

**RAYLEIGH NANOÇUBUKLARININ YEREL OLMAYAN  
ELASTİSİTE TEORİSİNE GÖRE EKSENEL TİTREŞİMİ**

**Yakup Harun ÇAVUŞ**



T.C.  
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**RAYLEIGH NANOÇUBUKLARININ YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE  
TEORİSİNE GÖRE EKSENEL TİTREŞİMİ**

**Yakup Harun ÇAVUŞ**  
0000-0002-6607-9650

Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI  
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2020  
Her Hakkı Saklıdır

## TEZ ONAYI

Yakup Harun ÇAVUŞ tarafından hazırlanan “RAYLEIGH NANOÇUBUKLARININ YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİNE GÖRE EKSENEL TİTREŞİMİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI

**Başkan** : Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI  
0000-0003-2231-170X  
Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza

**Üye** : Prof. Dr. Babür DELİKTAŞ  
0000-0002-4035-4642  
Uludağ Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi,  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

**Üye** : Prof. Dr. Süheyla Yerel KANDEMİR  
0000-0003-4056-5383  
Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi,  
Mühendislik Fakültesi,  
Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN  
Enstitü Müdürü

.....

**Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;**

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

**beyan ederim.**

06/07/2020

**Yakup Harun ÇAVUŞ**



## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### RAYLEIGH NANOÇUBUKLARININ YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİNE GÖRE EKSENEL TİTREŞİMİ

**Yakup Harun ÇAVUŞ**

Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

**Danışman:** Doç. Dr. Mustafa Özgür YAYLI

Literatürdeki çalışmaların büyük çoğunluğunda, mesnetler bilinen özel koşullarla tanımlanmışlardır. Bu sınır koşulları gerçek hayatta tamamen uygulanamamaktadır. Bu yüzden bu çalışmada mikrokirişlerin mesnetleri yaylar olarak seçilmiştir. Bu çalışmadaki ana hedef ise yay sabitlerinin değerlerini değiştirerek tüm mesnetler için de geçerli olan bir denklem elde etmektir. Bu hedef doğrultusunda öncelikle yaylarla mesnetlenmiş bir Rayleigh nanoçubuğun aksenal serbest titreşimi incelenmiştir ve parametrelerin titreşim değerlerine etkileri gözlemlenmiştir. Daha sonra aksenal yüklenmiş konsol bir mikrokirişin aksenal statik analizi yapılmıştır. Bu analizde ağırlıklı artık yöntemleri kullanılmıştır. Bu yöntemler Galerkin, alt alan, en küçük kareler ve iki parametrelili yöntemlerdir. Çalışmanın son kısmında ise üçgen yayılı yüklenmiş konsol bir mikrokirişin eğilme analizi aynı ağırlıklı artık yöntemleri kullanılarak yapılmıştır. Sonuç olarak yaylar kullanıldığında tüm farklı sınır koşulları için bir denklem bulunabilmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Rayleigh modeli, karbon nanotüp, mikrokiriş, yay, ağırlıklı artık yöntemleri

**2020, vii + 74 sayfa.**

## ABSTRACT

MSc Thesis

FREE AXIAL VIBRATION OF RAYLEIGH NANORODS BASED ON NONLOCAL ELASTICITY THEORY

**Yakup Harun ÇAVUŞ**

Bursa Uludağ University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Civil Engineering

**Supervisor:** Assoc. Prof. Mustafa Özgür YAYLI

A great majority of studies, supports were identified as known special conditions. These boundary conditions cannot be applied in real life. So, in this study, supports of microbeams were chosen as strings. A main purpose of this study is obtaining an equation which can be applied for all boundary conditions when we changed values for strings. In line with this purpose, first free axial vibration of Rayleigh nanorods which were supported by strings was analysed and effects of parameters to values of vibrations were observed. Later axial static analysis of an axial loaded fixed cantilever microbeam was done. Weighted residuals methods were used in this study. These methods are Galerkin, subdomain, least squares and two parameters. In last part of study, bending analysis of a triangular distributed loaded fixed cantilever microbeam was done with using same weighted residuals methods. Consequently, an equation can be found for all different boundary conditions when strings were used.

**Keywords:** Rayleigh model, carbon nanotube, microbeam, string, weighted residuals methods

**2020, vii + 74 pages.**

## TEŞEKKÜR

Çalışma konusunun belirlenmesinde ve çalıőmamın hazırlanma sürecinin her aőamasında bilgilerini, tecrübelerini ve değerli zamanını benden esirgemeyerek bana her fırsatta yardımcı olan ve çalıőmaktan sonsuz gurur duyduğum değerli hocam Sayın Doç. Dr. M. Özgür YAYLI'ya, çalıőmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Togay KÜPELİ'ye, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan çok sevdiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yakup Harun ÇAVUŞ

06/07/2020



## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
SİMGELER DİZİNİ.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	VII
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Nanoteknoloji.....	1
1.2. Karbon Nanotüpler.....	2
1.3. Mikro Boyutlardaki Kirişler.....	3
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	4
2.1. Kuramsal Temeller.....	4
2.1.1. Yerel olmayan elastisite teorisi.....	4
2.1.2. Gerilme çifti teorisi.....	5
2.1.3. Gradyan elastisite teorisi.....	7
2.2. Kaynak Araştırması.....	7
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
3.1. Rayleigh Modelindeki Nanoçubuğun Serbest Titreşim Analizi.....	9
3.1.1. Mekanik model.....	9
3.1.2. Serbest titreşim.....	12
3.1.3. Harmonik titreşim analizi.....	14
3.1.4. Eksenel sınırlar içindeki nanokiriş.....	15
3.1.5. Çözüm yöntemi.....	16
3.1.6. Stokes dönüşümü.....	16
3.1.7. Rayleigh nanoçubuk için özdeğer problemi.....	18
3.2. Mikrokirişin Eksenel Statik Analizi.....	20
3.3. Ağırlıklı Artıklar Yöntemi.....	21
3.3.1. En küçük kareler yöntemi.....	21
3.3.2. Alt alan yöntemi.....	23
3.3.3. Galerkin yöntemi.....	24
3.3.4. İki parametrelili çözüm.....	26
3.4. Bir Mikrokirişin Eğilme Analizi.....	28
3.4.1. Galerkin yöntemiyle çözüm.....	32
3.4.2. En küçük kareler yöntemiyle çözüm.....	34
3.4.3. Alt alan yöntemiyle çözüm.....	36
3.4.4. İki parametre çözümü.....	37
4. BULGULAR.....	39
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	64
KAYNAKLAR.....	66
ÖZGEÇMİŞ.....	74



## SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$I$	Atalet momenti
$\theta_L$	Dönmeyi sınırlayan yay sabiti
$\theta_0$	Dönmeyi sınırlayan yay sabiti
$\omega$	Doğal frekans, Açısal frekans
$a_1, a_2, a_3$	Bilinmeyen katsayılar
$c_1, c_2, c_3$	Bilinmeyen katsayılar
$EI$	Eğilme rijitliği
$E$	Elastisite modülü
$\lambda$	Frekans parametresi
$\sigma$	Gerilme
$A$	Mikrokirişin enine kesit alanı
$L$	Mikrokirişin uzunluğu
$l_2$	Dönme değişimi malzeme parametresi
$x, y, z$	Koordinat sistemi takımları
$M$	Moment
$\mu$	Lame sabiti
$q$	Yayıllı yük
$R$	Artık fonksiyonu
$r$	Mikrokirişin yarıçapı
$S_L$	Ötelemeyi sınırlayan yay sabiti
$S_0$	Ötelemeyi sınırlayan yay sabiti
$\rho$	Yoğunluk
$U$	Yer değiştirme fonksiyonu
$\nu$	Poisson oranı
$W$	Eğilme fonksiyonu

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 1.1. Karbon nanotüp örnekleri.....	2
Şekil 3.1. İki ucu yayla sabitlenmiş bir nanoçubuk.....	9
Şekil 3.2. Eksenel yayılı yüklenmiş konsol bir mikrokiriş.....	20
Şekil 3.3. Üçgen yayılı yüklenmiş konsol bir mikrokiriş.....	28
Şekil 4.1. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=1$ ).....	40
Şekil 4.2. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=2$ ).....	41
Şekil 4.3. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=3$ ).....	42
Şekil 4.4. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=4$ ).....	43
Şekil 4.5. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=5$ ).....	44
Şekil 4.6. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=6$ ).....	45
Şekil 4.7. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=7$ ).....	46
Şekil 4.8. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=8$ ).....	47
Şekil 4.9. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=9$ ).....	48
Şekil 4.10. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=10$ ).....	49
Şekil 4.11. Yarıçap değişiminin titreşim frekansına etkisi.....	50
Şekil 4.12. Poisson oranının değişiminin titreşim frekansına etkisi.....	51
Şekil 4.13. Yerel olmayan parametrenin değişiminin titreşim frekansına etkisi.....	52
Şekil 4.14. Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=1$ ).....	53
Şekil 4.15. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=1$ ).....	54
Şekil 4.16. Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=5$ ).....	55
Şekil 4.17. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=5$ ).....	56
Şekil 4.18. Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=8$ ).....	57
Şekil 4.19. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=8$ ).....	58
Şekil 4.20. Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=10$ ).....	59
Şekil 4.21. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=10$ ).....	60
Şekil 4.22. Mikrokirişin boyunun titreşim frekansına etkisi.....	61
Şekil 4.23. Rayleigh nanoçubuğun titreşim grafiği.....	62
Şekil 4.24. Yöntemlere göre yer değiştirme denklemlerinin karşılaştırılması.....	62
Şekil 4.25. Ağırlıklı artık fonksiyon çözümlerinin karşılaştırılması.....	63

## ÇİZELGELER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Çizelge 4.1. Karbon nanotüpün mekanik özellikleri.....	39
Çizelge 4.2. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=1$ ).....	40
Çizelge 4.3. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=2$ ).....	41
Çizelge 4.4. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=3$ ).....	42
Çizelge 4.5. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=4$ ).....	43
Çizelge 4.6. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=5$ ).....	44
Çizelge 4.7. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=6$ ).....	45
Çizelge 4.8. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=7$ ).....	46
Çizelge 4.9. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=8$ ).....	47
Çizelge 4.10. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=9$ ).....	48
Çizelge 4.11. Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=10$ ).....	49
Çizelge 4.12. Yarıçap değişiminin titreşim frekansına etkisi.....	50
Çizelge 4.13. Poisson oranının değişiminin titreşim frekansına etkisi.....	51
Çizelge 4.14. Yerel olmayan parametrenin değişiminin titreşim frekansına etkisi.....	52
Çizelge 4.15. Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=1$ ).....	53
Çizelge 4.16. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=1$ ).....	54
Çizelge 4.17. Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=5$ ).....	55
Çizelge 4.18. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=5$ ).....	56
Çizelge 4.19. Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=8$ ).....	57
Çizelge 4.20. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=8$ ).....	58
Çizelge 4.21. Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=10$ ).....	59
Çizelge 4.22. Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=10$ ).....	60
Çizelge 4.23. Mikrokirişin boyunun titreşim frekansına etkisi.....	61
Çizelge 4.24. Ağırlıklı artık fonksiyon çözümlerinin karşılaştırılması.....	63

# 1. GİRİŞ

## 1.1. Nanoteknoloji

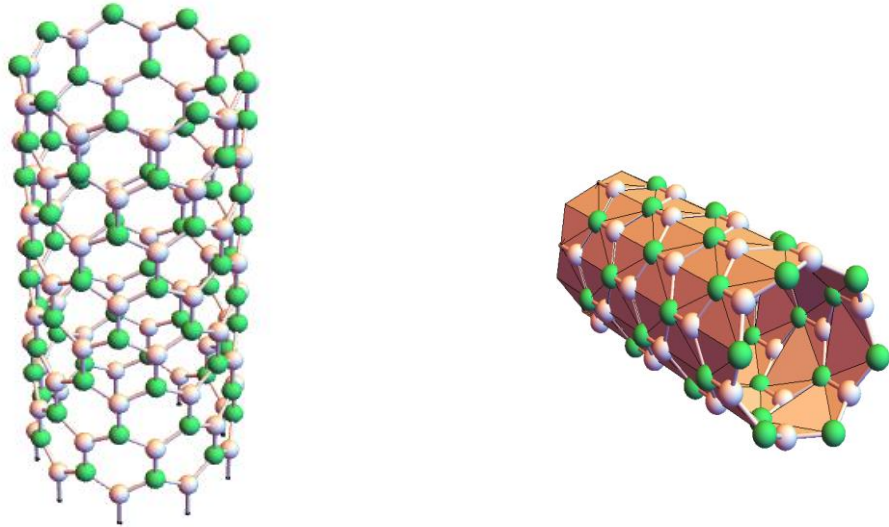
Nanoteknoloji, nano boyutlardaki maddelerin içeriğinin incelenmesini, analiz edilmesini ve bu analizler sonucu madde özelliklerinin geliştirilmesini ve bu maddelerin diğer bilim dallarına yardımcı olmasını amaç edinen bir bilim dalı olarak ortaya çıkmıştır. Nanoteknoloji ve nanobilimin ortaya çıkmasını sağlayan düşünce, 29 Aralık 1959'da Kaliforniya Teknoloji Enstitüsü'ndeki Amerikan Fizik Topluluğu'nun bir toplantısında; Amerikan fizikçi Richard Feynman'ın 'There's Plenty of Room at the Bottom' isimli konuşmasıyla başlamıştır. Özellikle yakın geçmişte tıp, kimya, elektronik, tekstil, biyomekanik, ilaç ve inşaat gibi çeşitli üretim alanlarında nanoteknoloji kavramı gitgide yaygınlaşmaktadır. Nano boyutları daha iyi anlamak için gösterilebilecek en iyi örnekler sıradan bir insanın bir saç telinin kalınlığının neredeyse 80 bin nanometre olarak ölçülmesidir. Başka bir örnek vermek gerekirse; bir bilyenin çapı ile dünyanın çapı arasındaki oran ve bir nanometre ile bir metrenin arasındaki oran aynıdır. Nano boyutlardaki ürünler "nanomalzeme" veya "nanopartikül" olarak adlandırılmaktadır. Maddeler genel olarak nano boyutlara sahipken genel özelliklerini taşımayabilir. Bu özelliklere örnek olarak manyetizma, yalıtım, kimyasal reaktiflik, iletkenlik, optik özellikler vb. verilebilir.

Günümüzde inşaat sektöründe yapı malzemesi olarak en yaygın kullanılan materyaller cam, kereste, çelik ve betondur. Ancak nanoteknolojinin gelişmesi ve hayatımıza girmesiyle birlikte beton ve çimentonun yapısına nano ölçeklerde parçacıklar ekleyerek daha dayanıklı yapı malzemeleri elde edilebilmektedir. Sıradan yapı malzemeleri yerine nanoteknoloji sayesinde geliştirilen daha yüksek performanslar sergileyebilen malzemeler kullanılmış ve bu şekilde nanoteknoloji inşaat sektörüne uyarlanmıştır.

Günümüzde nanoteknoloji gelişmiş ülkeler için büyük bir stratejik öneme sahiptir. Nanoteknolojinin yakın gelecekte teknolojiye en büyük devrimi gerçekleştirmesi beklenmektedir. Bu devrim için tüm ülkelerde yoğun çalışmalar gerçekleştirilmektedir. Ülkemizde de bu konuyla ilgili pek çok eğitim kurumu ve birimi kurulmuş ve bu birimler çalışmalarına başlamıştır.

## 1.2. Karbon Nanotüpler

Canlı organizmaların tamamının yapısında temel olarak karbon elementi bulunmaktadır. Karbon elementinin farklı allotroplarında birisi de grafitir. Sadece bir karbon atomu kalınlığında olan grafit katmanına grafen adı verilir. Bu grafenlerin yuvarlanmasıyla karbon atomlarının altıgen şekil oluşturarak meydana gelen yapıya da karbon nanotüp adı verilmiştir(Şekil 1.1.). Nano kelimesi Yunanca 'da cüce anlamına gelen 'nanos' kelimesinden türetilmiştir. Yakın geçmişte yapılan birçok bilimsel ve teknolojik çalışmada adı duyulan nanometre birimi; 1 metrelik bir birimin milyarda birini ifade etmektedir. Nanoteknoloji kullanılarak imal edilen malzemelerin büyük bir çoğunluğunda karbon nanotüpler kullanılmıştır. Silindirik bir kesite sahip olan nanotüpler, birkaç nanometrelik çapa ve milimetrelerle ifade edilen uzunluklara sahiptirler. Bu da çaplarının milyonlarca katı uzunluğa sahip oldukları anlamına gelmektedir. Karbon nanotüpleri diğer malzemelere göre daha avantajlı kılın özellikleri ise sağlamlıkları, ısı ve elektrik iletkenlikleridir. Karbon nanotüplerin yüzey alanları çok büyük oldukları (1 gram nanotüp 500m<sup>2</sup>'lik bir alan kaplar) ve adsorpsiyon (yüzey üstünde tutma) özellikleri fazla olduğunda suyun; zehirli kimyasallardan, biyolojik atıklardan ve çeşitli tuzlardan ayrıştırılması olayında bir zar olarak kullanılmaktadır. Ayrıca sağlamlıkları sayesinde spor malzemeleri ve güvenlik eşyalarının üretiminde de kullanılmaktadır.



Şekil 1.1. Karbon nanotüp örnekleri

### **1.3. Mikro Boyutlardaki Kirişler**

Mikro-elektro-mekanik sistemler adıyla bilinen yeni nesil teknoloji, üretim sanayisinden sağlığa, savunma sistemlerinden iletişim teknolojilerine kadar pek çok alanda kullanılmaktadır. Bu teknolojinin geleceğimizi değiştireceği; bilim adamları arasında da yaygın bir düşüncedir.

Bu sistemlerin ana yapısı olarak kabul edilmesinden dolayı, mikro kirişler son yıllarda pek çok araştırmanın temelini oluşturmuştur. Mikro kiriş kavramıyla; uzay ve havacılık, optik fiziği, akışkanlar mekaniği, biyoloji, tıp, bilgisayar ve fizik gibi birçok alanda karşılaşmaktadır. Sıvı taşıma amacıyla üretilen mikro kirişler; mikrobiyoloji analizlerinde, hücre içi protein sentezinde ve ilaç enjeksiyonu gibi işlemlerde kullanılırlar. Bu yüzden kalınlıklarının makro kirişlere göre çok daha küçük olması gerekmektedir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

### 2.1. Kuramsal Temeller

#### 2.1.1. Yerel olmayan elastisite teorisi

Homojen-izotropik elastik katılar için, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi aşağıdaki denklemler ile tanımlanmıştır (Eringen,1983):

$$\sigma_{kl,l} + \rho \left( \mathfrak{f}_l - \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{kl}(x) = \int_V \alpha(|x - x'|, X) T_{kl}(x') dV(x') \quad (2.2)$$

$$T_{kl}(x') = \lambda \epsilon_{mm}(x') \delta_{kl} + 2\mu \epsilon_{kl}(x') \quad (2.3)$$

$$\epsilon_{kl}(x') = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k(x')}{\partial x'_l} + \frac{\partial u_l(x')}{\partial x'_k} \right) \quad (2.4)$$

Burada,  $\sigma_{kl}$  yerel olmayan gerilme tensörü,  $\rho$  gövdenin kütle yoğunluğu,  $u_l$  yer değiştirme vektörü,  $\alpha|x|$  doğrusal diferansiyel bir operatör tarafından görüntülenmiş,  $\mathfrak{f}_l$  uygulanmış kuvvet yoğunluğu,  $T_{kl}(x')$  herhangi bir  $x'$  noktasındaki Cauchy gerilme tensörü,  $\epsilon_{kl}(x')$  yük tensörü,  $t$  zamanı belirtir ve  $\alpha|x - x'|$  Öklid'in uzaklık formudur. Sıradaki bağıntı ise yerel olmayan elastisite teorisinde kullanılabilir:

$$\mathfrak{R}\alpha(|x - x'|) = \delta(|x - x'|) \quad (2.5)$$

(2.2) numaralı eşitlikten aşağıdaki operatör türetilmiştir:

$$\mathfrak{R}\sigma_{kl} = T_{kl} \quad (2.6)$$

Ayrıca (2.1) numaralı eşitlikten aşağıdaki bağıntı türetilebilir:

$$T_{kl,l} + \mathfrak{R}(\mathfrak{f}_l - \rho \ddot{u}_k) = 0 \quad (2.7)$$

Diferansiyel operatör aşağıdaki kompakt şekliyle ifade edilmiştir:

$$\mathfrak{R} = (1 - (e_0\alpha)^2\nabla^2) = 0 \quad (2.8)$$

Burada,  $e_0\alpha$  yerel olmayan parametre ve  $\nabla^2$  Laplasyen'dir. O halde Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisindeki kurucu eşitlik yerel olmayan parametre koşullarında ifade edilebilmektedir:

$$[1 - (e_0\alpha)^2\nabla^2]\sigma_{kl} = T_{kl} \quad (2.9)$$

### 2.1.2. Gerilme çifti teorisi

İlk olarak 1960'larda gerilme çifti teorisi Mindlin ve Tiersten (1962), Mindlin (1964, 1965), Toupin (1962) ve Koiter (1964) tarafından öne sürüldü.

Bu teori kapsamında, iki Lamé sabitine ilave olarak yüksek dereceli iki malzeme uzunluk ölçeği parametresi önerildi. Bu teorisin avantajlarından biri, mikropolar teoriye ilave dört parametrenin ve gerilme-şekil değiştirme teorisine ilave beş parametrenin iki parametreye indirilmiş olmasıdır.

Gerilme çifti teorisinin içeriğinde, şekil değiştirme enerjisinin yoğunluğu hem şekil değiştirmenin hem de eğriliğin bir fonksiyonu şeklindedir.  $\Omega$  bölgesini tamamen kaplayan şekil değiştirmiş lineer elastik bir materyal için şekil değiştirme enerjisini tanımlayan  $U$  fonksiyonu şu şekildedir (Yang vd 2002):

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega} (\sigma_{ij} * \epsilon_{ij} + m_{ij} * \chi_{ij}) dv. \quad (2.10)$$

Bu bağıntıda,  $\sigma_{ij}$  gerilme tensörünü,  $\epsilon_{ij}$  şekil değiştirme tensörünü,  $m_{ij}$  gerilme çifti tensörüne ait deviatorik parçasını ve  $\chi_{ij}$  ise eğrilik tensörünü temsil etmektedir.

$$\sigma_{ij} = \lambda * \epsilon_{kk} * \delta_{ij} + 2 * \mu * \epsilon_{ij} \quad (2.11)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.12)$$



$$m_{ij} = 2 * \ell_2^2 * \mu * \chi_{ij} \quad (2.13)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (2.14)$$

Burada,  $\lambda$  ve  $\mu$  Lamé sabitlerini,  $\ell_2$  malzeme boyut ölçek parametresini,  $u$  deplasman vektörünü ve  $\theta$  dönme vektörünü tanımlamaktadır.

$$\theta_i = \frac{1}{2} * \epsilon_{ijk} * u_{k,j} \quad (2.15)$$

$\epsilon_{ijk}$  permütasyon sembolüdür ve

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ijk'nin ileri permütasyonu} \\ -1 & \text{ijk'nin geriye permütasyonu} \\ 0 & \text{i, j ya da k'nın eşit olması} \end{cases} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Bazı araştırmacılar dairesel silindirelerin davranışlarını gerilme çifti teorisine ilişkilendirerek araştırdılar. (Zhou ve Li, 2001; Anthoine, 2000). Yukarıda da açıklandığı üzere, bu teori diğer teorilerden farklı olarak en düşük ek parametrelere sahiptir, ancak yüksek dereceli malzemelerin yönetilmesindeki zorluklardan dolayı, deneyler ve malzemeler için malzeme uzunluğu ölçek parametreleri için, Yang, Chong, Lam ve Tong (2002) yeni bir ek denge denklemi kullanarak, moment çiftlerinin dengesi, klasik denge denklemlerine ek olarak kuvvetler ve kuvvet momentleri, iki Lamé sabitine ek olarak daha yüksek dereceli bir malzeme uzunluk ölçeği parametreleri içeren değiştirilmiş bir gerilme çifti teorisi ortaya atılmıştır. [Park ve Gao (2006)] ve Kong, Zhou, Nie ve Wang (2008), modifiye gerilme çifti teorisine dayanan Euler-Bernoulli kirişlerini inceledi ve Modifiye gerilme çifti teorisine dayanan isteğe bağlı, şekilli doğrusal olmayan mikro plakalar Asghari (2012) tarafından geliştirilmiştir.

### 2.1.3. Gradyan elastisite teorisi

Karbon nanotüplerdeki bükülme dalgalarının tasarlanması CNT'ler aracılığıyla, diğer araştırmalara göre, ilgili moleküler dinamikler MD simülasyonlarıyla uyumlu bir şekilde, kendi içsel nano ölçekli heterojenlikleri sebebiyle oluşmaktadır.

Klasik elastisite teorisi, kabuk ve kiriş teorisi ile birlikte fazlasıyla başarılı olmuş ve bununla birlikte MD simülasyonları ile uyum sağlamıştır. Aifantis'in çalışmaları ile başlayan, üst düzey gradyan ve savunulan tipteki yerel olmayan elastisite teorileri Mindlin, Kröner ve Eringen tarafından tekrar güncellendi ve bu sayede sınır değer problemlerini çözmek için daha basit ve daha güçlü yöntemler ortaya çıkarılmak amaçlandı.

### 2.2. Kaynak Araştırması

Malzeme dayanımı ile ilgili bilgiler veren ilk araştırmaları ve çalışmalar İtalyan bilim insanı Galileo Galilei tarafından 1638 yılında yapılmıştır. Galilei ankastre bir kirişin kendi ağırlığına karşı dayanımına ulaşabilse de gerilme ya da şekil değiştirme gibi kavramlara ulaşamamıştır. Ancak 1678 yılında kuvvet ve şekil değiştirme ilişkisi Robert Hooke tarafından keşfedilmiştir. 1821 yılında Navier elastisite teorisinin genel denge denklemleri üzerindeki çalışmalarını sunmuştur. Cauchy ise bir noktadaki gerilme notasyonunu gösteren çalışmalar yapmıştır.

1867 yılında ise Winkler elastik bir zemini yaylar yardımıyla tasarlamıştır. Timoshenko 1937 yılındaki çalışmasıyla titreşim teorisinde kullanılmak üzere modern hesaplama teknikleri geliştirmiştir. Berg 1958 yılında elastik bir zemine yerleştirilen kirişin rijitlik katsayısı hakkında bilgi edinmek amacıyla bir yöntem üzerinde çalışmıştır. Tanyi 1962 yılında elastik zemin üzerindeki kısmen kısıtlanmış kirişler hakkında bir çalışma yapmıştır. 1964 yılındaki bir çalışmasında Bald elastik zemin üzerindeki kirişler üzerinde incelemelerde bulunmuştur. Yine 1964 yılında Badr elastik zemin üzerine yerleştirilen kirişlerin farklı yükleme koşulları altındaki davranışlarını incelemiştir. Chang 1965 yılında elastik bir zemin üzerindeki sonsuz uzunluktaki bir kirişin davranılı üzerinde çalışmıştır. Kao 1968 yılındaki bir çalışmasında lineer olmayan tam elastik bir zemin üzerinde bulunan kirişler hakkında incelemelerde bulunmuştur. Tuma ve Alberti 1970

yılında elastik zemin üzerinde bulundan kirişlerin statik verilerini incelemişlerdir. Yine 1970 yılında Graza bir çalışmada elastik zemin üzerindeki kirişlerin matris değerlerini incelemişlerdir. Smith ve Herrmann 1972 yılında elastik zemin üzerinde bulunan bir kirişin ardışık kuvvetler etkisi altında stabilite durumunu incelemişlerdir.

Eringen tarafından 1983 yılında öne sürülen ve 2 ek malzeme sabitiyle tanımlanan yerel olmayan elastisite teorisi, mikro veya nano boyutlardaki malzemelerin ve yapıların analiz edilmesinde araştırmacılar arasında sık kullanılan yüksek mertebeli bir elastisite teorisidir. Lai 1990 yılındaki bir çalışmada elastik zemin üzerindeki bir kirişin dinamik davranışlarını incelemiştir. 1991 yılında Oruçoğlu yerel olmayan elastisite teorisi içerisinde çatlak problemlerini incelemiştir. Stekel 1992 yılında yaptığı bir çalışmada dairesel kesite sahip kirişlerin elastik zemin üzerindeki davranışlarını araştırmıştır.

Endo ve Iijima 1996 yılında karbon nanotüpleri incelemişlerdir. Benoit 1996 yılındaki bir çalışmada nano ve mikro kiriş analizleri yapmıştır. 1997 yılındaki bir çalışmada Ebbesen karbon nanotüplerin özellik ve hazırlıklarını incelemiştir. 1997 yılındaki bir çalışmada Jones elastik zemine oturan kirişlerin analizini sonlu farklar teorisini kullanarak yapmıştır. Oğuzgan ve Ayvaz 2002 yılında elastik zemin üzerinde bulunan bir kirişin serbest titreşim analizini değiştirilmiş Vlasov modelini kullanarak yapmışlardır. Koç 2003 yılında nanotüpler hakkında araştırmalar yapmıştır. 2004 yılında Meyyappan karbon nanotüp bilimini ve uygulama alanlarını araştırmıştır. King 2007 yılında nanoteknoloji alanıyla alakalı araştırma ve gelişmeleri araştırmıştır.

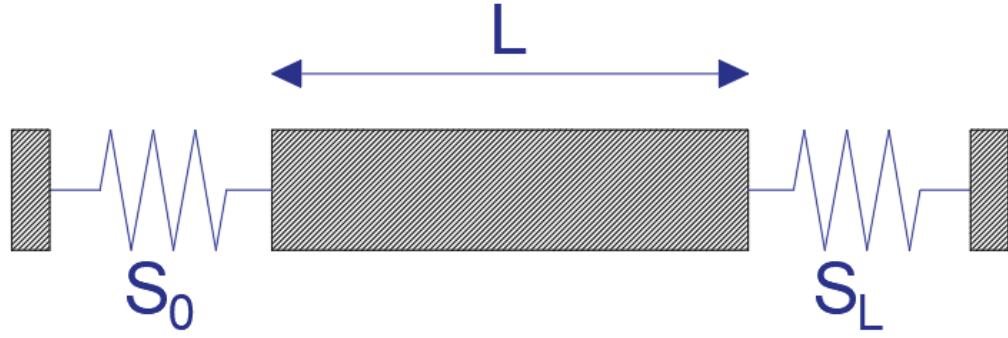
Aydoğdu tarafından 2009 yılında yazılan makalelerde yerel olmayan elastik çubuk modelleri geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Bununla birlikte eksenel titreşimin de etkisi göz önüne alındı ve gerekli araştırmalar yapılmıştır.

Akgöz 2010 yılındaki bir çalışmada yüksek mertebeli elastisite teorisiyle değiştirilmiş şekil değiştirme ve değiştirilmiş gerilme çifti değişimini elastisite teorileri yardımıyla, bir mikrokirişin eğilme ve burkulma analizini yapmıştır. 2012 yılında Varma nanoteknoloji kullanım amaçları ve uygulama alanları hakkında birçok çalışma yapmıştır. 2017 yılındaki bir çalışmada Aya doğrusal olmayan bir eksene sahip olan nanoçubukların yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak düzlem dışı statik ve dinamik analizlerini yapmıştır.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Rayleigh Modelindeki Nanoçubuğun Serbest Titreşim Analizi

##### 3.1.1. Mekanik model



**Şekil 3.1.** İki ucu yayla sabitlenmiş bir nanoçubuk

Bir nanotüpün boyu  $L$  ve çapı  $d$  olarak kabul edilirse (Şekil 3.1.) ince tüpün aksenal hareketi için yerel olmayan temel denklemi şu şekilde yazılır (Ecsedi 2017):

$$\sigma_z - (e_0\alpha)^2 \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = E\varepsilon_z, \quad (3.1)$$

Burada  $E$  Elastisite modülü,  $\sigma_z$  yerel olmayan normal gerilme,  $\alpha$  iç karakteristik uzunluk,  $e_0$  malzemenin deneylerle belirlenmiş bir sabiti ve  $z$  de aksenal koordinattır.  $\mu = (e_0\alpha)^2$  parametresi yerel olmayan parametre olarak adlandırılır ve karbon nanotüp için  $\mu < 2 \text{ nm}^2$ 'dir. Yol gösterici denklemler kartezyen koordinat sisteminde  $Oxyz$  ( $0 \leq z \leq L$ ),  $z$  ekseni karbon nanotüpün merkezi olacak şekilde formüle edilir.  $x$ ,  $y$  ve  $z$  yönlerindeki yer değiştirmeler  $u$ ,  $v$  ve  $w$  olarak gösterilir. Rayleigh modelinde

$$u = -\nu \frac{\partial w}{\partial z} x, \quad v = -\nu \frac{\partial w}{\partial z} y, \quad w = w(z, t), \quad (3.2)$$

$t$  zaman koordinatı ve  $\nu$  Poisson oranıdır. Nanotüpün kinetik enerjisi şu şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA dz = \\
&= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left[ A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \nu^2 I \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \right)^2 \right] dz
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Burada  $A$  enine kesit alanı ve  $I$  enine kesitin eylemsizlik polar momentidir ve şöyle tanımlanır:

$$I = \int_A (x^2 + y^2) dA. \tag{3.4}$$

ve  $\rho$  kütle yoğunluğudur. Eksenel yük  $N$  ise şu şekilde hesaplanabilir:

$$N = \int_A \sigma_z dA \tag{3.5}$$

(3.1) ve (3.5) denklemleri birlikte çözülürse:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.6}$$

sonucuna varılır ve;

$$N - \mu \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} = EA \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{3.7}$$

elde edilir. Mevcut problemde hareket denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.8}$$

(3.7) ve (3.8) denklemlerinden

$$N = EA \frac{\partial w}{\partial z} + \mu \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} \quad (3.9)$$

elde edilir. Hareket denklemi ve mesnet koşulları Hamilton prensibinden yararlanılarak şu şekle getirilir:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\delta T - N \delta \varepsilon_z) dz dt = 0, \quad (3.10)$$

Bu form, doğru yol olduğu düşünülen;  $t_1$  ve  $t_2$  iki anlık değerine denk gelen, tüm muhtemel değişken yollar için geçerlidir ( $t_1 < t_2$ ). (3.10) varyasyon denklemine dayalı, detaylı bir hesaplama aşağıdaki sonuçları verir:

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m(\mu + (\nu R)^2) \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} - (EA) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad 0 < z < L, \quad (3.11)$$

$$\left[ m(\mu + (\nu R)^2) \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} + (EA) \frac{\partial w}{\partial z} \right] \delta w = 0, \quad z = 0 \quad \text{ve} \quad z = L \quad \text{için} \quad (3.12)$$

Bu denklem için gerekli değerler ise şöyle tanımlanır:

$$m = \rho A, \quad R^2 = \frac{I}{A}, \quad (3.13)$$

(3.12) denklemindeki mesnet koşullarından şu denklemler elde edilir:

- sabit uç için

$$w = 0, \quad (3.14)$$

- serbest uç için

$$m(\mu + (\nu R)^2) \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial t^2} + (EA) \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.15)$$

Burada, Hamilton prensibinin  $\nu = 0$  değeri uygulanarak türetilen denklemle aynı hareket denkleminin elde edildiği görülmüştür. Önceden elde edilen (3.13) numaralı denklemden

hazırlanan mesnet kuvveti, önceki sayfadaki (3.15) numaralı denklemden ulaşılandan farklıdır.

$$S = EA \quad (3.16)$$

### 3.1.2. Serbest titreşim

Nanotüpün serbest titreşimi için  $w(z,t)$  fonksiyonu şu şekilde temsil edilebilir:

$$w(z,t) = W(z)\text{Cos}\omega t, \quad (3.17)$$

Burada  $\omega$  dairesel frekanstır. (3.17) numaralı denklemi (3.11), (3.14) ve (3.15) numaralı denklemlerde yerine koymak bize şu denklemi verir:

$$[\omega^2 m(\mu + (\nu R)^2) - (EA)] \frac{d^2 W}{dz^2} - (\omega^2 m)W = 0 \quad 0 < z < L \quad (3.18)$$

- sabit uç için

$$W = 0, \quad (3.19)$$

- serbest uç için

$$[-\omega^2 m(\mu + (\nu R)^2) + (EA)] \frac{dW}{dz} = 0, \quad (3.20)$$

(3.18) numaralı denklem şu şekilde yeniden formüle edilebilir:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \alpha^2 W = 0 \quad 0 < z < L \quad (3.21)$$

Burada  $\alpha$  parametresi şu şekilde tanımlanmalıdır:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 m}{EA - \omega^2 m(\mu + (\nu R)^2)}, \quad (3.22)$$

Ardından boyutsuz frekans parametresi,  $\Omega$ ; (3.22) numaralı denklemde yerine konulur:

$$\alpha^2 = \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2(\mu + (\nu R)^2/L^2)} \quad (3.23)$$

Bu parametreler şöyle tanımlanmışlardır:

$$\Omega^2 = \frac{m\omega^2 L^2}{EA}. \quad (3.24)$$

Diferansiyel denklemin genel çözümü ise aşağıdaki gibidir:

$$W(z) = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z, \quad (3.25)$$

İki ucu sabit mesnetlenmiş bir durum için boyutsuz titreşimin 1. modu; (3.19), (3.23) ve (3.25) numaralı denklemlerden şu şekilde elde edilir:

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{(i\pi)^2}{(i\pi)^2((\mu + (\nu R)^2)/L^2) + 1}} \quad i = (1,2,3 \dots \dots) \quad (3.26)$$

Bu durumda bir ucu sabit mesnetlenmiş bir ucu serbest bir eleman için şu denklemler bulunur:

$$W(0) = 0, \quad (3.27)$$

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_{z=L} = 0 \text{ ya da } -\omega^2 m(\mu + (\nu R)^2) + EA = 0 \quad (3.28)$$

Boyutsuz titreşimin 1. modu için (3.27) ve (3.28) numaralı denklemlerden aşağıdaki sonuç çıkarılabilir:

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{[(2i - 1)(\pi/2)]^2}{(\mu + (\nu R)^2/L^2)[(2i - 1)(\pi/2)]^2 + 1}} \quad i = (1,2,3,\dots\dots) \quad (3.29)$$



Gayet açık bir şekilde görülmektedir ki  $\nu = 0$  için elde edilen sonuçlar (3.26) ve (3.29) numaralı denklemlerde değerlendirilebilir. (3.27) ve (3.28) numaralı denklemler kullanılarak yeni bir 1. mod titreşim parametresi  $\Omega_0$  elde edilir.

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{(\mu + (\nu R)^2)/L^2}}, \quad (3.30)$$

Bu 1. mod titreşim parametresi  $\Omega_0$ ,  $\alpha^2 = \infty$  iken  $\Omega_0$  için gerçek bir 1. mod değeri vermez. Yanal hareketin eylemsizliği ihmal edilirse ( $\nu = 0$ ), boyutsuz titreşimin 1. mod değeri  $\bar{\Omega}_i$  olarak ifade edilir. Enine kesitin yanal hareketinin boyutsuz titreşimin 1. mod değerine etkisi sonraki eşitlikte verilmiştir:

- iki ucu sabit mesnet durumu için

$$\frac{\Omega_i}{\bar{\Omega}_i} = \sqrt{\frac{1 + (i\pi/L)^2\mu}{1 + (i\pi/L)^2(\mu + (\nu R)^2)}} \quad i = (1,2,3,\dots), \quad (3.31)$$

- bir ucu sabit bir serbest mesnet durumu için

$$\frac{\Omega_i}{\bar{\Omega}_i} = \sqrt{\frac{1 + ((2i - 1/2 L)\pi)^2\mu}{1 + ((2i - 1/2 L)\pi)^2(\mu + (\nu R)^2)}} \quad i = (1,2,3,\dots), \quad (3.32)$$

### 3.1.3 Harmonik titreşim analizi

Nanokirişin harmonik titreşim analizi için  $w(z,t)$  fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$w(z,t) = W(z)\text{Cos}\omega t \quad (3.33)$$

(3.11) ve (3.33) bağıntıları arasındaki ilişki kullanılarak, yerel olmayan elastisite teorisi temelinde aksenal sapma bağıntısı şu şekilde oluşturulur:

$$[\omega^2 m(\mu + (\nu R)^2) - (EA)] \frac{d^2 W}{dz^2} + (\omega^2 m)W = 0, \quad 0 < z < L \quad (3.34)$$

Burada  $W$  aksenel sapma fonksiyonunu ifade eder. Benzer şekilde (3.15) bağıntısından aşağıda verilen sınır koşulları ilişkileri türetilir:

$$-\omega^2 m[\mu + (\nu R)^2] \frac{dW}{dz} + [EA] \frac{dW}{dz} = S_0, \quad z = 0 \quad (3.35)$$

$$-\omega^2 m[\mu + (\nu R)^2] \frac{dW}{dz} + [EA] \frac{dW}{dz} = S_L, \quad z = L \quad (3.36)$$

$S_0$  ve  $S_L$  sınır kuvvetlerini temsil etmektedir. Önceki bağıntılarda ifade edilmiş olan ilişkiler aksenel yay katsayıları ve uçlardaki aksenel yer değiştirmeler ile ifade edilebilir.

$$s_0 W_0 = -\omega^2 m[\mu + (\nu R)^2] \frac{dW}{dz} + [EA] \frac{dW}{dz}, \quad z = 0 \quad (3.37)$$

$$s_L W_L = -\omega^2 m[\mu + (\nu R)^2] \frac{dW}{dz} + [EA] \frac{dW}{dz}, \quad z = L \quad (3.38)$$

$s_0$  ve  $s_L$  ifadeleri ise uçlardaki yay katsayılarını temsil eder.  $W_0$  ve  $W_L$  sınır noktalarındaki aksenel sapmaların gösterimidir.

### 3.1.4 Aksenel sınırlar içindeki nanokiriş

Fe (III) iyonlarını ve hidrojen gazını algılama konusunda nano boyutlu sensörler çok yarar sağlar. Nanokirişler kullanım alanlarının daha geniş olması amacıyla deforme olabilen sınır koşulları altında modellenmiştir. Rayleigh nanokirişlerinin yansıtıcılık özellikleri aksenel sınırlamalarla değiştirilebilir ve nanokirişin yöneliminin elektrik alanıyla değiştirilmesi durumunda mükemmel görüntüler elde edilebilir. Bu bölümde aksenel yaylar ile tutulu olan nanokirişin aksenel titreşim analizi Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi ve Rayleigh modeli temel alınarak yapılmıştır. Önerilmiş olan analitik yöntemin ana düşüncesi, burulma yayı katsayıları dahil edilmek üzere bir özdeğer problemi ortaya çıkarmaktır.

### 3.1.5 Çözüm yöntemi

Eksenel yer değiştirme fonksiyonu (3.34) numaralı bağıntıda aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$W(x) = \begin{cases} W_0 & z = 0 \\ W_L & z = L \\ \sum_{N=1}^{\infty} A_N \sin(\beta_N z) & 0 < z < L \end{cases} \quad (3.39)$$

Burada;

$$\beta_N = \frac{N\pi}{L} \quad (3.40)$$

şeklinde ifade edilebilir.

### 3.1.6 Stokes dönüşümü

Bu tezde Stokes dönüşümünden yararlanılmıştır. (Yaylı 2016, Yaylı ve ark. 2015). (3.39)'da verilmiş olan  $A_N$  katsayısı şu şekilde temsil edilir:

$$A_N = \frac{2}{L} \int_0^L W(z) \sin(\beta_N z) dz \quad (3.41)$$

(3.39) bağıntısının  $z$ 'ye göre türevini alırsak:

$$W'(x) = \sum_{N=1}^{\infty} \beta_N A_N \cos(\beta_N z) \quad (3.42)$$

bağıntısını elde ederiz. (3.42) bağıntısı Fourier kosinüs serisi ile ifade edilecek olursa:

$$W'(x) = \frac{f_0}{L} + \sum_{N=1}^{\infty} f_N \cos(\beta_N z) \quad (3.43)$$

Burada;

$$f_0 = \frac{2}{L} \int_0^L W'(z) dz = \frac{2}{L} [W(L) - W(0)] \quad (3.44)$$

$$f_N = \frac{2}{L} \int_0^L W'(z) \cos(\beta_N z) dx (N = 1, 2, \dots) \quad (3.45)$$

Şeklinde ifade edilir. Bulunan bağıntının integralini alıp (3.45) denkleminde yerine yazacak olursak:

$$f_N = \frac{2}{L} [W(x) \cos(\beta_N z)]_0^L + \frac{2}{L} [\beta_N \int_0^L W(z) \sin(\beta_N z) dz] \quad (3.46)$$

$$f_N = \frac{2}{L} [(-1)^N W(L) - W(0)] + \beta_N A_N \quad (3.47)$$

bağıntıları oluşturulur. Benzer şekilde yüksek mertebeden türevler aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{W_L - W_0}{L} + \sum_{N=1}^{\infty} \cos(\beta_N z) \left( \frac{2((-1)^N W_L - W_0)}{L} + \beta_N A_N \right) \quad (3.48)$$

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2} = - \sum_{N=1}^{\infty} \beta_N \sin(\beta_N z) \left( \frac{2((-1)^N W_L - W_0)}{L} + \beta_N A_N \right) \quad (3.49)$$

(3.39) ve (3.49) bağıntıları (3.34) denkleminde yazılırsa,  $A_N$  katsayısı ve açısal dönme fonksiyonu  $w(x, t)$   $W_0$  ve  $W_L$  cinsinden yazıldığı durumda aşağıdaki bağıntı oluşturulur:

$$A_N = \frac{2\beta_N((-1)^{n+1}W_L + W_0)\psi_N}{L(\beta_N^2\psi_N - \omega^2 m)} \quad (3.50)$$

Burada,

$$\psi_N = (\text{AE} - \omega^2 m(\mu + (\nu R)^2)) \quad (3.51)$$

ifadesi bulunur. Yukarıda verilen iki bağıntıdaki ilişki kullanılarak, eksenel sapma fonksiyonu şu şekilde bulunur:

$$W(z) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{2\beta_N((-1)^{n+1}W_L + W_0)\psi_N}{L(\beta_N^2\psi_N - \omega^2 m)} \sin(\beta_N z) \quad (3.52)$$

### 3.1.7. Rayleigh nanoçubuk için özdeğer problemi

(3.48) ve (3.50) bağıntıları (3.37) ve (3.38) bağıntılarında yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} & (S_1(\Omega^2) + \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} - S_0 - 1 \\ & + \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-\Omega^2)(S_1 L^2(-\Omega^2) + S_2(L - \nu R \Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(-\Omega^2) + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) W_0 (S_1(-\Omega^2) - \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} + 1 \\ & - \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^n(-\Omega^2)(S_1 L^2(-\Omega^2) + S_2(L - \nu R \Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(-\Omega^2) + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) W_L \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} & (S_1(-\Omega^2) - \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} + 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^n(-\Omega^2)(S_1 L^2(-\Omega^2) + S_2(L - \nu R \Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(-\Omega^2) + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) W_0 \\ & + (S_1(\Omega^2) + \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} - S_L - 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-\Omega^2)(S_1 L^2(-\Omega^2) + S_2(L - \nu R \Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(-\Omega^2) + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) W_L \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Burada;

$$S_1 = \frac{\mu}{L^2} \quad (3.55)$$

$$S_2 = L + \nu R\Omega \quad (3.56)$$

$$S_n = L^2 + \pi^2 \nu^2 n^2 R^2 \quad (3.57)$$

$$\Omega^2 = \frac{m\Omega^2 L^2}{EA} \quad (3.58)$$

$$S_0 = \frac{s_0 L}{EA} \quad (3.59)$$

$$S_L = \frac{s_L L}{EA} \quad (3.60)$$

Şeklinde tanımlanır. (3.53) ve (3.54) numaralı bağıntılar matris formunda şu şekilde yazılır:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 \\ W_L \end{bmatrix} = 0 \quad (3.61)$$

Buradan;

$$c_{11} = (S_1(\Omega^2) + \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} - S_0 - 1) + \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-\Omega^2)(S_1 L^2(-\Omega^2) + S_2(L - \nu R\Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(-\Omega^2) + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) \quad (3.62)$$

$$c_{12} = \left( S_1(-\Omega^2) - \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} + 1 - \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^n(-\Omega^2)(S_1 L^2(-\Omega^2) + S_2(L - \nu R\Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(-\Omega^2) + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) \right) \quad (3.63)$$

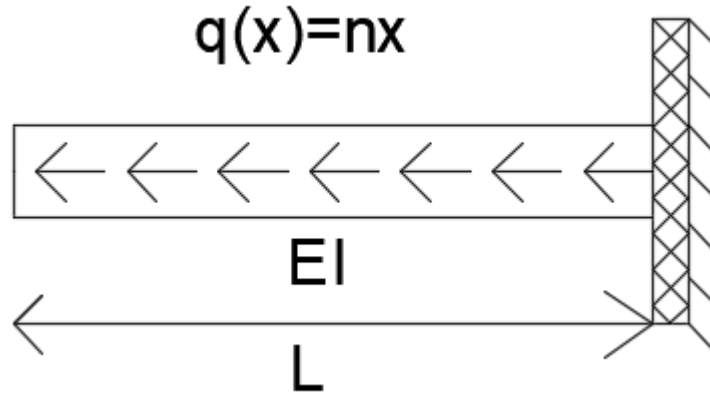
$$c_{21} = (S_1(-\Omega^2) - \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} + 1) - \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^n(-\Omega^2)(S_1 L^2(-\Omega^2) + S_2(L - \nu R\Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(-\Omega^2) + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) \quad (3.64)$$

$$c_{22} = \left( S_1(\Omega^2) + \frac{\nu^2 R^2 \Omega^2}{L^2} - S_L - 1 \right. \\ \left. + \sum_{N=1}^{\infty} \left( \frac{2(-\Omega^2)(S_1 L^2(-\Omega^2) + S_2(L - \nu R \Omega))}{L^2(\pi^2 S_1 n^2(-\Omega^2) + \pi^2 n^2) - \Omega^2 S_n} \right) \right) \quad (3.65)$$

bağıntıları elde edilir. Rayleigh nanoçubuğun aksenal titreşim frekansları katsayı matrisinin sıfıra eşitlenmesi ile hesaplanabilir.

$$|c_{ij}| = 0, (i, j = 1, 2) \quad (3.66)$$

### 3.2. Mikrokirişin Aksenal Statik Analizi



**Şekil 3.2.** Aksenal yayılı yüklenmiş konsol bir mikrokiriş

Bu bölümde Şekil 3.2’de verilmiş olan mikrokirişin aksenal statik analizi yapılmıştır. Bu analiz yapılırken ağırlıklı artık fonksiyonları kullanılacaktır. (2.9) numaralı bağıntı kullanılarak, aksenal yer değiştirme koşullarını yöneten denklem aşağıdaki gibi yazılır:

$$EA \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + q(x) - \mu \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x^2} = 0, \quad (3.67)$$

$$(e_0 \alpha)^2 = \mu. \quad (3.68)$$

Burada  $u(x)$  aksenal yer değiştirmeyi,  $E$  elastisite modülünü ve  $A$  en kesit alanını belirtir. (3.67) numaralı eşitlik, nanoçubuğun sabit yer değiştirmesini yöneten diferansiyel denklemdir. Yukarıdaki eşitliğin  $x$  değişkenine göre integrali alınırsa:

$$EA \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \int_0^L q(x) - \mu \frac{\partial q(x)}{\partial x} = 0, \quad (3.69)$$

denklemini elde edilir. Bu çalışmada, Şekil 3.2’de görülen konsol nanoçubuk yayılı bir aksenal yüküle yüklenmiştir:

$$q(x) = \eta x. \quad (3.70)$$

Burada  $\eta$  yayılı yükün eğimini tanımlayan bir katsayıdır ve değeri on alınmıştır.

### 3.3. Ağırlıklı Artıklar Yöntemi

Bu bölümde (3.69) numaralı eşitlikte verilen aksenal yüklenmiş bir nanoçubuğun ağırlıklı artıklar yöntemiyle çözümlü incelenecektir. Literatürde birçok ağırlıklı artık yöntemi bulunmakla beraber bu çalışma kapsamında en küçük kareler yöntemi, alt alan yöntemi, Galerkin yöntemi ve iki parametrelili çözümlü yöntemi kullanılacaktır.

#### 3.3.1 En küçük kareler yöntemi

En küçük kareler yöntemi; bilinmeyen koşullara göre hatayı minimize etmek için ayrılmaz bir alan artık fonksiyonuna ihtiyaç duyar:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left( \int_0^L R^2 dx \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.71)$$

Yukarıdaki eşitlik aşağıdaki Şekilde yeniden yazılabilir:

$$\left( \int_0^L R \frac{\partial R}{\partial c_i} dx \right) = 0. \quad (3.72)$$



Burada  $c_i$  bilinmeyen fonksiyonun bulunması gereken sabitleridir. (3.72) numaralı eşitlik kullanılarak aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$\int_0^L (EA * (12 * c_3 * (x - L)^2 + 6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) * (2 * EA) dx = 0, \quad (3.73)$$

$$\int_0^L (EA * (12 * c_3 * (x - L)^2 + 6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) * (6 * EA * (x - L)) dx = 0, \quad (3.74)$$

$$\int_0^L (EA * (12 * c_3 * (x - L)^2 + 6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) * (12 * EA * (x - L)^2) dx = 0. \quad (3.75)$$

Yukarıdaki belirli integraller alınırsa aşağıdaki doğrusal eşitlik sistemleri elde edilir:

$$10 * EA * L^2 + 4 * EA^2 * L * c_1 - 6 * EA^2 * L^2 * c_2 + 8 * EA^2 * L^3 * c_3 = 0, \quad (3.76)$$

$$-10 * EA * L^3 - 6 * EA^2 * L^2 * c_1 + 12 * EA^2 * L^3 * c_2 - 18 * EA^2 * L^4 * c_3 = 0, \quad (3.77)$$

$$10 * EA * L^4 + 8 * EA^2 * L^3 * c_1 - 18 * EA^2 * L^4 * c_2 + \frac{144}{5} * EA^2 * L^5 * c_3 = 0. \quad (3.78)$$

Yukarıdaki eşitlikler çözümlerse, bilinmeyen katsayılar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$c_1 = -\frac{5L}{EA} \quad (3.79)$$

$$c_2 = -\frac{5}{3EA}, \quad (3.80)$$

$$c_3 = 0. \quad (3.81)$$

Katsayılar için verilen sembolik değerler yer değiştirme fonksiyonunda yerlerine koyulursa yer değiştirme fonksiyonu en küçük kareler yöntemine göre sonraki sayfadaki gibi bulunur:

$$\bar{U}_{LSM} = -\frac{5(L-x)^2(2L+x)}{3EA}. \quad (3.82)$$

### 3.3.2. Alt alan yöntemi

Alt alan yöntemi, seçilen bazı alanların artık fonksiyonlarının integralleri alınıp sıfıra eşitlenmesine ihtiyaç duyar:

$$\int_0^{\frac{L}{3}} (EA * (12 * c_3 * (x-L)^2 + 6 * c_2 * (x-L) + 2 * c_1) + 10 * x) dx = 0 \quad (3.83)$$

$$\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2*L}{3}} (EA * (12 * c_3 * (x-L)^2 + 6 * c_2 * (x-L) + 2 * c_1) + 10 * x) dx = 0 \quad (3.84)$$

$$\int_{\frac{2*L}{3}}^L (EA * (12 * c_3 * (x-L)^2 + 6 * c_2 * (x-L) + 2 * c_1) + 10 * x) dx = 0 \quad (3.85)$$

Yukarıdaki integrallerin hesaplanması aşağıdaki eşitlik sistemlerini verir:

$$\frac{5 * L^2}{9} + \frac{2}{3} * EA * L * c_1 - \frac{5}{3} * EA * L^2 * c_2 + \frac{76}{27} * EA * L^3 * c_3 = 0 \quad (3.86)$$

$$\frac{5 * L^2}{3} + \frac{2}{3} * EA * L * c_1 - EA * L^2 * c_2 + \frac{28}{27} * EA * L^3 * c_3 = 0 \quad (3.87)$$

$$\frac{25 * L^2}{9} + \frac{2}{3} * EA * L * c_1 - \frac{1}{3} * EA * L^2 * c_2 + \frac{4}{27} * EA * L^3 * c_3 = 0 \quad (3.88)$$

Aynı sisteme ait bu üç eşitlik birlikte çözüldüğünde, aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilirler:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5 * L^2}{9} \\ -\frac{5 * L^2}{3} \\ \frac{3}{25 * L^2} \\ -\frac{9}{9} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Burada:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 * EA * L}{3} & -\frac{5 * EA * L^2}{3} & \frac{76 * EA * L^3}{27} \\ \frac{2 * EA * L}{3} & -EA * L^2 & \frac{28 * EA * L^3}{27} \\ \frac{2 * EA * L}{3} & -\frac{EA * L^2}{3} & \frac{4 * EA * L^3}{27} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Bu matris çözüldüğünde; (3.79), (3.80) ve (3.81) numaralı eşitliklerdeki katsayı değerleri elde edilir. Bu değerler de yer değiştirme denkleminde yerlerine yazıldıklarında (3.82) numaralı eşitlikte bulunan bağıntı elde edilir.

### 3.3.3. Galerkin yöntemi

Galerkin Metodu, diğer ağırlık fonksiyonlarına ortogonal olmak için başka bir artık fonksiyonuna ihtiyaç duyar:

$$\left( \int_0^L RW_i dx \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.90)$$

Bu çalışmada, ağırlık fonksiyon formülleri yer değiştirme fonksiyonunun bir parçası olmak için seçilirler. Buradaki ana problem üç bilinmeyen katsayının ( $c_1, c_2, c_3$ ) bulunmasıdır ve bu nedenle aşağıdaki üç ağırlık fonksiyonu seçilir:

$$W_1 = (x - L) \quad (3.91)$$

$$W_2 = (x - L)^2 \quad (3.92)$$

$$W_3 = (x - L)^3 \quad (3.93)$$

Yukarıdaki yaklaşım fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki bağıntılar oluşturulur:

$$\int_0^L (EA * (12 * c_3 * (x - L)^2 + 6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) * (x - L) dx = 0 \quad (3.94)$$

$$\int_0^L (EA * (12 * c_3 * (x - L)^2 + 6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) * (x - L)^2 dx = 0 \quad (3.95)$$

$$\int_0^L (EA * (12 * c_3 * (x - L)^2 + 6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) * (x - L)^3 dx = 0 \quad (3.96)$$

Yukarıdaki integraller hesaplanarak aşağıdaki eşitlikler türetilir:

$$-\frac{5 * L^3}{3} - EA * L^2 * c_1 + 2 * EA * L^3 * c_2 - 3 * EA * L^4 * c_3 = 0 \quad (3.97)$$

$$\frac{5 * L^4}{6} + \frac{2}{3} * EA * L^3 * c_1 - \frac{3}{2} * EA * L^4 * c_2 + \frac{12}{5} * EA * L^5 * c_3 = 0 \quad (3.98)$$

$$-\frac{L^5}{2} - \frac{1}{2} * EA * L^4 * c_1 + \frac{6}{5} * EA * L^5 * c_2 - 2 * EA * L^6 * c_3 = 0 \quad (3.99)$$

Benzer şekilde yukarıdaki bağıntıları (3.100) numaralı denklemden gibi matris formunda yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 * L^3}{3} \\ 5 * L^4 \\ \frac{6}{L^5} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

Burada:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EA * L^2 & 2 * EA * L^3 & -3 * EA * L^4 \\ \frac{2 * EA * L^3}{3} & \frac{3 * EA * L^4}{2} & \frac{12 * EA * L^5}{5} \\ -\frac{EA * L^4}{2} & \frac{6 * EA * L^5}{5} & -2 * EA * L^6 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Galerkin yönteminde bulunan katsayılar yer değiştirme fonksiyonunda yerine yazılırsa sonraki sayfadaki eşitliğe ulaşılır:

$$\bar{U}_{GM} = -\frac{5(L-x)^2(2L+x)}{3EA}. \quad (3.101)$$

### 3.3.4 İki parametrelili çözüm

Bu altbölümde, iki parametrelili çözüm her bir artık yönteminin etkilerini değerlendirmek için yeniden uygulanmıştır. Aşağıdaki bağıntılar alt alan yöntemindeki (3.71) numaralı denklemden elde edilebilir:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} (EA * (6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) dx = 0, \quad (3.102)$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L (EA * (6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) dx = 0, \quad (3.103)$$

Önceki bağıntılardan  $c_1$  ve  $c_2$  katsayıları aşağıdaki gibi bulunur:

$$c_1 = -\frac{5L}{EA}, \quad (3.104)$$

$$c_2 = -\frac{5}{3EA}. \quad (3.105)$$

Yukarıda elde edilen katsayılar yer değiştirme fonksiyonunda yerine yazıldığında şu eşitlik elde edilir :

$$\bar{U}_{SDM} = -\frac{5(L-x)^2(2L+x)}{3EA}. \quad (3.106)$$

Artıkları en aza indiren Galerkin yöntemi; mesnet koşullarıyla birlikte iki bilinmeyen için aşağıdaki belirli integrali tanımlar:

$$\int_0^L (EA * (6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) * (x - L) dx = 0, \quad (3.107)$$

$$\int_0^L (EA * (6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) * (x - L)^2 dx = 0. \quad (3.108)$$

Önceki sayfadaki denklemler çözülürse bilinmeyen katsayılar aşağıdaki gibi bulunur:

$$c_1 = -\frac{5L}{EA}, \quad (3.109)$$

$$c_2 = -\frac{5}{3EA}. \quad (3.110)$$

Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak eksenel yer değiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\bar{U}_{GM} = -\frac{5(L-x)^2(2L+x)}{3EA}. \quad (3.111)$$

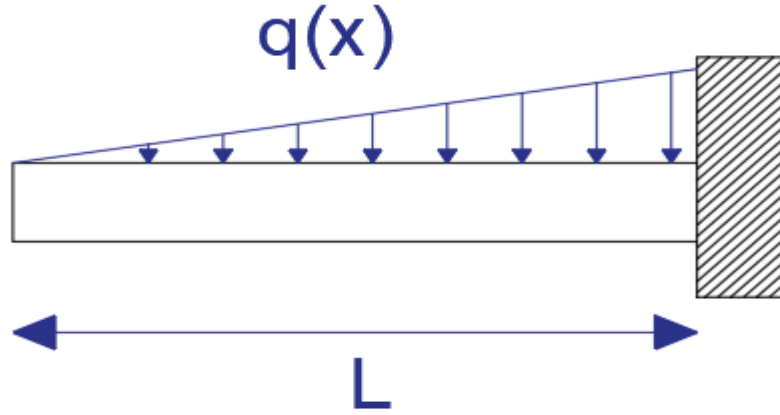
Benzer şekilde en küçük kareler yönteminde de yaklaşım fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki integraller yazılabilir:

$$\int_0^L (EA * (6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) dx = 0, \quad (3.112)$$

$$\int_0^L (EA * (6 * c_2 * (x - L) + 2 * c_1) + 10 * x) dx = 0, \quad (3.113)$$

Önceki sayfadaki integrallerden (3.104), (3.105) ve (3.106) eşitlikleri ile aynı sonuçlara ulaşılır.

### 3.4. Bir Mikrokirişin Eğilme Analizi



Şekil 3.3. Üçgen yayılı yüklenmiş konsol bir mikrokiriş

Bu bölümde Şekil 3.3'te görülen üçgen yayılı yüklenmiş konsol mikrokirişin eğilme analizi yapılacaktır. Bu analiz için ağırlıklı artık fonksiyonları kullanılmıştır. Euler-Bernoulli modelinde bir mikrokirişin yer değiştirme bileşenleri şu şekilde tanımlanmıştır:

$$u = -z\psi(x), \quad v = 0, \quad w = w(x) \quad (3.114)$$

$u$ ,  $v$  ve  $w$  sırasıyla  $x$ ,  $y$  ve  $z$ 'nin yer değiştirme vektörlerinin  $u$  bileşenleri ve  $\psi$  mikrokirişin merkez ekseninin dönme açısıdır ve çok küçük şekil değiştirmeler hesaba katıldığında bu değer yaklaşık değeri sonraki bağıntıdaki gibidir (Akgöz 2010):

$$\psi \approx \frac{dw(x)}{dx} \quad (3.115)$$

(3.114) ve (3.115) numaralı denklemlerden aşağıdaki bağıntılara ulaşılmıştır (Akgöz 2010):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \quad (3.116)$$

(3.114) ve (3.115) numaralı denklemler birlikte çözülerek aşağıdaki bağıntılara ulaşılmıştır (Akgöz 2010):

$$\theta_y = \frac{dw(x)}{dx}, \quad \theta_x = \theta_z = 0 \quad (3.117)$$

Yukarıdaki (3.117) numaralı denklemden:

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad \chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = 0 \quad (3.118)$$

Elde edilen tüm denklemler birleştirildiğinde aşağıdaki bağıntıya ulaşılr (Akgöz 2010):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( -z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right), \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \\ &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( -z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right), \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (3.119)$$

Burada E Young modülü,  $\nu$  Poisson oranıdır ve Lamé sabitleri olan  $\lambda$  ve  $\mu$  ile ilişkilidir.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.120)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.121)$$

Yukarıda (3.121) numaralı denklemde tanımlanan  $\mu$  malzeme sabiti, kayma modülü (G) olarak da bilinmektedir. Eni boyundan fazla olan ince bir mikrokiriş için Poisson etkisi ikinci planda olup basit bir kiriş teorisinin formülleştirilmesini basitleştirmek amacıyla göz ardı edilebilmektedir. Poisson oranı sıfır alındığında denklem şu hale gelmektedir:

$$\sigma_{xx} = -Ez \frac{d^2w(x)}{dx^2}, \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (3.122)$$



Benzer şekilde (3.118) numaralı denklem ilgili bağıntılarda yerine yazılırsa aşağıdaki bağıntılar bulunur (Akgöz 2010):

$$m_{xy} = \mu l_2^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, m_{xx} = m_{yy} = m_{zz} = m_{yz} = m_{zx} = 0 \quad (3.123)$$

(3.116), (3.119), (3.122) ve (3.123) numaralı denklemler ilgili bağıntıda yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir (Akgöz 2010):

$$U = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^L M_x \frac{d^2 w(x)}{dx^2} dx - \frac{1}{2} \int_{x=0}^L Y_{xy} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} dx \quad (3.124)$$

Bileşke moment olan  $M_x$  ve çift moment olan  $Y_{xy}$  aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_x = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (3.125)$$

$$Y_{xy} = \int_A m_{xy} dA \quad (3.126)$$

Cisim kuvveti ve cisim çiftinin sıfır olduğu kabulünde, dış kuvvetlerin yaptığı iş  $q(x)$  formunda (yüzey çifti olmadığında) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$W = \int_{x=0}^L q(x) w(x) dx \quad (3.127)$$

Düzgün yayılı yüklenmiş bir mikrokirişteki toplam potansiyel enerji olan, (3.124) ve (3.127) numaralı denklemler kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Pi = U - W = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^L (M_x + Y_{xy}) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} dx - \int_{x=0}^L q(x) w(x) dx \quad (3.128)$$

$\Pi$ 'nin birinci varyasyonu ise şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & -(M_x + Y_{xy})\delta w'(x)|_0^L + \left(\frac{dM_x}{dx} + \frac{dY_{xy}}{dx}\right)\delta w(x)|_0^L \\ & - \int_0^L \left(\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{d^2Y_{xy}}{dx^2} + q\right)\delta w(x) dx \end{aligned} \quad (3.129)$$

Minimum toplam potansiyel enerji ilkesi uygulandığında kararlı bir denge durumu için  $\delta\Pi$ 'nin sıfır değeri için ve varyasyonun hesabında kullanılan yardımcı teoremler ile yukarıdaki (3.129) numaralı bağıntıdan yönetici denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{d^2Y_{xy}}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (3.130)$$

(3.122), (3.123), (3.125) ve (3.126) numaralı denklemlerden aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$M_x = -EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (3.131)$$

$$Y_{xy} = -\mu AI_2^2 \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (3.132)$$

$I$  enkesit alanının atalet momentidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$I = \int_A z^2 dA \quad (3.133)$$

(3.131) ve (3.132) numaralı denklemler (3.130) numaralı denklemde yerine yazıldığında aşağıdaki eşitlik edilir:

$$(EI + \mu AI_2^2) \frac{d^4w(x)}{dx^4} = q(x) \quad (3.134)$$

Bu denklem mikrokirişin  $w(x)$  cinsinden eğilme denklemdir. (3.131) ve (3.132) numaralı denklemler toplandığında ise aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$M_x + Y_{xy} = -(EI + \mu AI_2^2) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (3.135)$$

Yukarıdaki (3.134) numaralı denklem ele alındığında mikrokirişin eğilme denkleminde iki temel etken olduğu görülmektedir. Bu etkenlerden ilki normal gerilme bileşeni olan  $\sigma_{xx}$ 'e bağlı iken ikincisi ise gerilme çifti bileşeni olan  $m_{xy}$  ile bağımlıdır. Yine bu denklemde mikrokirişin eğilme rijitliği olan  $(EI + \mu AI_2^2)$  formülünün  $I_2$ 'ye bağlı olduğu açıkça görülmektedir. Bu  $I_2$  değeri tamamen mikrokirişin yapısıyla ilgilidir ve bu yapıya göre değişmektedir.

Şekil 3.3'te görülen konsol bir mikrokirişin eğilme denklemi, (3.134) numaralı bağıntının dört defa integre edilmesiyle aşağıdaki gibi elde edilir:

$$w(x) = \frac{1}{(EI + \mu AI_2^2)} \left[ -\frac{qx^4}{72} + c_1 x + c_2 \right] \quad (3.136)$$

### 3.4.1. Galerkin yöntemiyle çözüm

Bu altbölümde mikrokirişin eğilme analizi için ağırlıklı artık yöntemlerinden birisi olan Galerkin yöntemi ile analiz yapılmıştır. Ağırlıklı artık yöntemlerinde kullanılacak olan artık fonksiyonu aşağıda verilmiştir:

$$R = (EI + \mu * A * I_2^2) * \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{q * x^2}{6} = 0 \quad (3.137)$$

$W$  fonksiyonunun iki kez türevi alınıp denklemde yerine yazıldığında ise şu denklem elde edilir:

$$W = a_1 * (x - L)^2 + a_2 * (x - L)^3 + a_3 * (x - L)^4 \quad (3.138)$$

$$R = (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6} \quad (3.139)$$

Galerkin metodunun temeli aşağıdaki çözüm yöntemidir:

$$\int_0^L R * W_i dx = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.140)$$

Üç bilinmeyen katsayının bulunabilmesi amacıyla üç denklem için üç sınır koşulu denklemleri seçilir:

$$W_1 = (x - L) \quad (3.141)$$

$$W_2 = (x - L)^2 \quad (3.142)$$

$$W_3 = (x - L)^3 \quad (3.143)$$

Yukarıdaki yaklaşım fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6} \right) * (x - L) dx = 0 \quad (3.144)$$

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6} \right) * (x - L)^2 dx = 0 \quad (3.145)$$

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6} \right) * (x - L)^3 dx = 0 \quad (3.146)$$

Yukarıdaki integraller alındığında aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$-\frac{L^4 q}{72} - L^2(EI + \mu * A * I_2^2)(a_1 + L(-2a_2 + 3La_3)) = 0 \quad (3.147)$$

$$\frac{1}{180} L \left( L^4 q + 6L^2(EI + \mu * A * I_2^2)(20a_1 + 9L(-5a_2 + 8La_3)) \right) = 0 \quad (3.148)$$

$$\frac{1}{360} L^4 \left( -L^2 q - 36(EI + \mu * A * I_2^2)(5a_1 + 4L(-3a_2 + 5La_3)) \right) = 0 \quad (3.149)$$

Bu denklem sistemi çözüldüğünde ise bilinmeyen üç katsayı elde edilir:

$$a_1 = -\frac{L^2 q}{12(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.150)$$

$$a_2 = -\frac{Lq}{18(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.151)$$

$$a_3 = -\frac{q}{72(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.152)$$

Bu katsayılar fonksiyonda yerlerine yazılırsa aşağıdaki fonksiyon bulunur:

$$W = -\frac{L^2 q}{12(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^2 - \frac{Lq}{18(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^3 - \frac{q}{72(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^4 \quad (3.153)$$

### 3.4.2. En küçük kareler yöntemiyle çözüm

Mikrokirişin eğilme analizi için kullanılacak bir diğer ağırlıklı artık yöntemi ise en küçük kareler yöntemidir. Bu alt başlıkta da en küçük kareler yöntemi ile hesaplama aşamaları gösterilmiştir. En küçük kareler yönteminin temelini ise aşağıdaki eşitlik oluşturmaktadır:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \int_0^L R^2 dx \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.154)$$

Bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden oluşturulabilir:

$$\left( \int_0^L R \frac{\partial R}{\partial a_i} dx \right) = 0. \quad (3.155)$$

Yukarıdaki (3.155) numaralı denklem kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6} \right) * 2 * (EI + \mu * A * I_2^2) dx = 0 \quad (3.156)$$

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6} \right) * 6 * (EI + \mu * A * I_2^2) * (x - L) dx = 0 \quad (3.157)$$

$$\int_0^L \left( (EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6} \right) * 12 * (EI + \mu * A * I_2^2) * (x - L)^2 dx = 0 \quad (3.158)$$

Yukarıda ilgili integraller alındığında aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$2(EI + \mu * A * I_2^2) \left( \frac{L^3 q}{18} + L(EI + \mu * A * I_2^2)(2a_1 + L(-3a_2 + 4La_3)) \right) = 0 \quad (3.159)$$

$$6(EI + \mu * A * I_2^2) \left( -\frac{L^4 q}{72} - L^2(EI + \mu * A * I_2^2)(a_1 + L(-2a_2 + 3La_3)) \right) = 0 \quad (3.160)$$

$$\frac{1}{15} L(EI + \mu * A * I_2^2) \left( L^4 q + 6L^2(EI + \mu * A * I_2^2)(20a_1 + 9L(-5a_2 + 8La_3)) \right) = 0 \quad (3.161)$$

Yukarıdaki denklem sistemi çözüldüğünde ise bilinmeyen katsayılar elde edilir:

$$a_1 = -\frac{L^2 q}{12(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.162)$$

$$a_2 = -\frac{Lq}{18(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.163)$$

$$a_3 = -\frac{q}{72(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.164)$$

Bulunan katsayılar ilgili fonksiyonda yerlerine yazıldıklarında denklem şu hale gelmiştir:

$$W = -\frac{L^2q}{12(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^2 - \frac{Lq}{18(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^3 - \frac{q}{72(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^4 \quad (3.165)$$

### 3.4.3. Alt alan yöntemiyle çözüm

Eğilme analizi için kullanılan bir diğer ağırlıklı artık yöntemi ise alt alan yöntemidir. Bu yöntemin temeli seçilen bazı alanların artık fonksiyonlarının integrallerinin sıfıra eşitlenmesidir:

$$\int_0^{\frac{L}{3}} ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6}) dx = 0 \quad (3.166)$$

$$\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6}) dx = 0 \quad (3.167)$$

$$\int_{\frac{2L}{3}}^L ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L) + 12 * a_3 * (x - L)^2) + \frac{q * x^2}{6}) dx = 0 \quad (3.168)$$

Bu integraller alınırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\frac{1}{486} L (L^2q + 18(EI + \mu * A * I_2^2)(18a_1 + L(-45a_2 + 76La_3))) = 0 \quad (3.169)$$

$$\frac{7L^3q}{486} + \frac{1}{27}L(EI + \mu * A * I_2^2)(18a_1 + L(-27a_2 + 28La_3)) = 0 \quad (3.170)$$

$$\frac{19L^3q}{486} + \frac{1}{27}L(EI + \mu * A * I_2^2)(18a_1 + L(-9a_2 + 4La_3)) = 0 \quad (3.171)$$

Bu sistem çözüldüğünde ise bilinmeyen katsayılar aşağıdaki gibi bulunur:

$$a_1 = -\frac{L^2q}{12(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.172)$$

$$a_2 = -\frac{Lq}{18(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.173)$$

$$a_3 = -\frac{q}{72(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.174)$$

Bu katsayılar yerlerinde yazıldıklarında  $W$  fonksiyonu aşağıdaki halini alır:

$$W = -\frac{L^2q}{12(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^2 - \frac{Lq}{18(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^3 - \frac{q}{72(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^4 \quad (3.175)$$

#### 3.4.4. İki parametre çözümü

Bu bölümde bilinmeyen denklem katsayılarının bulunmuş değerlerinin kontrolü için iki parametre çözümü kullanılacaktır:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L)) + \frac{q * x^2}{6}) dx = 0 \quad (3.176)$$

$$\int_{\frac{L}{2}}^L ((EI + \mu * A * I_2^2) * (2 * a_1 + 6 * a_2 * (x - L)) + \frac{q * x^2}{6}) dx = 0 \quad (3.177)$$



Bu bağıntılar çözüldüğünde aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\frac{L^3 q}{144} + EILa_1 + AL\mu I_2^2 a_1 - \frac{9}{4} EIL^2 a_2 - \frac{9}{4} AL^2 \mu I_2^2 a_2 = 0 \quad (3.178)$$

$$\frac{7L^3 q}{144} + EILa_1 + AL\mu I_2^2 a_1 - \frac{3}{4} EIL^2 a_2 - \frac{3}{4} AL^2 \mu I_2^2 a_2 = 0 \quad (3.179)$$

Denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki katsayı değerleri elde edilir:

$$a_1 = -\frac{5L^2 q}{72(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.180)$$

$$a_2 = -\frac{Lq}{36(EI + \mu * A * I_2^2)} \quad (3.181)$$

Bu katsayılarla  $W$  fonksiyonu aşağıdaki hale gelmiştir:

$$W = -\frac{5L^2 q}{72(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^2 - \frac{Lq}{36(EI + \mu * A * I_2^2)} * (x - L)^3 \quad (3.182)$$

#### 4. BULGULAR

Bu bölümde Rayleigh Modeli'ndeki bir nanotüpün farklı koşullar altındaki aksenal hareketi incelenmiştir. Bu inceleme sırasında farklı mesnetlenme koşulları,  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $r$  ve  $L$  değerlerinin; aksenal hareketin ilk 4 mod değerine etkileri incelenmiştir. Bu çalışma kapsamında mekanik özellikleri Çizelge 4.1'de verilen nanotüpün aksenal hareket analizi bir önceki bölümde sunulan matematik model yardımıyla yapılmıştır. Bu analizler Mathematica programında yapılmış ve grafik haline getirilmiştir. Analiz sonuçları elde edilirken Rayleigh Modeli ve Eringen'in Yerel Olmayan Elastisite Teorisi temel alınmıştır.

**Çizelge 4.1.** Karbon nanotüpün mekanik özellikleri

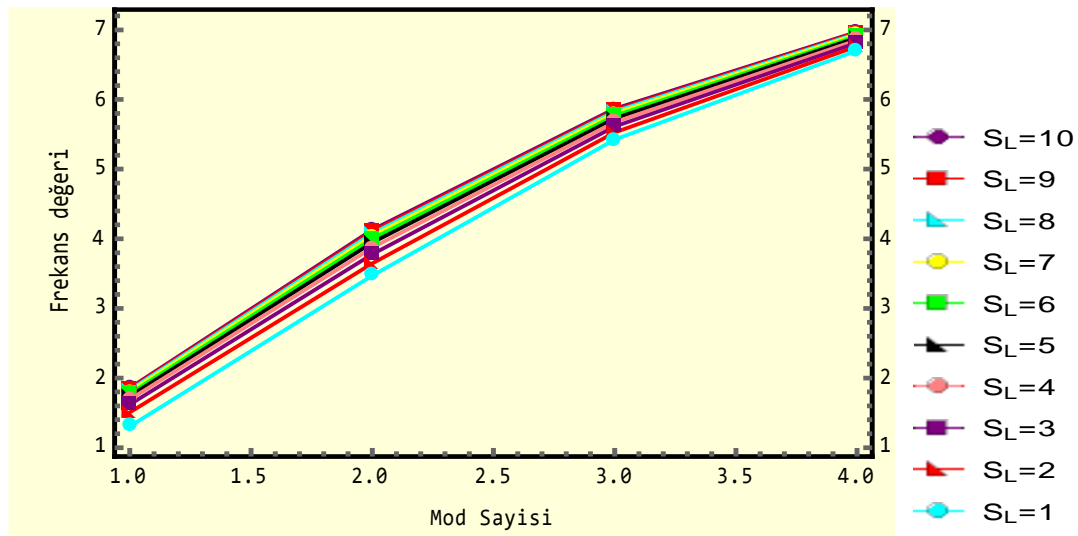
E (Elastisite Modülü)	1 GPa
$\rho$ (Yoğunluk)	0,8 Mg.m <sup>-3</sup>
$\nu$ (Poisson Oranı)	0,3
$\mu$ (Lame Sabiti)	1,2
A (Enkesit Alanı)	$\pi$ nm <sup>2</sup>

Aşağıda Çizelge 4.2’de mesnet koşullarından birisi olan  $S_0=1$  değeri sabit tutulurken  $S_L$  değerinin 1 ile 10 arasındaki değişiminin aksel titreşim frekanslarına etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1 \text{ nm}$ ,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10 \text{ nm}$  ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.2.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=1$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,306	3,471	5,426	6,703
$S_L = 2$	1,506	3,647	5,528	6,764
$S_L = 3$	1,619	3,777	5,611	6,814
$S_L = 4$	1,691	3,873	5,676	6,854
$S_L = 5$	1,740	3,945	5,728	6,886
$S_L = 6$	1,776	4,000	5,768	6,911
$S_L = 7$	1,804	4,043	5,801	6,931
$S_L = 8$	1,825	4,076	5,827	6,947
$S_L = 9$	1,842	4,106	5,849	6,960
$S_L = 10$	1,856	4,129	5,867	6,971

Aşağıda Şekil 4.1’de, yukarıda verilen Çizelge 4.2 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir. Yukarıdaki çizelge ve aşağıdaki şekilden görüldüğü üzere mod sayısı arttıkça titreşim frekanslarının değerleri orantılı olarak artmaktadır. Ayrıca yay parametrelerinin değerleri arttıkça frekans değerleri küçük artışlar göstermektedir.



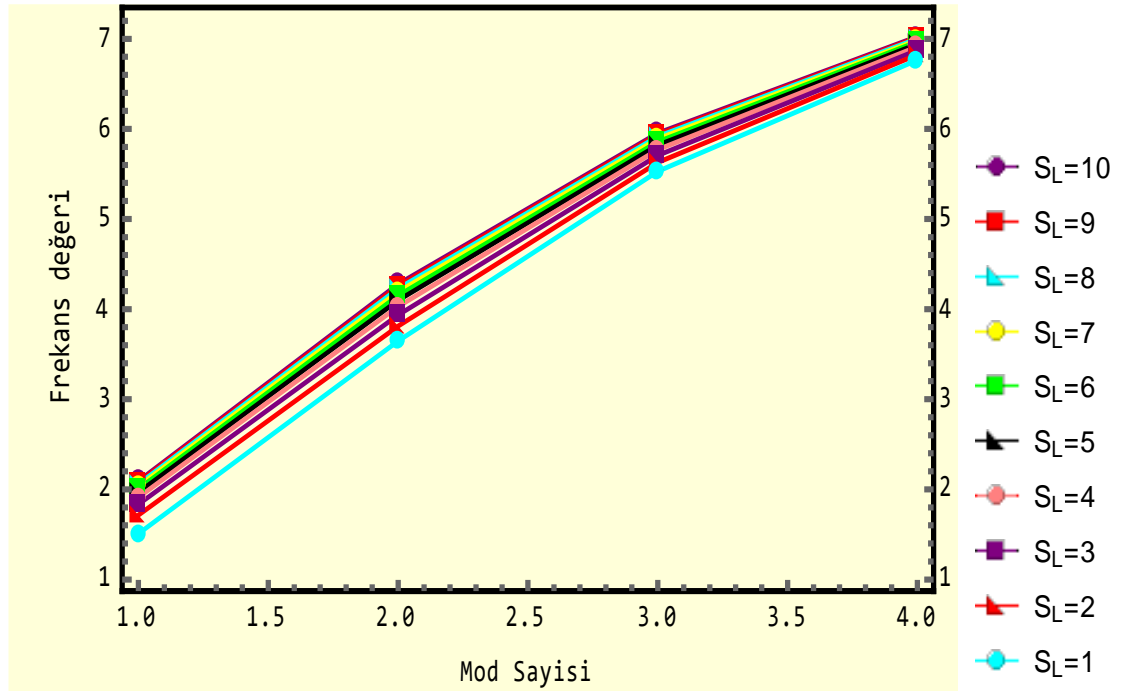
**Şekil 4.1.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=1$ )

Aşağıda Çizelge 4.3'te mesnet koşullarından birisi olan  $S_0=2$  değeri sabitken  $S_L$  değerinin 1'den 10'a kadar olan değişiminin aksel hareketin ilk dört mod değerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır. Benzer şekilde herhangi bir mesnetteki rijitlik sabiti  $S_0$  iki katına çıkartıldığında frekans değerleri orantılı bir şekilde artmaktadır.

**Çizelge 4.3.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=2$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,506	3,647	5,528	6,764
$S_L = 2$	1,713	3,812	5,626	6,823
$S_L = 3$	1,834	3,936	5,705	6,872
$S_L = 4$	1,911	4,028	5,769	6,911
$S_L = 5$	1,965	4,098	5,819	6,941
$S_L = 6$	2,004	4,151	5,858	6,966
$S_L = 7$	2,034	4,193	5,890	6,985
$S_L = 8$	2,057	4,227	5,915	7,001
$S_L = 9$	2,076	4,255	5,936	7,013
$S_L = 10$	2,091	4,278	5,953	7,024

Aşağıda Şekil 4.2'de, yukarıda verilen Çizelge 4.3 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir.



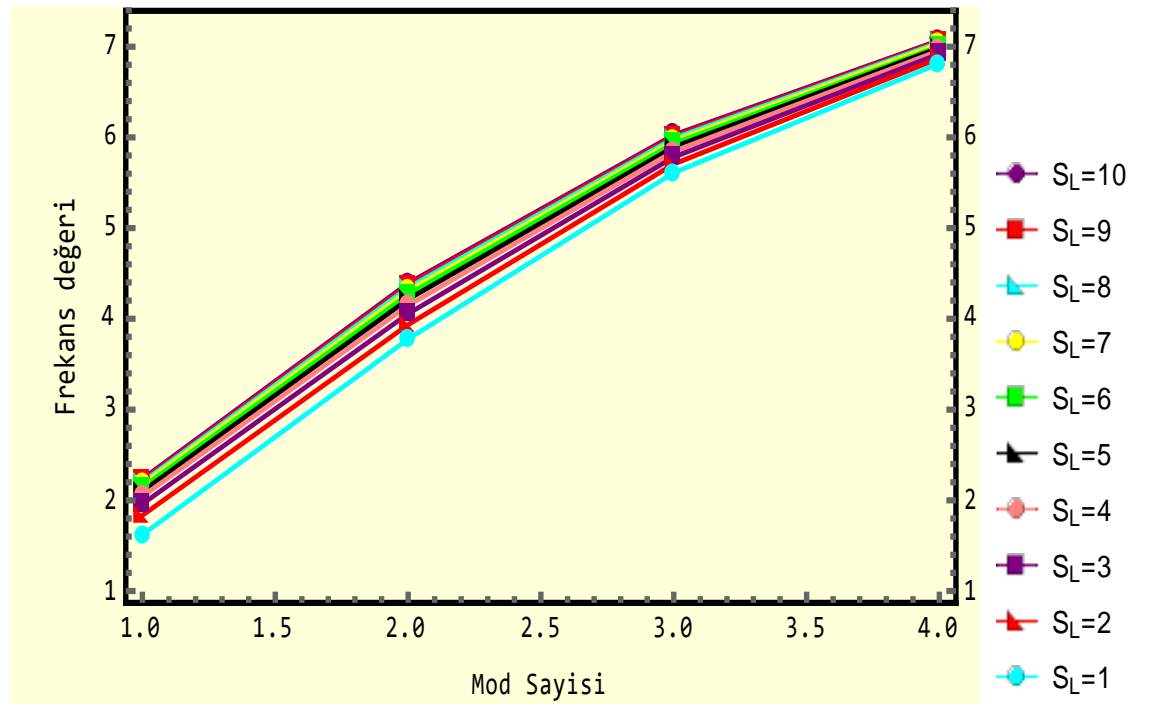
**Şekil 4.2.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=2$ )

Aşağıda Çizelge 4.4'te mesnet koşullarından birisi olan  $S_0=3$  değeri değiştirilmeden  $S_L$  değerinin 1 ve 10 değerleri arasındaki değişiminin aksel hareketin mod değerlerinin üzerindeki etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.4.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=3$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,619	3,777	5,611	6,814
$S_L = 2$	1,834	3,936	5,705	6,872
$S_L = 3$	1,960	4,056	5,783	6,919
$S_L = 4$	2,042	4,146	5,845	6,957
$S_L = 5$	2,099	4,215	5,893	6,987
$S_L = 6$	2,141	4,267	5,932	7,011
$S_L = 7$	2,173	4,309	5,962	7,030
$S_L = 8$	2,197	4,342	5,987	7,045
$S_L = 9$	2,218	4,370	6,008	7,058
$S_L = 10$	2,234	4,392	6,025	7,068

Aşağıda Şekil 4.3'te, yukarıda verilen Çizelge 4.4 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir.



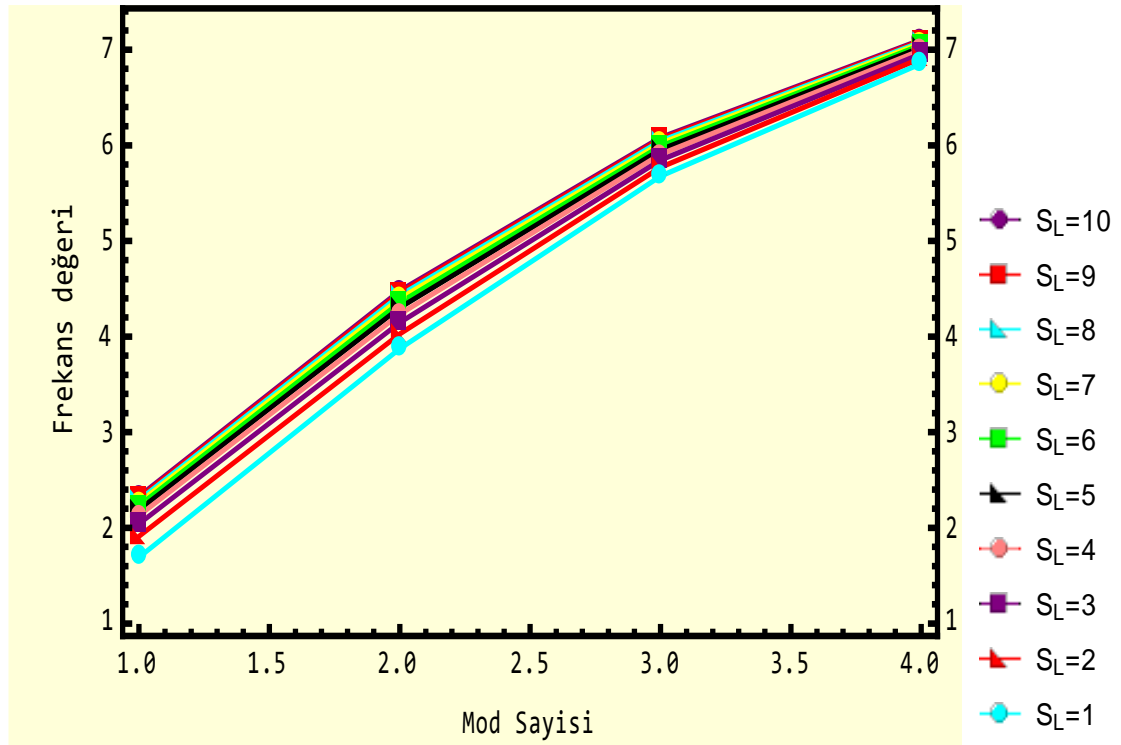
**Şekil 4.3.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=3$ )

Aşağıda Çizelge 4.5'te mesnet koşullarından birisi olan  $S_0=4$  değeri sabit tutulurken  $S_L$  değerinin 1 ile 10 arasındaki değişiminin aksel hareket mod değerlerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.5.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=4$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,691	3,873	5,676	6,854
$S_L = 2$	1,911	4,028	5,769	6,911
$S_L = 3$	2,042	4,146	5,845	6,957
$S_L = 4$	2,128	4,235	5,905	6,995
$S_L = 5$	2,187	4,303	5,953	7,024
$S_L = 6$	2,231	4,355	5,990	7,047
$S_L = 7$	2,264	4,397	6,020	7,066
$S_L = 8$	2,290	4,430	6,045	7,080
$S_L = 9$	2,311	4,457	6,065	7,093
$S_L = 10$	2,329	4,479	6,082	7,103

Aşağıda Şekil 4.4'te, yukarıda verilen Çizelge 4.5 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir.



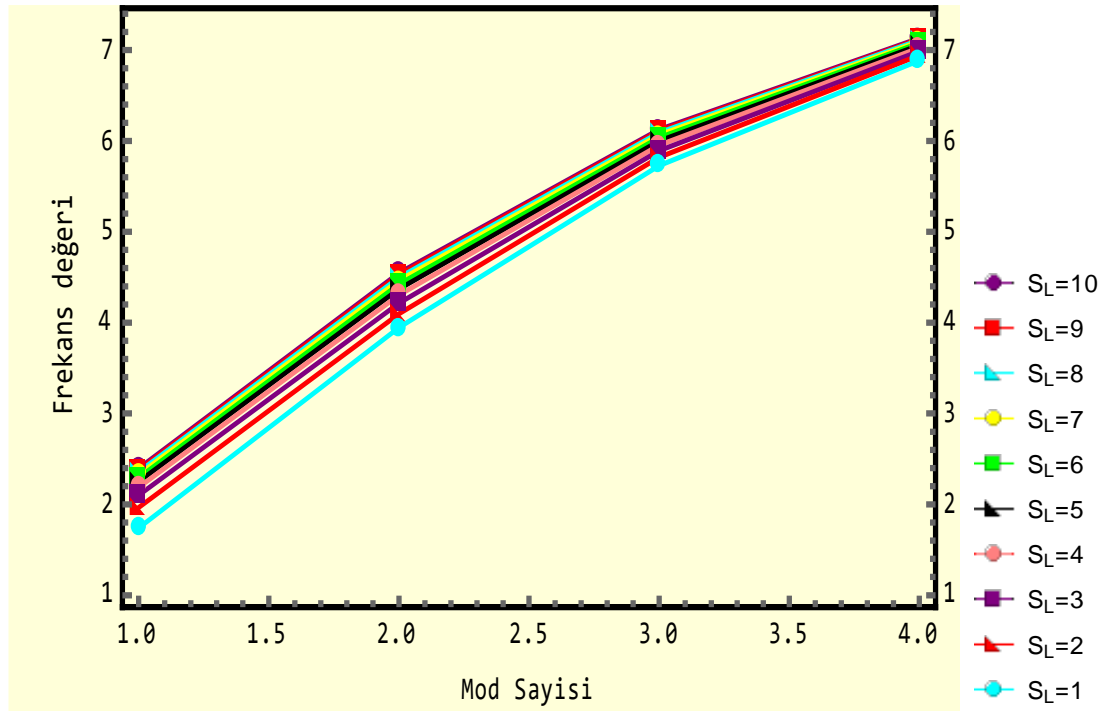
**Şekil 4.4.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=4$ )

Aşağıda Çizelge 4.6’da mesnet koşullarından birisi olan  $S_0=5$  değeri sabitken  $S_L$  değerinin 1’den 10’a kadar olan değişiminin aksel hareketin ilk dört mod değerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.6.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=5$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,740	3,945	5,728	6,886
$S_L = 2$	1,965	4,098	5,819	6,941
$S_L = 3$	2,099	4,215	5,893	6,987
$S_L = 4$	2,187	4,303	5,953	7,024
$S_L = 5$	2,249	4,370	5,999	7,053
$S_L = 6$	2,294	4,422	6,036	7,076
$S_L = 7$	2,328	4,464	6,066	7,094
$S_L = 8$	2,355	4,497	6,090	7,108
$S_L = 9$	2,377	4,524	6,110	7,120
$S_L = 10$	2,395	4,546	6,126	7,130

Aşağıda Şekil 4.5’te, yukarıda verilen Çizelge 4.6 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir.



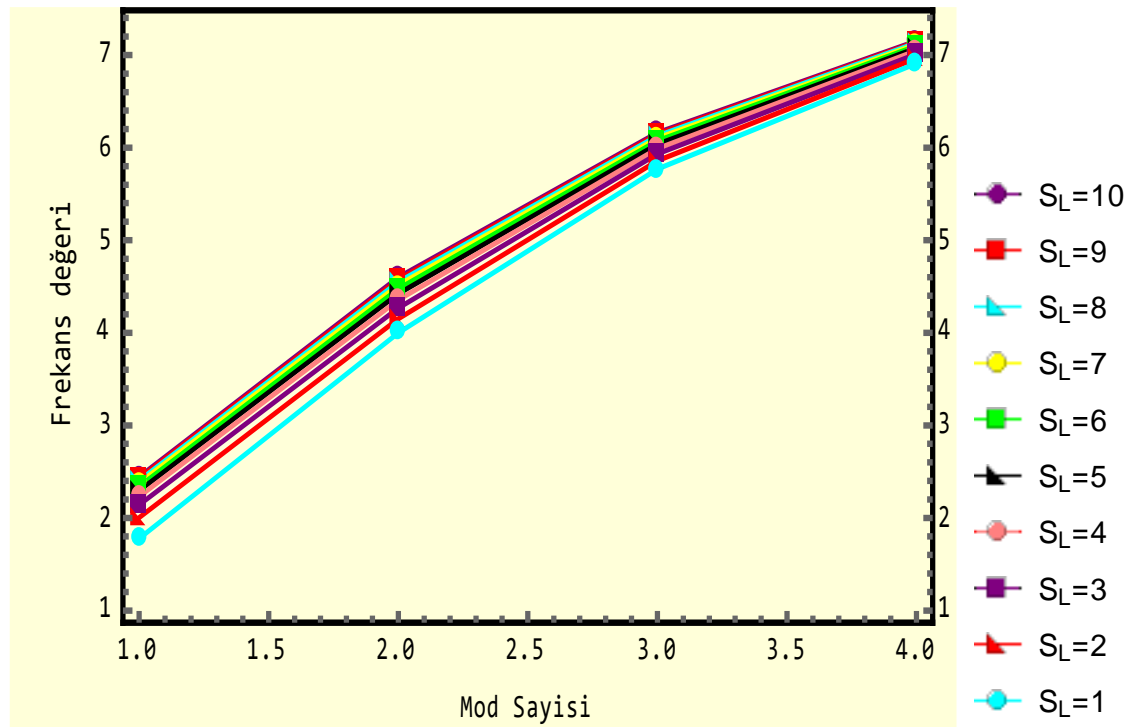
**Şekil 4.5.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=5$ )

Aşağıda Çizelge 4.7’de mesnet koşullarından birisi olan  $S_0=6$  değeri değiştirilmeden  $S_L$  değerinin 1 ve 10 değerleri arasındaki değişiminin aksel hareketin mod değerlerinin üzerindeki etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.7.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=6$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,776	4,000	5,768	6,911
$S_L = 2$	2,004	4,151	5,858	6,966
$S_L = 3$	2,141	4,267	5,932	7,011
$S_L = 4$	2,231	4,355	5,990	7,047
$S_L = 5$	2,294	4,422	6,036	7,076
$S_L = 6$	2,340	4,474	6,073	7,098
$S_L = 7$	2,376	4,515	6,102	7,116
$S_L = 8$	2,403	4,548	6,126	7,130
$S_L = 9$	2,426	4,575	6,146	7,142
$S_L = 10$	2,444	4,598	6,162	7,152

Aşağıda Şekil 4.6’da, yukarıda verilen Çizelge 4.7 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir.



**Şekil 4.6.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=6$ )

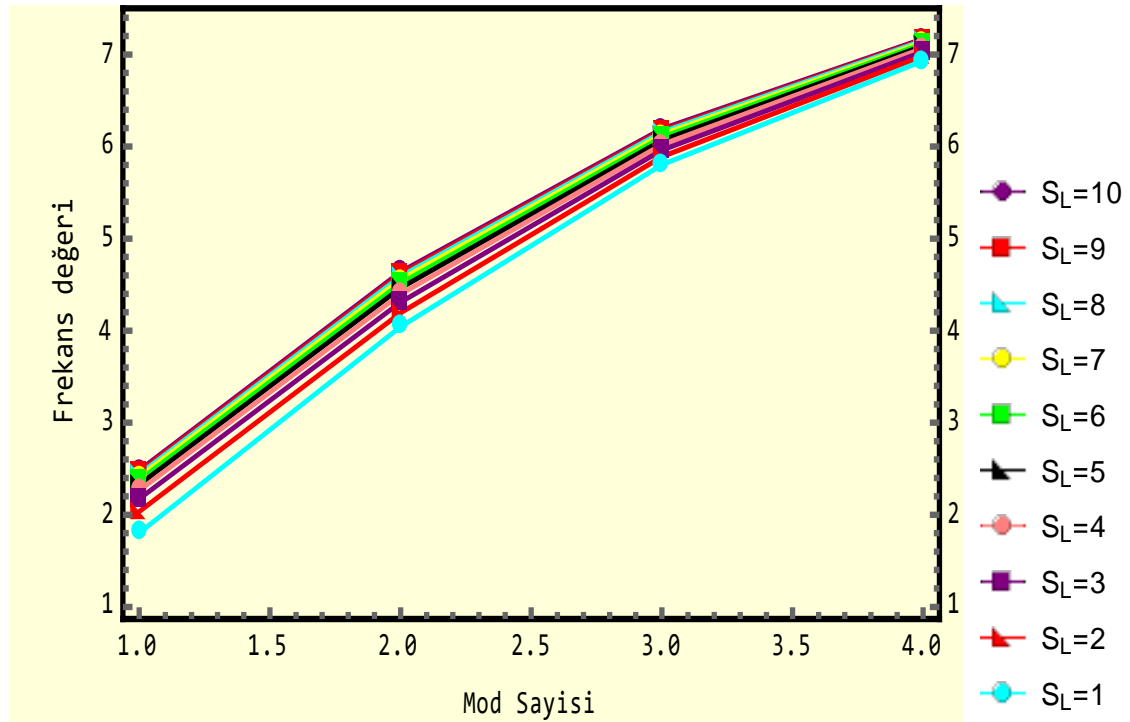


Aşağıda Çizelge 4.8’de mesnet koşullarından birisi olan  $S_0=7$  değeri sabit tutulurken  $S_L$  değerinin 1 ile 10 arasındaki değişiminin aksel hareket mod değerlerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.8.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=7$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,804	4,043	5,801	6,931
$S_L = 2$	2,034	4,193	5,890	6,985
$S_L = 3$	2,173	4,309	5,962	7,030
$S_L = 4$	2,264	4,397	6,020	7,066
$S_L = 5$	2,328	4,464	6,066	7,094
$S_L = 6$	2,376	4,515	6,102	7,116
$S_L = 7$	2,412	4,556	6,131	7,133
$S_L = 8$	2,440	4,589	6,155	7,148
$S_L = 9$	2,463	4,616	6,174	7,159
$S_L = 10$	2,482	4,639	6,190	7,169

Aşağıda Şekil 4.7’de, yukarıda verilen Çizelge 4.8 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir.



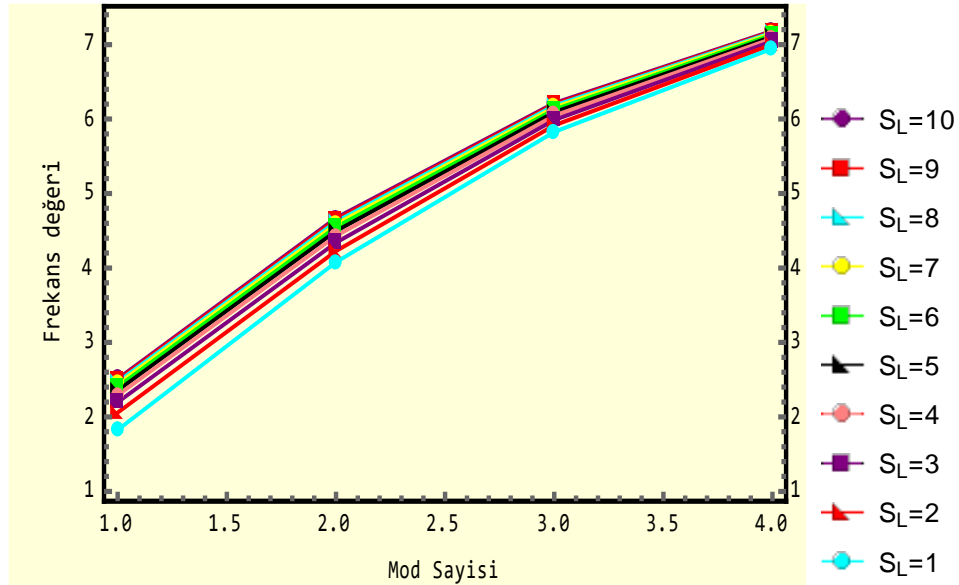
**Şekil 4.7.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=7$ )

Aşağıda Çizelge 4.9’da mesnet koşullarından birisi olan  $S_0=8$  değeri sabitken  $S_L$  değerinin 1’den 10’a kadar olan değişiminin aksel hareketin ilk dört mod değerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.9.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=8$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,825	4,078	5,827	6,947
$S_L = 2$	2,057	4,227	5,915	7,001
$S_L = 3$	2,197	4,342	5,987	7,045
$S_L = 4$	2,290	4,430	6,045	7,080
$S_L = 5$	2,355	4,497	6,090	7,108
$S_L = 6$	2,403	4,548	6,126	7,130
$S_L = 7$	2,440	4,589	6,155	7,148
$S_L = 8$	2,469	4,622	6,178	7,162
$S_L = 9$	2,492	4,649	6,197	7,173
$S_L = 10$	2,511	4,672	6,213	7,183

Aşağıda Şekil 4.8’de, yukarıda verilen Çizelge 4.9 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir.



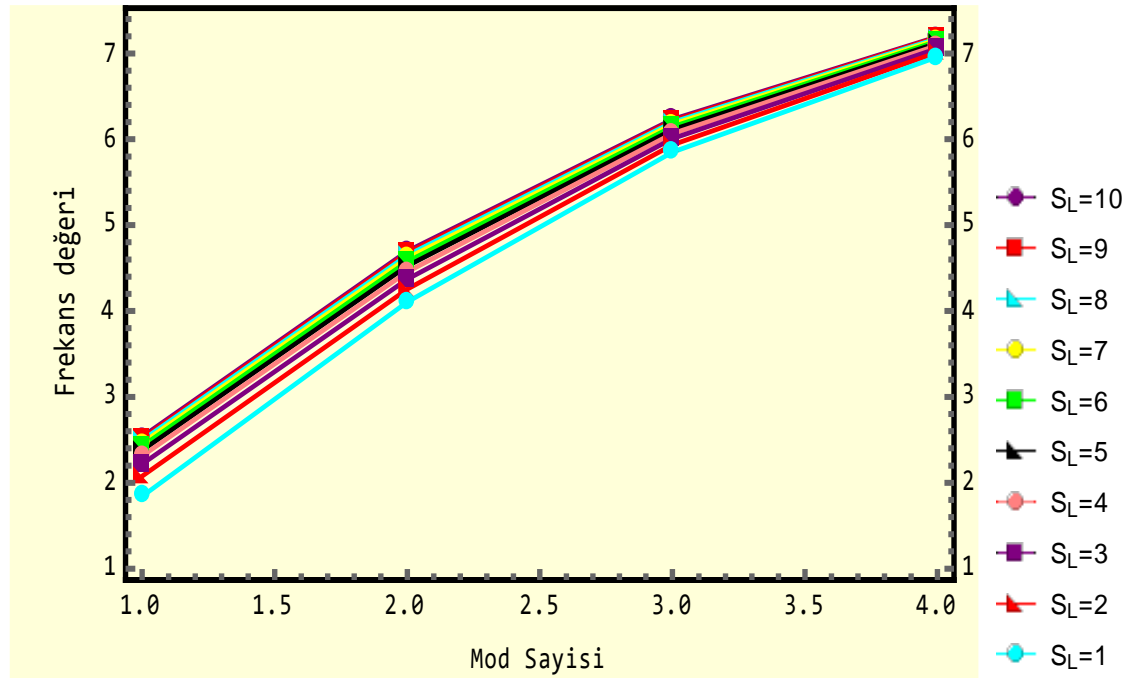
**Şekil 4.8.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=8$ )

Aşağıda Çizelge 4.10’da mesnet koşullarından birisi olan  $S_0=9$  değeri değiştirilmeden  $S_L$  değerinin 1 ve 10 değerleri arasındaki değişiminin aksel hareketin mod değerlerinin üzerindeki etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.10.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=9$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,842	4,106	5,849	6,960
$S_L = 2$	2,076	4,255	5,936	7,013
$S_L = 3$	2,217	4,370	6,008	7,058
$S_L = 4$	2,311	4,457	6,065	7,093
$S_L = 5$	2,377	4,524	6,110	7,120
$S_L = 6$	2,426	4,575	6,146	7,142
$S_L = 7$	2,463	4,616	6,174	7,159
$S_L = 8$	2,492	4,649	6,197	7,173
$S_L = 9$	2,516	4,676	6,216	7,185
$S_L = 10$	2,535	4,699	6,232	7,194

Aşağıda Şekil 4.9’da, yukarıda verilen Çizelge 4.10 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir.



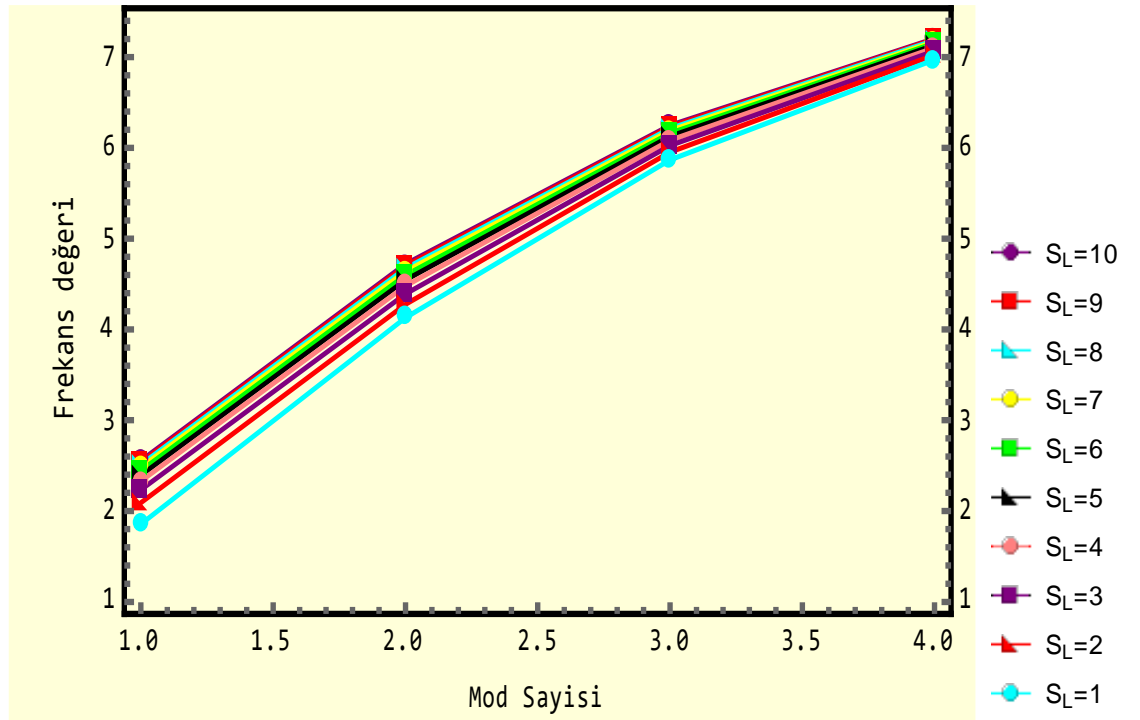
**Şekil 4.9.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=9$ )

Aşağıda Çizelge 4.11’de mesnet koşullarından birisi olan  $S_0=10$  değeri sabit tutulurken  $S_L$  değerinin 1 ile 10 arasındaki değişiminin aksel hareket mod değerlerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.11.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=10$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$S_L = 1$	1,856	4,129	5,867	6,971
$S_L = 2$	2,091	4,278	5,953	7,024
$S_L = 3$	2,234	4,392	6,025	7,068
$S_L = 4$	2,329	4,479	6,082	7,103
$S_L = 5$	2,395	4,546	6,126	7,130
$S_L = 6$	2,444	4,598	6,162	7,152
$S_L = 7$	2,482	4,639	6,190	7,169
$S_L = 8$	2,511	4,672	6,213	7,183
$S_L = 9$	2,535	4,699	6,232	7,194
$S_L = 10$	2,555	4,721	6,248	7,203

Aşağıda Şekil 4.10’da, yukarıda verilen Çizelge 4.11 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir.



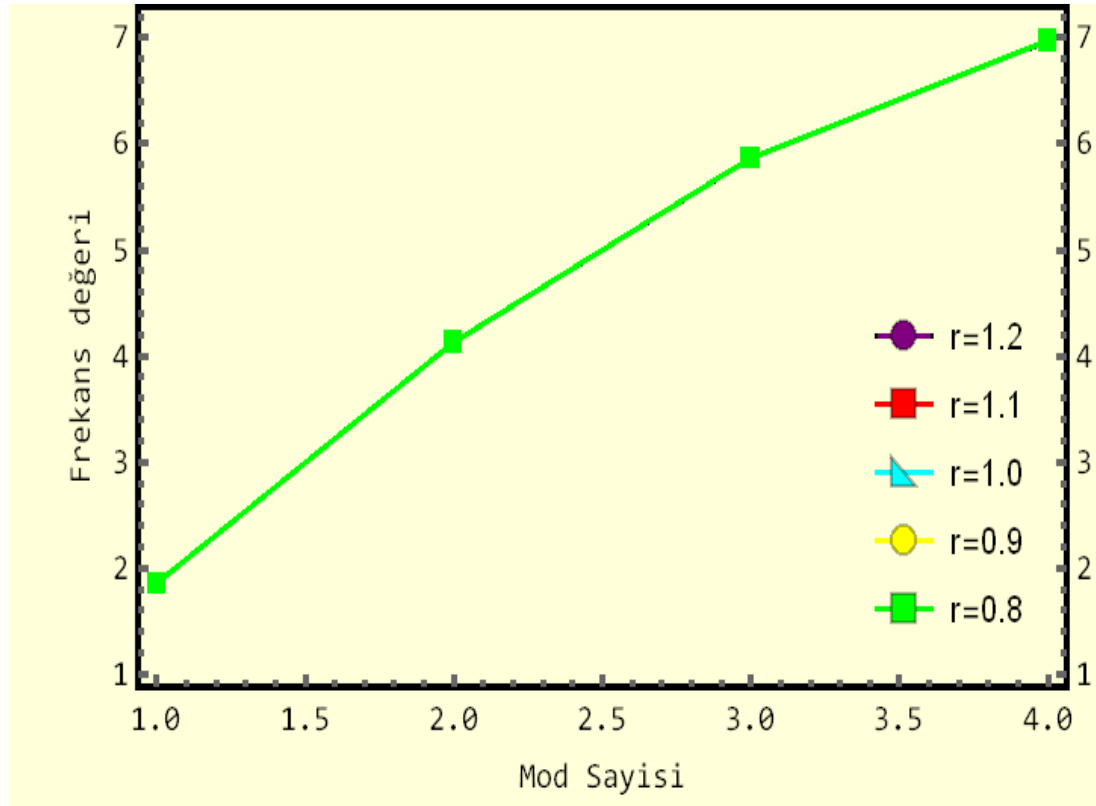
**Şekil 4.10.** Mesnet kuvveti değişiminin titreşim frekansına etkisi ( $S_0=10$ )

Aşağıda Çizelge 4.12’de mesnet koşulları olan  $S_0=1$  ve  $S_L=10$  sabitken  $r$  değerinin 0,8 nm’den 1,2 nm’ye kadar olan değişiminin aksel hareketin ilk dört mod değerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $\mu = 1,2$ ,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.12.** Yarıçap değişiminin titreşim frekansına etkisi

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$r=0,8$ nm	1,856	4,129	5,867	6,972
$r=0,9$ nm	1,856	4,129	5,867	6,972
$r=1$ nm	1,856	4,129	5,867	6,971
$r=1,1$ nm	1,856	4,129	5,867	6,971
$r=1,2$ nm	1,856	4,129	5,866	6,970

Aşağıda Şekil 4.11’de, yukarıda verilen Çizelge 4.12 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir. Karbon nanotüpün yarıçapı çeşitli parametreler alınarak frekansları çizelge ve şekilde gösterilmiştir. Çizelge ve şekilde görüldüğü üzere yarıçapın değişmesi mod değerlerini değiştirmemiştir. Bu durum tüm mod değerleri için sabittir.



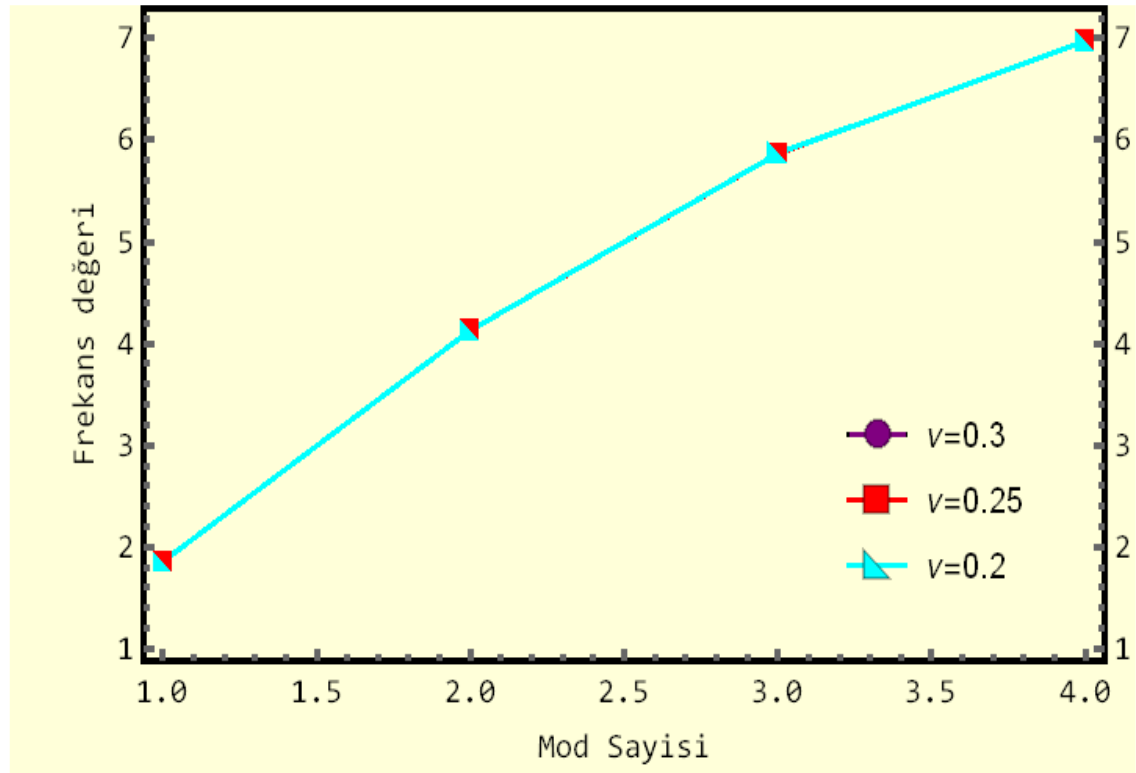
**Şekil 4.11.** Yarıçap değişiminin titreşim frekansına etkisi

Aşağıda Çizelge 4.13'te mesnet koşulları olan  $S_0=1$  ve  $S_L=10$  değerleri değiştirilmeden  $\nu$  değerinin 0,2,0,25 ve 0,3 değerleri arasındaki değişiminin aksel hareketin mod değerlerinin üzerindeki etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\mu = 1,2$  ve  $L = 10$  nm değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.13.** Poisson oranının değişiminin titreşim frekansına etkisi

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\nu = 0,2$	1,856	4,129	5,868	6,972
$\nu = 0,25$	1,856	4,129	5,867	6,972
$\nu = 0,3$	1,856	4,129	5,867	6,971

Aşağıda Şekil 4.12'de, yukarıda verilen Çizelge 4.13 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir. Yukarıdaki çizelgede görüldüğü üzere farklı Poisson oranları (farklı malzemeden üretilmiş) için frekans değerleri verilmiştir. Bu sınır koşulları için Poisson oranı titreşim frekanslarına etki etmemektedir. Bu durum bütün modlar için geçerlidir.



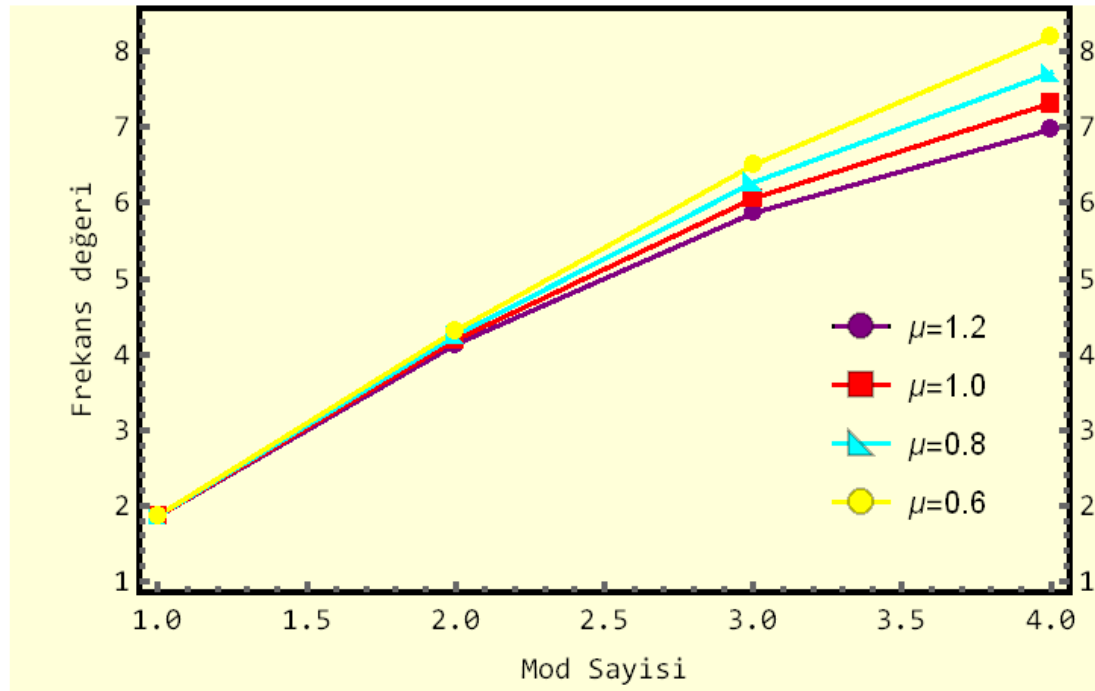
**Şekil 4.12.** Poisson oranının değişiminin titreşim frekansına etkisi

Aşağıda Çizelge 4.14'te mesnet koşulları olan  $S_0=1$  ve  $S_L=10$  değerleri sabit tutulurken  $\mu$  değerinin 0,6 ile 1,2 arasındaki değişiminin aksel hareket mod değerlerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.14.** Yerel olmayan parametrenin değişiminin titreşim frekansına etkisi

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0,6$	1,866	4,311	6,502	8,190
$\mu = 0,8$	1,863	4,248	6,270	7,719
$\mu = 1$	1,860	4,188	6,059	7,318
$\mu = 1,2$	1,856	4,129	5,867	6,971

Aşağıda görülen Şekil 4.13'te, yukarıda verilen Çizelge 4.14 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir. Çizelge ve şekilde farklı yerel olmayan parametre değerleri için bu çalışmada elde edilen formüller kullanılarak hesaplamalar yapılmış ve grafiksel ve sayısal olarak karşılaştırılmıştır. Çizelge ve şekilden görüleceği gibi yerel olmayan etkilerin yüksek modlarda daha fazla ön plana çıktığı görülmektedir. Düşük modlarda yerel olmayan etkilerin titreşim frekanslarına etkisi daha azdır.



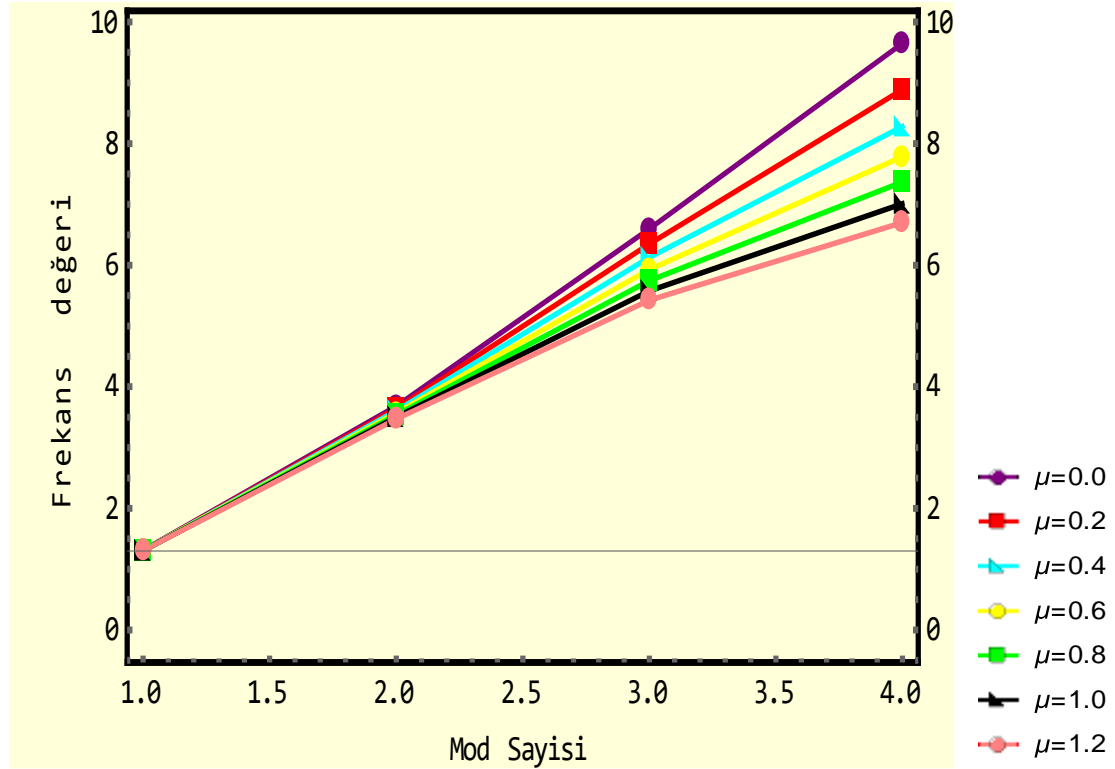
**Şekil 4.13.** Yerel olmayan parametrenin değişiminin titreşim frekansına etkisi

Aşağıda verilen Çizelge 4.15'te mesnet koşulları olan  $S_0=1$  ve  $S_L=1$  sabitken  $\mu$  değerinin 0'dan 1,2'ye kadar olan değişiminin aksel hareketin ilk dört mod değerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.15.** Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=1$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	1,308	3,680	6,597	9,648
$\mu = 0,2$	1,307	3,643	6,350	8,887
$\mu = 0,4$	1,307	3,607	6,128	8,282
$\mu = 0,6$	1,307	3,571	5,927	7,786
$\mu = 0,8$	1,306	3,537	5,745	7,369
$\mu = 1$	1,306	3,504	5,579	7,012
$\mu = 1,2$	1,306	3,471	5,426	6,703

Aşağıda Şekil 4.14'te, yukarıda verilen Çizelge 4.15 değerlerinin karşılaştırılabilmesi için grafik görseli verilmiştir. Simetrik sınır koşulları için bir önceki örnekte elde edilen sonuçlar doğrulanmıştır.



**Şekil 4.14.** Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=1$ )

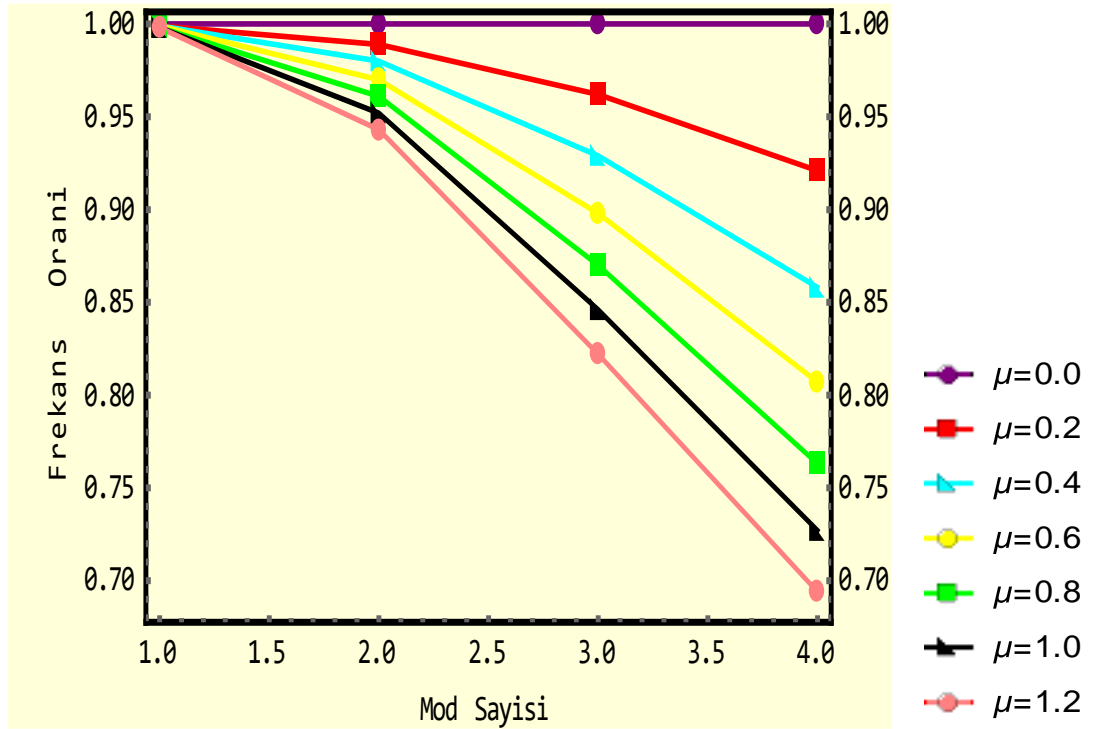


$$\frac{\lambda(\text{lokal olmayan})}{\lambda(\text{lokal})}$$

**Çizelge 4.16.** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0 = S_L = 1$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	1	1	1	1
$\mu = 0,2$	0,999	0,989	0,962	0,921
$\mu = 0,4$	0,999	0,980	0,929	0,858
$\mu = 0,6$	0,999	0,970	0,898	0,807
$\mu = 0,8$	0,998	0,961	0,870	0,763
$\mu = 1$	0,998	0,952	0,846	0,727
$\mu = 1,2$	0,998	0,943	0,822	0,694

Yukarıda Çizelge 4.16'dan ve aşağıda Şekil 4.15'ten görüleceği gibi yerel olmayan etkilerin yüksek modlarda daha ön plana çıktığı açıkça görülmektedir. Yerel olmayan elastisite teorisi kullanıldığında özellikle yüksek modlarda düşük frekans değerleri elde edilmektedir. Yerel olmayan parametre arttıkça frekans değerleri lineer olmayan şekilde azalmaktadır. Yukarıdaki çizelge ve şekilde bu azalış sistematik bir şekilde gösterilmiştir.

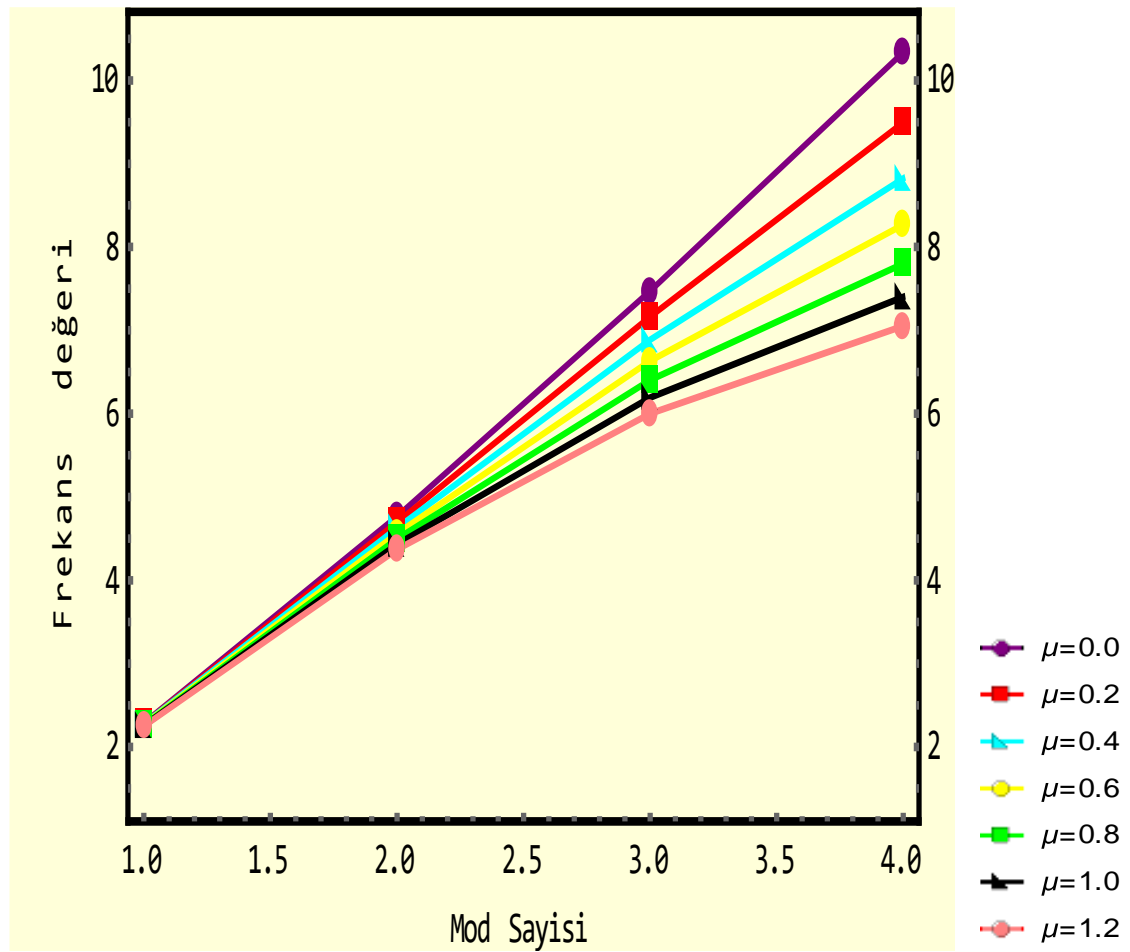


**Şekil 4.15.** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0 = S_L = 1$ )

Aşağıda Çizelge 4.17’de mesnet koşulları olan  $S_0=5$  ve  $S_L=5$  değerleri değiştirilmeden  $\mu$  değerinin 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1 ve 1,2 değerleri arasındaki değişiminin aksel hareketin mod değerlerinin üzerindeki etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\nu = 0,3$  ve  $L = 10$  nm değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.17.** Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=5$ )

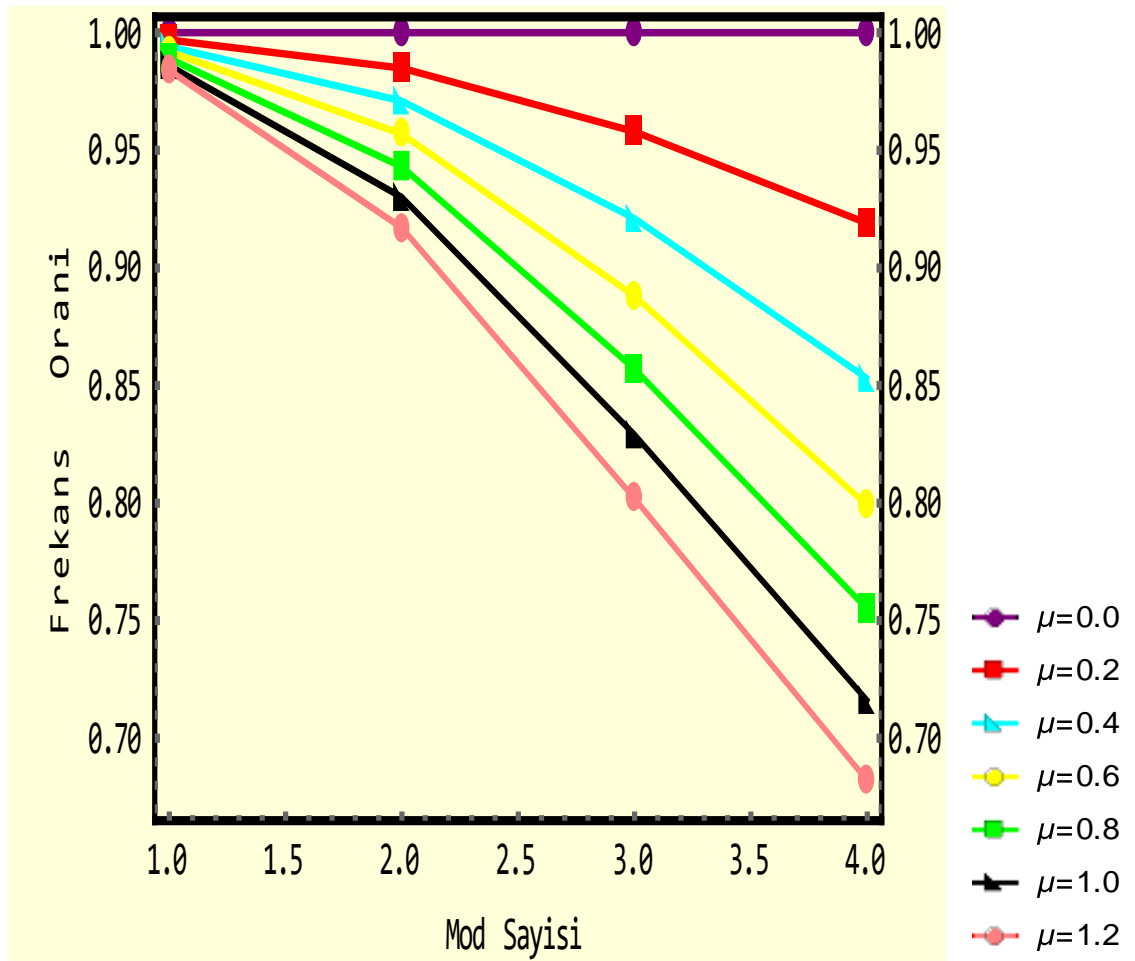
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	2,285	4,765	7,472	10,338
$\mu = 0,2$	2,279	4,695	7,164	9,496
$\mu = 0,4$	2,273	4,627	6,886	8,823
$\mu = 0,6$	2,267	4,560	6,634	8,268
$\mu = 0,8$	2,261	4,495	6,404	7,801
$\mu = 1$	2,255	4,432	6,193	7,401
$\mu = 1,2$	2,249	4,370	5,999	7,053



**Şekil 4.16.** Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=5$ )

**Çizelge 4.18.** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=5$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	1	1	1	1
$\mu = 0,2$	0,997	0,985	0,958	0,919
$\mu = 0,4$	0,994	0,971	0,921	0,853
$\mu = 0,6$	0,992	0,957	0,888	0,799
$\mu = 0,8$	0,989	0,943	0,857	0,755
$\mu = 1$	0,986	0,930	0,829	0,716
$\mu = 1,2$	0,984	0,917	0,802	0,682

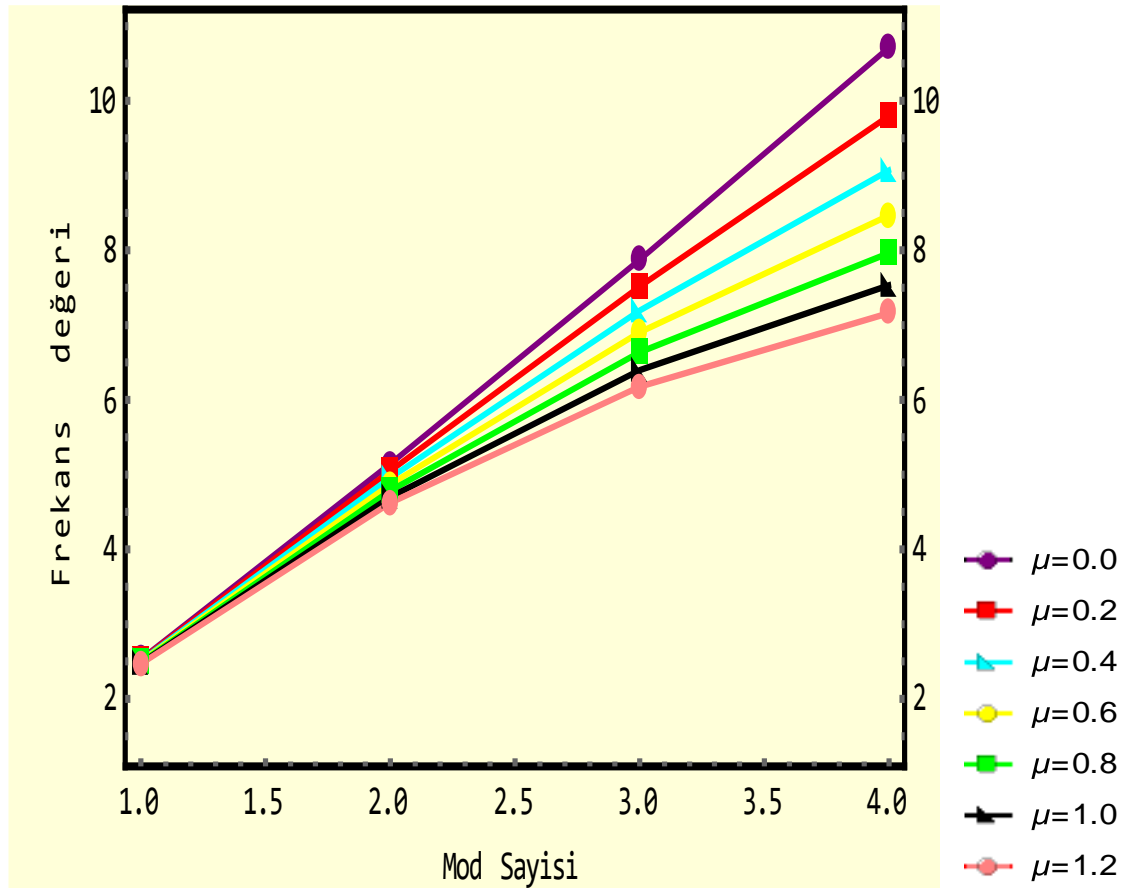


**Şekil 4.17.** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=5$ )

Aşağıda Çizelge 4.19’da mesnet koşulları olan  $S_0=8$  ve  $S_L=8$  değerleri sabit tutulurken  $\mu$  değerinin 0 ile 1,2 arasındaki değişiminin aksel hareket mod değerlerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.19.** Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=8$ )

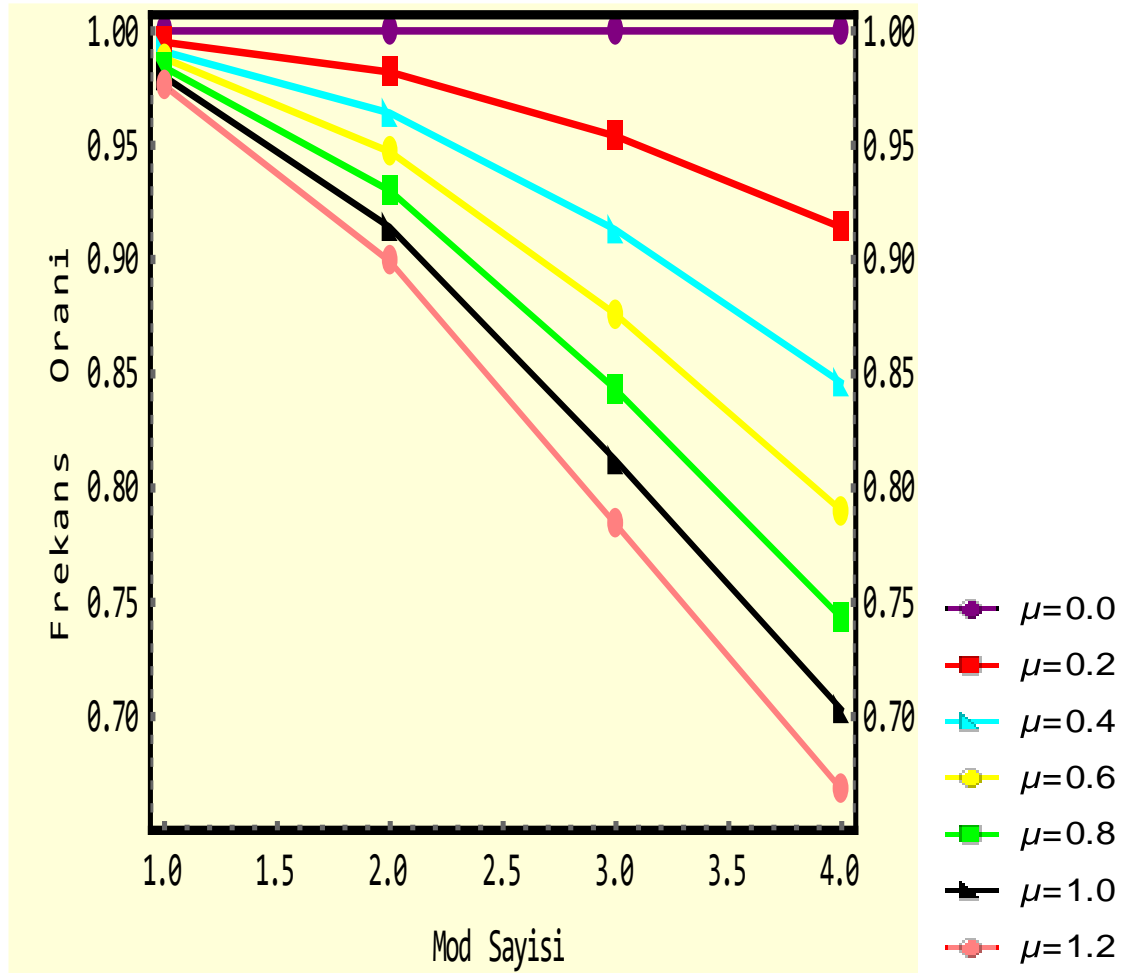
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	2,530	5,143	7,876	10,716
$\mu = 0,2$	2,519	5,049	7,517	9,802
$\mu = 0,4$	2,509	4,958	7,194	9,070
$\mu = 0,6$	2,499	4,870	6,903	8,468
$\mu = 0,8$	2,489	4,785	6,638	7,964
$\mu = 1$	2,479	4,702	6,398	7,533
$\mu = 1,2$	2,469	4,622	6,178	7,162



**Şekil 4.18.** Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=8$ )

**Çizelge 4.20.** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=8$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	1	1	1	1
$\mu = 0,2$	0,995	0,982	0,954	0,914
$\mu = 0,4$	0,991	0,964	0,913	0,846
$\mu = 0,6$	0,988	0,947	0,876	0,790
$\mu = 0,8$	0,984	0,930	0,843	0,743
$\mu = 1$	0,980	0,914	0,812	0,703
$\mu = 1,2$	0,976	0,899	0,784	0,668

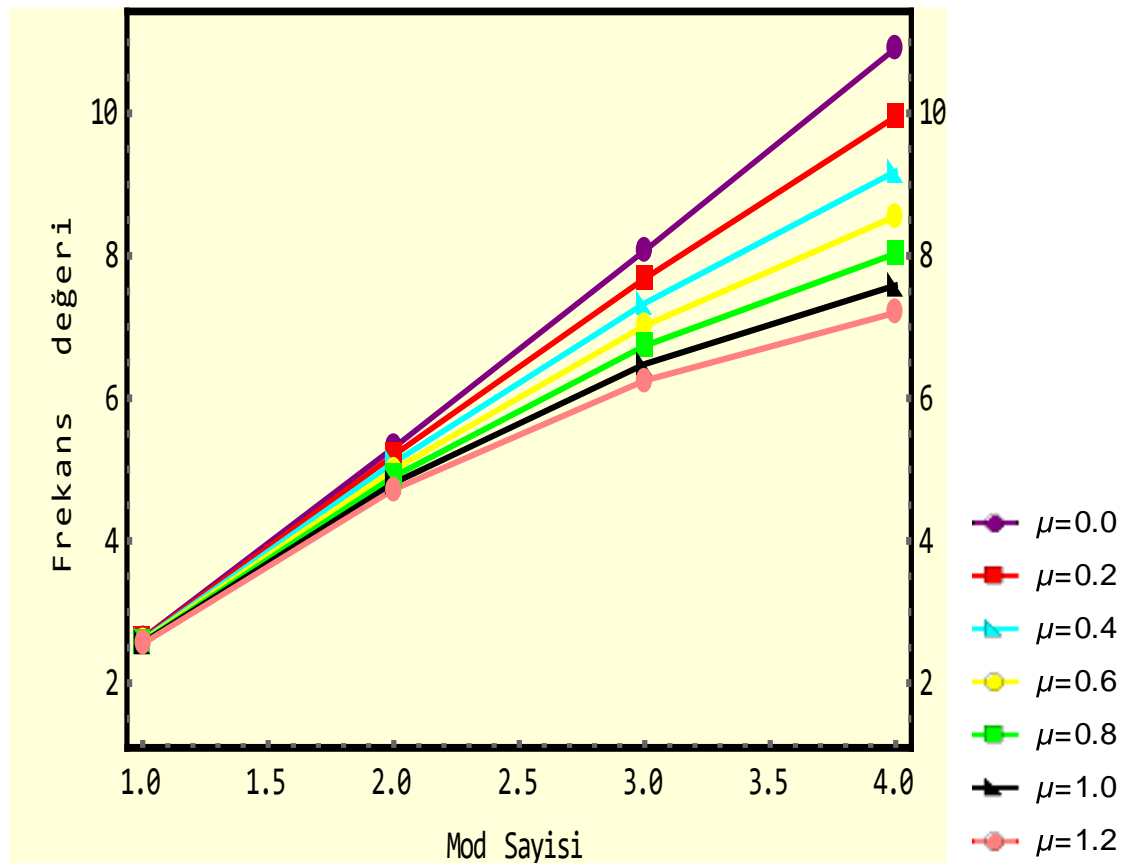


**Şekil 4.19.** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0= S_L=8$ )

Aşağıda Çizelge 4.21’de mesnet koşulları olan  $S_0=10$  ve  $S_L=10$  sabitken  $\mu$  değerinin 0’den 1,2’ye kadar olan değişiminin aksel hareketin ilk dört mod değerine etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $L = 10$  nm ve  $\nu = 0,3$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.21.** Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=10$ )

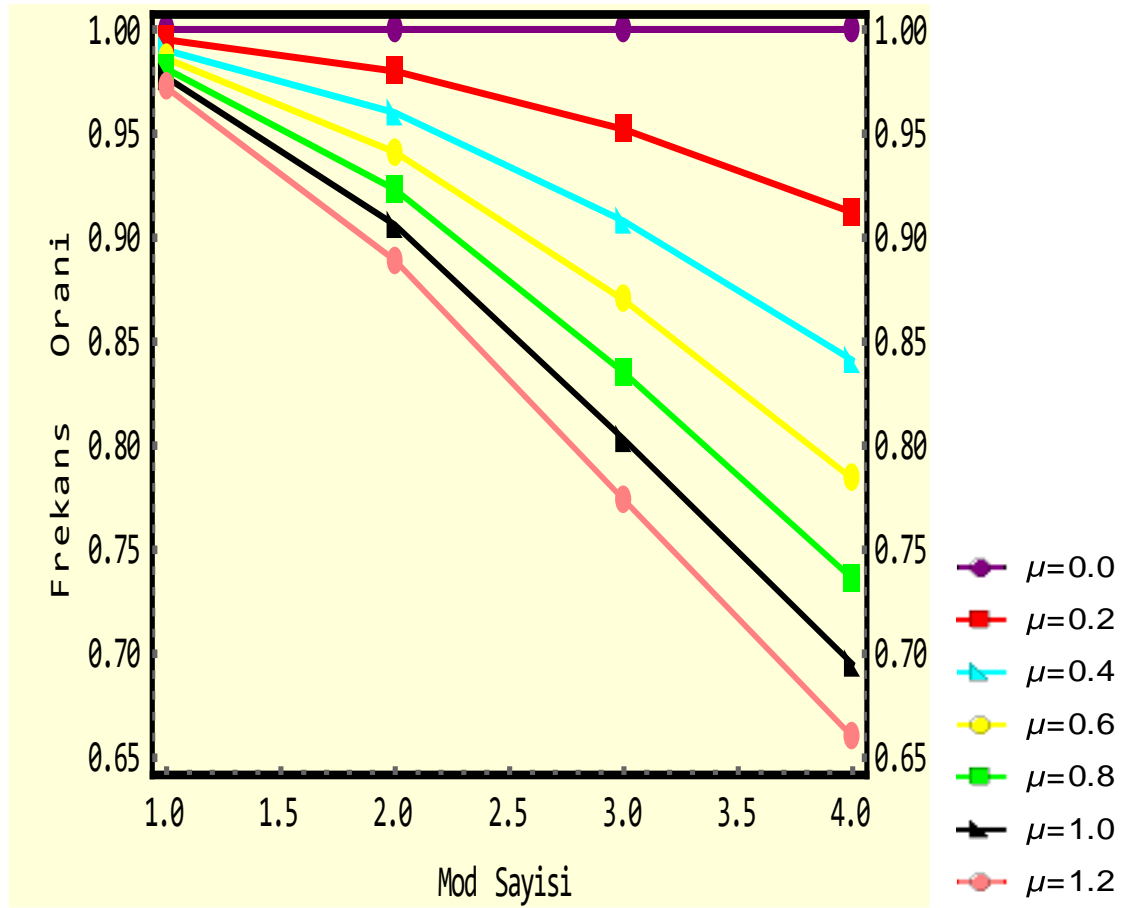
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	2,628	5,309	8,071	10,914
$\mu = 0,2$	2,615	5,201	7,681	9,952
$\mu = 0,4$	2,603	5,098	7,332	9,184
$\mu = 0,6$	2,591	4,998	7,018	8,556
$\mu = 0,8$	2,579	4,902	6,736	8,031
$\mu = 1$	2,567	4,810	6,480	7,586
$\mu = 1,2$	2,555	4,721	6,248	7,203



**Şekil 4.20.** Titreşim frekansına yerel olmayan parametrenin etkisi ( $S_0= S_L=10$ )

**Çizelge 4.22.** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0 = S_L = 10$ )

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\mu = 0$	1	1	1	1
$\mu = 0,2$	0,995	0,980	0,952	0,912
$\mu = 0,4$	0,990	0,960	0,908	0,841
$\mu = 0,6$	0,986	0,941	0,870	0,784
$\mu = 0,8$	0,981	0,923	0,835	0,736
$\mu = 1$	0,977	0,906	0,803	0,695
$\mu = 1,2$	0,972	0,889	0,774	0,660



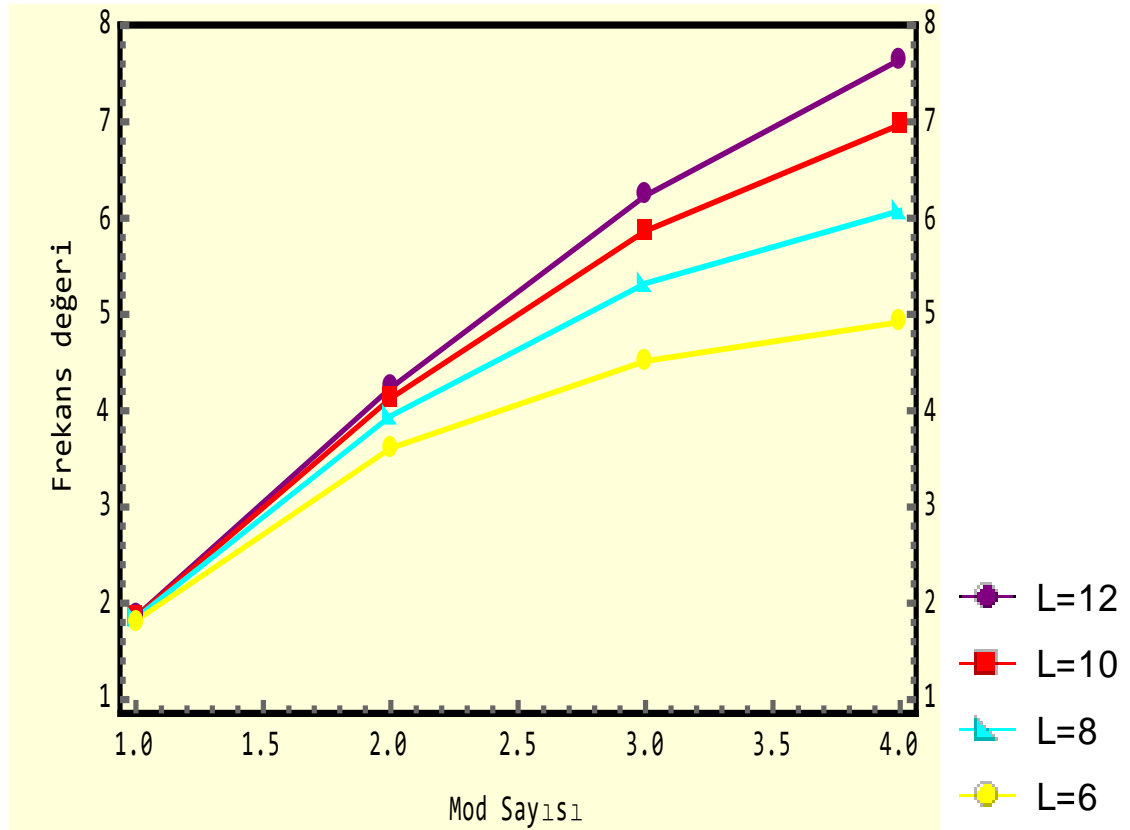
**Şekil 4.21.** Yerel olmayan elastisitenin titreşim frekansına etkisi ( $S_0 = S_L = 10$ )

Aşağıda Çizelge 4.23'te mesnet koşulları olan  $S_0=5$  ve  $S_L=5$  değerleri değiştirilmeden  $\mu$  değerinin 6, 8, 10 ve 12 değerleri arasındaki değişiminin aksel hareketin mod değerlerinin üzerindeki etkisinin incelendiği değerler sunulmuştur. Bu incelemede  $r = 1$  nm,  $\nu = 0,3$  ve  $\mu = 1,2$  değerleri alınmıştır.

**Çizelge 4.23.** Mikrokirişin boyunun titreşim frekansına etkisi

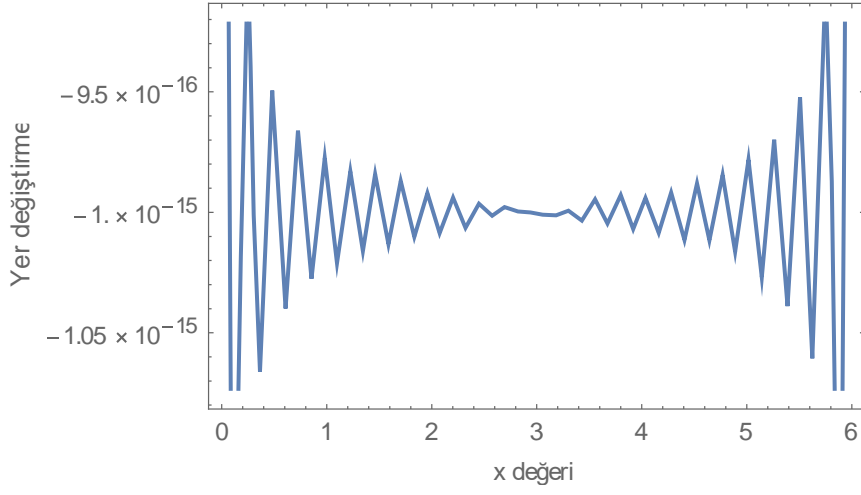
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
L=6 nm	1,820	3,611	4,515	4,920
L=8 nm	1,845	3,946	5,324	6,077
L=10 nm	1,856	4,129	5,867	6,971
L=12 nm	1,862	4,238	6,234	7,649

Yukarıdaki çizelge ve şekilde nanotüpün farklı boyları için titreşim değerleri hesaplanmıştır. Nanotüpün boyu uzadıkça frekans değerlerinin arttığı gözlemlenmiştir. Buradaki hesaplamalar için yerel olmayan parametrenin 1,2 sabit değeri esas alınmıştır.

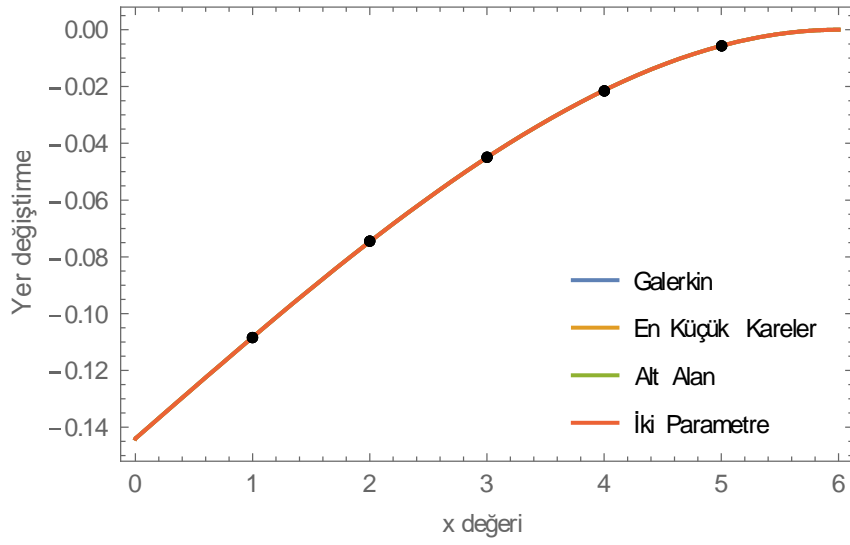


**Şekil 4.22.** Mikrokirişin boyunun titreşim frekansına etkisi





**Şekil 4.23.** Rayleigh nanoğubuğun titreşim grafiği

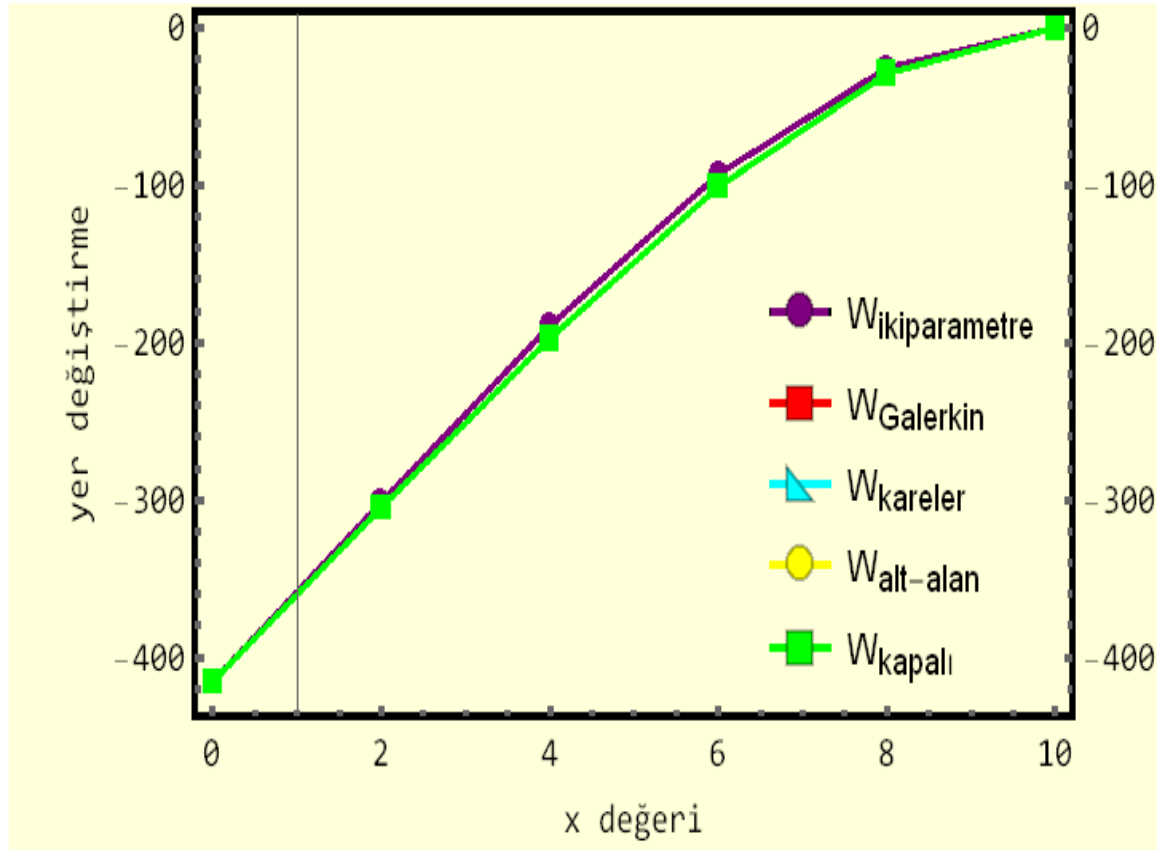


**Şekil 4.24.** Yöntemlere göre yer değiştirme denklemlerinin karşılaştırılması

**Çizelge 4.24.** Ağırlıklı artık fonksiyon çözümlerinin karşılaştırılması

	$W_{\text{parametre}}$	$W_{\text{galerkin}}$	$W_{\text{kareler}}$	$W_{\text{alt alan}}$	$W_{\text{kapalı}}$
x=0	-415.42	-415.42	-415.42	-415.42	-415.42
x=2	-301.318	-304.863	-304.863	-304.863	-304.863
x=4	-189.432	-197.408	-197.408	-197.408	-197.408
x=6	-93.0542	-101.03	-101.03	-101.03	-101.03
x=8	-25.4791	-29.024	-29.024	-29.024	-29.024
x=10	0	0	0	0	0

Çizelge 4.24’te farklı ağırlıklı artıklar yöntemleri ve yaklaşım fonksiyonları kullanılarak eksenel yüklenmiş ankastre bir çubuğun eksenel statik yer değiştirme değerleri hesaplanmış ve Şekil 4.25’te birlikte verilmiştir. Benzer şekilde kapalı çözüm aynı grafik üzerinde gösterilmiş ve aradaki farklılıklar incelenmiştir.



**Şekil 4.25.** Ağırlıklı artık fonksiyon çözümlerinin karşılaştırılması

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak Rayleigh modelinde tanımlanmış bir nanoçubuğun genel elastik sınır koşullarında yaptığı serbest titreşim hareketi incelenmiştir. İlk olarak yerel olmayan elastisite teorisinin diferansiyel hale getirilmiş denklemi, gerilme durumu için literatürde bulunduğu şekliyle yazılmıştır. Daha sonra bu gerilme denklemi kullanılarak Rayleigh modelindeki nanoçubuğun hareket denklemi oluşturulmuştur. Sınır koşulları deforme olabilir olduğu için bu diferansiyel denklemin kapalı çözümünün ayrı ayrı yapılabilmesi mümkündür ancak bu çalışmada Stoke dönüşümü kullanılarak genel bir özdeğer problemi oluşturulmak amaçlanmıştır. Ayrıca bu elastik sınır koşullarına çok küçük değerler verildiğinde serbest uçlu bir nanoçubuğun titreşim frekansı bulunabilmektedir. Benzer şekilde yay sabitlerine sonsuz büyük değerler verildiğinde ise ankastre mesnetlenmiş çubuğun titreşim frekansları da bulunabilmektedir. Yani bu çalışma kapsamında oluşturulan model, herhangi bir sınır koşulu için çözüm üretebilmektedir. Diğer klasik yöntemlerde olduğu gibi sınır koşulları değiştiğinde denklemin yeniden çözülmesi gerekmemektedir. Yapılan analizler sonucu bulgular bölümünde de sunulan değerler ışığında aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

- Mikrokirişin uçlarındaki yayların rijitlik değerleri yani mesnet değerleri arttırıldığında titreşim frekansı artmıştır. Bu da sistemin rijitliğinin arttığı anlamına gelmektedir.
- Mikrokirişin yarıçap değeri arttırıldığında ise titreşimin frekansı değerinde ve bununla birlikte rijitlikte bir değişiklik olmadığı gözlemlenmiştir. Bunun sebebinin yerel olmayan elastisite parametresinin etkisi olduğu düşünülmektedir.
- Poisson oranının titreşim frekansına ve dolayısıyla rijitliğe bir etkisi olmadığı gözlenmiştir.
- Elastisite parametresi değeri arttıkça titreşim frekansının ve rijitlik değerlerinin azaldığı gözlemlenmiştir. Bununla birlikte bu tez özelinde klasik elastisite teorisinin rijitlik açısından yerel olmayan elastisite teorisine göre daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.
- Mikrokirişin boyu arttırıldığında ise titreşim frekans değeri ve rijitliğin arttığı gözlemlenmiştir. Beklenenin aksi çıkan bu sonuca yerel olmayan parametrenin neden olduğu tahmin edilmektedir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde Eringen tarafından önerilen yerel olmayan elastisite teorisine göre aksenal lineer yüklenmiş bir kirişin aksenal statik analizi ağırlıklı artıklar yöntemleriyle incelenmiştir. Bilindiği gibi literatürde birçok ağırlıklı artık yöntemi vardır. Bu çalışmada Galerkin, alt alan, en küçük kareler ve iki parametrelili yöntemler kullanılmıştır. Ayrıca bu yöntemler iki parametrelili ve üç parametrelili olarak polinom şeklinde alınmış ve kapalı çözüme yakınsaklığı benzer bir problem üzerinde tartışılmıştır. Bütün ağırlıklı artıklar yöntemlerinde üç parametrelili çözümün kapalı çözüme eşit sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. İki parametrelili çözümde ise bazı yöntemlerin kapalı çözüme daha yakın sonuçlar verirken bazıları ise bölgede çözümden oldukça uzak kalmıştır. Bunun açıklaması şu şekilde yapılabilir. Her yöntemin kendi içinde ağırlıklı artığı problemin içine alma şekli farklıdır.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde ise bir mikrokirişin eğilme analizi Akgöz 2010 tarafından önerilen değiştirilmiş gerilme çifti teorisine eğilme analizi gerçekleştirilmiştir. Analiz yapılırken bir önceki kısımda tanımları verilen ağırlıklı artıklar yöntemiyle çözümlerin yapılması planlanmıştır. İlk olarak değiştirilmiş gerilme çifti teorisine göre artık fonksiyonu tanımlanmıştır. Daha sonra diferansiyel denklemin derecesine uygun olarak üç bilinmeyenli ve dördüncü dereceden bir yer değiştirme fonksiyonu önerilmiştir. Bu yer değiştirme fonksiyonu önerilirken sınır koşullarını sağlamasına dikkat edilmiştir. Daha sonra önerilen yer değiştirme fonksiyonu kullanılarak artık fonksiyonu hesaplanmıştır. Her bir yöntemin artık fonksiyonu için yaptığı kabuller dikkate alınarak problemin çözümü gerçekleştirilmiştir. Bu yöntemlerin tamamında kapalı çözümü olan yer değiştirme fonksiyonları bulunmuştur. Daha sonra benzer çözümler iki parametrelili polinomlar için de uygulanmış ve kapalı çözümden ne kadar uzaklaştığı test edilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Akgöz, B., and Civalek, Ö. 2010a.** Analysis of microtubules based on strain gradient elasticity and modified couple stress theories. *Advances in Vibration Engineering*, in press.
- Akgöz, B., Civalek, Ö. 2010b.** Buckling analysis of Cantilever Carbon Nanotubes Using the Strain Gradient Elasticity and Modified Couple Stress Theories. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Accept for Publication.
- Anthoine, A. 2000.** Effect of couple-stresses on the elastic bending of beams. *International Journal of Solids and Structures*, 37: 1003-1018.
- Civalek, Ö., Akgöz, B. 2010.** Free vibration analysis of microtubules as cytoskeleton components: Nonlocal Euler-Bernoulli beam modeling. *Scientica Iranica, Transaction B- Mechanical Engineering*, 17(5): 367-375.
- Civalek, Ö., Demir, Ç., Akgöz, B. 2010.** Free vibration and bending analyses of cantilever microtubules based on nonlocal continuum model. *Mathematical and Computational Applications*, 15: 289-298.
- Cosserat, E., Cosserat, F. 1909.** Theorie de Corps deformables. Editions A. Hermann, Paris.
- Eringen, A.C., Şuhubi, E.S. 1964a.** Nonlinear theory of simple microelastic solid, I. *International Journal of Engineering Science*, 2: 189–203.
- Eringen, A.C., Şuhubi, E.S. 1964b.** Nonlinear theory of simple microelastic solid, II. *International Journal of Engineering Science* 2: 389–404.
- Eringen, A.C. 1966.** Linear theory of Micropolar elasticity. *Journal of Mathematical Mechanics*, 15: 909-923.
- Eringen, A.C. 1983.** On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, 54: 4703–4710.
- Ecsedi, I., Baksa, A. 2017.** Free axial vibration of nanorods with elastic medium interaction based on nonlocal elasticity and Rayleigh model
- Fu, Y., Zhang, J. 2010.** Modeling and analysis of microtubules based on a modified couple stress theory. *Physica E*, 42: 1741-1745.
- Fung, Y. C. 1965.** Foundations of solid mechanics. Prentice-Hall Inc. New Jersey.
- Gao, X.-L., Park, S.K. 2007.** Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem. *International Journal of Solids and Structures* 44: 7486–7499.69

**Hao, M.J., Guo, X.M., Wang, Q. 2010.** Small-scale effect on torsional buckling of multi-walled carbon nanotubes. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29 (1): 49-55.

**Hu, Y.G., Liew, K.M., Wang, Q., He, X.Q., Yakobson, B.I. 2008.** Nonlocal shell model for elastic wave propagation in single- and double-walled carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56: 3475-3485.

**Hung, E.S., Senturia, S.D. 1999.** Extending the travel range of analog-tuned electrostatic actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 8 (4): 497-505.

**Hutchinson, J.R. 2001.** Shear coefficients for Timoshenko beam theory, *Journal of Applied Mechanics*, 68: 87-92.

**Işık, Ç. 2011.** Nano ve mikro yapıların yerel olmayan elastisite teorisi ile eğilme ve titreşim hesabı, *Yüksek Lisans Tezi*, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.

**Işık, H. 2013.** Çift duvarlı karbon nanotüplerin bir ucu ankastre diğer ucu yaylı durumda çözümünün incelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

**Jr. Poole, C. P., Owens, F. J. 2003.** Introduction to nanotechnology, *John Wiley & Sons, Inc*, New York.

**Jones, G., Jones, M. 1997.** Analysis of beams on elastic foundations, *Telford*, London.

**Jones, M. 1997.** Analysis of beams on elastic foundations: Using finite difference theory, *Thomas Telford*, London.

**Kadioğlu, H., Yaylı, M. Ö. 2017.** Buckling Analysis of Non-Local Timoshenko Beams by Using Fourier Series. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 9 (4): 89-99.

**Kadioğlu, H. G. 2018.** Timoshenko kirişlerinin genel elastik sınır koşullarında titreşim analizi. *Yüksek Lisans Tezi*, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Bursa.

**Kao, R. K. C. 1968.** Beams on non-linear elastic foundation, *University of South Carolina*, Columbia.

**Kapoor, M. 2012.** Advances in nanotechnology, *Oxford Book Company*, Hindistan.

**Karaşin, A. H., Gülkan, P. 2008.** Elastik zeminlere oturan plakların sonlu ızgara yöntemi ile yaklaşık çözümü, *İMO Teknik Dergi*, 293: 4445-4454.

**Karkare, M. 2008.** Nanotechnology: Fundamentals and applications, *I. K International Publishing House Pvt. Ltd*, New Delhi.

**Karlıc, D., Jovanovic D., Kozic, P., Cajic, M. 2015.** Thermal and magnetic effects on the vibration of a cracked nanobeam embedded in an elastic medium, *Journal of Mechanics of Material and Structures*, 10(1): 43-62.

**Kaya, M. O. 2006.** Free vibration analysis of a rotating Timoshenko beam by differential transform method. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 78(3): 194-203.

**Kim, H. K., Kim, M. S. 2001.** Vibration of beams with generally restrained boundary conditions using Fourier series. *Journal of Sound and Vibration*, 245(5): 771-784.

**Kılıç, V. 2006.** Elastik zemine oturan dikdörtgen plakların titreşimleri, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

**King, V.B. 2007.** Nanotechnology Research Advances, *Nova Science Publishers*, New York.

**Kişin, E. 2006.** Elastik zemine oturan çelik lif ve çelik hasır donatılı beton plakların mekanik davranışı, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Bilim Dalı, İstanbul.

**Kocatürk, T., Şimşek, M. 2005.** Free vibration analysis of elastically supported Timoshenko beams. *Sigma*, 3: 79-93.

**Koç, Y. 2006.** Euler Bernoulli ve Timoshenko teorileri kullanılarak basit mesnetli kirişlerin serbest titreşimlerinin incelenmesi. *Yüksek Lisans Tezi*, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, İstanbul. 53

**Kösegil, A. 2010.** Yerel olmayan elastisite teorisinde açı ve ritz yöntemlerinin nanoteknolojiye uygulanması, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

**Kumar, B.M., Sujith, R.I. 1997.** Exact solutions for the longitudinal vibration of non-uniform rods, *Journal of Sound and Vibration*, 207(5): 721-729.

**Kurt, E. L., Medikonda, M. 2012.** Understanding the nanotechnology revolution, *Wiley*, New York.

**Kutlu, E. 2007.** Elastik zemine oturan çelik lif donatılı beton plakların deneysel analizi ve genel bir değerlendirme, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Deprem Mühendisliği Bilim Dalı, İstanbul .

**Kutucu, B. 2010.** Nanoteknoloji ve çift duvarlı karbon nanotüplerin incelenmesi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Mühendisliği Bilim Dalı, İstanbul .

- Kuyumcu, Z. 2011.** Elastik zemine oturan kablolu köprülerin stokastik analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Bilim Dalı, Trabzon.
- Lai, Y.C. 1990.** Dynamic response of beams on elastic foundation, *University of Missouri*, Columbia.
- Leissa, A.W., Qatu, M.S. 2011.** Vibration of continuous systems, *McGraw Hill*, Yeni Delhi.
- Li, C. Y., Chou, T. W. 2003.** A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes, *Int. J. Solids Struct.*, 40: 2487-2499.
- Lin, S. C., Hsiao, K. M. 2001.** Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibration*, 240(2): 303-322.
- Lin, K.K. 1970a.** Bending of a constrained circular beam on an elastic foundation, *Kansas State University*, Kansas.
- Lin, K.K. 1970b.** Beams on one-way elastic foundations, *Kansas State University*, Kansas.
- Liu, T. W. 1988.** A generalized beam on elastic foundation model for fracture studies, *University of Hong Kong*, Pok Fu Lam.
- Loya, J., Puente, J. L., Zaera, R., Sáez, J. F. 2009.** Free transverse vibrations of cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model, *Journal of Applied Physics*, 105,044309.
- Maddox, D. 2005.** Nanotechnology, *Blackbirch Press*, Woodbridge.
- Mahler, E., Seiler, D. 2011.** Carbon nanotube and nanocomposite research, *Nova Science Publishers*, New York.
- Malik, M., Dang, H. H. 1998.** Vibration analysis of continuous systems by differential Transformation, *Applied Mathematics and Computation*, 96(1): 17-26.
- Melerski, E.S. 2000.** Design analysis of beams, circular plates and cylindrical tanks on elastic foundations, *A.A.Balkema*, Rotterdam.
- Menceloğlu, Y., Kırca, M. 2008.** Uluslararası rekabet stratejileri: nanoteknoloji ve Türkiye, TÜSİAD Rekabet Stratejileri Dizisi 11, TÜSİAD, İstanbul.
- Meyyappan, M. 2004.** Carbon nanotubes: properties and applications, *CRC Press*, London.
- Mindlin R.D., 1964,1965.** Archive for Rational Mechanics and Analysis
- Mindlin R.D. ve Tiersten H.F., 1962.** Effects of couple-stresses in linear elasticity



- Morris, J.E., Iniewski, K. 2013.** Graphene, carbon nanotubes and nanostructures: techniques and applications, *CRC Press*, London.
- Nakamoto, T.A. 1976.** Deflections of a beam on an elastic foundation, *California State University*, Long Beach.
- Nugent, G. 1975.** Beams and circular plates on elastic foundation, *Trinity College*, Dublin.
- O'Connell, M.J. 2006.** Carbon nanotubes: properties and applications, *CRC Press*, London.
- Orkov, G., Saxenhofer, H. 1967.** Beams on elastic foundation, *California Department of Water Resources*, Sacramento.
- Oruçoğlu, K. 1991.** Yerel olmayan elastisite de çatlak problemi, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Özdemir, Ö. 2009.** Elastik zemine oturan kirişlerin sonlu titreşimi, *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Özdemir, O. O., Kaya, M. O. 2010.** Vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam using DTM. *Meccanica*, 45(1): 33-42.
- Özgan, K., Daloğlu, A.T. 2011.** Elastik zemine oturan kalın plaklar için kayma kilitlenmesiz bir sonlu eleman modeli, *İMO Teknik Dergi*, 346: 5341-5358.
- Özgan, K., Daloğlu A.T. 2005.** Elastik zemine oturan plaklar için etkili zemin derinliği, Antalya Yöresinin İnşaat Mühendisliği Sorunları Kongresi, :635-647
- Pentaras, D. 2009.** Vibration, buckling and impact of carbon nanotubes, *Florida Atlantic University*, Boca Raton.
- Pilkey, W.D. 2002.** Analysis and design of elastic beams: computational methods, *John Wiley & Sons, Inc*, New York.
- Poncharal, P., Wang, Z. L., Ugarte, D., Heer, W. A. D. 1999.** Electrostatic deflections and electromechanical resonances of carbon nanotubes. *Science*, 283: 1513-1516.
- Qiusheng, L., Hong, C., & Guiqing, L. 1995.** Stability analysis of bars with varying cross-section. *International Journal of Solids and Structures*, 32(21), 3217-3228.
- Reissner, E. 1958.** A note on deflections of plates on a viscoelastic foundation. *J. Appl. Mech.*, *ASME*, 25, 144-145.

**Rezaei, A. S., and A. R. Saidi. 2015.** "Exact Solution for Free Vibration of Thick Rectangular Plates Made of Porous Materials." *Composite Structures* 134: 1051–60. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.125>.

**Rezaei, A. S., A. R. Saidi, M. Abrishamdari, and M. H. P. Mohammadi. 2017.** "Natural Frequencies of Functionally Graded Plates with Porosities via a Simple Four Variable Plate Theory: An Analytical Approach." *Thin-Walled Structures* 120 (May): 366–77. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.08.003>.

**Robinson, M. T. A., & Adali, S. 2018.** Buckling of nonuniform and axially functionally graded nonlocal Timoshenko nanobeams on Winkler-Pasternak foundation. *Composite Structures*, 206, 95-103.

**Self-Compacting Concrete European Project Group. 2005.** "The European guidelines for self-compacting concrete: Specification, production and use." International Bureau for Precast Concrete (BIBM).

**Shen, Z. B., Li, X. F., Sheng, L. P., & Tang, G. J. 2012.** "Transverse vibration of nanotube-based micro-mass sensor via nonlocal Timoshenko beam theory." *Computational Materials Science*, 53(1), 340-346.

**Singh, K. V., & Li, G. 2009.** Buckling of functionally graded and elastically restrained non-uniform columns. *Composites Part B: Engineering*, 40(5), 393-403.

**Şimşek, M. 2016.** Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions. *Composite Structures*, 149, 304-314.

**Tadjbakhsh, I., & Keller, J. B. 1962.** Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues.

**Thambiratnam, D., & Zhuge, Y. 1996.** "Dynamic analysis of beams on an elastic foundation subjected to moving loads." *Journal of sound and vibration*, 198(2), 149-169.

**Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. 2009.** *Theory of elastic stability*. Courier Corporation.

**Taylor, J. E. 1967.** The strongest column: an energy approach. *Journal of Applied Mechanics*, 34(2), 486-487.

**Vlasov, V. Z. 1966.** "Beams, plates and shells on elastic foundation. *Israel Program for Scientific Translation*."

**Wang, T.M., and L.W. Gagnon. 1978.** "Vibrations of Continuous Timoshenko Beams on Winkler-Pasternak Foundations." *Journal of Sound and Vibration* 59 (2): 211–20. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(78\)90501-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(78)90501-1).

**Wang, C. M., & Wang, C. Y. 2004.** Exact solutions for buckling of structural members. CRC press.

**Wattanasakulpong, N., & Ungbhakorn, V. 2014.** "Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities." *Aerospace Science and Technology*, 32(1), 111-120.

**Winkler, E. 1867.** "Die Lehre von Elastizität Und Festigkeit (on Elasticity and Fixity)." Prag. [https://archive.org/details/bub\\_gb\\_25E5AAAAcAAJ/page/n3](https://archive.org/details/bub_gb_25E5AAAAcAAJ/page/n3).

**Yanık, F., & Yaylı, M. Ö. 2015.** "Rijit Olmayan Sınır Koşullarında Elastik Zemine Oturan Bir Çubuğun Eksenel Titreşim Analizi." *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 2(1), 35-44.

**Yao, F., Meng, W., Zhao, J., She, Z., & Shi, G. 2018.** Analytical method comparison on critical force of the stepped column model of telescopic crane. *Advances in Mechanical Engineering*, 10(10), 1687814018808697.

**Yas, M. H., and Samadi, N. 2012.** "Free Vibrations and Buckling Analysis of Carbon Nanotube-Reinforced Composite Timoshenko Beams on Elastic Foundation." *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 98 (October): 119–28. <https://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2012.07.012>.

**Yaylı, M. Ö., Aras, M., & Aksoy, S. 2014.** "An efficient analytical method for vibration analysis of a beam on elastic foundation with elastically restrained ends." *Shock and Vibration*, 2014.

**Yaylı, M. Ö. 2015.** Stability analysis of gradient elastic microbeams with arbitrary boundary conditions. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(8), 3373-3380.

**Yaylı, M. Ö., Yanık, F., & Kandemir, S. Y. 2015.** "Longitudinal vibration of nanorods embedded in an elastic medium with elastic restraints at both ends." *Micro & Nano Letters*, 10(11), 641-644.

**Yaylı, M. Ö. 2016.** Buckling analysis of a microbeam embedded in an elastic medium with deformable boundary conditions. *Micro & Nano Letters*, 11(11), 741-745.

**Yaylı, M. Ö. 2017.** "Buckling analysis of a cantilever single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium with an attached spring." *Micro & Nano Letters*, 12(4), 255-259.

**Yaylı, M. Ö. 2018a.** Buckling analysis of Euler columns embedded in an elastic medium with general elastic boundary conditions. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 46(1), 110-122.

**Yaylı, M. Ö. 2018b.** "On the torsional vibrations of restrained nanotubes embedded in an elastic medium." *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 40(9), 419.

**Yilmaz, Y., Girgin, Z., & Evran, S. 2013.** Buckling analyses of axially functionally graded nonuniform columns with elastic restraint using a localized differential quadrature method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013.

**Ying, J., Lü, C.F., and Chen, W.Q. 2008.** “Two-Dimensional Elasticity Solutions for Functionally Graded Beams Resting on Elastic Foundations.” *Composite Structures* 84 (3): 209–19. <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2007.07.004>.

**Zhang, Y., Zhang, L. W., Liew, K. M., & Yu, J. L. 2016.** Buckling analysis of graphene sheets embedded in an elastic medium based on the kp-Ritz method and non-local elasticity theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 70, 31-39.

**Zhou, D. 2001.** “Vibrations of Mindlin Rectangular Plates with Elastically Restrained Edges Using Static Timoshenko Beam Functions with the Rayleigh–Ritz Method.” *International Journal of Solids and Structures* 38 (32–33): 5565–80. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00384-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00384-X).

**Zhou, D., Y. K. Cheung, S. H. Lo, and F. T.K. Au. 2004.** “Three-Dimensional Vibration Analysis of Rectangular Thick Plates on Pasternak Foundation.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 59 (10): 1313–34. <https://doi.org/10.1002/nme.915>.

**Zhou M. ve Li Y., 2001.** Phosphorus-Sorption Characteristics of Calcareous Soils and Limestone from the Southern Everglades and Adjacent Farmlands

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı  
Doğum Yeri ve Tarihi  
Yabancı Dil

:Yakup Harun ÇAVUŞ  
:Osmangazi/BURSA 25.07.1996  
:İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise  
Lisans  
Yüksek Lisans

:Bursa Ulubatlı Hasan Anadolu Lisesi (2010-2014)  
:Bursa Uludağ Üniversitesi (2014-2018)  
: Bursa Uludağ Üniversitesi (2018-)

İletişim (e-posta)

:yakupharuncavus@gmail.com