c ve e şekil 3'te de görüleceği üzere eleman uzunluğu ve genişliğidir. Bu çalışmada c ve e parametreleri değer olarak birbirine eşit seçilmiş ve eleman uzunluğu olan e değeri Eş.5 kullanılarak hesaplanmıştır. Hertz temas genişliği  $b_h$  ise Eş.6 kullanılarak hesaplanmıştır.

$$b_h = 2,15 \sqrt{\frac{F(2\rho_P\rho_g/(\rho_P + \rho_g))}{E}} \quad (6)$$

Burada F, dişli üzerine uygulanan kuvvet, E, dişlilerin elastisite modülü,  $\rho_P$  ve  $\rho_g$  dişlilerin temas noktalarındaki eğrilik yarıçapıdır.



**Şekil 3.**  
Sonlu eleman analiz sınır şartları ve Plane-82 2D eleman modeli

Ağ yapısı oluşturulan modelin sınır şartları Şekil 3' te gösterildiği gibi belirlenmiştir. Analiz tipi olarak statik durumların entegre edilmiş hali olan statik-step'li analiz türü belirlenmiştir. Bu sayede tek bir analiz ile dişli geometrisi üzerinde altı farklı noktadan toplam deformasyon değerleri elde edilecektir. Bu farklı altı nokta, her bir dişli için, çalışma esnasında temas eden yüzey boyunca seçilmiştir. Seçilen her bir noktanın yarıçapı farklı olduğundan, kuvvetin dişli üzerine etkileyeceği basınç açısı da farklı olacaktır. Her bir nokta için basınç açısı Eş.7' ye göre hesaplanmıştır.

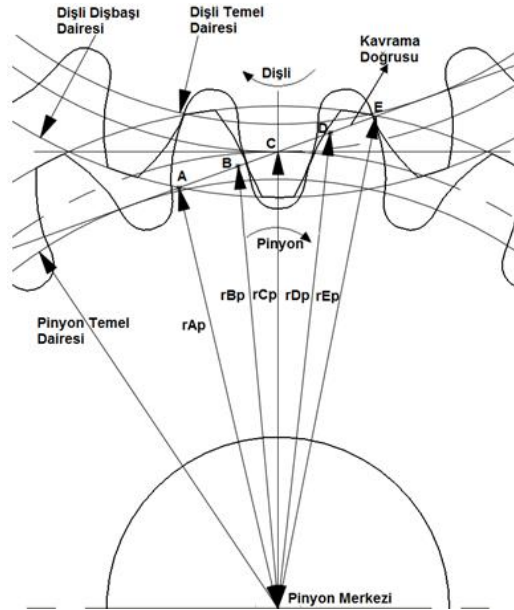
$$r_0 * \cos \alpha = r_{(i)} * \cos \alpha_{(i)} \quad (7)$$

Burada  $r_0$ : taksimat dairesi yarıçapı,  $\alpha=20^\circ$  taksimat dairesi üzerindeki basınç açısı,  $r_{(i)}$ : herhangi bir yarıçap,  $\alpha_{(i)}$ : herhangi bir yarıçaptaki basınç açısı olarak tanımlanmaktadır.

Dişli geometrisinin merkez boşluğu ve yan yüzeylerinde ise tüm dönme ve ötelenmeler sıfır olacak şekilde tanımlanarak sınır şartları tanımlanmıştır. Son olarak uygulanacak kuvvet 1000 N olarak belirlenmiştir. Uygulanan kuvvetin büyüklüğüne bağlı olarak, elde edilen toplam deformasyon değerleri artıp azalabilir ancak diş rijitliğine herhangi bir etkisi olmadığından farklı bir kuvvet değeri de bu aşamada seçilebilir.

### 2.3. Kavrama Rijitliği

Kavrama halindeki iki dişli çarktan döndüren dişliye pinyon, dönen dişli çarka ise özel olarak dişli denmektedir. Düşük kavrama oranlı düz dişli çarklarda kavrama süresince tek ve iki dişli çifti sırasıyla temasa girip çıkarak moment aktarımını gerçekleştirirler. Bu aktarım evolvent profile sahip düz dişli çarklarda bir doğru üzerinden gerçekleşir. Bu doğruya özel olarak kavrama doğrusu denmektedir ve tüm kavrama olayının bu doğru üzerinde gerçekleştiği kabul edilmektedir (Şekil 4). Kavrama olayı döndürülen dişlinin diş başı noktasında başlamaktadır. Pinyon dişlinin ise temel dairesinin biraz üst kısmındaki bir noktadan başlamaktadır. Bu noktayı A noktası olarak tanımlarsak, A noktasının yarıçapı aşağıdaki Eş.8' den yararlanılarak hesaplanabilir (Colburne, 1987).



Şekil 4.

Düz dişlilerde kavrama olayı

$$rAp = [rbp^2 + ((r0p + r0d) \sin \alpha - (rad^2 - rbd^2)^{0.5})^2]^{0.5} \quad (8)$$

Kavrama A noktasından ilerlerken, temas halindeki iki dişli çiftinden, bir dişli çifti temastan çıkar ve tüm moment tek dişli çifti üzerinden iletmeye başlar. Tek dişli çiftinin devreye girdiği bu ilk noktaya özel olarak "Tek dişli çifti temasın gerçekleştiği en düşük yarıçaplı nokta" denmektedir ve pinyon üzerindeki büyüklüğü Eş.9' dan hesaplanabilir.

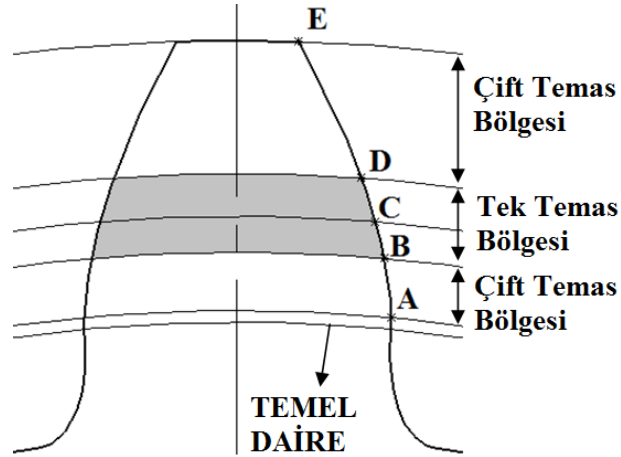
$$rBp = [rbp^2 + ((rap^2 - rbp^2)^{0.5} - \pi m_n \cos \alpha)^2]^{0.5} \quad (9)$$

B noktasından sonra moment aktarımı tek dişli çifti üzerinden D noktası diye tanımlanan "Tek dişli çifti temasın gerçekleştiği en büyük yarıçaplı noktaya" kadar devam eder. Bu süreç içerisinde dişliler taksimat daireleri üzerinden de moment aktarımını sağlarlar. C ve D noktalarının yarıçapları sırasıyla Eş.10 ve Eş.11'de verilmektedir.

$$rCp = 0.5m z_p \quad (10)$$

$$rDp = [rbp^2 + ((rbp + rbd) \tan \alpha - (rad^2 - rbd^2)^{0.5} + \pi m \cos \alpha)^2]^{0.5} \quad (11)$$

D noktasından sonra kavramaya yeni bir dişli çifti dâhil olur ve tekrardan iki dişli çifti ile moment aktarımı gerçekleştirilir. Kavrama olayı pinyon dişlinin diş başına gelmesi ile sonlanır. Bu nokta da E noktası olarak tarifedilmektedir (Şekil 5). E noktasının yarıçap değeri Eş.12 yardımı ile hesaplanabilir.



**Şekil 5.**  
Diş profili üzerindeki tek ve dişli çifti temas bölgeleri

$$rEp = 0.5(m z_p + 2m) \quad (12)$$

Kavrama doğrusu üzerindeki her bir bölgenin uzunlukları Eş.13-16 arasında verilmektedir.

$$|AE| = \sqrt{rap^2 - rbp^2} + \sqrt{rad^2 - rbd^2} - a_d \sin \alpha \quad (13)$$

$$|AD| = \pi m_n \cos \alpha \quad (14)$$

$$|AC| = |CE| = |AE|/2 \quad (15)$$

$$|AB| = |AE| - \pi m_n \cos \alpha \quad (16)$$

|AE| uzunluğuna kavrama boyu denmektedir. Kavrama boyunun temel daire üzerindeki taksimata oranına ise kavrama oranı denmektedir. Düşük kavrama oranlı dişli çarklar için



kavrama oranı Eş.17 ile hesaplanmaktadır. Kavrama oranı dişli çarklarda hareketin ne kadar düzgün iletilip iletilmediğini belirlemektedir. Standart düz dişli çarklarda kavrama oranı en fazla 1,98 olmaktadır.

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{|AE|}{\pi m_n \cos \alpha} \quad (17)$$

Kavrama rijitliği hesabı yapılırken, birbiri ile temas eden dişliler kendi aralarında seri bağlı yay gibi davranırlar. Arkadan gelen diğer dişli çifti ise ilk dişli çiftine paralel bağlı yay gibi davranır. Bu nedenle kavrama rijitliğinin hesaplanabilmesi için kavrama doğrusu üzerinde hangi bölgede bulunulduğunun bilinmesi gerekmektedir.

Birinci dişli çiftinin kendi arasındaki eş değer rijitliği:

$$K_1 = \frac{k_{p1}k_{d1}}{k_{p1} + k_{d1}} \quad (18)$$

İkinci dişli çiftinin kendi arasındaki eş değer rijitliği:

$$K_2 = \frac{k_{p2}k_{d2}}{k_{p2} + k_{d2}} \quad (19)$$

Eşitlikleri ile hesaplanabilir.

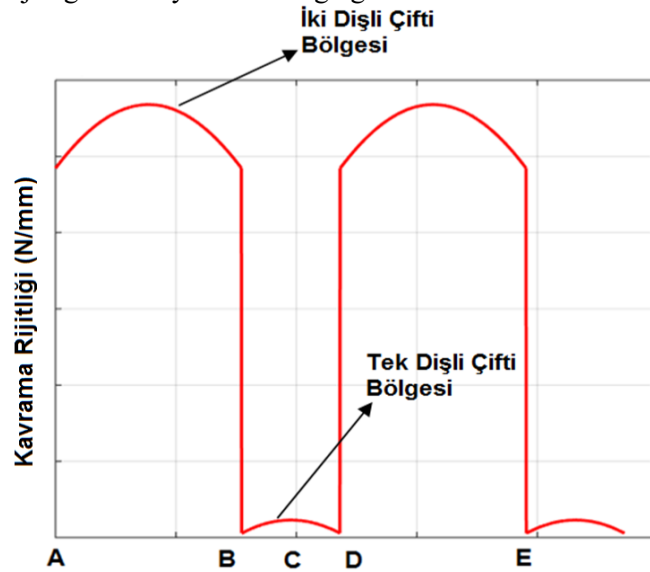
Kavrama olayı tek dişli çifti temas bölgesinde ise ( $|BD|$  arasında ise) ;

$K_1 \neq 0$  ve  $K_2 = 0$

Kavrama olayı çift dişli çifti temas bölgesinde ise ( $|AB|$  ve  $|DE|$  arasında ise) ;

$K_1 \neq 0$  ve  $K_2 \neq 0$

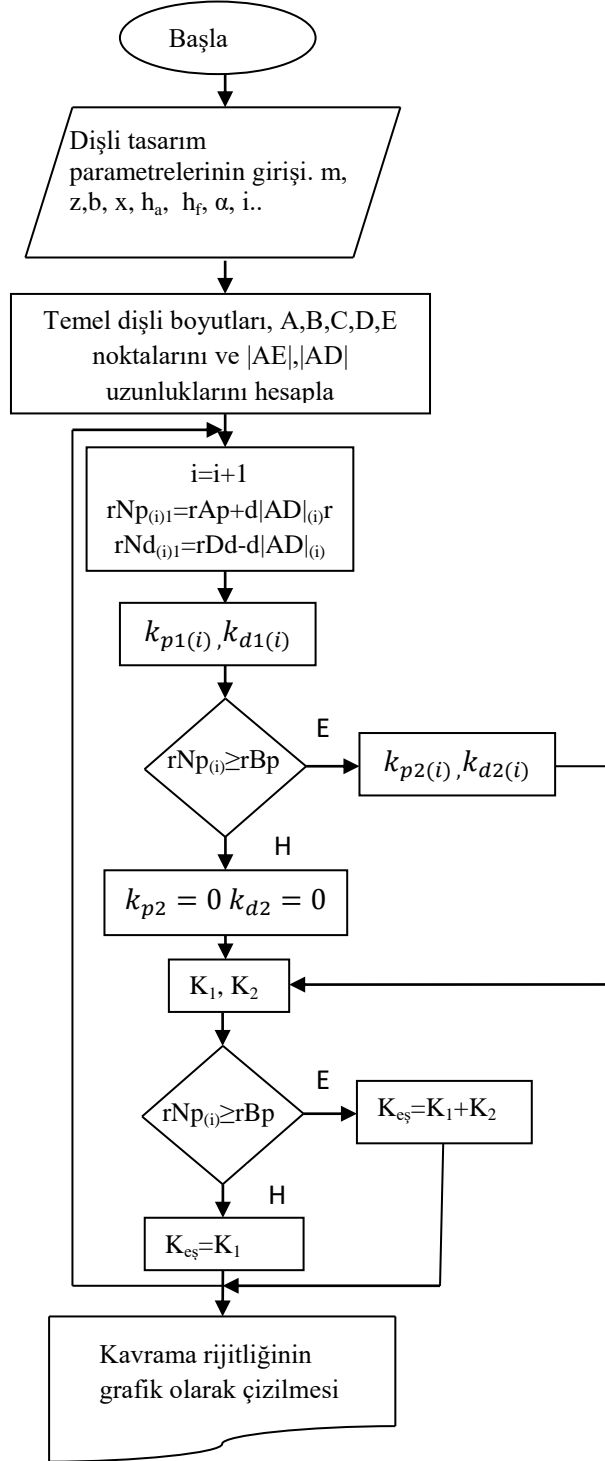
Alınarak kavrama rijitliği dişli temas noktası göre elde edilebilir. Temas noktalarına göre elde edilen kavrama rijitliği ifadesi, dişli dönme açısı, kavrama süresi gibi farklı değişkenlere göre de elde edilebilir. Kavrama rijitliğinin dişli temas noktalarına göre değişimi Şekil 6'da görülmektedir. İki dişli çiftinin temas halinde bulunduğu bölgelerde, her bir dişli çiftinin rijitliğinin paralel bağlı yay kuralı gereği toplanacağından tek dişli çiftinin temas ettiği bölgeye göre toplam kavrama rijitliğinin daha yüksek olduğu görülmektedir.



Şekil 6.

Kavrama rijitliğinin dişli temas noktalarına göre değişimi

Bu çalışmada kavrama rijitliğinin hesaplanabilmesi için MATLAB ortamında bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan programın akış diyagramı şekil 7’de verilmektedir. Programda kavrama doğrusu n adet noktaya bölünerek her bir nokta için, kavrama rijitliği hesaplanmıştır.



Şekil 7.

Kavrama rijitliğinin hesaplanması için hazırlanan program algoritması

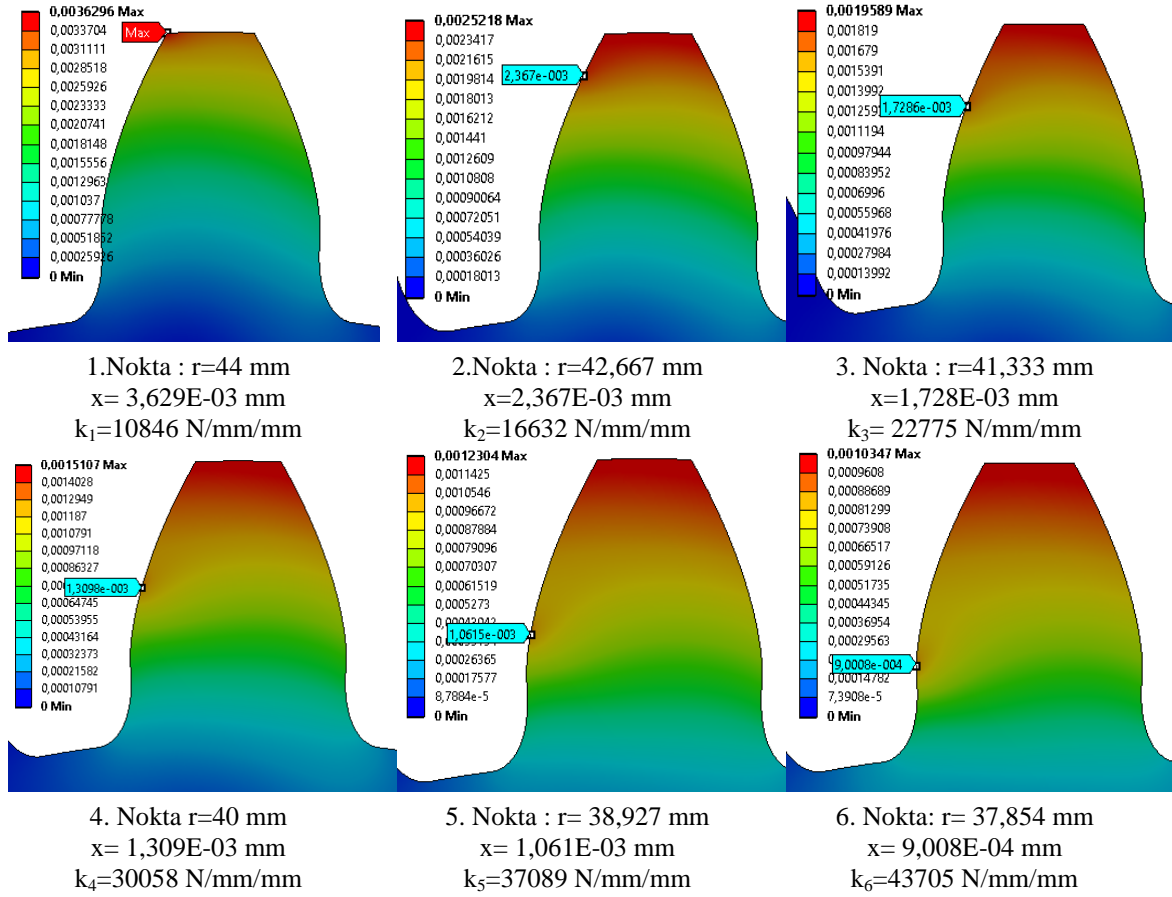
### 3. BULGULAR VE DURUM ANALİZLERİ

Bu çalışmada beş farklı dişli parametresinin, tek diş rijitliğine ve toplam kavrama rijitliğine etkisi durumlar halinde incelenmiştir. Literatürde benzer parametrelerinin incelendiği çalışmalarda mevcuttur (Filiz vd., 1995). I. durumda diş sayısı, II. durumda dişli basınç açısı, III. durumda profil kaydırma faktörü, IV. durumda diş başı yüksekliği ve V. durumda ise kesici takım uç yarıçapının değişiminin, tek diş rijitliğine ve kavrama rijitliğine etkisi incelenmiştir. Her bir durum için incelenen dişli çark özellikleri tablo 1’ de ayrıntılı olarak verilmektedir.

**Tablo 1. Her bir durum için kullanılan dişli özellikleri**

<b>Dişli Özellikleri</b>	<b>I. Durum</b>	<b>II. Durum</b>	<b>III. Durum</b>	<b>IV. Durum</b>	<b>V. Durum</b>
Modül (m)	4	4	4	4	4
Diş Sayısı	20, 30, 40, 60, 80	32	32	32	20, 30, 40, 60, 80
Basınç Açısı (°)	20	18, 20, 25, 28, 30	20	20	20
Profil Kaydırma Oranı	0	0	-0.5, -0.1, 0, 0.2, 0.5	0	0
Kesici Takım Uç Yarıçapı (mm)	0.1*m	0.1*m	0.1*m	0.1*m	0.38*m
Diş Başı Yüksekliği (h <sub>a</sub> )	1*m	1*m	1*m	1*m, 1.1*m, 1.2*m, 1.3*m	1*m
Taban Yüksekliği (h <sub>f</sub> )	1,25*m	1,25*m	1,25*m	1,25*m	1,25*m
Diş Kalınlığı (mm)	25,4	25,4	25,4	25,4	25,4
Çevrim Oranı	1	1	1	1	1

Tek diş üzerine uygulanan yükleden dolayı, diş profili üzerinde meydana gelen toplam yer değiştirmeler, ANSYS programı üzerinden okunmuştur. Şekil 8’ de modül 4 ve 20 diş sayısına sahip bir dişli çark için gerçekleştirilen sonlu elemanlar analiz sonuçları görülmektedir. Diş profili üzerinde altı farklı nokta için, yapılan analiz sonuçlarına göre diş başındaki deformasyon miktarının diş dibine doğru indikçe azaldığı görülmektedir. Bu deformasyon değerleri denklem 1-4 belirtildiği gibi, uygulanan kuvvete ve diş genişliğine oranlanırsa, o nokta için birim diş kalınlığı başına tek diş rijitliği hesaplanmış olur.



Şekil 8.

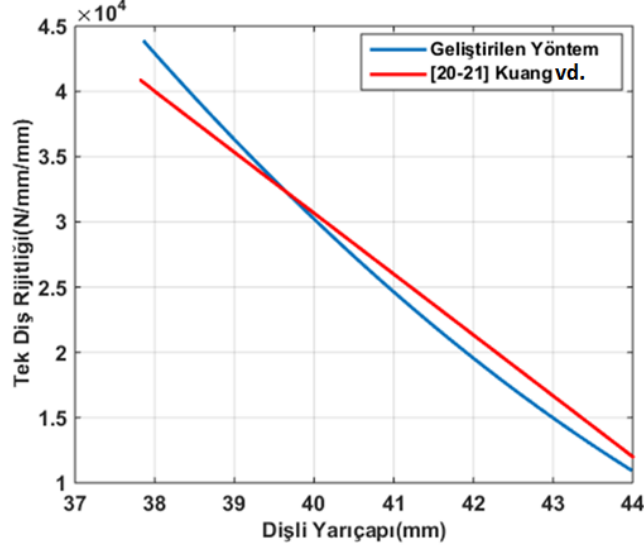
Her bir nokta için sonlu eleman analiz sonuçları I. durum  $z=20$  için

Bu noktaların birleştirilmesi ile elde edilen eğri, tek bir dişin rijitlik eğrisi olarak kullanılabilir. Şekil 9’ da görüldüğü gibi 20 diş sayısı ve 4 modüle sahip bir dişli çark için, birim diş genişliği başına rijitlik eğrisi, diş yarıçapına bağlı olarak verilmektedir. Rijitlik değerleri diş başında 12000 N/mm/mm değerinde olup diş köküne doğru gittikçe, rijitlik değerinin arttığı ve yaklaşık 43000 N/mm/mm değerine ulaştığı görülmüştür. Ayrıca elde edilen tek diş rijitlikleri Kaung vd, (1994-2001) tarafından geliştirilen yöntem ile hesaplanan tek diş rijitlik değerleri ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak her iki yöntem de oldukça yakın sonuçlar vermektedir.

Tablo 2.Geliştirilen yöntem ile literatür sonuçlarının kıyaslanması

Kavrama Doğrusu Üzerindeki Temas Noktaları	A	B	C	D	E
Geliştirilen Yöntemle Hesaplanan Kavrama Rijitliği (N/mm/mm)	23320	14500	15000	14500	23290
[20-21] Kuang vd. Hesaplanan Kavrama Rijitliği (N/mm/mm)	23150	13650	14050	13650	23150
% Fark	%0,7	%6,2	%6,7	%6,2	%0,7

Bu çalışmada tek diş rijitliğinin nasıl bulunması gerektiği belirtildikten sonra şekil 7 'deki algoritmaya sahip MATLAB programı kullanılarak, dişli çark mekanizmaları için kavrama rijitlik değerleri hesaplanmıştır.

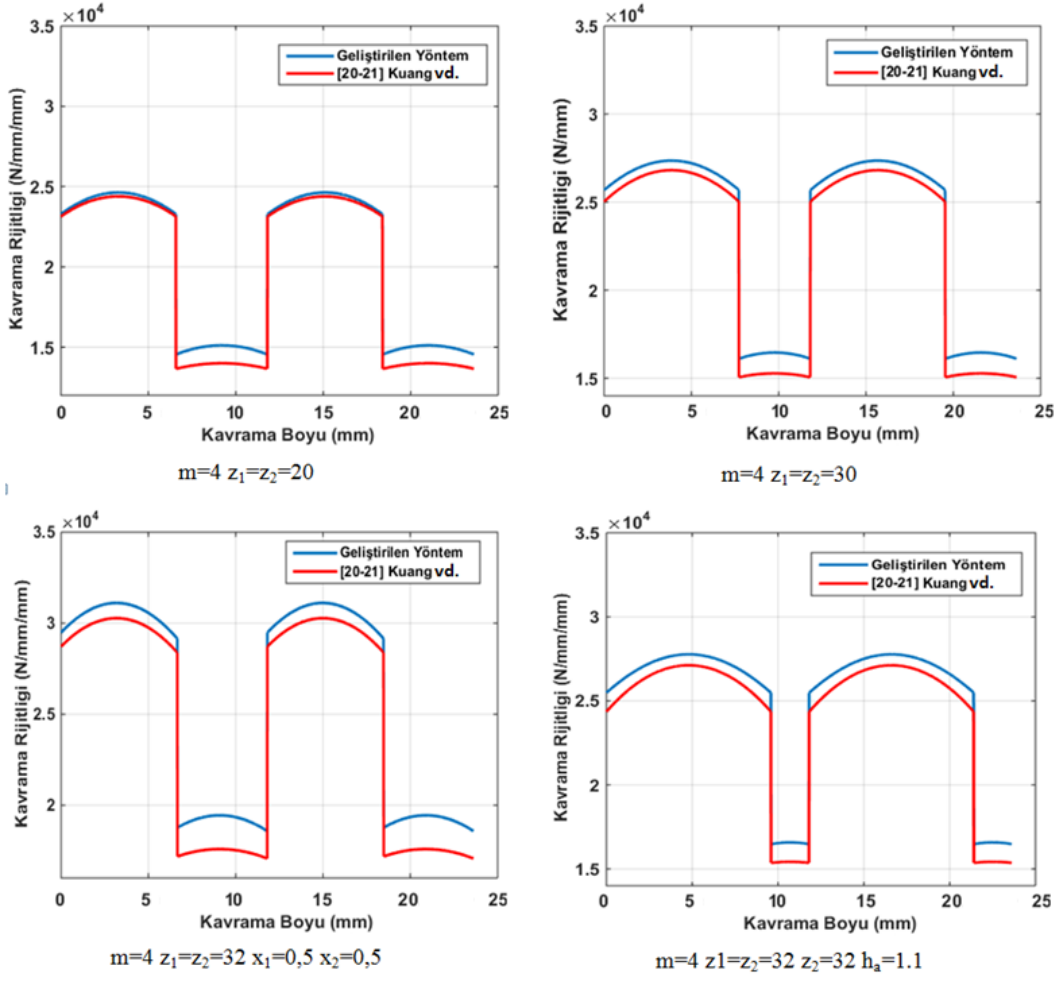


**Şekil 9.**

*Tek diş rijitliğinin dişli yarıçapına bağlı değişimi*

Şekil 10'da bu çalışmada uygulanan yöntem ile elde edilen farklı parametreler sahip dişli çark mekanizmaları için kavrama rijitliği sonuçları ile literatürde kavrama rijitliği hesabında oldukça sık kullanılan Kuang vd., (1994-2001) tarafından geliştirilen yarı ampirik ifadeler ile elde edilen sonuçların kıyaslanması verilmektedir. Grafikler incelendiğinde kullanılan yöntem ile elde edilen sonuçların literatüre oldukça yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Ayrıca kavrama olayı sırasındaki önceki kısımda bahsedilen önemli noktalar için her iki yöntem arasındaki farkın yüzde cinsinden değeri şekil 10'daki birinci durum için tablo 2'de verilmektedir. Çift diş bölgelerinde her iki yöntem arasındaki farkın oldukça az olduğu görülmektedir. Tek diş bölgesinde ise yöntemler arasında biraz daha fazla fark olmasına karşın, yöntemlerin sonlu elemanlar analizine ve ampirik ifadelerle dayandığı düşünürse bu farkın kabul edilebilir bir fark olduğu sonucuna varılmıştır.

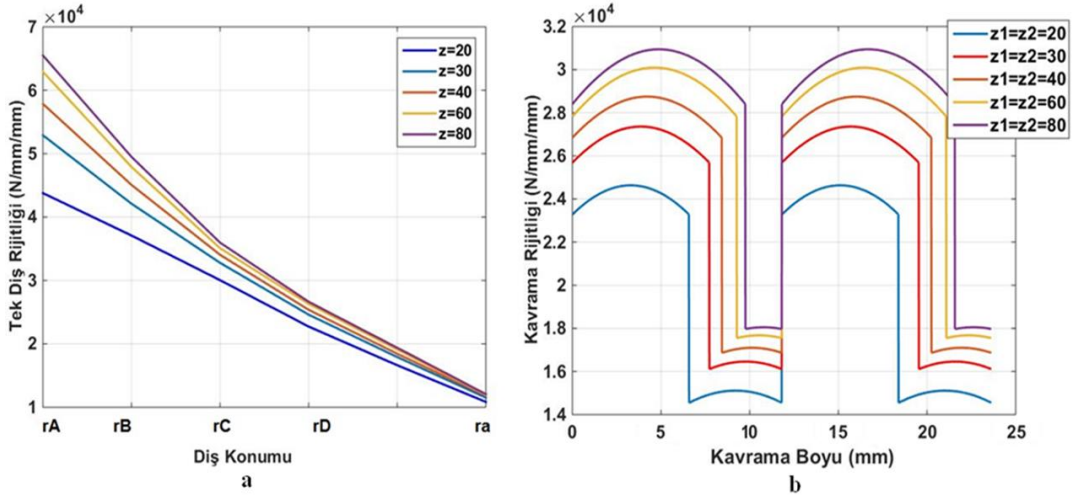
Literatürdeki çalışmalar ile yöntemin doğrulanmasının ardından, farklı diş parametrelerinin tek diş rijitliğine ve kavrama rijitliğine etkileri durumlar halinde incelenmiştir. I. durumda diş sayısı artışının diş rijitliğine etkisi incelenmiştir. Bu amaçla tablo 1'de verilen özelliklere sahip 20, 30, 40, 60 ve 80 diş 'ten oluşan diş modelleri oluşturulmuş ve sonlu eleman analiz sonuçları elde edilmiştir. Diş sayısı artışının tek diş rijitliğine etkisi şekil 11.a' de verilmektedir. Şekil 11.a incelediğinde, diş sayısı artışı ile diş rijitliğinde diş başından başlayarak diş köküne doğru bir artış olduğu görülmektedir. Ancak bu artış diş başında az iken diş köküne doğru biraz daha fazladır. Bunun sebebi diş köküne doğru inildikçe, artan diş kalınlığı ile birlikte, uygulanan kuvvete karşı direnci artması olduğu söylenebilir. I. durum için her bir dişin farklı diş çapları olduğu için, yatay eksen dişli çapı-yarıçapı olarak değil, şekil 5'te bahsedilen özel noktalara göre belirlenmiştir.



Şekil 10.

Geliştirilen yöntem ile literatür sonuçlarının kıyaslanması

Elde edilen tek diş rijitlik eğrileri, hazırlanan MATLAB programına girdi olarak verildiğinde, programın çıktısı olarak karşımıza kavrama rijitliklerinin ilgili parametreye bağlı değişimi çıkmaktadır. Şekil 11.b'de çevrim oranı 1 olan dişli çark mekanizması için kavrama rijitliğinin kavrama boyunca değişimi gösterilmektedir. Diş sayısının artması ile birlikte tek diş rijitliğinde olduğu gibi kavrama rijitliğinde de bir artış görülmektedir. Diş sayısı, 20 dişten 80 diş çıkıldığından kavrama rijitliğinde yaklaşık olarak %25'lik bir artış olduğu belirlenmiştir. Ayrıca diş sayısının artmasıyla birlikte çift diş temas bölgesi artmıştır. Bu da diş sayısı artışının kavrama oranının arttırdığını gösterir.

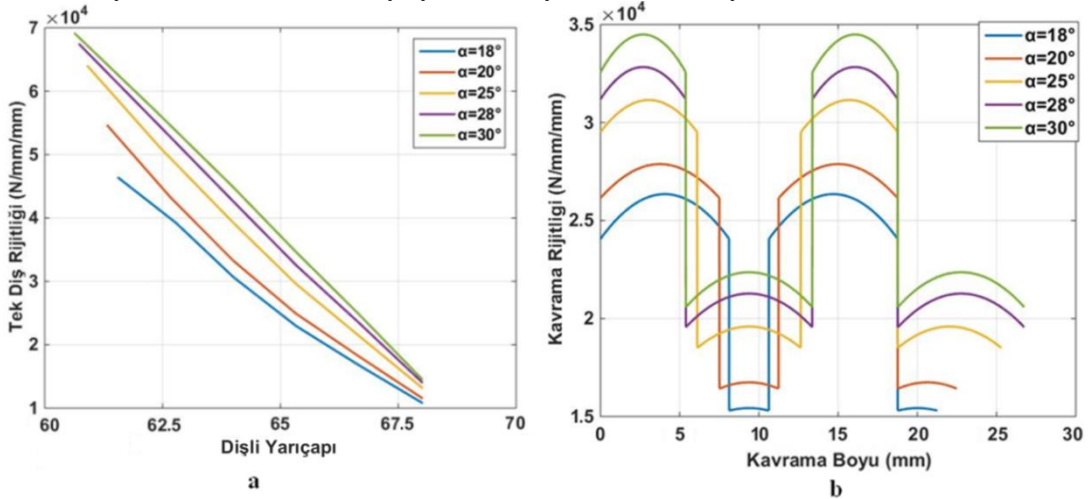


**Şekil 11.**

*Tek diş rijitliğinin ve kavrama rijitliğinin diş sayısı bağlı değişimi*

II. durum incelendiğinde değişken olarak karşımıza basınç açısı çıkmaktadır. Şekil 2'de dişli basınç açısı arttığında diş kalınlığının arttığı net bir şekilde görülmektedir. Buda diş basınç açısının artışı ile diş rijitliğinin artacağı sonucunu doğurmaktadır. Şekil 12.a'da tek diş rijitliğinin dişli basınç açısına bağlı değişimi verilmiştir. Grafik incelendiğinde basınç açısının artması ile birlikte diş rijitliğinde önemli oranda artış gözlemlenmektedir. Grafik  $30^\circ$  basınç açısı için, 60,64 mm yarıçap değerinden başlamışken  $18^\circ$  basınç açısı için 61,33 mm yarıçap değerinden başlamaktadır. Bu farkın nedeni dişlerin kavramaya başlayan A noktalarının yarı çaplarının basınç açısının değişimi ile farklılaşmasındandır.

Şekil 12.b incelendiğinde dişli basınç açısı değişiminin kavrama rijitliğine olan etkisi görülmektedir. Basınç açısı  $18^\circ$  için maksimum rijitlik değeri iki dişli çifti bölgesi için, 26000 N/mm/mm değerinde iken, basınç açısının  $30^\circ$ 'ye çıkması ile birlikte bu değer, 34000 N/mm/mm' ye çıktığı görülmektedir. Basınç açısı değişimi ile maksimum %30'luk bir rijitlik artışı elde edilmiştir. Ayrıca basınç açısının artması ile tek diş bölgesinin arttığı görülmektedir bu nedenle dişli kavrama oranı basınç açısının artışı ile birlikte düşecektir.



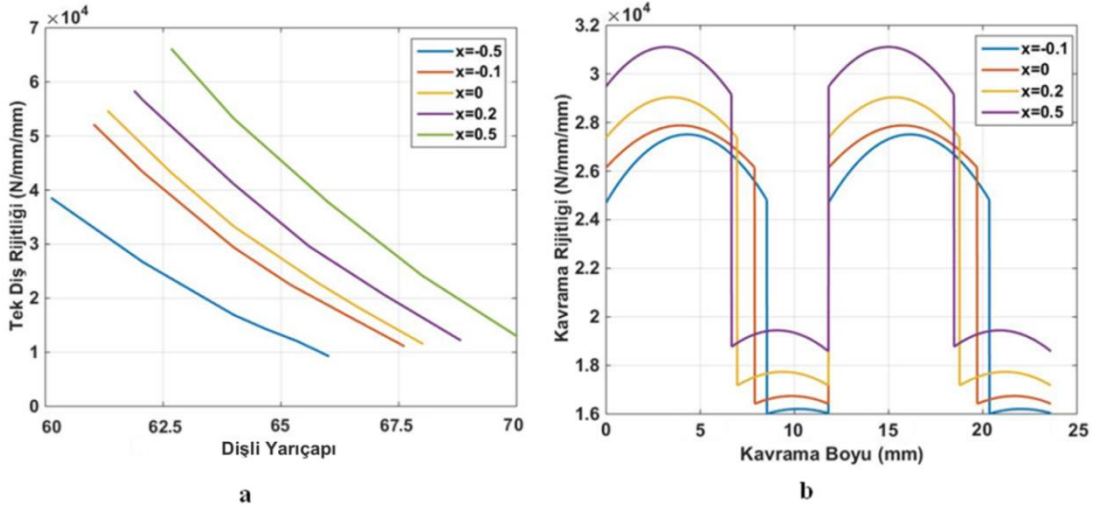
**Şekil 12.**

*Tek diş rijitliğinin ve kavrama rijitliğinin basınç açısına bağlı değişimi*

İncelenen III. durumda ise profil kaydırma faktörüne bağlı olarak tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği değişimi incelenmiştir. Bilindiği gibi profil kaydırma işlemi dişli çark

mekanizmalarında, eksenler arası mesafenin ayarlanması, alttan kesme olayının engellenmesi, diş dibi gerilmelerinin düşürülmesi gibi amaçlar doğrultusunda yaygın şekilde uygulanan bir yöntemdir. Bu nedenle, profil kaydırma faktörüne bağlı olarak diş rijitliği değişiminin bilinmesi, dişlilerin profil kaydırma etkisi altındaki dinamik davranışları hakkında bilgi sağlayacaktır. Pozitif profil kaydırma işleminde, diş kökünün genişlediği, ve diş başının sivrildiği bilinmektedir. Ayrıca negatif profil kaydırılmış dişlilerde ise, diş kökünde zayıflama ve diş başında kalınlaşma söz konusudur (Şekil 2). Tüm bu etkiler dikkate alınarak hazırlanan modeller analiz edildiğinde, tek diş rijitlik değişimi şekil 13.a' da görülmektedir.

Negatif profil kaydırılmış dişli çarkın diş rijitliği, sıfır dişli çarktan daha düşüktür. Bu sonucun çıkmasının sebebi ise, diş kökünün zayıflatılmış olmasıdır. Pozitif profil kaydırma işleminde ise diş kökünün genişlemesi dolayısı ile diş rijitliği artacaktır. Profil kaydırma işlemi sonucunda diş başı dairelerinin çapları değiştiğinden dolayı, pozitif profil kaydırılmış dişlinin rijitlik eğrisi 70 mm yarıçaptan başlarken negatif profil kaydırılmış dişli için bu değer 66 mm' den başlamaktadır. Şekil 13.b' de ise, profil kaydırma faktörünün toplam kavrama rijitliğine etkisi verilmektedir. Tek diş rijitliğine benzer biçimde, burada da negatif profil kaydırılmış dişlilerin kavrama rijitliği, pozitif profil kaydırılmış dişlilere göre düşük olmaktadır. Ayrıca grafik incelendiğinde, negatif profil kaydırma ile birlikte, tek diş bölgesi küçülmüş, yani kavrama oranı artmıştır. Pozitif profil kaydırma işlemi sonrasında ise, kavrama oranının düştüğü görülmüştür.



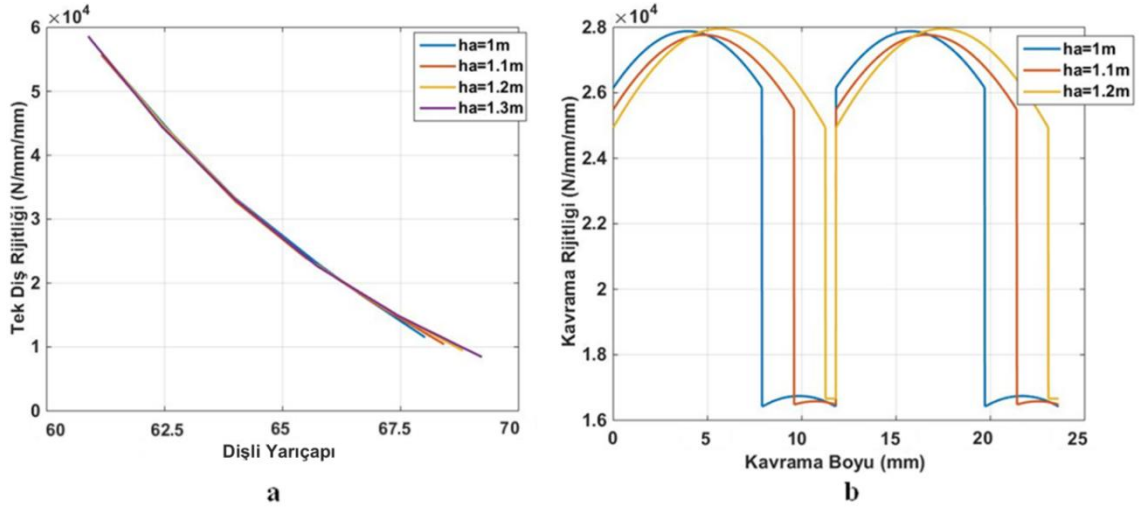
Şekil 13.

*Tek diş rijitliğinin ve kavrama rijitliğinin profil kaydırma faktörüne bağlı değişimi*

Çalışmanın IV. durum analizinde ise, diş başı yüksekliğinin standart değeri olan bir modülün dışına çıkartılması sonucunda tek diş rijitliği ve kavrama rijitliğine olan etkisi incelenmiştir. Şekil 14.a incelendiğinde, diğer durumlarda olduğu gibi bariz bir etkiden söz etmek mümkün değildir. Dört farklı diş başı yüksekliği için yapılan analiz sonuçlarında birbirine oldukça yakın rijitlik değerleri elde edilmiştir. Ancak diş başı yüksekliğinin artması ile, diş başı dairesinin çapı artacağı için, diş başlarındaki rijitlik değerleri standart dişliye göre bir miktar daha düşük çıkmıştır.

Tek diş rijitlik değerlerine benzer olarak, farklı diş başı yüksekliğine sahip dişlilerin kavrama rijitlikleri arasındaki farkta diğer durumlarda incelenen durumlara göre daha azdır (Şekil 14b). Ancak diş başı yüksekliğinin artması ile birlikte kavrama oranının arttığı, dişler arasında daha yumuşak bir geçiş olduğu söylenebilir.

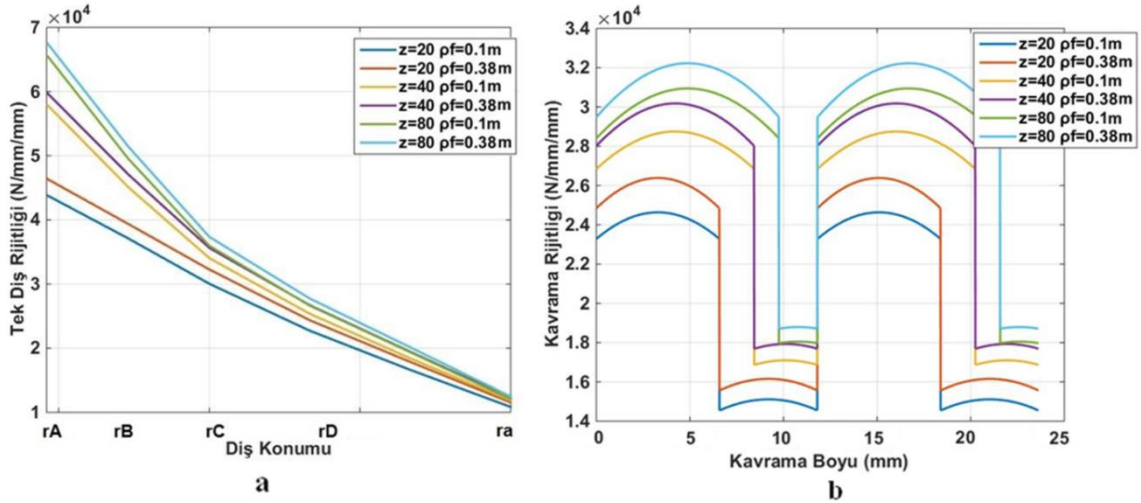




**Şekil 14.**

*Tek diş rijitliğinin ve kavrama rijitliğinin diş başı yüksekliğine bağlı değişimi*

V. durum analizinde ise I. durumda incelenen dişli özellikleri aynen korunarak, sadece kesici takım uç yarıçapı 0,1\*m' den 0,38\*m' ye çıkarılmış ve kesici takım uç yarıçapındaki bir artışın diş rijitliğine etkisi incelenmiştir. Şekil 15.a ve 15.b ' incelendiğinde I. durumda elde edilen tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği ile 0,38\*m kesici takım uç yarıçapına sahip dişlilerin rijitlikleri verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü üzere kesici takım uç yarıçapının artırılması, tek diş rijitliği ve buna bağlı olarak kavrama rijitliğinde artışa neden olmaktadır. 0,1\*m kesici takım uç yarıçapından 0,38\*m' ye çıkıldığında diş sayılarına bağlı olarak, bir artış meydana gelmiştir. 20 diş için bu artış yaklaşık %8 civarındaki iken, 80 diş için artış oranı %4 civarındadır. Yani diş sayısının artışı ile birlikte, kesici takım uç yarıçapının rijitlik üzerine olan etkisi azalmıştır. Ayrıca şekil 15.b incelendiğinden kesici takım uç yarıçapının kavrama oranı üzerine herhangi bir etkisinin olmadığı görülmektedir.



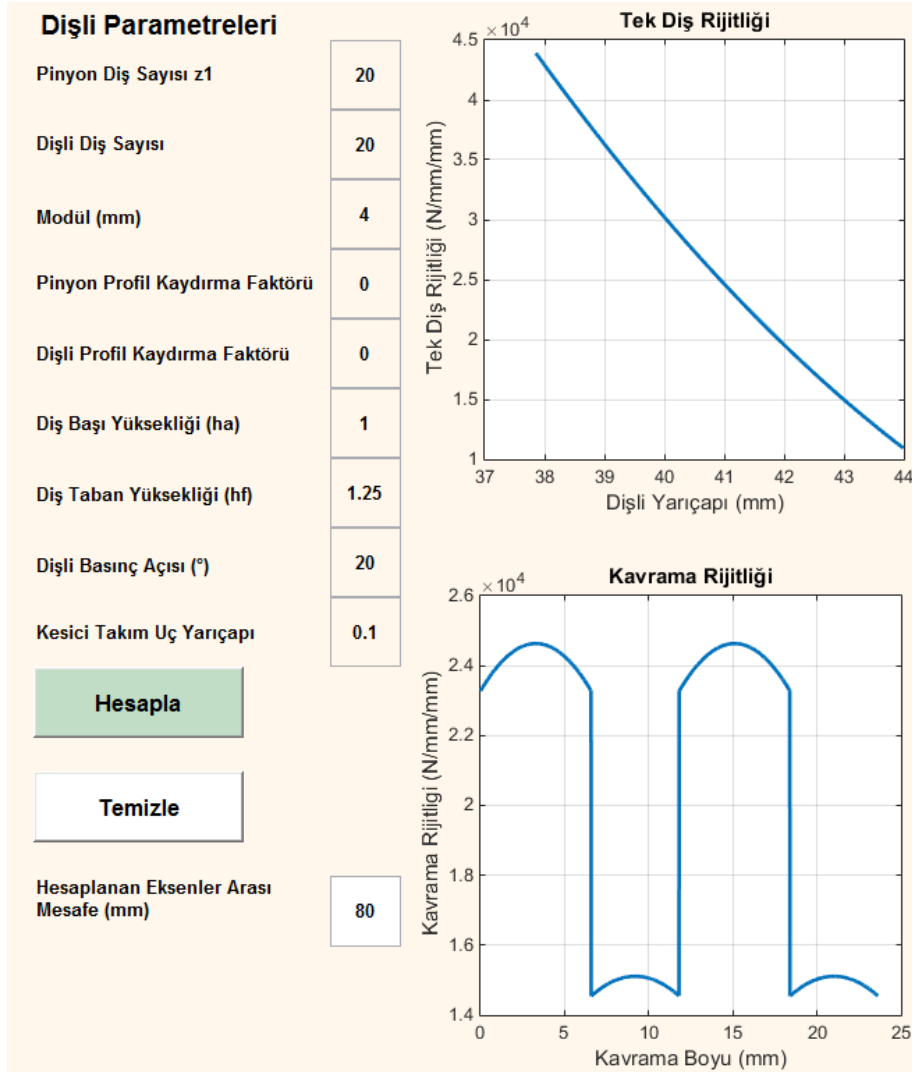
**Şekil 15.**

*Tek diş rijitliğinin ve kavrama rijitliğinin kesici takım uç yarıçapına bağlı değişimi*

#### 4. KULLANICI ARAYÜZÜ

Bu çalışmada anlatılan tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği hesabının kolay ve hızlı yapılabilmesi için, MATLAB ortamında, kavrama rijitliği hesap programı isimli (KRHP01), kullanıcı arayüzü hazırlanmıştır. Kullanıcı arayüzünde girdi olarak, bu çalışmanın durumlarında değişken olarak kullanılan, diş sayıları, modül, profil kaydırma faktörü, diş başı yüksekliği, taban yüksekliği, basınç açısı ve kesici takım uç yarıçapı dikkate alınmıştır (Şekil 16).

Şekil 16’da hazırlanan programın arayüzü görülmektedir. Program girdileri, girilip hesapla butonuna basıldığında, hazırlanan program, pinyon için tek diş rijitliğini ve mekanizma için ise kavrama rijitliğini otomatik olarak hesaplayıp kullanıcıya sunmaktadır. Bu sayede hızlı bir şekilde istenilen dişli çark ve mekanizma için tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği hesabı yapılabilmektedir.



Şekil 16.  
Program arayüzü

#### 5. SONUÇLAR

Dişli dinamiği açısından son derece önemli bir girdi olan, tek diş rijitliği ve buna bağlı değişen kavrama rijitliğinin temel dişli parametrelerinin değişiminden nasıl etkilendiği bu

çalışma kapsamında incelenmiştir. Tek diş rijitliği hesabı için, öncelikle, diş modelleri kramayer tipi kesici takımdan hareket ile oluşturulmuştur. Oluşturulan modeller, ANSYS ortamında, sonlu elemanlar analizine tabi tutularak tek diş rijitlikleri hesaplanmıştır. Tek diş rijitlikleri önceden sonlu elemanlar yöntemi ile belirlenen dişli çiftlerinin MATLAB ortamında kavrama rijitliği hesaplanması için program yazılmıştır. Bu aşamadan sonra, beş farklı özel durum kendi içerisinde incelenmiş olup elde edilen sonuçlar şu şekilde özetlenebilir.

- Diş sayısının artması ile birlikte, tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği artmaktadır. Aynı zamanda, diş sayısı artışı ile birlikte dişli kavrama oranında artış görülmektedir.
- Diş basınç açısının artışı ile birlikte diş kalınlığı arttıracağı için, tek diş rijitliği ve kavrama rijitliğinde artış meydana gelmektedir. Ancak basınç açısı artışı, kavrama oranı düşürücü etkiye sahiptir.
- Negatif profil kaydırma ile birlikte, diş kökünde zayıflama meydana geleceğinden tek diş rijitliği ve kavrama rijitliği azalmıştır. Ancak kavrama oranında artış meydana gelmektedir. Pozitif profil kaydırmalı durumda ise tek diş rijitliği ve kavrama rijitliğinde artış meydana gelirken, kavrama oranının da düşüş meydana gelmiştir.
- Diş başı yüksekliğinin arttırılması ile birlikte, dişli yapısının baş bölgesinin rijitliğinde çok az bir azalma meydana gelmektedir. Ancak genel itibari ile diş başı yüksekliğinin arttırılması, tek diş rijitliğini az da olsa düşürmesine rağmen, diğer parametreler kadar etkili olamamıştır. Diş başı yüksekliğinin arttırılması dişli kavrama oranını arttırmıştır.
- Kesici takım uç yarıçapının arttırılması tek diş rijitliğini ve kavrama rijitliğinin artmasına neden olurken, kavrama oranı üzerinde herhangi bir etkisi bulunmaktadır.

## 6. SEMBOLLER

$\alpha$	Basınç açısı
$b$	Diş genişliği
$\epsilon\alpha$	Kavrama oranı
$F$	Uygulanan tekil kuvvet
$h_a$	Diş başı yüksekliği
$h_f$	Taban yüksekliği
$k_{p1}$	Pinyonun tek diş rijitliği
$k_{d1}$	Dişlinin tek diş rijitliği
$K_1$	Temas halindeki ilk dişli çiftinin eş değer rijitliği
$K_2$	Temas halindeki ikinci dişli çiftinin eş değer rijitliği
$K_{eş}$	Kavrama rijitliği
$i$	Çevrim Oranı
$r_{Ap}$	Pinyonun kavrama olayına başladığı yarıçap
$r_{Bp}$	Pinyonun tek dişli çifti temasına başladığı en küçük yarıçap
$r_{Cp=r0p}$	Pinyonun taksimat dairesinin yarıçapı
$r_{0d}$	Dişlinin taksimat dairesinin yarıçapı
$rad$	Dişlinin diş başı dairesinin yarıçapı
$r_{bd}$	Dişlinin temel dairesinin yarıçapı
$r_{ap}$	Pinyonun diş başı dairesinin yarıçapı
$r_{bp}$	Pinyonun temel dairesinin yarıçapı
$r_{Dp}$	Pinyonun tek dişli çifti temasındaki en büyük yarıçap
$r_{Ep}$	Pinyon için kavramanın bittiği yarıçap (diş başı çapı)
$r_{Np(i)}$	Kavrama süresince pinyonun taranan yarıçap değerleri
$r_{Nd(i)}$	Kavrama süresince dişlinin taranan yarıçap değerleri
$r_i$	Dişli çark üzerindeki herhangi bir yarıçap değeri

$\rho_f$	Kesici takım uç yarıçapı
AE	Kavrama boyu
BD	Tek dişli çiftinin devrede olduğu bölge uzunluğu
AB - DE	İki dişli çiftinin devrede olduğu bölge uzunluğu
d AD	AD  uzunluğunun i parçaya bölünmesi ile elde edilen birim uzunluk
x	Tek diş üzerinde oluşan elastik deformasyon
X	Profil kaydırma faktörü
z	Diş sayısı

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma OUAP(MH)-2014/25 numaralı ‘Evolvent Dişli Çarkların Darbe Yüklerine Dayanımlarının Deneysel Olarak İncelenmesi’ isimli projenin bir çıktısı olarak üretilmiştir. Çalışmayı destekleyen Uludağ Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar Projeleri Birimine yazarlar olarak teşekkür ederiz.

## KAYNAKLAR

1. Aktaş, A. and Orhan, S. (2004) Düşük kavrama oranlı dişlilerde rijitliğin sonlu elemanlar metoduyla belirlenmesi, Teknoloji, 7 (2), 285-288.
2. Arıkan, M.A.S. (1987) Computer-aided dynamic modeling of spur gears, Doktora Tezi.O.D.T.Ü.
3. Babalık, F.C. and Çavdar, K. (2014) Makine elemanları ve konstrüksiyon örnekleri, Dora, Bursa.
4. Chen, Z. and Su, D. (2013) Dynamic simulation of planetary gear set with flexible spur ring gear, Journal of sound and vibration, 332, 7191-7204. doi:10.1115/1.4023300
5. Colbourne, J.R. (1987) The geometry of involute gears, Springer-Verlag, New Jersey, USA.
6. Cooley, C.G., Liu, C., Dai, X., Parker, R.G. (2016) Gear tooth mesh stiffness: A comparison of calculation approaches, Mechanism and machine theory, 105, 540–553. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.07.021
7. Coy, J.J. and Chao, C.H.C. (1982) Method Of selecting grid size to account for hertz deformation in finite element analysis of spur gears, Journal of mechanical design, 104 (4) ,759–766. doi: 10.1115/1.3256429
8. Filiz, H. and Eyercioğlu, Ö. (1995) Evaluation of gear tooth stresses by using finite element method, Transactions of the ASME, Journal of engineering for industry, 117, 232-239. doi: 10.1115/1.2803299
9. Gu, X., Velez, P., Sainsot, P., Bruyere, J. (2015) Analytical investigations on the mesh stiffness function of solid spur and helical gears, Journal of mechanical design, 137, 063301-7. doi: 10.1115/1.4030272
10. Karpat, F. Ekwaro-Osire, S., Yılmaz, T.G., Dogan, O., Yuce, C. (2015) Design and analysis of internal gears with different rim thickness and shapes, Proceedings of the ASME international mechanical engineering congress and exposition, Houston, Texas, USA. doi: 10.1115/IMECE2015-52211
11. Karpat, F. Engin, B., Dogan, O., Yuce, C., Yılmaz, T.G. (2014) Effect of Rim Thickness on Tooth Root Stress and Mesh Stiffness of Internal Gears, Proceedings of the ASME international mechanical engineering congress and exposition, Montreal, Quebec, Canada. doi: 10.1115/IMECE2014-39181

12. Karpat, F., Dogan, O., Ekwaro-Osire, S., Yuce, C. (2014) A novel method for calculation gear tooth stiffness for dynamic analysis of spur gears with asymmetric teeth, Proceedings of the ASME international mechanical engineering congress and exposition, Montreal, Quebec, Canada. doi: 10.1115/IMECE2014-39402
13. Karpat, F., Dogan, O., Yuce, C., Ekwaro-Osire, S. (2017) An improved numerical method for the mesh stiffness calculation of spur gears with asymmetric teeth on dynamic load analysis, *Advances in Mechanical Engineering*, 9 (8), 1-12. doi: 10.1177/1687814017721856
14. Kiekbusch, T. and Howard, I. (2007) A common formula for the combined torsional mesh stiffness of spur gears, 5th Australasian congress on applied mechanics, brisbane– Australia, 10-12 December.
15. Kiekbusch, T., Sappok, D., Sauer, B., Howard, I. (2011) Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two- and three-dimensional parametrical fe models, *Strojnikivestnik - Journal of Mechanical Engineering* , 57 (11), 810-818. doi: 10.5545/sv-jme.2010.248
16. Kuang, J.H. and Lin, A. D. (2001) The Effect of tooth wear on the vibration spectrum of a spur gear pair, *Journal of vibration and acoustics*, 123(3), 311-317. doi: 10.1115/1.1379371
17. Kuang, J.H. and Yu, J. A. (1994) Dynamic model for addendum modified gear pair, *Proceedings of ASME 1994 design technical conferences*, DE- 71, 165–176.
18. Lin, H.H. (1985) Computer aided design and analysis of spur gear dynamics, Doktora tezi, University of Cincinnati Ohio.
19. Lin, H.H. and Liou, C.H. (1998) A. Parametric study of spur gear dynamics, NASA/CR-1998-206598.
20. Litvin, F.L. and Fuentes, A. (2004) *Gear geometry and applied theory* second edition, Cambridge university press, New York, USA.
21. Meagher, J., Wu, X., Kong, D., Lee, C.H. (2010) A comparison of gear mesh stiffness modeling strategies, *proceedings of the IMAC-XXVIII*, Jacksonville, Florida USA, February 1–4.
22. Munro, R.G., Palmer, D., Morrish, L. (2001) An experimental method to measure gear tooth stiffness throughout and beyond the path of contact, *Proceedings of the institution of mechanical engineers part c journal of mechanical engineering science*, 215 (7), 793-803. doi: 10.1243/0954406011524153
23. Pedersen, N.L. and Jorgensen, M.F. (2014) On gear tooth stiffness evaluation, *Computer and structures*, 135, 109 – 117. doi: 10.1016/j.compstruc.2014.01.023
24. Wang, Q. and Zhang, Y. (2015) A Model for analyzing stiffness and stress in a helical gear pair with tooth profile errors, *Journal of vibration and control*, 1-18. doi: 10.1177/1077546315576828

