



**BAZI ANLIK FREKANS KESTİRİCİLERİN
KARŞILAŞTIRMALI PERFORMANS ANALİZİ**

Ahmet DEMİR



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI ANLIK FREKANS KESTİRİCİLERİN KARŞILAŞTIRMALI
PERFORMANS ANALİZİ**

Ahmet DEMİR
0000-0002-0710-7770

Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2020
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Ahmet DEMİR tarafından hazırlanan “Bazı Anlık Frekans Kestiricilerin Karşılaştırmalı Performans Analizi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

Başkan : Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU
0000-0002-8432-623X
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Mühendislik Fakültesi,
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Üye : Prof. Dr. Güneş YILMAZ
0000-0001-8972-1952
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Mühendislik Fakültesi,
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Üye : Doç. Dr. Cemal HANILÇI
0000-0002-9174-0367
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü

.....



Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

15/06/2020

Ahmet DEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI ANLIK FREKANS KESTİRİCİLERİN KARŞILAŞTIRMALI PERFORMANS ANALİZİ

Ahmet DEMİR

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

Sensörler tarafından alınan bilgilerin analizinde ve işlenmesinde parametrelerin hızlı ve doğru şekilde kestirilmesi önemlidir. Gürültü içindeki bir reel sinüsün çok az sayıda veri örnekleri ile anlık frekans kestirimi işaret işleme alanında sıklıkla karşılaşılan önemli bir problemdir. Bu probleme yönelik literatürde birçok frekans kestiricisi önerilmiştir. Bu tez çalışmasında ayırık enerji ayrışım algoritmaları DESA-1a, DESA-1, DESA-2 ve modified covariance ve Prony metodlarından türetilen ilave dört kestirici ele alınmıştır. Sinüsün genlik, faz ve frekansının sabit olduğu tek bir snapshot alındığı varsayılmıştır. Bir Taylor seri açılımı tekniği kullanılarak, yeterince yüksek sinyal-gürültü oranı (SNR) durumunda kestiricilerin varyansları için basit ve kesin kapalı ifadeler türetilmiştir. Elde edilen varyans ifadelerinin sinüsün fazına olan bağılılıkları incelenmiş ve kestiricilerin maksimum (en kötü durum) ve minimum (en iyi durum) varyanslarını veren kritik faz değerleri ve en kötü ve en iyi senaryolardaki varyans ifadeleri elde edilmiştir. Teorik sonuçları doğrulayan bilgisayar benzetimleri sunulmuştur. Kestiricilerin en kötü ve en iyi senaryolardaki varyansları birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Kestiricilerin maksimum ve minimum varyansları arasındaki farkın geniş bir frekans bandında önemli mertebelerde olduğu gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Frekans kestirimi, anlık frekans kestirimi, reel sinüs, performans analizi, DESA

2020, ix + 97 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

COMPARATIVE PERFORMANCE ANALYSIS OF SOME INSTANTANEOUS FREQUENCY ESTIMATORS

Ahmet DEMİR

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electronics Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

In the analysis and processing of the information received by the sensors, it is important to estimate the parameters quickly and accurately. The instantaneous frequency estimation of a real sinus in noise with very few data samples is an important problem in the field of signal processing. Many frequency estimators have been proposed in the literature for this problem. In this thesis, the frequency estimators derived from the discrete energy separation algorithms (DESA-1a, DESA-1, DESA-2) and the four additional estimators, which are derived from the modified covariance and Prony's methods, are considered. It is assumed that a single snapshot is taken, in which the amplitude, phase and frequency of the sinus are constant. Using a Taylor serial expansion technique, simple and accurate closed statements are derived for the variance of the estimators in the case of a sufficiently high signal-to-noise ratio (SNR). The dependence of the variance expressions obtained on the phase of the sine was examined and critical phase values giving the maximum (worst case) and minimum (best case) variances of the estimators and variance expressions in the worst and best scenarios were obtained. Computer simulations that confirm the theoretical results are presented. The variants of the estimators in the worst and best scenarios were compared with each other. It has been observed that the difference between the maximum and minimum variances of the estimators is at a significant level in a wide frequency band.

Key words: Frequency estimation, instantaneous frequency estimation, real sinusoid, performance analysis, DESAs

2020, ix + 97 pages.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlamamda ve yüksek lisans eğitimim boyunca sahip olduğu bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan ve bu günlere gelmemde büyük emeği olan sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ahmet DEMİR

15/06/2020

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI	2
2.1. Kestirim Teorisi	2
2.2. Anlık Frekans Kestirimi.....	2
2.3. Yansız Kestirici.....	3
2.4. En Küçük Varyans Kriteri.....	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	5
3.1 Veri Modeli ve Anlık Frekans Kestiriciler.....	5
3.2 Varyans Analizleri	6
3.3 En Kötü ve En İyi Kestirim Senaryoları (Maksimum ve Minimum Faz Değerleri)....	13
3.3.1 DESA-1a (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri	14
3.3.2 Prony (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri	19
3.3.3 DESA-1 (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri	23
3.3.4 DESA-2 (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri	28
3.3.5 Modified Prony (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri ..	32
3.3.6 Modified Covariance (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri	36
3.3.7 Modified Covariance (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri	41
4. BULGULAR.....	61
4.1 Maksimum ve Minimum Varyans İfadeleri.....	61
4.1.1 Desa-1a (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri	61
4.1.2 Prony (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri.....	63
4.1.3 DESA-1 (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri	65
4.1.4 DESA-2 (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri	67
4.1.5 Modified Prony (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri.....	69
4.1.6 Modified Covariance (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri.....	70
4.1.7 Modified Covariance (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri.....	72
4.2 Frekans Varyansının Sabit SNR Değerinde Frekans ile Değişimleri	77
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	87
KAYNAKLAR	95
ÖZGEÇMİŞ	97

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
α	Reel sinüsün genlik parametresi
$bias$	Yanlılık
E	Beklenen değer
e	Gürültü vektörü
ϕ	Reel sinüsün faz parametresi
ϕ_i	Sinüsün i . faz parametresi
ϕ_{\max}	En büyük faz değeri
ϕ_{\min}	En küçük faz değeri
N	Toplam örnek sayısı
n	Örnek sayısı
θ	Bilinmeyen parametre
$\hat{\theta}$	θ 'nın kestiricisi
σ^2	Gürültünün varyansı
var	Varyans, değişinti
ω	Reel sinüsün frekans parametresi
ω_i	Reel sinüsün i . frekans parametresi
$\hat{\omega}$	Frekans parametresinin kestiricisi
$(\cdot)_{\min}$	En küçük (en iyi) değer
$(\cdot)_{\max}$	En büyük (en kötü) değer
T	Matrisin devriği

Kısaltmalar	Açıklama
DESA	Ayrık enerji ayrışım algoritması
dB	Desibel
SNR	Sinyal-gürültü oranı
MSE	Ortalama karesel hata
PDF	Olasılık yoğunluk fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1. DESA-1a (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi..	9
Şekil 3.2. Prony (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.	10
Şekil 3.3. DESA-1 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.	10
Şekil 3.4. DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/16$ iken ϕ ile değişimi.	11
Şekil 3.5. Modified Prony (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.	11
Şekil 3.6. Modified Covariance (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.	12
Şekil 3.7. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.	12
Şekil 3.8. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı $\omega = 0,3830\pi$ iken ϕ ile değişimi.	13
Şekil 3.9. DESA-1a (4 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.	18
Şekil 3.10. Prony (4 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.	22
Şekil 3.11. DESA-1 (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.	27
Şekil 3.12. DESA-2 (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.	31
Şekil 3.13. Modified Prony (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.	35
Şekil 3.14. Modified Covariance (4 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.	40
Şekil 3.15. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin (ω_1, ω_2) bandında frekans ile değişimi.	51
Şekil 3.16. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin (ω_3, ω_4) bandında frekans ile değişimi.	52
Şekil 3.17. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.	60
Şekil 4.1. DESA-1a (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.	62
Şekil 4.2. Prony (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.	64
Şekil 4.3. DESA-1 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.	66
Şekil 4.4. DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/16$ iken SNR ile değişimi.	68
Şekil 4.5. Modified Prony (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.	69

Şekil 4.6. Modified Covariance (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.....	71
Şekil 4.7. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.....	73
Şekil 4.8. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı $\omega = 0,3830\pi$ iken SNR ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,1}$ alınmıştır.....	74
Şekil 4.9. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı $\omega = 0,3830\pi$ iken SNR ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,2}$ alınmıştır.....	74
Şekil 4.10. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı $\omega = 0,6170\pi$ iken SNR ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,1}$ alınmıştır.....	75
Şekil 4.11. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı $\omega = 0,6170\pi$ iken SNR ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,2}$ alınmıştır.....	76
Şekil 4.12. DESA-1a (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.	77
Şekil 4.13. Prony (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.	78
Şekil 4.14. DESA-1 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.	79
Şekil 4.15. DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.	80
Şekil 4.16. DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 40 dB iken ω ile değişimi.	81
Şekil 4.17. DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 50 dB iken ω ile değişimi.	81
Şekil 4.18. Modified Prony (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.	82
Şekil 4.19. Modified Covariance (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.....	83
Şekil 4.20. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı SNR = 30dB iken ω ile değişimi. (ω_1, ω_2) ve (ω_3, ω_4) frekans bantları hariç tutulmuştur..	84
Şekil 4.21. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı SNR = 30 dB iken (ω_1, ω_2) bandında ω ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,1}$ alınmıştır.....	85
Şekil 4.22. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı SNR = 30 dB iken (ω_1, ω_2) bandında ω ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,2}$ alınmıştır.....	85
Şekil 4.23. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı SNR = 30 dB iken (ω_3, ω_4) bandında ω ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,1}$ alınmıştır.....	86
Şekil 4.24. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı SNR = 30 dB iken (ω_3, ω_4) bandında ω ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,2}$ alınmıştır.....	86
Şekil 5.1. Dört nokta kestiricilerin en kötü durum frekans varyanslarının ω ile değişimi..	88
Şekil 5.2. Dört nokta kestiricilerin en iyi durum frekans varyanslarının ω ile değişimi...	89
Şekil 5.3. Beş nokta kestiricilerin en kötü durum frekans varyanslarının ω ile değişimi..	90
Şekil 5.4. Beş nokta kestiricilerin en iyi durum frekans varyanslarının ω ile değişimi....	90

Şekil 5.5. Beş nokta kestiricilerin en kötü durum frekans varyanslarının ω ile değişimi (DESA-2 kestiricisi dahil edilmiştir).....	92
Şekil 5.6. Beş nokta kestiricilerin en iyi durum frekans varyanslarının ω ile değişimi (DESA-2 kestiricisi dahil edilmiştir).....	92

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 3.1. Anlık frekans kestiricileri	5
Çizelge 3.2. DESA-1 kestiricisi için $b(\omega)$ işaret analizi	25
Çizelge 3.3. DESA-2 kestiricisi için $b(\omega)$ işaret analizi	30
Çizelge 3.4. Modified Prony kestiricisi için $b(\omega)$ işaret analizi.....	34
Çizelge 3.5. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için " λ " işaret analizi.....	44
Çizelge 3.6. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için " $K_2(\omega)$ " işaret analizi	48
Çizelge 3.7. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için $f(\omega, \phi_1)$ - $f(\omega, \phi_2)$ işaret analizi ($\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$).....	50
Çizelge 3.8. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi, için $f(\omega, \phi_1)$ - $f(\omega, \phi_2)$ işaret analizi ($\omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-]$).....	50

1. GİRİŞ

Sinyal işleme alanında gürültülü bir sinüsün genlik, faz ve frekans parametrelerinin kestirimi en sık karşılaşılan problemlerden biridir. Haberleşme, biyomedikal, radar ve görüntü işleme başta olmak üzere birçok alanda bu problemle karşılaşılmaktadır. Frekans parametresi bir sinüs sinyaline doğrusal olmayan biçimde bağlı iken, faz ve genlik doğrusal olarak bağlıdır. Bu yüzden en hızlı ve en doğru frekans kestiriminin gerçekleştirilmesi büyük önem arz etmektedir.

Birçok sinyal (örneğin, konuşma) zamanla değişen spektrumlar sergiler. Fourier teknikleri sinyalin sadece genel frekans içeriğini gösterir. Fakat bu frekansın ne zaman var olduğu ve zamanla nasıl değiştiğini bilmek daha önemlidir. En az sayıda veri örnekleri kullanılarak gerçekleştirilen anlık frekans kestirimi bu problemin bir çözümüdür. Anlık frekans kestirimi için literatürde birçok kestirici önerilmektedir.

Bu tez çalışmasında Maragos ve ark. (1992) tarafından yapılan çalışmada önerilen ayrık enerji ayrışım algoritmalarından türetilmiş DESA-1a, DESA-1, DESA-2 kestiricileri ile Fertig ve McClellan (1996) tarafından yapılan çalışmada sunulan Modified Covariance ve Prony algoritmalarından türetilen ilave dört kestirici ele alınmıştır. Bir Taylor seri açılımı tekniği kullanılarak, yüksek sinyal-gürültü oranı (SNR) durumunda, kestiricilerin varyansları için basit ve kesin kapalı ifadeler elde edilmiştir. Bu ifadelerin sinüsün fazına olan bağılılıkları incelenmiş ve maksimum ve minimum varyans değerlerini veren kritik faz değerleri ve bu değerlere karşılık gelen varyans ifadeleri elde edilmiştir. Kestiricilerin en büyük ve en küçük varyansları arasında genişçe bir frekans bandında önemli derecede fark olduğu gözlemlenmiştir. Teorik sonuçları teyit eden bilgisayar benzetimleri sunulmuştur. Kestiricilerin performansları en kötü durum (sinüsün fazının frekans varyansını maksimum yapan değerde olduğu durum) ve en iyi durum (sinüsün fazının frekans varyansını minimum yapan değerde olduğu durum) senaryolarında aralarında karşılaştırmalı olarak incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Kestirim Teorisi

Kestirim teorisi, bilgi almak amacıyla tasarlanan birçok sistemin kalbini oluşturur. Bu sistemlerden bazıları, radar (Jokanovic ve ark 2013), sonar (Knight ve ark. 1981), biyomedikal (Georgakis ve ark. 2003), ses işleme (Cheveigné ve Kawahara 2002), görüntü işleme ve haberleşme sistemleri örnek olarak verilebilir. Tüm bu sistemlerde, sürekli zaman dalga formlarından parametre değerlerinin kestirimi problemiyle karşılaşılır. Parametre kestirimi sürekli zaman dalga formlarından alınan veri örnekleri ile gerçekleştirilmektedir. İyi bir kestiricinin belirlenmesinde ilk adım matematiksel olarak modellenmesidir (Kay 1993). Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, bilinmeyen θ parametresine bağlı N adet veri örneğinden oluşan; $\{y(0), y(1), \dots, y(N-1)\}$ kümesi kullanılarak $\hat{\theta}$ kestiricisi ile θ 'nın gerçek değeri elde edilmek istenir (Yılmaz 2007). Bu durumda;

$$\hat{\theta} = g(y(0), y(1), \dots, y(N-1)) \quad (2.1)$$

Burada g ifadesi kestiriciyi tanımlayan fonksiyondur. Kestirimin başarısı bu fonksiyona bağlıdır. İyi bir kestiricinin tanımlanmasında bilinmeyen parametreye bağlı veri örneklerinin modellenmesi ilk adımdır. Örneklenen veriler rasgele olduğundan olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) ile tanımlanır. Uygun PDF seçiminden sonra problem, en iyi kestiricinin belirlenmesi problemine dönüşür. Bir kestiricinin iyi bir kestirici olabilmesi için sadece ortalama değerde gerçek değeri vermesi yeterli değildir. İyi bir kestiricinin varyansının mümkün olan en küçük değere sahip olması gereklidir. Bu yüzden ortalama değer ile birlikte varyans analizleri ile kestiricilerin performans analizi ve hesaplama karmaşıklığı analizi yapılmalıdır (Boashash, 1992).

2.2. Anlık Frekans Kestirimi

Sinyallerin iyi bilinen iki gösterimi vardır: zaman bölgesinde gösterimi ve frekans bölgesinde gösterimi. Frekans içeriği zamanla değişen, durağan olmayan sinyallerin analizi için bu iki geleneksel gösterim mümkün değildir (Tu, X. ve ark. 2017). Zaman

bölgesinde üretilen ve örneklenen sinyaller genelde frekans bölgesinde analiz edilir ve işlenir. Bir sinyali zaman bölgesinden frekans bölgesine eşleştirmek için temel araç Fourier dönüşümüdür. Fourier dönüşümü tabanlı analiz, analiz edilen sinyalin frekans içeriği zaman içinde değişmediğinde etkilidir. Fakat zamanla değişen sinyaller için bu yöntem yeterli değildir. Bu nedenle, zaman alanındaki ve frekans alanındaki durağan olmayan sinyalleri temsil edecek bir çözüm bulmak için anlık frekans kestirimi uygulanmaktadır (Stankovic, L. ve ark. 2014).

Anlık frekans kestirimi yapılabilmesi için çok az sayıda veri örneği kullanılması gerekmektedir. Bu tez çalışmasında da dört ve beş nokta veri örnekleri kullanılarak frekans kestirimi yapılmaktadır. Literatürde birçok anlık frekans kestiricisi bulunmaktadır. En verimli ve en doğru kestiricileri belirleyebilmek, farklı durumlar için performans analizini gerektirmektedir. Uz ve DİLAVEROĞLU (2019) tarafından yapılan çalışmada ayrık enerji ayrışım algoritmaları ve ilave dört anlık frekans kestirici ele alınarak yanlılık ve varyans incelemesi yapılmış ve kestiriciler karşılaştırılmıştır. Yapılan çalışmada frekans ve genlik bilinmeyen sabitler, faz ise rasgele değişken olarak tanımlanmıştır. Bu tez çalışmasında ise sabit faz değeri durumu için incelenmiş ve tüm kestiriciler için en büyük ve en küçük varyans analizleri yapılmıştır. Böylece tüm kestiriciler en kötü ve en iyi durum senaryolarında karşılaştırılarak performans analizi sunulmuştur.

2.3. Yansız Kestirici

Bir kestiricinin yansız olabilmesi için kestiricinin ortalama değerinde bilinmeyen parametrenin gerçek değerini vermesi gerekmektedir. Bu koşul eşitlik (2.2)'de gösterilmektedir.

$$E(\hat{\omega}) = \omega \quad (2.2)$$

Buna göre bir kestiricinin yanlılık ifadesi şu şekilde gösterilir:

$$bias(\omega) = E(\hat{\omega}) - \omega \quad (2.3)$$

Bir kestiricinin yansız olması iyi bir kestirici olduğunu söylemek için tek başına yeterli değildir. Çünkü 2.2 eşitliğinde görüldüğü gibi yansızlık, sadece ortalama değerde gerçek değerini verdiğini belirtir. Bu yüzden varyansının da en küçük değerde olması iyi bir kestiricinin belirlenmesinde gereklidir.

2.4. En Küçük Varyans Kriteri

En iyi kestiriciyi bulabilmek için bazı kriterlere uygunluğu aranır. Bunlardan biri ortalama karesel hata (MSE) olup şu şekilde tanımlanır:

$$MSE(\hat{\omega}) = E[(\hat{\omega} - \omega)^2] \quad (2.4)$$

Burada ω kestirilecek parametre, $\hat{\omega}$ ifadesi ise kestiricisi olarak tanımlanır. Eşitlik (2.4)'de gösterildiği gibi MSE, kestiricinin doğru değere göre ortalama karesel hatasının ölçütüdür.

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\omega}) &= E \left[[(\hat{\omega} - E(\hat{\omega})) + (E(\hat{\omega}) - \omega)]^2 \right] \\ MSE(\hat{\omega}) &= \text{var}(\hat{\omega}) + (E(\hat{\omega}) - \omega)^2 \\ MSE(\hat{\omega}) &= \text{var}(\hat{\omega}) + \text{bias}^2(\omega) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Burada *bias* ifadesi yanlılığı tanımlamaktadır. Eşitlik (2.5)'te görüldüğü gibi MSE, kestiricinin varyansına ve yanlılığına bağlıdır. Bu kriterle uygunluğu olabilecek kestiricilerin gerçekleşmesi mümkün olmayabilir. Bu yüzden yanlılığı sıfır kabul ederek en küçük varyanslı yansız kestiriciler kullanılabilir.

3. MATERİYAL ve YÖNTEM

3.1 Veri Modeli ve Anlık Frekans Kestiricileri

Tez çalışmasında anlık frekans kestirimi için kullanılan ve gürültü içeren reel bir sinüsü (3.1) eşitliğindeki veri modeli ile tanımlayalım.

$$x_n = \alpha \cos(\omega n + \phi) + e_n \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.1)$$

Burada α sinüsün genliğini, $\omega \in (0, \pi)$ frekansını, $\phi \in (0, \pi]$ fazını temsil eden bilinmeyen sabitlerdir. e_n gürültü bileşeni, sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı beyaz Gauss gürültüsüdür. N veri örnekleri sayısını temsil etmektedir ve çalışmada anlık frekans kestiricileri için dört veya beş veri örneği kullanılmaktadır (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}). $\phi \in (0, \pi]$ aralığında sabit parametre olarak ele alınmıştır. Anlık frekans kestiricileri, ayrık enerji ayrışım algoritmaları DESA-1a (4 nokta), DESA-1 (5 nokta), DESA-2 (5 nokta) ve ek olarak Modified Covariance (4 nokta), Modified Covariance (5 nokta), Prony (4 nokta) ve Modified Prony (5 nokta) kestiricilerden oluşmakta olup Çizelge 3.1’de verilmektedir.

Çizelge 3.1. Anlık frekans kestiricileri

Kestiriciler	$\hat{\omega}$
DESA-1a (4 nokta)	$\cos^{-1} \left(\frac{(x_2^2 - x_1 x_3) - (x_1^2 - x_0 x_2) + (x_1 x_2 - x_0 x_3)}{2(x_2^2 - x_1 x_3)} \right)$
Modified Covariance (4 nokta);	$\cos^{-1} \left(\frac{x_0 x_1 + 2x_1 x_2 + x_2 x_3}{2(x_1^2 + x_2^2)} \right)$
Prony (4 nokta)	$\cos^{-1} \left(\frac{x_1 x_2 - x_0 x_3}{(x_1^2 - x_0 x_2) + (x_2^2 - x_1 x_3)} \right)$
DESA-1 (5 nokta)	$\cos^{-1} \left(\frac{2(x_2^2 - x_1 x_3) - (x_1^2 - x_0 x_2) - (x_3^2 - x_2 x_4) + x_1 x_2 - x_0 x_3 + x_2 x_3 - x_1 x_4}{4(x_2^2 - x_1 x_3)} \right)$
DESA-2 (5 nokta)	$\cos^{-1} \left(\frac{(x_2^2 - x_0 x_4) - (x_1^2 - x_0 x_2) - (x_3^2 - x_2 x_4)}{2(x_2^2 - x_1 x_3)} \right)$
Modified Covariance (5 nokta)	$\cos^{-1} \left(\frac{x_0 x_1 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 + x_3 x_4}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \right)$
Modified Prony (5 nokta)	$\cos^{-1} \left(\frac{(x_1 x_2 - x_0 x_3) + (x_2 x_3 - x_1 x_4)}{4(x_2^2 - x_1 x_3)} \right)$

3.2 Varyans Analizleri

Eşitlik (2.5)'te ortalama karesel hatanın, kestiricinin varyansına ve yanlılığa (*bias*) bağlı olduğu görülmektedir. Bir kestiricinin yansız olabilmesi için kestiricinin gerçek değeri vermesi gerekmektedir. Eğer veri modeli gürültüsüz olsaydı ($e_n = 0$) Çizelge 3.1'de verilen bütün kestirici ifadeleri kestirilen ifadenin gerçek değerini verecekti ($\hat{\omega} = \omega$). Yüksek SNR durumunda gürültü sıfıra yaklaşır ve böylece yanlılığı da sıfıra yaklaşmaktadır. Tez çalışmasında tüm analizler yüksek SNR durumunda incelendiği için gürültü sıfıra yakın olmaktadır. Böylece yanlılığı da (*bias*) sıfıra yakın olacağı için ihmal edilmektedir. Bu yüzden, bu çalışmada sadece varyans analizi yapılmaktadır.

Her bir kestirici için $\hat{\lambda} = \cos(\hat{\omega})$ (DESA-2 için $\hat{\lambda} = \cos(2\hat{\omega})$) olarak tanımlanmaktadır ve aşağıdaki denklemlerle verilmektedir.

DESA-1a (4 nokta);

$$\hat{\lambda} = \frac{(x_2^2 - x_1x_3) - (x_1^2 - x_0x_2) + (x_1x_2 - x_0x_3)}{2(x_2^2 - x_1x_3)}$$

Modified Covariance (4 nokta);

$$\hat{\lambda} = \frac{x_0x_1 + 2x_1x_2 + x_2x_3}{2(x_1^2 + x_2^2)}$$

Prony (4 nokta);

$$\hat{\lambda} = \frac{x_1x_2 - x_0x_3}{(x_1^2 - x_0x_2) + (x_2^2 - x_1x_3)}$$

DESA-1 (5 nokta);

$$\hat{\lambda} = \frac{2(x_2^2 - x_1x_3) - (x_1^2 - x_0x_2) - (x_3^2 - x_2x_4) + x_1x_2 - x_0x_3 + x_2x_3 - x_1x_4}{4(x_2^2 - x_1x_3)}$$

DESA-2 (5 nokta);

$$\hat{\lambda} = \frac{(x_2^2 - x_0x_4) - (x_1^2 - x_0x_2) - (x_3^2 - x_2x_4)}{2(x_2^2 - x_1x_3)}$$

Modified Covariance (5 nokta);

$$\hat{\lambda} = \frac{x_0x_1 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3x_4}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$$

Modified Prony (5 nokta);

$$\hat{\lambda} = \frac{(x_1x_2 - x_0x_3) + (x_2x_3 - x_1x_4)}{4(x_2^2 - x_1x_3)}$$

Yüksek sinyal-gürültü oranı ($\text{SNR} = \alpha^2/2\sigma^2$) için kestiriciler $\hat{\lambda} = \cos(\hat{\omega})$ (DESA-2 için $\hat{\lambda} = \cos(2\hat{\omega})$) ifadelerine yakın olacaktır. Dolayısıyla $\hat{\lambda}$ ifadesinin beklenen değerini ve varyansını elde edebilmek için $\hat{\lambda}$ 'nın Taylor seri açılımına dayanan (3.2)-(3.6) eşitliklerinde verilen ifadeler kullanılır.

$$E[\hat{\lambda}] \cong \lambda|_{\underline{e}=\underline{0}} \quad (3.2)$$

Burada \underline{e} , gürültü vektörünü ifade etmektedir.

$\underline{e} = (e_0, e_1, \dots, e_{N-1})^T$ ve $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$

$$\text{var}(\hat{\lambda}) \cong \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{d\hat{\lambda}}{de_n} \Big|_{\underline{e}=\underline{0}} \right)^2 \cdot \underbrace{\text{var}(e_n)}_{\sigma^2} \quad (3.3)$$

$$E[\hat{\omega}] \cong \cos^{-1}(E[\hat{\lambda}]) \quad (3.4)$$

$$\text{var}(\hat{\omega}) \cong \frac{\text{var}(\hat{\lambda})}{\sin^2(\omega)} \quad (3.5)$$

DESA-2 için $\hat{\lambda} = \cos 2\hat{\omega}$ olacağından $\text{var}(\hat{\omega})$ ifadesi aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$\text{var}(\hat{\omega}) \cong \frac{\text{var}(\hat{\lambda})}{4\sin^2(2\omega)} \quad (3.6)$$

(3.2)-(3.6) eşitlikleri kullanılarak her kestiricinin varyansı elde edilir. Elde edilen varyans ifadeleri (3.7)-(3.13) eşitliklerinde ve bu ifadelerin sabit frekans değerinde faz değeri ile değişimleri 3.1 - 3.8 şekillerinde verilmektedir.

DESA-1a (4 nokta);

$$\text{var}(\omega, \phi) \cong \frac{(3+2\cos(2\omega))-\cos(\omega)\cdot(4+\cos(2\omega))\cdot\cos(2\phi+4\omega)}{4\cdot\text{SNR}\cdot\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\sin^4(\omega)} \quad (3.7)$$

Prony (4 nokta);

$$\text{var}(\omega, \phi) \cong \frac{(3+2\cos(2\omega))-\cos(\omega)\cdot(4+\cos(2\omega))\cdot\cos(2\phi+3\omega)}{4\cdot\text{SNR}\cdot\sin^4(\omega)} \quad (3.8)$$

DESA-1 (5 nokta);

$$\text{var}(\omega, \phi) \cong \frac{(12-14\cdot\cos\omega+8\cdot\cos 2\omega-\cos 3\omega)-(8\cdot\cos^3\omega-12\cdot\cos^2\omega+12\cdot\cos\omega-3)\cdot\cos(2\phi+4\omega)}{32\cdot\text{SNR}\cdot\cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\sin^4(\omega)} \quad (3.9)$$

DESA-2 (5 nokta);

$$\text{var}(\omega, \phi) \cong \frac{(4+\cos(2\omega))-(2\cdot\cos^2(2\omega)+4\cdot\cos(2\omega)-1)\cdot\cos(2\phi+4\omega)}{32\cdot\text{SNR}\cdot\sin^4(\omega)\cdot\cos^2(\omega)} \quad (3.10)$$

Modified Prony (5 nokta);

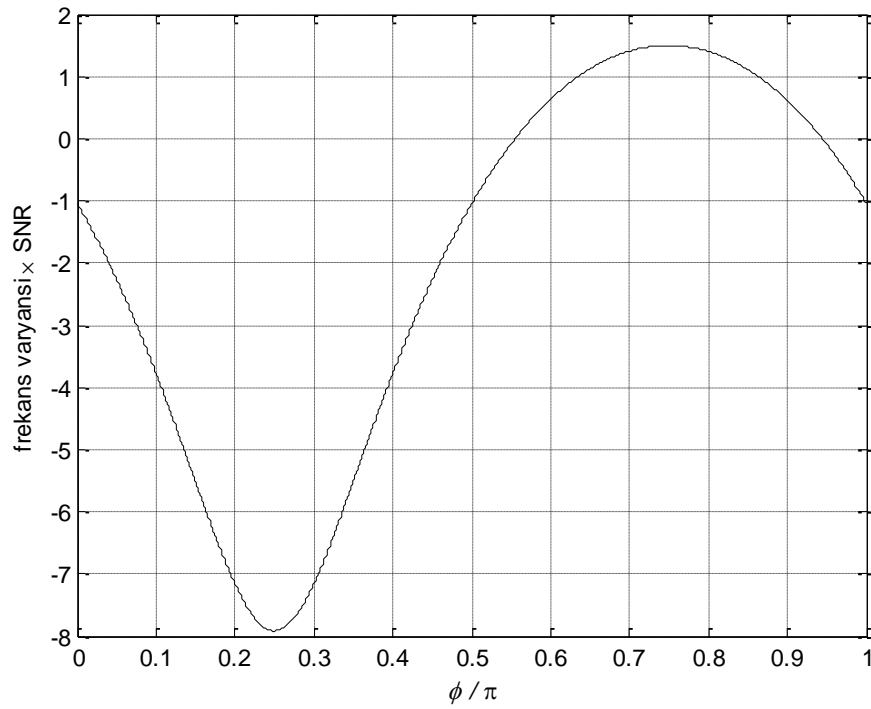
$$\text{var}(\omega, \phi) \cong \frac{5 \cdot (4 + 3 \cdot \cos(2\omega)) + (2 \cdot \cos^2(2\omega) + 16 \cdot \cos(2\omega) + 17) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)}{32 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^6(\omega)} \quad (3.11)$$

Modified Covariance (4 nokta);

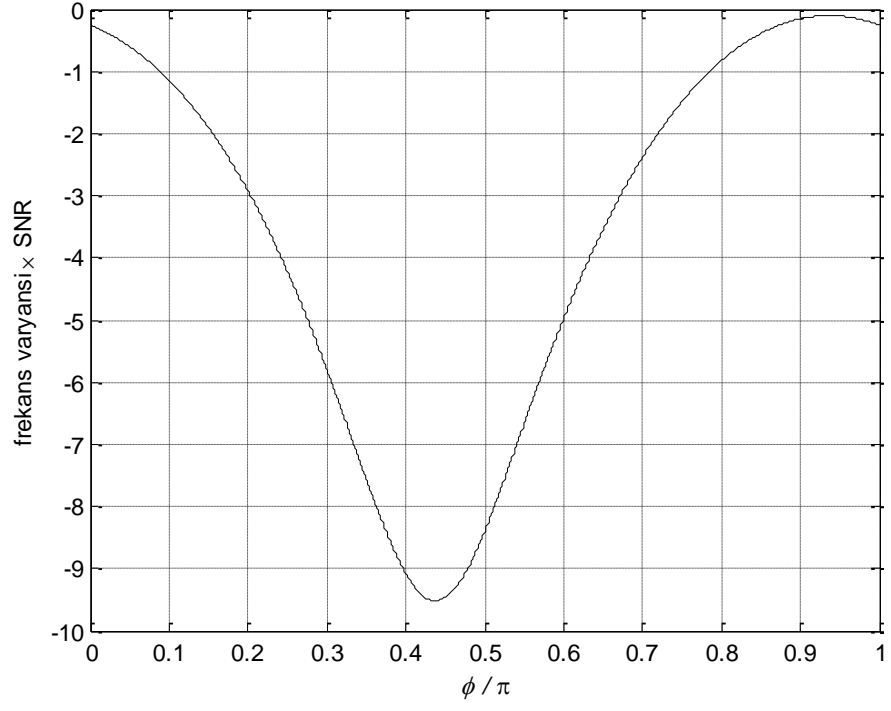
$$\text{var}(\omega, \phi) \cong \frac{1 + \cos(\omega) \cdot \cos(2\omega) \cdot \cos(2\phi + 3\omega)}{4 \cdot \text{SNR} \cdot (1 + \cos(\omega) \cdot \cos(2\phi + 3\omega))^2 \cdot \sin^2(\omega)} \quad (3.12)$$

Modified Covariance (5 nokta);

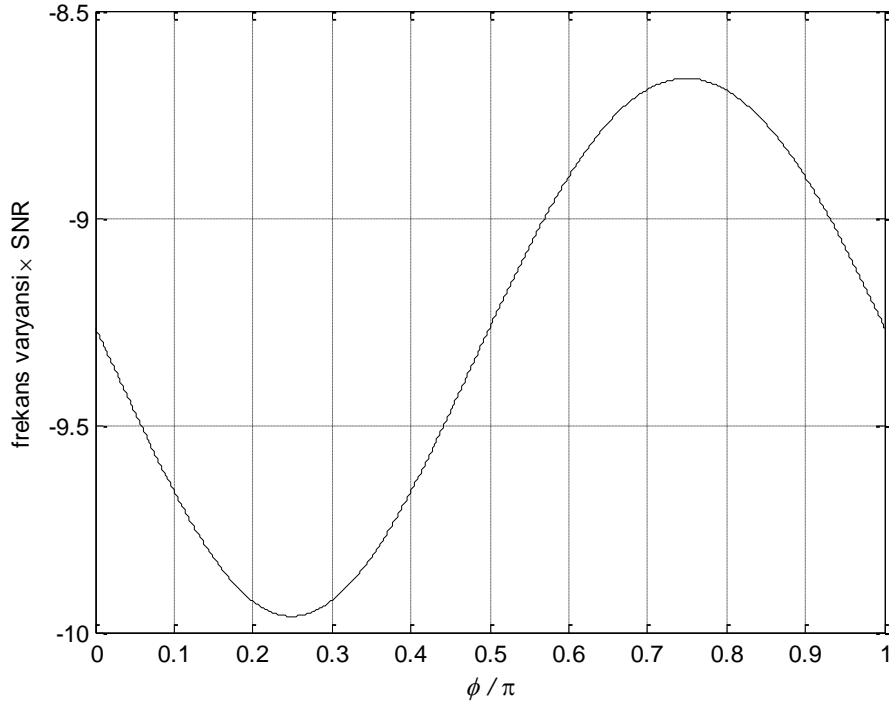
$$\text{var}(\omega, \phi) \cong \frac{1 + \cos(\omega) \cdot \cos(3\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)}{\text{SNR} \cdot [3 + 2 \cdot \cos(2\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]^2 \cdot \sin^2(\omega)} \quad (3.13)$$



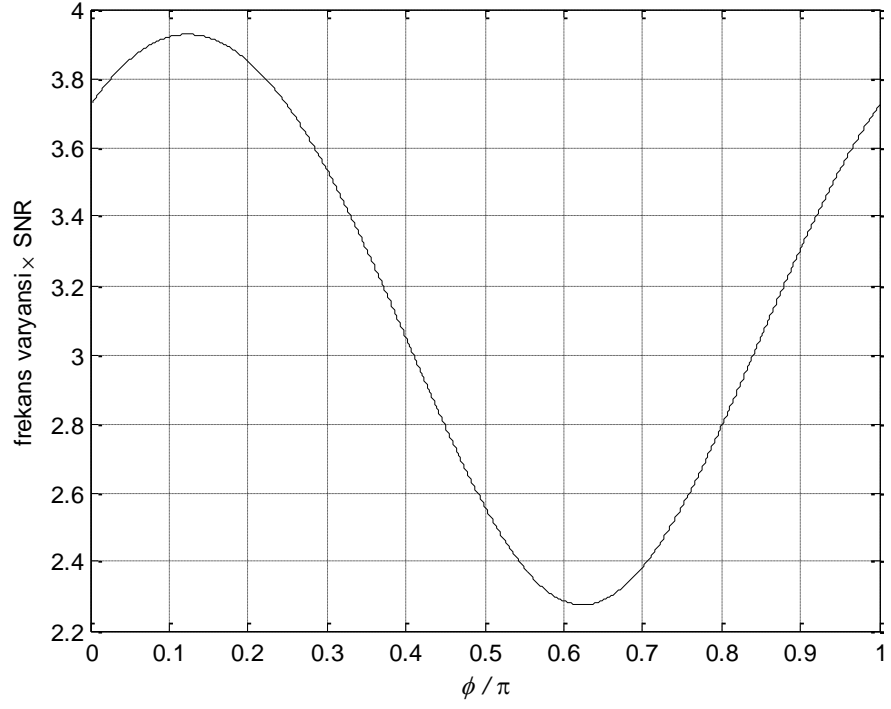
Şekil 3.1. DESA-1a (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.



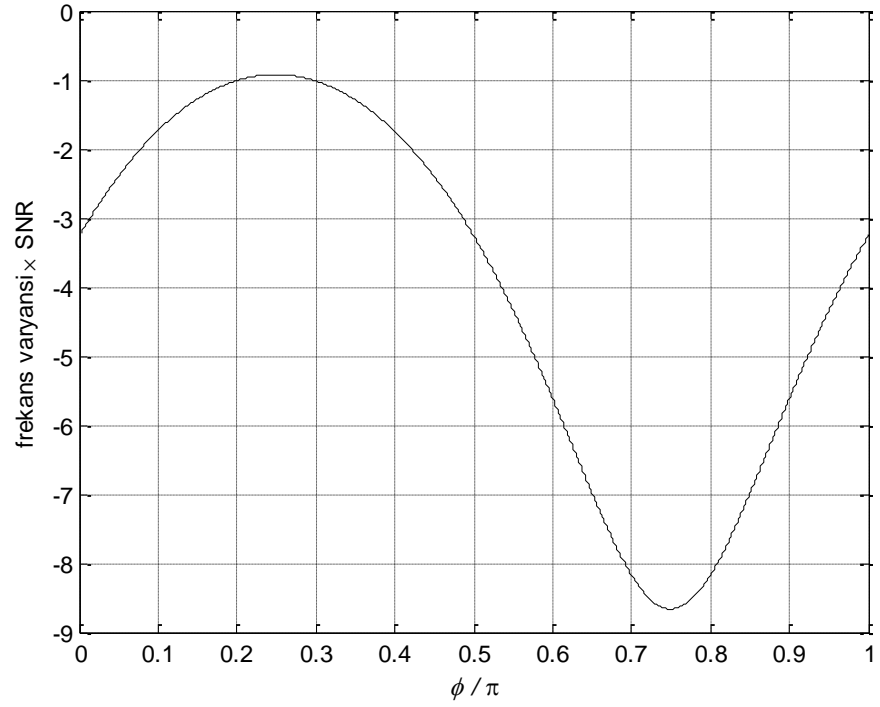
Şekil 3.2. Prony (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.



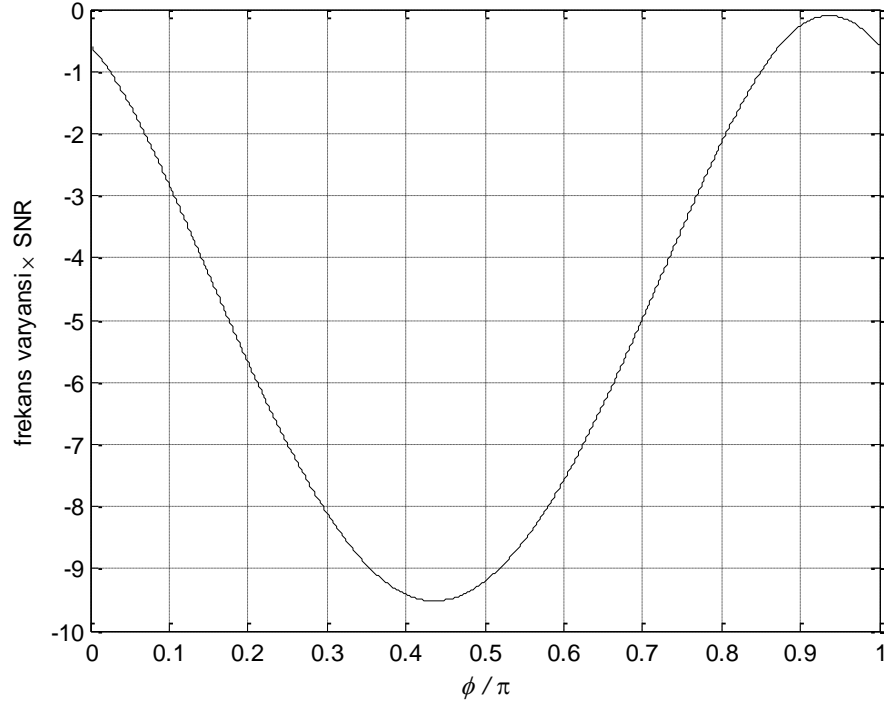
Şekil 3.3. DESA-1 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.



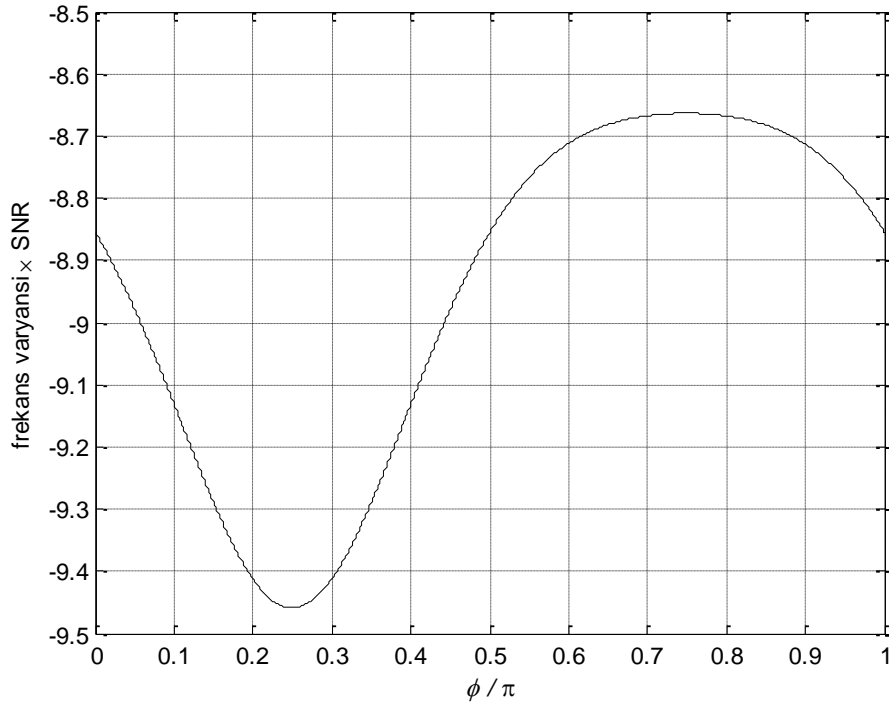
Şekil 3.4. DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/16$ iken ϕ ile değişimi.



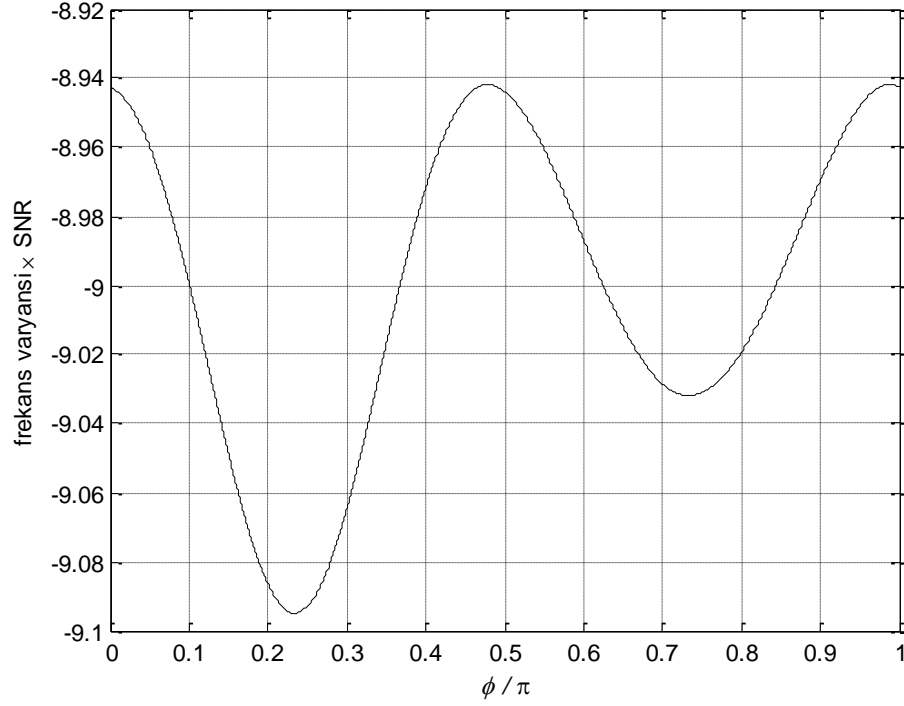
Şekil 3.5. Modified Prony (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.



Şekil 3.6. Modified Covariance (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.



Şekil 3.7. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken ϕ ile değişimi.



Şekil 3.8. Modified Covariance (5 nokta) kestircisinin frekans varyansı $\omega = 0,3830\pi$ iken ϕ ile değişimi.

Şekil 3.1 - 3.8 tüm kestiriciler için frekans varyansının faz ile değişimini göstermektedir. Burada DESA-2 için $\hat{\lambda} = \cos(2\hat{\omega})$ olarak tanımlandığından $\omega = 3\pi/16$ iken ve diğer tüm kestiriciler $\omega = 3\pi/8$ iken incelenmiştir. Modified Covariance (5 nokta) kestircisi hariç tüm kestiriciler için bir minimum ve bir maksimum faz değeri bulunmaktadır. Şekil 3.7’de Modified Covariance (5 nokta) kestircisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin bulunduğu noktalarda iki dar aralıklar bulunmaktadır. Bu aralıklarda iki minimum ve iki maksimum faz değerleri bulunur. Bu yüzden şekil 3.8’de görüldüğü gibi, bu frekans aralıkları içinde bulunan bir $\omega = 0,3830\pi$ frekans değerinde iki global maksimum, bir global minimum ve bir lokal minimum faz değeri bulunmaktadır.

3.3 En Kötü ve En İyi Kestirim Senaryoları (Maksimum ve Minimum Faz Değerleri)

Bu bölümde, bölüm (3.2)’de şekillerde gösterilen maksimum ve minimum faz değerleri elde edilmektedir. DESA-1a, Prony, DESA-1, DESA-2 ve modified Prony kestiricilerinin

yaklaşık varyans ifadeleri denklem biçimleri aynı olup aşağıdaki denklem ile gösterilebilir.

$$f(\omega, \phi) = a(\omega) + b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega) \quad (3.14)$$

Burada $f(\omega, \phi)$ ile tanımlanan ifade, tüm kestiriciler için verilen varyans ifadesi $var(\hat{\omega})$ olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca görüldüğü gibi $f(\omega, \phi)$ 'nin ϕ fazına bağılılığı 2ϕ biçimindedir. Dolayısıyla $\phi \in (0, \pi]$ aralığında almamız yeterlidir.

$$\frac{df(\omega, \phi)}{d\phi} = 0 \quad (3.15)$$

Burada, eşitlik (3.14)'te verilen ifadenin birinci mertebeden türevini sıfıra eşitleyerek biri minimum biri maksimum faz değerleri olan iki kök elde edilmektedir. Hangi frekanslarda minimum veya hangi frekanslarda maksimum olduğunu bulabilmek için ikinci mertebeden tekrar türev almamız ve işaret analizi yapmamız gerekmektedir.

$$\left(\frac{d^2 f(\omega, \phi)}{d\phi^2} \right) \Big|_{\phi = \phi_n} \quad n = 1, 2 \quad (3.16)$$

$f''(\omega, \phi_1) > 0$ ise ϕ_1 minimum, ϕ_2 maksimum

$f''(\omega, \phi_1) < 0$ ise ϕ_2 minimum, ϕ_1 maksimum olacaktır.

$\phi = \phi_2$ için değerlendirilecek olursa;

$f''(\omega, \phi_2) > 0$ ise ϕ_2 minimum, ϕ_1 maksimum

$f''(\omega, \phi_2) < 0$ ise ϕ_1 minimum, ϕ_2 maksimum olacaktır.

3.3.1 DESA-1a (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri

Bu bölümde maksimum ve minimum faz değerlerini bulabilmek için yukarıda (3.14)-(3.16) denklemleriyle verilen adımlar uygulanır. Buna göre eşitlik (3.7)'de verilen varyans ifadesi ile denklem yapısı aynı olan eşitlik (3.14) kullanılarak faz değerleri elde edilir. İlk olarak $f(\omega, \phi)$ 'nin birinci mertebeden türevini sıfıra eşitleyerek maksimum ve minimum faz değerleri olan denklem kökleri bulunur.

$$\begin{aligned}
f(\omega, \phi) &= a(\omega) + b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega) \\
\frac{df(\omega, \phi_1)}{d\phi_1} &= -2 \cdot b(\omega) \cdot \sin(2\phi_1 + 4\omega) = 0 \\
2\phi_1 + 4\omega &= \pi k \\
\phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - 2\omega \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Denklemin ikinci kökünü bulabilmek için ϕ_2 yerine $\phi_1 + \frac{\pi}{2}$ yazılır ve birinci merteben türevi alınarak sıfıra eşitlenmektedir. Böylece;

$$\begin{aligned}
\frac{df\left(\omega, \left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{d\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)} &= -2 \cdot b(\omega) \cdot \sin\left(2\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) + 4\omega\right) = 0 \\
-2 \cdot b(\omega) \cdot \sin(2\phi_1 + 4\omega) \cdot \cos(\pi) + \cos(2\phi_1 + 4\omega) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_0 &= 0 \\
2\phi_1 + 4\omega &= \pi k \\
\phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - 2\omega \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Burada $\phi_1 = \frac{\pi k}{2} - 2\omega$ ve $\phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{(k+1)\pi}{2} - 2\omega$ için $f'(\omega, \phi_2) = 0$ olarak bulunmuş oldu.

ϕ_1 ve ϕ_2 faz ifadeleri, k bir tamsayı olmak üzere her k değerinde faz ifadelerini ve ω frekans aralıklarını bulabilmemiz için her $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ için değerlendirmemiz gerekir. Bu değerlendirmeler $\phi \in (0, \pi]$ ve $\omega \in (0, \pi)$ aralıklarında olacak şekilde yapılır.

Tüm kestiriciler için değerlendirilecek k aralığı şu şekilde belirlenir;

$k < 0$ için, $(\phi_1, \phi_2) < 0$ olacaktır. $\phi \in (0, \pi]$ aralığında olduğundan $k < 0$ için incelenemez.

$k = 0$ için $\phi_1 = -2\omega$ olacaktır. Fakat $\phi \in (0, \pi]$ ve $\omega \in (0, \pi)$ aralıklarında olduklarından $k = 1$ 'den başlanacaktır.

$k = 5$ için $\phi_2 = 3\pi - 2\omega$ olacaktır. Fakat $\omega \in (0, \pi)$ aralığındadır ve maksimum alacağı ω değeri için $\phi \in (0, \pi]$ aralığının dışındadır ($\phi > \pi$). Bu yüzden $k \geq 5$ için incelenemez.

Bu sınırlar her kestirici için farklı olabilir. Bu yüzden bu sınırlara göre her kestirici için k değeri analizi yapılır. DESA-1a kestiricisi için $k = 1, 2, 3, 4$ için değerlendirme yapılmaktadır.

Tüm k değerleri için incelendiğinde, $\omega \in (0, \pi)$ aralığında frekans değerleri ve bunlara karşılık gelen $\phi \in (0, \pi]$ aralığında ϕ_1 ve ϕ_2 faz değerleri bulunarak aşağıda verilmektedir.

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases} \quad \phi_2 = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ \frac{5\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases}$$

Burada, " $\frac{\pi}{2}$ " yerine " $\frac{\pi^-}{2}, \frac{\pi^+}{2}$ " alınmasının nedeni, eşitlik (3.7)'de yaklaşık varyans ifadesinde $\omega = \frac{\pi}{2}$ için ϕ 'ye bağlı bir denklem olmadığı görülüyor, böylece maksimum ve minimum faz değerleri olmayacağı için $\omega = \frac{\pi}{2}$ değeri dahil edilmez.

ϕ_1 ve ϕ_2 ifadelerinin maksimum ve minimum değerlerinin bulunması;

Elde edilen ϕ_1 ve ϕ_2 ifadelerinin, maksimum ve minimum faz değerlerini bulabilmek için $f(\omega, \phi)$ 'nin ikinci mertebeden türevini alarak işaretini incelememiz gerekmektedir. İşaret incelemesi eşitlik (3.16)'da gösterildiği ve açıklandığı gibi yapılır. Buna göre;

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(\omega, \phi)}{d\phi^2} &= -4 \cdot b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega) \\ f''(\omega, \phi_1) &= -4 \cdot b(\omega) \cdot (-1)^k \\ f''(\omega, \phi_2) &= -4 \cdot b(\omega) \cdot (-1)^{k+1} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Burada, işlem sonucunun işareti önemli olduğundan, $b(\omega)$ ifadesinin hangi ω değerlerinde hangi işareti aldığını bulmamız gerekmektedir. Buna göre;

$$b(\omega) = \frac{-\cos(\omega) \cdot (4 + \cos(2\omega))}{4 \cdot \text{SNR} \cdot \cos^2(\frac{\omega}{2}) \cdot \sin^4(\omega)} \quad (3.20)$$

Eşitlikte görüldüğü gibi $b(\omega) = -\cos(\omega)$, denklemin işaretini belirleyecektir. Böylece;

$\omega \in (0, \frac{\pi^-}{2}]$ aralığında $b(\omega) < 0$

$\omega = \frac{\pi}{2}$ ise $b(\omega) = 0$

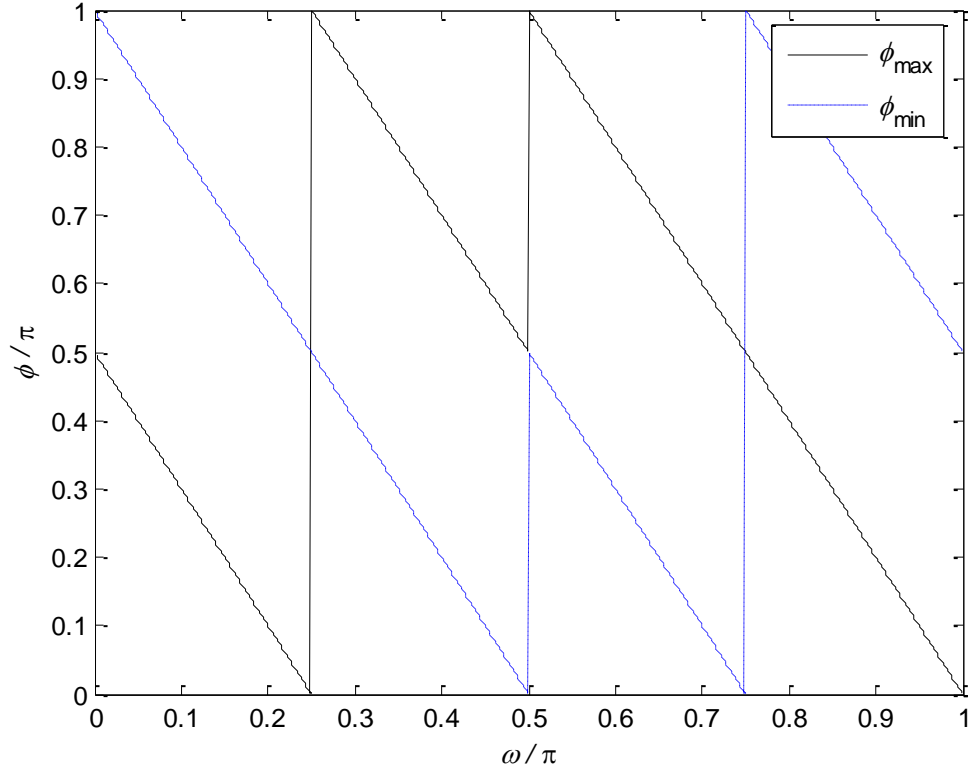
$\omega \in [\frac{\pi^+}{2}, \pi)$ aralığında $b(\omega) > 0$ olacaktır.

Yani $k = 1,2$ için $b(\omega) < 0$, $k = 3,4$ için $b(\omega) > 0$ olarak hesaplanacaktır.

Buna göre tüm k değerleri için eşitlik (3.19) ve (3.20) dikkate alınarak ve eşitlik (3.16)'da verilen kurallara göre ϕ_1 , ϕ_2 değerlerinin maksimum ve minimum faz değerleri belirlenmiştir. Son durumda elde edilen ϕ_{\max} , ϕ_{\min} değerleri eşitlik (3.21) ve (3.22)'de verilmektedir.

$$\phi_{\max} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi^-}{2}] \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in [\frac{\pi^+}{2}, \pi) \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\phi_{\min} = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in (0, \frac{\pi^-}{2}] \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\frac{\pi^+}{2}, \frac{3\pi}{4}) \\ \frac{5\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\frac{3\pi}{4}, \pi) \end{cases} \quad (3.22)$$



Şekil 3.9. DESA-1a (4 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.

Şekil 3.9’da eşitlik (3.21) ve (3.22)’de bulunan ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerlerinin ω frekans değerleri ile değişimi gösterilmiştir. Burada görüldüğü gibi $\omega = \frac{\pi}{2}$ için ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerleri bulunmamaktadır.

3.3.2 Prony (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri

Bu bölümde DESA-1a için uygulanan tüm adımlar aynı şekilde uygulanarak Prony algoritmasının maksimum ve minimum faz ifadeleri bulunmaktadır. Buna göre $f(\omega, \phi)$ 'nin birinci dereceden türevini sıfır yapan değerler eşitlik (3.14)'te verilen denklem yapısı kullanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} f(\omega, \phi) &= a(\omega) + b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 3\omega) \\ \frac{df(\omega, \phi_1)}{d\phi_1} &= -2 \cdot b(\omega) \cdot \sin(2\phi_1 + 3\omega) = 0 \\ 2\phi_1 + 3\omega &= \pi k \\ \phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - \frac{3\omega}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

Denklemin ikinci kökünü bulabilmek için ϕ_2 yerine $\phi_1 + \frac{\pi}{2}$ yazılarak aynı işlem tekrarlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \frac{df\left(\omega, \left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{d\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)} &= -2 \cdot b(\omega) \cdot \sin\left(2\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) + 3\omega\right) = 0 \\ -2 \cdot b(\omega) \cdot [\sin(2\phi_1 + 3\omega) \cdot \cos(\pi) + \cos(2\phi_1 + 3\omega) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_0] &= 0 \\ 2\phi_1 + 3\omega &= \pi k \\ \phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - \frac{3\omega}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

Böylece $\phi_1 = \frac{\pi k}{2} - \frac{3\omega}{2}$ ve $\phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{(k+1)\pi}{2} - \frac{3\omega}{2}$ için birinci dereceden türevini sıfır yapan değerler bulunmuş ve faz ifadeleri olan denklem kökleri elde edilmiştir. Bu faz değerlerinin ω frekans aralıklarını belirleyebilmek için tüm k değerlerinde incelememiz gerekmektedir. Bu bölümde $k = 4$ için de, $\phi \in (0, \pi]$ aralığı dışında kaldığından sadece $k = 1, 2, 3$ için inceleme yapılmaktadır.

Tüm k değerleri için hesaplamalar yapıldığında, elde edilen ϕ_1, ϕ_2 ($\phi \in (0, \pi]$ aralığında seçilerek) ve ω frekans aralıkları ile birlikte aşağıda verilmektedir.

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{3\omega}{2} & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \\ \pi - \frac{3\omega}{2} & \omega \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^-}{2}\right] \\ \pi - \frac{3\omega}{2} & \omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{3\omega}{2} & \omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \end{cases} \quad \phi_2 = \begin{cases} \pi - \frac{3\omega}{2} & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{3\omega}{2} & \omega \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^-}{2}\right] \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{3\omega}{2} & \omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \\ 2\pi - \frac{3\omega}{2} & \omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \end{cases}$$

Burada, $k = 2$ için hesaplama yapılırken ($\omega \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ aralığında), eşitlik (3.8)'de verilen $\text{var}(\omega, \phi) = f(\omega, \phi)$ denklemi, $\omega = \frac{\pi}{2}$ değerinde ϕ 'ye bağlı bir denklem olmayıp sadece ω 'ya bağlı bir denklem olmaktadır. Dolayısıyla bu değerde maksimum ve minimum faz değerleri olmayacağı için $\omega = \frac{\pi}{2}$ dahil edilmemektedir.

Bulunan ϕ_1 ve ϕ_2 ifadelerinin, maksimum ve minimum faz değerlerini bulabilmek için tekrar tüm k değerleri için $f(\omega, \phi)$ 'nin ikinci mertebeden türevinin işaretini incelememiz gerektiği biliniyor. Böylece;

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(\omega, \phi)}{d\phi^2} &= -4 \cdot b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 3\omega) \\ f''(\omega, \phi_1) &= -4 \cdot b(\omega) \cdot (-1)^k \\ f''(\omega, \phi_2) &= -4 \cdot b(\omega) \cdot (-1)^{k+1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Burada, eşitlik (3.16)'da ve açıklamasında belirtildiği gibi;

$f''(\omega, \phi_1) > 0$ ise ϕ_1 minimum, ϕ_2 maksimum

$f''(\omega, \phi_1) < 0$ ise ϕ_2 minimum, ϕ_1 maksimum olacaktır. $\phi = \phi_2$ için ise aynı kural geçerlidir. Bunun için ilk olarak $b(\omega)$ ifadesinin işareti belirlenmelidir.

$$b(\omega) = \frac{-\cos(\omega) \cdot (4 + \cos(2\omega))}{4 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^4(\omega)} \quad (3.26)$$

Burada, $b(\omega) = -\cos(\omega)$ denklemin işaretini belirleyecektir. Dolayısıyla;

$\omega \in \left(0, \frac{\pi^-}{2}\right]$ aralığında $b(\omega) < 0$

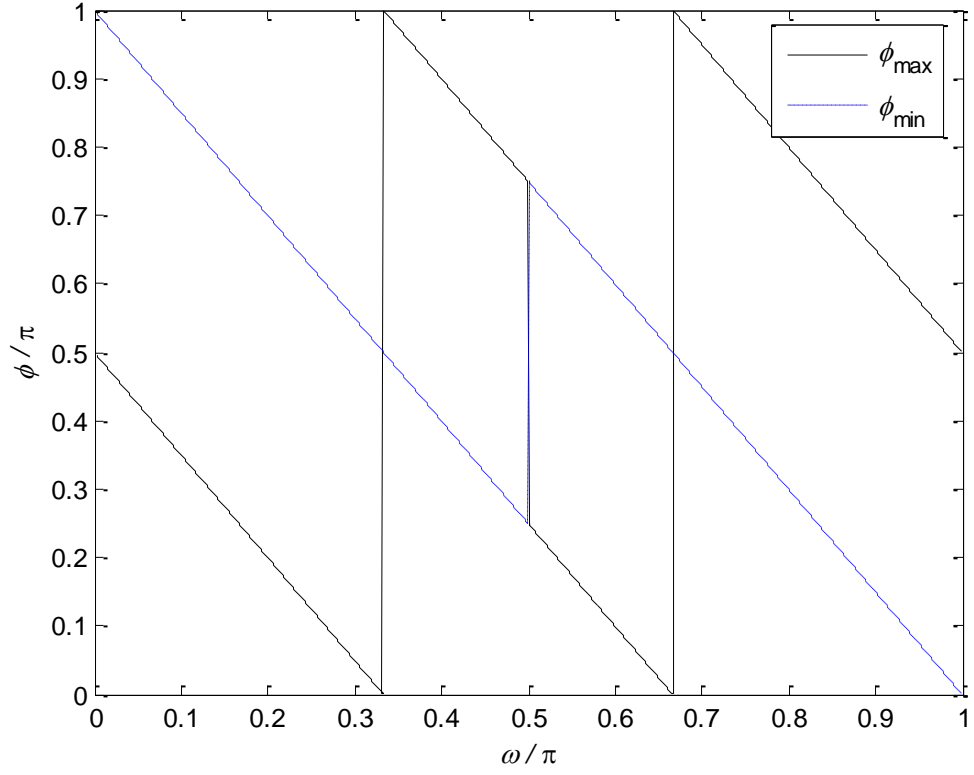
$\omega = \frac{\pi}{2}$ ise $b(\omega) = 0$

$\omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \pi\right)$ aralığında $b(\omega) > 0$ olacaktır.

$k = 1, 2, 3$ için bulunan tüm ϕ_1, ϕ_2 değerleri, $f''(\omega, \phi)$ denkleminde yerine koyularak hesaplama yapılmıştır. Böylece, maksimum ve minimum faz değerleri elde edilmiş oldu. Son durumda elde edilen ϕ_{\max}, ϕ_{\min} değerleri eşitlik (3.27) ve (3.28)'de verilmektedir.

$$\phi_{\max} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi^-}{2}\right] \\ \pi - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \\ 2\pi - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \end{cases} \quad (3.27)$$

$$\phi_{\min} = \begin{cases} \pi - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi^-}{2}\right] \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad (3.28)$$



Şekil 3.10. Prony (4 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.

Şekil 3.10’da eşitlik (3.27) ve (3.28)’de bulunan ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerlerinin ω frekans değerleri ile değişimi gösterilmiştir. Burada görüldüğü gibi $\omega = \frac{\pi}{2}$ için ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerleri bulunmamaktadır.

3.3.3 DESA-1 (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri

DESA-1 kestiricisinin maksimum ve minimum faz değerlerini bulabilmek için ilk olarak yaklaşık varyans ifadesi olan eşitlik (3.9)'un birinci mertebeden türevini sıfır yapan kökleri bulunarak ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri elde edilmektedir. Bunun için (3.14) eşitliğindeki denklem yapısı kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned} f(\omega, \phi) &= a(\omega) + b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega) \\ \frac{df(\omega, \phi_1)}{d\phi_1} &= -2 \cdot b(\omega) \cdot \sin(2\phi_1 + 4\omega) = 0 \\ 2\phi_1 + 4\omega &= \pi k \\ \phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - 2\omega \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{df\left(\omega, \left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{d\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)} &= -2 \cdot b(\omega) \cdot \sin\left(2\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) + 4\omega\right) = 0 \\ -2 \cdot b(\omega) \cdot [\sin(2\phi_1 + 4\omega) \cdot \cos(\pi) + \cos(2\phi_1 + 4\omega) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_0] &= 0 \\ 2\phi_1 + 4\omega &= \pi k \\ \phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - 2\omega \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

Böylece, $\phi_1 = \frac{\pi k}{2} - 2\omega$ ve $\phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{(k+1)\pi}{2} - 2\omega$ için birinci mertebeden türevini sıfır yapan denklem kökleri bulunmuş oldu. Daha sonra, DESA-1 için ϕ_1 ve ϕ_2 kök ifadeleri, DESA-1a kestiricisinin değerleriyle aynı olduğundan $k = 1, 2, 3, 4$ için hesaplanmaktadır. Bu hesaplamalar sonucunda elde edilen $\phi \in (0, \pi]$ aralığında ϕ_1 , ϕ_2 ve ω frekans aralıkları şu şekildedir;

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega_1^-\right] \\ \pi - 2\omega & \omega \in \left[\omega_1^+, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases} \quad \phi_2 = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega_1^-\right] \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\omega_1^+, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ \frac{5\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases}$$

Burada, $k = 2$ için hesaplanırken, $\omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında eşitlik (3.9)'da verilen $f(\omega, \phi)$ denklemini sadece ω 'ya bağlı bir denklem haline getiren, yani ϕ 'ye bağlı bir denklem olmayıp maksimum ve minimum faz değerlerinin olmadığı bir ω_1 frekansı mevcuttur. Bu değer eşitlik (3.31)'de verilmektedir.

$$\omega_1 = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{1/3} - \frac{1}{2^{2/3}(\sqrt{5} - 1)^{1/3}} \right)$$

$$\omega_1 \cong 1,22504 \cong 0,389943\pi \quad (3.31)$$

Elde edilen ϕ_1 ve ϕ_2 değerlerinin, maksimum ve minimum faz değerlerini bulabilmek için $f(\omega, \phi)$ 'nin ikinci mertebeden türevini alarak işaretini incelememiz gerekmektedir.

$$\frac{d^2 f(\omega, \phi)}{d\phi^2} = -4 \cdot b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)$$

$$f''(\omega, \phi_1) = -4 \cdot b(\omega) \cdot (-1)^k$$

$$f''(\omega, \phi_2) = -4 \cdot b(\omega) \cdot (-1)^{k+1} \quad (3.32)$$

Burada, öncelikle $f''(\omega, \phi)$ denklemi içerisindeki $b(\omega)$ ifadesinin işaretini bulmamız gerektiği biliniyor.

$$b(\omega) = \frac{-(8\cos^3(\omega) - 12\cos^2(\omega) + 12\cos(\omega) - 3)}{32 \cdot \text{SNR} \cdot \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \sin^4(\omega)} \quad (3.33)$$

Burada, $b(\omega)$ ifadesini $b(\omega) = -8 \cdot P(\cos(\omega))$ şeklinde yazarsak ($\lambda = \cos(\omega)$);

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^3 - \frac{12}{8}\lambda^2 + \frac{12}{8}\lambda - \frac{3}{8} \\ &= (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot (\lambda - \lambda_3) \end{aligned}$$

Buna göre kökler;

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\cong 0,338907 \\ \lambda_2 &\cong 0,580546 - 0,87719j \\ \lambda_3 &= \bar{\lambda}_2 \cong 0,580546 + 0,87719j \end{aligned}$$

Böylece, $P(\lambda)$ bir reel kök (λ_1) ve karmaşık eşlenik kök çiftine (λ_2, λ_3) sahiptir.

Çizelge 3.2. DESA-1 kestiricisi için $b(\omega)$ işaret analizi

λ	-1	λ_1	+1
$(\lambda - \lambda_1)$	-	0	+
$(\lambda - \lambda_2) \cdot (\lambda - \lambda_3)$	+		+
$P(\lambda)$	-	0	+
$b(\omega) = -8 \cdot P(\lambda)$	+	0	-

Buna göre;

$$\begin{aligned} b(\omega) &> 0, & -1 < \lambda < \lambda_1 \text{ veya } \omega_1 < \omega < \pi \\ b(\omega) &= 0, & \lambda = \lambda_1 \text{ veya } \omega = \omega_1 \\ b(\omega) &< 0, & \lambda_1 < \lambda < 1 \text{ veya } 0 < \omega < \omega_1 \end{aligned}$$

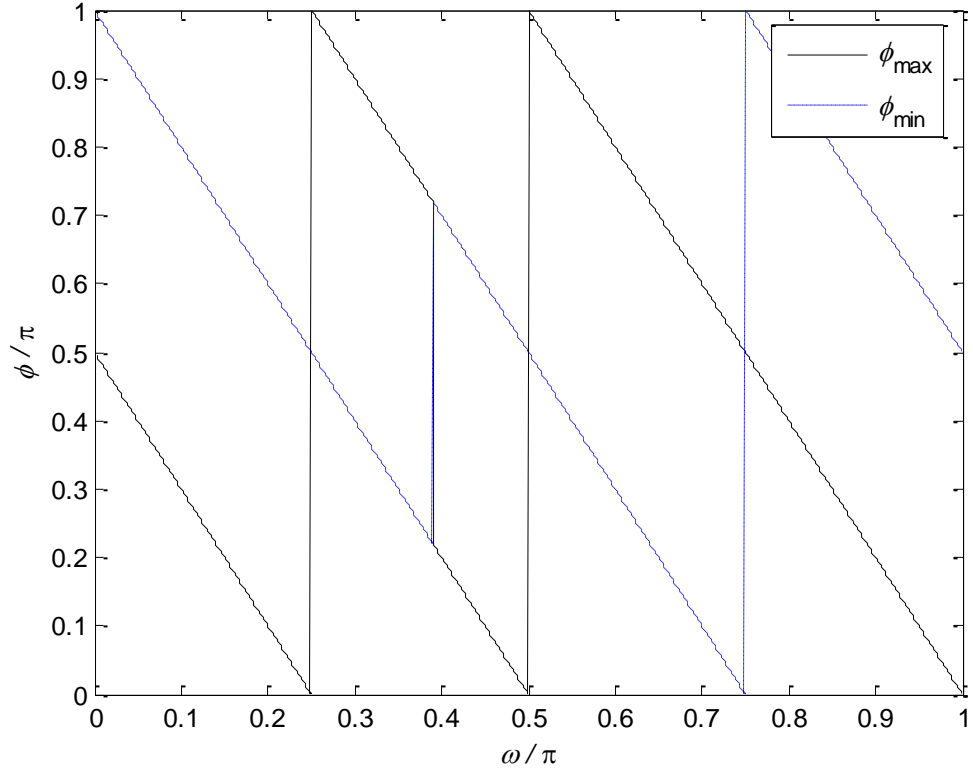
Burada, $\lambda = \cos(\omega)$ olduğundan $\omega_1 = \cos^{-1}(\lambda_1) \cong 0,389943\pi$ olarak bulunur.

Böylece, $k = 1,2,3,4$ için bulunan ϕ_1, ϕ_2 değerleri, $f''(\omega, \phi)$ 'da her k değeri için ϕ yerine yazılarak ve $b(\omega)$ işareti de dikkate alınarak eşitlik (3.16) açıklamasında belirtilen

kurallara göre ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerleri elde edilmiştir. Son durumda elde edilen ϕ_{\max} , ϕ_{\min} faz değerleri ve ω frekans aralıkları eşitlik (3.34) ve (3.35)'te verilmektedir.

$$\phi_{\max} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega_1^-\right] \\ \pi - 2\omega & \omega \in \left[\omega_1^+, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\phi_{\min} = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in (0, \omega_1^-] \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\omega_1^+, \frac{3\pi}{4}\right) \\ \frac{5\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases} \quad (3.35)$$



Şekil 3.11. DESA-1 (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.

Şekil 3.11’de eşitlik (3.34) ve (3.35)’te bulunan ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerlerinin ω frekans değerleri ile değişimi gösterilmektedir. Burada görüldüğü gibi $\omega = \omega_1 = 0,389943\pi$ değerinde ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerleri bulunmamaktadır.

3.3.4 DESA-2 (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri

DESA-2 algoritması için ϕ_1 ve ϕ_2 denklem kökleri (3.14) eşitliği kullanılarak aşağıdaki denklemlerle gösterilmektedir.

$$\begin{aligned}
 f(\omega, \phi) &= a(\omega) + b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega) \\
 \frac{df(\omega, \phi_1)}{d\phi_1} &= -2 \cdot b(\omega) \cdot \sin(2\phi_1 + 4\omega) = 0 \\
 2\phi_1 + 4\omega &= \pi k \\
 \phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - 2\omega \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{df\left(\omega, \left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{d\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)} &= -2 \cdot b(\omega) \cdot \sin\left(2\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) + 4\omega\right) = 0 \\
 -2 \cdot b(\omega) \cdot [\sin(2\phi_1 + 4\omega) \cdot \cos(\pi) + \cos(2\phi_1 + 4\omega) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_0] &= 0 \\
 2\phi_1 + 4\omega &= \pi k \\
 \phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - 2\omega \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Böylece denklem kökleri $\phi_1 = \frac{\pi k}{2} - 2\omega$ ve $\phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{(k+1)\pi}{2} - 2\omega$ olarak bulunmuştur. Bu köklerin ϕ ve ω aralıklarında aldığı maksimum ve minimum faz değerlerini bulabilmek için tüm k değerlerinde incelememiz gerekmektedir.

Her bir kestirici için $\hat{\lambda} = \cos\hat{\omega}$ ve $\phi \in (0, \pi]$, $\omega \in (0, \pi)$ olarak tanımlandığı biliniyor. Fakat DESA-2 kestiricisi için $\hat{\lambda} = \cos(2\hat{\omega})$ olarak tanımlanmaktadır ve $\phi \in (0, \pi]$, $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralıklarında çalışmaktadır. Bu yüzden, DESA-2 algoritması için ϕ_1 ve ϕ_2 kök ifadeleri, DESA-1a ve DESA-1 kestiricileri ile aynı olmasına rağmen, $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında olduğu için bu bölümde $k = 1, 2$ için hesaplama yapılmaktadır. Bu hesaplamalar sonucunda elde edilen ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri $\phi \in (0, \pi]$ aralığında aşağıda verilmektedir.

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in (0, \omega_1^-] \\ \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\omega_1^+, \frac{\pi}{4}) \\ \pi - 2\omega & \omega \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad \phi_2 = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in (0, \omega_1^-] \\ \pi - 2\omega & \omega \in [\omega_1^+, \frac{\pi}{4}) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Burada, $k = 1$ için $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ aralığında, eşitlik (3.10)'da verilen $\text{var}(\omega, \phi)$ denklemini ϕ 'ye bağlı olmayıp maksimum ve minimum faz değerlerinin bulunmadığı bir ω_1 frekansı bulunmaktadır. Bu ω_1 değeri şu şekilde elde edilir;

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{6} - 2}{2} \right)$$

$$\omega_1 \cong 0,672058 \cong 0,213923\pi \quad (3.38)$$

Maksimum ve minimum faz değerlerini bulabilmemiz için $f(\omega, \phi)$ 'nin ikinci mertebeden türevini alarak işaretini incelememiz gerektiği biliniyor. Böylece $f''(\omega, \phi)$;

$$\frac{d^2 f(\omega, \phi)}{d\phi^2} = -4 \cdot b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)$$

$$f''(\omega, \phi_1) = -4 \cdot b(\omega) \cdot (-1)^k$$

$$f''(\omega, \phi_2) = -4 \cdot b(\omega) \cdot (-1)^{k+1} \quad (3.39)$$

Burada, $f''(\omega, \phi)$ 'nin işaret analizi için öncelikle $b(\omega)$ işaretini bilmemiz gerekmektedir.

$$b(\omega) = - \frac{(2 \cdot \cos^2(2\omega) + 4 \cdot \cos(2\omega) - 1)}{32 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^4(\omega) \cdot \cos^2(\omega)} \quad (3.40)$$

Buna göre, $b(\omega) = -2 \cdot P(\cos(2\omega))$ şeklinde tanımlarsak ($\lambda = \cos(2\omega)$);

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - \frac{1}{2}$$

$$= (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2)$$

Böylece kök ifadeleri şu şekilde belirlenir;

$$\lambda_1 \cong 0,224745$$

$$\lambda_2 \cong -2,22474$$

Çizelge 3.3. DESA-2 kestiricisi için $b(\omega)$ işaret analizi

λ	-1	λ_1	+1
$(\lambda - \lambda_1)$	-	0	+
$(\lambda - \lambda_2)$	+		+
$P(\lambda)$	-	0	+
$b(\omega) = -2 \cdot P(\lambda)$	+	0	-

Buna göre $b(\omega)$ işaretinin frekansa göre değişimi şu şekildedir;

$$b(\omega) > 0, \quad -1 < \lambda < \lambda_1 \text{ veya } \omega_1 < \omega < \frac{\pi}{2}$$

$$b(\omega) = 0, \quad \lambda = \lambda_1 \text{ veya } \omega = \omega_1$$

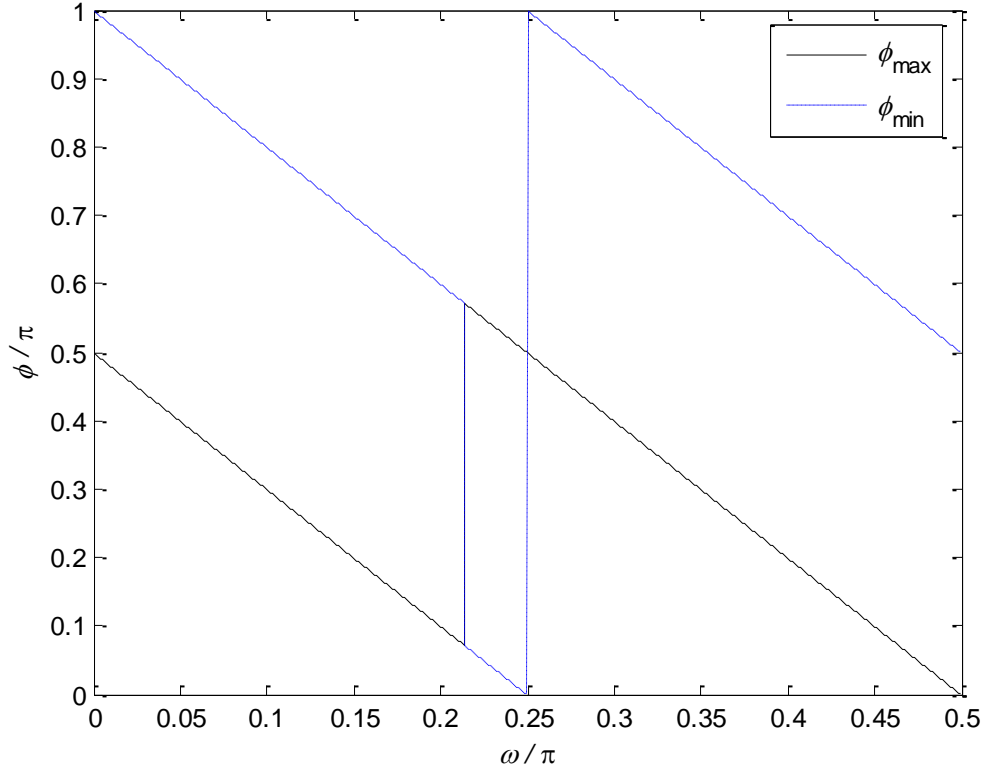
$$b(\omega) < 0, \quad \lambda_1 < \lambda < 1 \text{ veya } 0 < \omega < \omega_1$$

Burada, $\lambda = \cos(2\omega)$ olduğundan $\omega_1 = \frac{1}{2} \cos^{-1}(\lambda_1) \cong 0,213923\pi$ olarak bulunur.

$b(\omega)$ işaretini belirledikten sonra, $f''(\omega, \phi)$ 'da $k = 1,2$ için bulunan ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri yerine yazılarak eşitlik (3.16) açıklamasında belirtilen kurallar dahilinde maksimum ve minimum faz değerleri tespit edilir. Bu değerler eşitlik (3.41), (3.42)'de gösterilmektedir.

$$\phi_{\max} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in (0, \omega_1^-) \\ \pi - 2\omega & \omega \in [\omega_1^+, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\phi_{\min} = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in (0, \omega_1^-] \\ \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\omega_1^+, \frac{\pi}{4}) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (3.42)$$



Şekil 3.12. DESA-2 (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.

Şekil 3.12’de, eşitlik (3.41) ve (3.42)’de bulunan ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerlerinin ω frekans değerleri ile değişimi gösterilmektedir. Burada görüldüğü gibi $\omega = \omega_1 = 0,213923\pi$ değerinde maksimum ve minimum faz değerleri bulunmamaktadır ve DESA-2 algoritması için sadece $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında çalıştığından, $\omega/\pi = (0, 0,5)$ aralığında gösterilmektedir.

3.3.5 Modified Prony (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri

Modified Prony kestiricisi için ϕ_1 ve ϕ_2 faz değerleri eşitlik (3.14) kullanılarak aşağıda elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
 f(\omega, \phi) &= a(\omega) + b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega) \\
 \frac{df(\omega, \phi_1)}{d\phi_1} &= -2 \cdot b(\omega) \cdot \sin(2\phi_1 + 4\omega) = 0 \\
 2\phi_1 + 4\omega &= \pi k \\
 \phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - 2\omega \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{df\left(\omega, \left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{d\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)} &= -2 \cdot b(\omega) \cdot \sin\left(2\left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right) + 4\omega\right) = 0 \\
 -2 \cdot b(\omega) \cdot [\sin(2\phi_1 + 4\omega) \cdot \cos(\pi) + \cos(2\phi_1 + 4\omega) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_0] &= 0 \\
 2\phi_1 + 4\omega &= \pi k \\
 \phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - 2\omega \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Böylece, birinci mertebeden türevini sıfır yapan faz değerleri, k bir tamsayı olmak üzere; $\phi_1 = \frac{\pi k}{2} - 2\omega$ ve $\phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{(k+1)\pi}{2} - 2\omega$ olarak bulunur. Bulunan ϕ_1 ve ϕ_2 kök ifadeleri, daha önce incelenen DESA-1a, DESA-1 ve DESA-2 kestiricileri için bulunan değerlerle aynı olduğu için $k = 1, 2, 3, 4$ için hesaplanmaktadır. Bunun sonucunda tüm k değerleri için elde edilen ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri $\phi \in (0, \pi]$ aralığında seçilerek aşağıda verilmektedir.

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases} \quad \phi_2 = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ \frac{5\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases}$$

Burada görülüyor ki; her $\omega = \frac{\pi}{4}$ aralıklarla ϕ değeri almıştır. Ayrıca daha önce bulunan tüm kestiriciler için $\text{var}(\omega, \phi) = f(\omega, \phi)$ denklemini ϕ 'ye bağlı olmadığı ve maksimum ve minimum faz değerlerinin olmadığı bir ω frekansı bulunuyordu. Modified Prony kestiricisi için böyle bir frekans değeri bulunmamaktadır.

Elde edilen ϕ_1 ve ϕ_2 değerlerinin maksimum ve minimum faz değerlerini belirleyebilmek için $f(\omega, \phi)$ 'nin ikinci mertebeden türevini incelediğimiz biliniyor. Buna göre;

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f(\omega, \phi)}{d\phi^2} &= -4 \cdot b(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega) \\ f''(\omega, \phi_1) &= -4 \cdot b(\omega) \cdot (-1)^k \\ f''(\omega, \phi_2) &= -4 \cdot b(\omega) \cdot (-1)^{k+1}\end{aligned}\tag{3.45}$$

Burada her k değerinde tüm ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri için $f''(\omega, \phi_1)$ işaretini belirleyebilmemiz için $b(\omega)$ işaretini bilmemiz gerekmektedir.

$$b(\omega) = \frac{(2 \cdot \cos^2(2\omega) + 16 \cdot \cos(2\omega) + 17)}{32 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^6(\omega)}\tag{3.46}$$

$b(\omega) = 2 \cdot P(\cos(2\omega))$ şeklinde tanımlarsak;

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= \lambda^2 + 8\lambda + \frac{17}{2} \\ &= (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2)\end{aligned}$$

Bunun sonucunda λ_1 ve λ_2 şu şekildedir;

$$\begin{aligned}\lambda_1 &\cong -1,26139 \\ \lambda_2 &\cong -6,73861\end{aligned}$$

Çizelge 3.4. Modified Prony kestiricisi için $b(\omega)$ işaret analizi

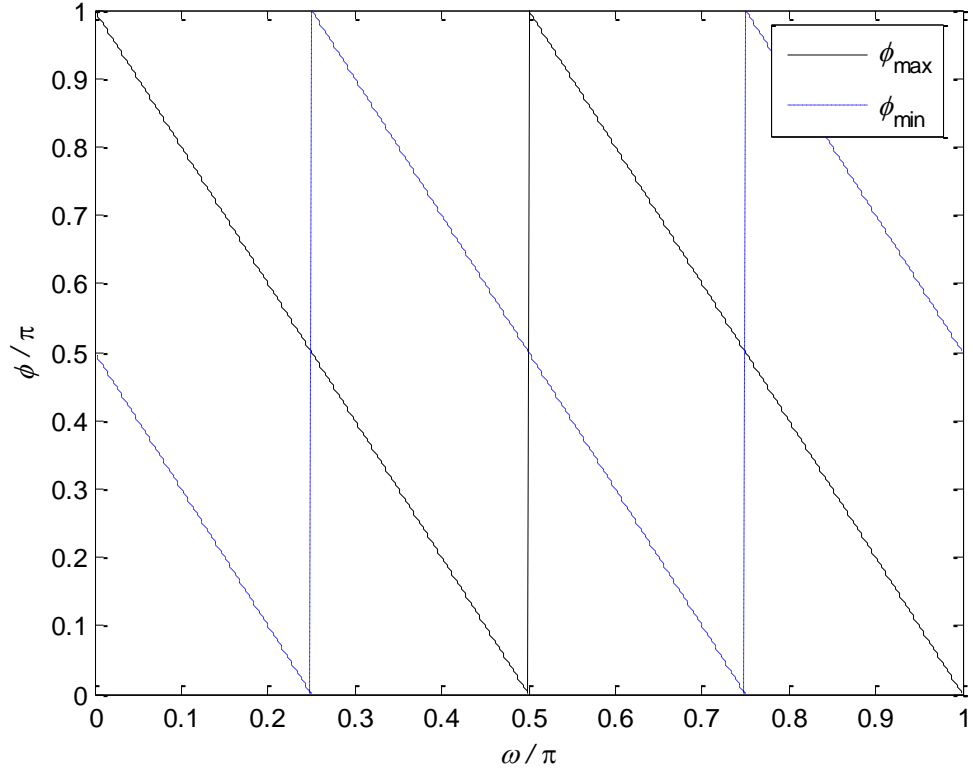
λ	-1	+1
$(\lambda - \lambda_1)$	+	
$(\lambda - \lambda_2)$	+	
$P(\lambda)$	+	
$b(\omega) = 2 \cdot P(\lambda)$	+	

Buna göre tüm ω frekansları için $b(\omega) > 0$ olmaktadır.

Böylece $f''(\omega, \phi)$ denkleminde bulunan tüm ϕ_1 ve ϕ_2 değerlerinin incelemesi yapılarak maksimum ve minimum faz değerleri tespit edilmiştir. Eşitlik (3.47) ve (3.48) maksimum ve minimum faz değerlerini göstermektedir.

$$\phi_{\max} = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\phi_{\min} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ \frac{5\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases} \quad (3.48)$$



Şekil 3.13. Modified Prony (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.

Şekil 3.13'te eşitlik (3.47) ve (3.48)'de bulunan ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerlerinin ω frekans değerleri ile değişimi gösterilmektedir.

3.3.6 Modified Covariance (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri

Modified covariance (4 nokta) kestiricisi için $f(\omega, \phi)$, eşitlik (3.12)'de verilmektedir ve bu denklemi diğer kestiriciler için eşitlik (3.14)'te olduğu gibi (3.49) eşitliği ile tanımlanmaktadır.

$$f(\omega, \phi) = \frac{1 + C_1 \cdot C_2 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)}{[1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)]^2} \quad (3.49)$$

burada $C_1 = \cos(\omega)$, $C_2 = \cos(2\omega)$ olarak tanımlanmaktadır. Maksimum ve minimum faz değerlerini bulabilmek için $f(\omega, \phi)$ 'nin birinci dereceden türevini sıfır yapan kökleri bulmamız gerektiği biliniyor. Bunun için öncelikle eşitlik (3.49)'da verilen denklem yapısı kullanılarak $f'(\omega, \phi)$ elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{df(\omega, \phi)}{d\phi} &= \frac{-[2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \sin(2\phi + 3\omega)] \cdot [1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)]^2}{[1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)]^4} \\ &= \frac{[-2 \cdot C_1 \cdot \sin(2\phi + 3\omega)] \cdot [1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)] \cdot [C_2 \cdot [1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)] - 2 \cdot 1 + C_1 \cdot C_2 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)]}{[1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)]^4} \\ &= \frac{[-2 \cdot C_1 \cdot \sin(2\phi + 3\omega)] \cdot [1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)] \cdot [(C_2 - 2) - C_1 \cdot C_2 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)]}{[1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)]^4} \\ \frac{df(\omega, \phi)}{d\phi} &= \frac{[-2 \cdot C_1 \cdot \sin(2\phi + 3\omega)] \cdot [(C_2 - 2) - C_1 \cdot C_2 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)]}{[1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega)]^3} \end{aligned}$$

Burada;

$$1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega) = 1 + \cos(\omega) \cdot \cos(2\phi + 3\omega) \in (0, 2)$$

$$(C_2 - 2) - C_1 \cdot C_2 \cdot \cos(2\phi + 3\omega) = (\cos 2\omega - 2) - \cos \omega \cdot \cos 2\omega \cdot \cos(2\phi + 3\omega) \in (-4, 0)$$

olarak elde edilmektedir. Ayrıca $\omega \in (0, \pi)$ aralığında çalıştığından bu ifadeler sıfıra eşit değildir. Buna göre $f'(\omega, \phi) = 0$ ile denklem köklerinin bulunması eşitlik (3.50) ve (3.51)'de gösterilmektedir.

$$f'(\omega, \phi_1) = \frac{\overbrace{[-2 \cdot C_1 \cdot \sin(2\phi_1 + 3\omega)] \cdot [(C_2 - 2) - C_1 \cdot C_2 \cdot \cos(2\phi_1 + 3\omega)]}^{<0}}{\underbrace{[1 + C_1 \cdot \cos(2\phi_1 + 3\omega)]^3}_{>0}} = 0$$

$$2\phi_1 + 3\omega = \pi k$$

$$\phi_1 = \frac{\pi k}{2} - \frac{3\omega}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.50)$$

Daha sonra ikinci kök olan ϕ_2 için, $\phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{(k+1)\pi}{2} - \frac{3\omega}{2}$ değerinde, türevi sıfır yapan değer olarak bulunmuştur ve denklem (3.51)'de gösterilmektedir.

$$f'(\omega, (\phi_1 + \frac{\pi}{2})) = \frac{\overbrace{[-2 \cdot C_1 \cdot \sin(2(\phi_1 + \frac{\pi}{2}) + 3\omega)] \cdot [(C_2 - 2) - C_1 \cdot C_2 \cdot \cos(2(\phi_1 + \frac{\pi}{2}) + 3\omega)]}^{<0}}{\underbrace{[1 + C_1 \cdot \cos(2(\phi_1 + \frac{\pi}{2}) + 3\omega)]^3}_{>0}} = 0$$

$$2\phi_1 + 3\omega = \pi k$$

$$\phi_1 = \frac{\pi k}{2} - \frac{3\omega}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.51)$$

Böylece $\phi_1 = \frac{\pi k}{2} - \frac{3\omega}{2}$ ve $\phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2}$ için faz ifadeleri olan denklem kökleri elde edilmiştir. k bir tamsayı olmak üzere, ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri, Prony kestiricisinin değerleri ile aynı olduğundan $k = 1, 2, 3$ için inceleme yapmamız gerektiği biliniyor. Bunun sonucunda elde edilen ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri aşağıda gösterilmektedir.

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{3\omega}{2} & \omega \in (0, \frac{\pi}{3}) \\ \pi - \frac{3\omega}{2} & \omega \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - \frac{3\omega}{2} & \omega \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{3\omega}{2} & \omega \in [\frac{2\pi}{3}, \pi) \end{cases} \quad \phi_2 = \begin{cases} \pi - \frac{3\omega}{2} & \omega \in (0, \frac{\pi}{3}) \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{3\omega}{2} & \omega \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{3\omega}{2} & \omega \in [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}) \\ 2\pi - \frac{3\omega}{2} & \omega \in [\frac{2\pi}{3}, \pi) \end{cases}$$

Burada, $k = 2$ için $\omega \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ aralığında, eşitlik (3.12)'de verilen $f(\omega, \phi)$ denklemi, $C_1 = 0$ veya $\omega = \frac{\pi}{2}$ değerlerinde ϕ 'ye bağlı bir denklem olmayacaktır ve dolayısıyla maksimum ve minimum faz değerleri yoktur. Bu yüzden $\omega = \frac{\pi}{2}$ dahil edilmemektedir.

Bulunan ϕ_1 ve ϕ_2 köklerinin, maksimum ve minimum faz değerlerini bulabilmek için $f'(\omega, \phi)$ denklemi şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$f'(\omega, \phi) = \frac{N_1(\omega, \phi) \cdot N_2(\omega, \phi)}{D_1^3(\omega, \phi)}$$

Burada,

$$\begin{aligned} N_1(\omega, \phi) &= -2 \cdot C_1 \cdot \sin(2\phi + 3\omega) \\ N_2(\omega, \phi) &= (C_2 - 2) - C_1 \cdot C_2 \cdot \cos(2\phi + 3\omega) \\ D_1(\omega, \phi) &= 1 + C_1 \cdot \cos(2\phi + 3\omega) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Daha sonra buna göre $f''(\omega, \phi)$ elde edilmektedir ve eşitlik (3.52)'de gösterilmektedir.

$$\frac{d^2 f(\omega, \phi)}{d\phi^2} = \frac{[N_1'(\omega, \phi) \cdot N_2(\omega, \phi) + N_2'(\omega, \phi) \cdot N_1(\omega, \phi)] \cdot D_1^3(\omega, \phi) - N_1(\omega, \phi) \cdot N_2(\omega, \phi) \cdot 3 \cdot D_1^2(\omega, \phi) \cdot D_1'(\omega, \phi)}{D_1^6(\omega, \phi)} \quad (3.52)$$

Tüm kestiricilerde olduğu gibi, maksimum ve minimum faz değerlerinin belirlenebilmesi için, $f''(\omega, \phi_1)$ ve $f''(\omega, \phi_2)$ ifadeleri elde edilmektedir.

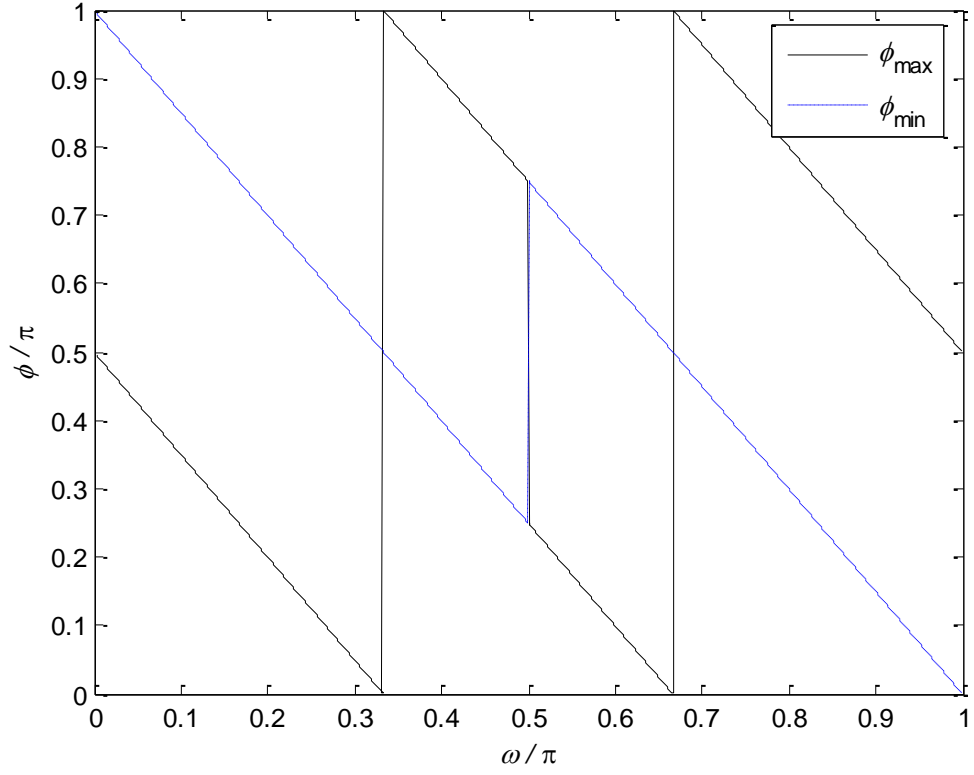
$$f''(\omega, \phi_1) = \frac{N_1'(\omega, \phi_1) \cdot N_2(\omega, \phi_1)}{D_1^3(\omega, \phi_1)} = \frac{-4 \cdot C_1 \cdot \cos(2\phi_1 + 3\omega) \cdot N_2(\omega, \phi_1)}{D_1^3(\omega, \phi_1)} = \frac{-4 \cdot C_1 \cdot (-1)^k \cdot N_2(\omega, \phi_1)}{D_1^3(\omega, \phi_1)}$$

$$f''(\omega, \phi_2) = \frac{-4 \cdot C_1 \cdot (-1)^{k+1} \cdot N_2(\omega, \phi_2)}{D_1^3(\omega, \phi_2)}$$

Burada, $N_1(\omega, \phi)$ ifadesi ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri için sıfıra eşit olacaktır. Buna göre $k = 1,2,3$ için bulunan maksimum ve minimum faz değerleri eşitlik (3.53) ve (3.54)'te gösterilmektedir.

$$\phi_{\max} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \\ 2\pi - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\phi_{\min} = \begin{cases} \pi - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad (3.54)$$



Şekil 3.14. Modified Covariance (4 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.

Şekil 3.14'te eşitlik (3.53) ve (3.54)'te bulunan ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerlerinin ω frekans değerleri ile değişimi gösterilmiştir. Burada görüldüğü gibi $\omega = \frac{\pi}{2}$ için ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerleri bulunmamaktadır.

3.3.7 Modified Covariance (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum faz değerleri

Modified covariance (5 nokta) kestiricisi için varyans ifadesi $\text{var}(\omega, \phi)$, eşitlik (3.13)'te verilmektedir ve eşitlik (3.55) ile tanımlanmaktadır.

$$f(\omega, \phi) = \frac{1 + C_1 \cdot C_3 \cdot \cos(2\phi + 4\omega)}{[3 + (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]^2} \quad (3.55)$$

Burada, $C_1 = \cos(\omega)$, $C_2 = \cos(2\omega)$ ve $C_3 = \cos(3\omega)$ olarak tanımlanmaktadır. Eşitlik (3.55)'e göre birinci mertebeden türevini sıfır yapan faz değerlerini bulmamız için $f'(\omega, \phi)$ ifadesi elde edilmesi gerekmektedir.

$$\frac{df(\omega, \phi)}{d\phi} = \frac{-2 \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot \sin(2\phi + 4\omega) \cdot [3 + (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]^2 - [1 + C_1 \cdot C_3 \cdot \cos(2\phi + 4\omega)] \cdot 2 \cdot [3 + (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)] \cdot [-2 \cdot (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \sin(2\phi + 4\omega)]}{[3 + (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]^4}$$

$$\frac{df(\omega, \phi)}{d\phi} = \frac{-2 \cdot \sin(2\phi + 4\omega) \cdot [3 + (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)] \cdot \left\{ \begin{array}{l} C_1 \cdot C_3 \cdot [3 + (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)] \\ -2 \cdot [1 + C_1 \cdot C_3 \cdot \cos(2\phi + 4\omega)] \cdot (1 + 2 \cdot C_2) \end{array} \right\}}{[3 + (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]^4}$$

Burada;

$3 + (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega) = 3 + (1 + 2 \cdot \cos(2\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)) \in (0, 6)$ olarak elde edilmektedir. Buna göre;

$$f'(\omega, \phi) = \frac{-2 \cdot \sin(2\phi + 4\omega) \cdot [3 \cdot C_1 \cdot C_3 - 2 \cdot (1 + 2 \cdot C_2) - C_1 \cdot C_3 \cdot (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]}{\underbrace{[3 + (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]^3}_{>0}}$$

$$K_1(\omega) = -2 \cdot [3 \cdot C_1 \cdot C_3 - 2 \cdot (1 + 2 \cdot C_2)] = 4 + 5 \cdot \cos(2\omega) - 3 \cdot \cos(4\omega)$$

$$K_2(\omega) = 2 \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot (1 + 2 \cdot C_2) = 2 \cdot \cos(\omega) \cdot \cos(3\omega) \cdot (1 + 2 \cdot \cos(2\omega))$$

olarak tanımlayalım. Buna göre $f'(\omega, \phi)$ ifadesi şu şekilde gösterilebilir;

$$f'(\omega, \phi) = \frac{\sin(2\phi + 4\omega) \cdot [K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]}{[3 + (1 + 2 \cdot C_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]^3} \quad (3.56)$$

Eşitlik (3.56)'da görüldüğü gibi birinci merteben türevi sıfır yapan iki ifade bulunmaktadır ($\sin(2\phi + 4\omega)$ ve $K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)$).

$$f'(\omega, \phi) = \frac{N_1(\omega, \phi) \cdot N_2(\omega, \phi)}{D_1^3(\omega, \phi)} \quad (3.57)$$

Eşitlik (3.56)'da gösterilen $f'(\omega, \phi)$ ifadesini eşitlik (3.57)'de gösterildiği gibi tanımlayalım. Burada;

$$\begin{aligned} N_1(\omega, \phi) &= \sin(2\phi + 4\omega) \\ N_2(\omega, \phi) &= K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega) \\ D_1(\omega, \phi) &= 3 + (1 + 2 \cdot \cos(2\omega)) \cdot \cos(2\phi + 4\omega) \end{aligned}$$

İlk olarak $N_1(\omega, \phi)$ ile gösterilen ifade için denklem kökleri eşitlik (3.58) ve (3.59)'da hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} f'(\omega, \phi_1) &= \frac{N_1(\omega, \phi_1) \cdot N_2(\omega, \phi_1)}{D_1^3(\omega, \phi_1)} = 0 \\ N_1(\omega, \phi_1) &= \sin(2\phi_1 + 4\omega) = 0 \\ 2\phi_1 + 4\omega &= \pi k \\ \phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - 2\omega \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} N_1\left(\omega, \left(\phi_1 + \frac{\pi}{2}\right)\right) &= [\sin(2\phi_1 + 4\omega) \cdot \cos(\pi) + \cos(2\phi_1 + 4\omega) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_0] = 0 \\ 2\phi_1 + 4\omega &= \pi k \\ \phi_1 &= \frac{\pi k}{2} - 2\omega \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (3.59)$$

Böylece k bir tamsayı olmak üzere, $\phi_1 = \frac{\pi k}{2} - 2\omega$ ve $\phi_2 = \phi_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{(k+1)\pi}{2} - 2\omega$ olarak denklem kökleri elde edilir. Daha sonra eşitlik (3.57)'de verilen $N_2(\omega, \phi)$ ifadesi için incelememiz gerekmektedir. Buna göre;

$$[K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)] = 0$$

$$\cos(2\phi + 4\omega) = -\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)}$$

değerinde türevi sıfır yapan kökler elde edilmektedir. Bu köklerin alabileceği değer aralığı;

$$\begin{aligned} -1 < -\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)} < 1 &= \left(\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)}\right)^2 < 1 = \left(\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)}\right)^2 - 1 < 0 \\ &= \left(\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)} - 1\right) \cdot \left(\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)} + 1\right) < 0 = \left(\frac{K_1(\omega) - K_2(\omega)}{K_2(\omega)}\right) \cdot \left(\frac{K_1(\omega) + K_2(\omega)}{K_2(\omega)}\right) < 0 \\ &= (K_1(\omega) - K_2(\omega)) \cdot (K_1(\omega) + K_2(\omega)) < 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Daha sonra bu ifadenin bulunduğu frekans aralığını bulmamız gerekmektedir.

$$K_1(\omega) = 4 + 5 \cdot (2 \cdot \cos^2(\omega) - 3 \cdot (8 \cdot \cos^4(\omega) - 8 \cdot \cos^2(\omega) + 1))$$

$\lambda = \cos(\omega)$ olduğundan şu şekilde yazılabilir;

$$K_1(\omega) = -24 \cdot \lambda^4 + 34 \cdot \lambda^2 - 4 = -2(12 \cdot \lambda^4 - 17 \cdot \lambda^2 + 2)$$

$$\begin{aligned} K_2(\omega) &= 2 \cdot \lambda \cdot (4 \cdot \lambda^3 - 3 \cdot \lambda) \cdot [1 + 2 \cdot (2 \cdot \lambda^2 - 1)] = 32 \cdot \lambda^6 - 32 \cdot \lambda^4 + 6 \cdot \lambda^2 \\ &= 2 \cdot \lambda^2 \cdot (2 \cdot \lambda - 1) \cdot (2 \cdot \lambda + 1) \cdot (4 \cdot \lambda^2 - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1(\omega) + K_2(\omega) &= 32 \cdot \lambda^6 - 56 \cdot \lambda^4 + 40 \cdot \lambda^2 - 4 \\ &= 32 \cdot (\lambda^2 - \lambda_1) \cdot (\lambda^2 - \lambda_2) \cdot (\lambda^2 - \lambda_3) \end{aligned}$$

Sonuç olarak λ_1 , λ_2 , λ_3 ifadeleri;

$$\lambda_1 \cong 0,118255$$

$$\lambda_2 \cong 0,815873 - 0,625612j$$

$$\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 \cong 0,815873 + 0,625612j$$

$$\begin{aligned} K_1(\omega) - K_2(\omega) &= -32 \cdot \lambda^6 + 8 \cdot \lambda^4 + 28 \cdot \lambda^2 - 4 \\ &= -32 \cdot (\lambda^2 - \mu_1) \cdot (\lambda^2 - \mu_2) \cdot (\lambda^2 - \mu_3) \end{aligned}$$

olarak tanımlanmaktadır. Buna göre, μ_1 , μ_2 ve μ_3 ifadeleri şu şekilde elde edilir.

$$\mu_1 \cong -0,890388$$

$$\mu_2 \cong 0,140388$$

$$\mu_3 = 1$$

Çizelge 3.5. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için " λ " işaret analizi

λ	-1	$-\sqrt{\mu_2}$	$-\sqrt{\lambda_1}$	$\sqrt{\lambda_1}$	$\sqrt{\mu_2}$	+1		
$K_1(\omega) + K_2(\omega)$	+	+	0	-	0	+		
$K_1(\omega) - K_2(\omega)$	0	+	0	-	-	0	+	0

Daha önce $-1 < -\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)} < 1 = (K_1(\omega) - K_2(\omega)) \cdot (K_1(\omega) + K_2(\omega)) < 0$ olarak elde edilmişti. Buna göre Çizelge 3.5'te verilen işaret analizi sonucunda,

$$-1 < -\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)} < 1 \text{ ifadesi;}$$

$$-\sqrt{\mu_2} < \lambda < -\sqrt{\lambda_1}$$

$$\sqrt{\lambda_1} < \lambda < \sqrt{\mu_2}$$

$\lambda = \cos(\omega)$ olduğu bilinerek, faz değerlerinin bulunduğu frekans aralıkları şu şekildedir;

$$\omega_3 = \cos^{-1}(-\sqrt{\lambda_1}) < \omega < \cos^{-1}(-\sqrt{\mu_2}) = \omega_4$$

$$\omega_1 = \cos^{-1}(\sqrt{\mu_2}) < \omega < \cos^{-1}(\sqrt{\lambda_1}) = \omega_2$$

Böylece, $[K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]$ ifadesi için (ω_1, ω_2) ve (ω_3, ω_4) frekans aralıklarında, maksimum ve minimum faz değerlerinin olduğu elde edilmiş oldu. Ayrıca, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ve ω_4 aşağıda gösterilmiştir.

$$\omega_1 \cong 1,18674 \cong 0,377751\pi$$

$$\omega_2 \cong 1,21975 \cong 0,388258\pi$$

$$\omega_3 \cong 1,92184 \cong 0,611742\pi \quad (\omega_3 = \pi - \omega_2)$$

$$\omega_4 \cong 1,95485 \cong 0,622249\pi \quad (\omega_4 = \pi - \omega_1)$$

Sonuç olarak, $\sin(2\phi + 4\omega)$ ifadesi için maksimum ve minimum faz değerleri olan denklem kökleri ve bu değerlerin bulunduğu frekans aralıkları elde edilmiştir. Bulunan ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri $\omega \in (0, \pi)$ aralığında, tüm k değerleri için $\phi \in (0, \pi]$ aralığında incelenmiştir. Ayrıca $[K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]$ ifadesi için bulunan (ω_1, ω_2) ve (ω_3, ω_4) frekans aralıkları için de incelenerek tüm ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri aşağıda verilmektedir.

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega_1^-\right] \\ \pi - 2\omega & \omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-] \\ \pi - 2\omega & \omega \in \left[\omega_2^+, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \omega_3^-\right] \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-] \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\omega_4^+, \frac{3\pi}{4}\right) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases} \quad \phi_2 = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega_1^-\right] \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-] \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\omega_2^+, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \omega_3^-\right] \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-] \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\omega_4^+, \frac{3\pi}{4}\right) \\ \frac{5\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases}$$

$[K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi + 4\omega)]$ ifadesi için maksimum ve minimum faz değerleri olan denklem köklerini $f'(\omega, \phi) = 0$ ile elde etmemiz gerekmektedir.

$$\begin{aligned} f'(\omega, \phi_3) &= \frac{N_1(\omega, \phi_3) \cdot N_2(\omega, \phi_3)}{D_1^3(\omega, \phi_3)} = 0 \\ N_2(\omega, \phi_3) &= [K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi_3 + 4\omega)] = 0 \\ \cos(2\phi_3 + 4\omega) &= -\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)} \\ \phi_3 &= \frac{1}{2} \cdot \cos^{-1}\left(-\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)}\right) - 2\omega \end{aligned} \quad (3.60)$$

Aynı zamanda $\phi_4 = \pi - \phi_3 - 4\omega$ için;

$$\begin{aligned}
N_2(\omega, \phi_4) &= [K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi_4 + 4\omega)] = 0 \\
[K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi_4 + 4\omega)] &= [K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi_3 + 4\omega)] \\
f'(\omega, \phi_4) &= 0 \\
\phi_4 &= \pi - \phi_3 - 4\omega
\end{aligned} \tag{3.61}$$

olarak elde edilmiştir. Daha önce $-1 < -\frac{K_1(\omega)}{K_2(\omega)} < 1$ ifadesi için frekans aralıkları bulunmuştu. Dolayısıyla ϕ_3 ve ϕ_4 denklem kökleri;

$$\begin{aligned}
\omega &\in [\omega_1^+, \omega_2^-] \\
\omega &\in [\omega_3^+, \omega_4^-]
\end{aligned}$$

frekans aralıklarında bulunmaktadır.

ϕ_1 ve ϕ_2 ifadelerinin maksimum ve minimum faz değerlerinin belirlenmesi;

Maksimum ve minimum faz değerlerini bulabilmemiz için eşitlik (3.57)'de verilen ifadenin ikinci mertebeden türevini incelememiz gerektiği biliniyor.

$$\frac{d^2 f(\omega, \phi)}{d\phi^2} = \frac{[N_1'(\omega, \phi) \cdot N_2(\omega, \phi) + N_2'(\omega, \phi) \cdot N_1(\omega, \phi)] \cdot D_1^3(\omega, \phi) - N_1(\omega, \phi) \cdot N_2(\omega, \phi) \cdot 3 \cdot D_1^2(\omega, \phi) \cdot D_1'(\omega, \phi)}{D_1^6(\omega, \phi)} \tag{3.62}$$

Daha sonra, $f''(\omega, \phi_1)$ ve $f''(\omega, \phi_2)$ ifadelerinin işareti incelenmektedir. Buna göre;

$$\begin{aligned}
f''(\omega, \phi_1) &= \frac{N_1'(\omega, \phi_1) \cdot N_2(\omega, \phi_1)}{D_1^3(\omega, \phi_1)} = \frac{2 \cdot \cos(2\phi_1 + 4\omega) \cdot [K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot \cos(2\phi_1 + 4\omega)]}{D_1^3(\omega, \phi_1)} \\
&= \frac{2 \cdot (-1)^k \cdot [K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot (-1)^k]}{D_1^3(\omega, \phi_1)}
\end{aligned}$$

$$f''(\omega, \phi_2) = \frac{2 \cdot (-1)^{k+1} \cdot [K_1(\omega) + K_2(\omega) \cdot (-1)^{k+1}]}{D_1^3(\omega, \phi_2)}$$

Buna göre, tüm k değerlerinde, $\omega \in (0, \pi)$ aralığında ve $\phi \in (0, \pi]$ için elde edilen ϕ_1 ve ϕ_2 değerlerinin maksimum ve minimum faz ifadeleri aşağıda gösterilmektedir.

$$\phi_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) & f''(\omega, \phi_1) < 0 \quad (\text{max}) \\ \pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega_1^-\right] & f''(\omega, \phi_1) > 0 \quad (\text{min}) \\ \pi - 2\omega & \omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-] & f''(\omega, \phi_1) > 0 \quad (\text{min}) \\ \pi - 2\omega & \omega \in \left[\omega_2^+, \frac{\pi}{2}\right) & f''(\omega, \phi_1) < 0 \quad (\text{max}) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \omega_3^-\right] & f''(\omega, \phi_1) > 0 \quad (\text{min}) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-] & f''(\omega, \phi_1) > 0 \quad (\text{min}) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\omega_4^+, \frac{3\pi}{4}\right) & f''(\omega, \phi_1) < 0 \quad (\text{max}) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) & f''(\omega, \phi_1) > 0 \quad (\text{min}) \end{cases}$$

$$\phi_2 = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) & f''(\omega, \phi_2) > 0 \quad (\text{min}) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega_1^-\right] & f''(\omega, \phi_2) < 0 \quad (\text{max}) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-] & f''(\omega, \phi_2) > 0 \quad (\text{min}) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\omega_2^+, \frac{\pi}{2}\right) & f''(\omega, \phi_2) > 0 \quad (\text{min}) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \omega_3^-\right] & f''(\omega, \phi_2) < 0 \quad (\text{max}) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-] & f''(\omega, \phi_2) > 0 \quad (\text{min}) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\omega_4^+, \frac{3\pi}{4}\right) & f''(\omega, \phi_2) > 0 \quad (\text{min}) \\ \frac{5\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) & f''(\omega, \phi_2) < 0 \quad (\text{max}) \end{cases}$$

Burada görüldüğü gibi, eşitlik (3.57)'de $N_2(\omega, \phi)$ ifadesi için bulunan $\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$ ve $\omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-]$ frekans aralıklarında ϕ_1 ve ϕ_2 ifadelerinin her ikisi de minimum faz değerleri olarak elde edilmiştir.

ϕ_3 ve ϕ_4 ifadelerinin maksimum ve minimum faz değerlerinin belirlenmesi;

$$f''(\omega, \phi_3) = \frac{N_1'(\omega, \phi_3) \cdot N_2(\omega, \phi_3)}{D_1^3(\omega, \phi_3)} = \frac{\sin(2\phi_3 + 4\omega) \cdot [-2 \cdot K_2(\omega) \cdot \sin(2\phi_3 + 4\omega)]}{D_1^3(\omega, \phi_3)}$$

$$= \frac{-2 \cdot K_2(\omega) \cdot \sin^2(2\phi_3 + 4\omega)}{D_1^3(\omega, \phi_3)}$$

$$f''(\omega, \phi_4) = \frac{-2 \cdot K_2(\omega) \cdot \sin^2(2\phi_4 + 4\omega)}{D_1^3(\omega, \phi_4)}$$

Çizelge 3.6. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için " $K_2(\omega)$ " işaret analizi

ω	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$\cos(\omega)$	+		+		+	○	-		-	
$\cos(3\omega)$	+	○	-		-	○	+		+	○
$1 + 2 \cdot \cos(2\omega)$	+		+	○	-		-	○	+	
$K_2(\omega)$	+	○	-	○	+	○	+	○	-	○

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4$

Çizelge 3.6'da görüldüğü gibi, $\omega \in [\omega_1^-, \omega_2^+]$ ve $\omega \in [\omega_3^-, \omega_4^+]$ frekans aralıklarında $K_2(\omega) > 0$ 'dır. Dolayısıyla ϕ_3 ve ϕ_4 ifadelerinin ikisi de maksimum faz değerleridir. Ayrıca $f(\phi_3) = f(\phi_4)$ olduğu için her ikisi de global maksimum olarak elde edilir.

Böylece, daha önce incelenen ϕ_1 ve ϕ_2 ifadelerinin maksimum ve minimum faz değerlerinin belirlenmesi bölümünde, $\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$ ve $\omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-]$ frekans aralıklarında ϕ_1 ve ϕ_2 ifadelerinin ikisi de minimum faz değerleri olarak elde edilmişti. Burada ise ϕ_3 ve ϕ_4 ifadelerinin ikisi de maksimum faz değerleri olarak bulunmuş oldu. Dolayısıyla bu iki dar aralıklarda diğer kestiricilerden farklı olarak iki maksimum ve iki

minimum faz değerleri bulunmuş oldu. İki maksimum faz değerleri global maksimum ifadeler olduğu için minimum faz değerlerinin global minimumlarının belirlenebilmesi için bu aralıklarda ϕ_1 ve ϕ_2 ifadelerini incelememiz gerekmektedir.

$\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$ aralığı için global minimumların bulunması

Eşitlik (3.55)'e göre;

$$f(\omega, \phi_1) = \frac{1+C_1 \cdot C_3}{[3+(1+2 \cdot C_2)]^2} = \frac{1+C_1 \cdot C_3}{4 \cdot (2+C_2)^2}$$

$$f(\omega, \phi_2) = \frac{1-C_1 \cdot C_3}{[3-(1+2 \cdot C_2)]^2} = \frac{1-C_1 \cdot C_3}{4 \cdot (1-C_2)^2}$$

$$f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2) = \frac{1+C_1 \cdot C_3}{4 \cdot (2+C_2)^2} - \frac{1-C_1 \cdot C_3}{4 \cdot (1-C_2)^2} = \frac{(1+C_1 \cdot C_3) \cdot (1-C_2)^2 - (1-C_1 \cdot C_3) \cdot (2+C_2)^2}{\underbrace{4 \cdot (2+C_2)^2 \cdot (1-C_2)^2}_{>0}}$$

$$\begin{aligned} & (1 + C_1 \cdot C_3) \cdot (1 - C_2)^2 - (1 - C_1 \cdot C_3) \cdot (2 + C_2)^2 = \\ & = -\sin^2(\omega) \cdot [16 + 23 \cdot \cos(2\omega) + 5 \cdot \cos(4\omega) + \cos(6\omega)] \\ & = 16 + 23 \cdot (2 \cdot \lambda^2 - 1) + 5 \cdot (8 \cdot \lambda^4 - 8 \cdot \lambda^2 + 1) + [2 \cdot (4 \cdot \lambda^3 - 3 \cdot \lambda)^2 - 1] \\ & = 32 \cdot \lambda^6 - 8 \cdot \lambda^4 + 24 \cdot \lambda^2 - 3 \\ & = 32 \cdot (\lambda^2 - \lambda_1) \cdot (\lambda^2 - \lambda_2) \cdot (\lambda^2 - \lambda_3) \end{aligned}$$

Bunun sonucunda λ_1 , λ_2 ve λ_3 şu şekildedir;

$$\begin{aligned} \lambda_1 & \cong 0,127658 \\ \lambda_2 & \cong 0,0611708 - 0,854775j \\ \lambda_3 & \cong 0,0611708 + 0,854775j \end{aligned}$$

Çizelge 3.7. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için $f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2)$ işaret analizi ($\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$)

λ	-1	$-\sqrt{\lambda_1}$	$\sqrt{\lambda_1}$	+1
$f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2)$	-	0	0	-

$$f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2) < 0 \quad \omega \in [\omega_1^+, \omega_5^-] \quad \text{ve} \quad \phi_1 = \text{global minimum}$$

$$f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2) = 0 \quad \omega = \omega_5 \quad \text{ve} \quad \phi_1 = \phi_2 = \text{global minimum}$$

$$f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2) > 0 \quad \omega \in [\omega_5^+, \omega_2^-] \quad \text{ve} \quad \phi_2 = \text{global minimum}$$

Burada, $\omega_5 = \cos^{-1}(\sqrt{\lambda_1}) \cong 0,3837\pi$ olarak tanımlanmaktadır.

$\omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-]$ aralığı için global minimumların bulunması

$\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$ aralığında olduğu gibi, eşitlik (3.55) kullanılarak ϕ_1 ve ϕ_2 değerlerinin global minimum frekans değerleri elde edilmek isteniyor. Buna göre;

$$f(\omega, \phi_1) = \frac{1 - C_1 \cdot C_3}{[3 - (1 + 2 \cdot C_2)]^2} = \frac{1 - C_1 \cdot C_3}{4 \cdot (1 - C_2)^2}$$

$$f(\omega, \phi_2) = \frac{1 + C_1 \cdot C_3}{[3 + (1 + 2 \cdot C_2)]^2} = \frac{1 + C_1 \cdot C_3}{4 \cdot (2 + C_2)^2}$$

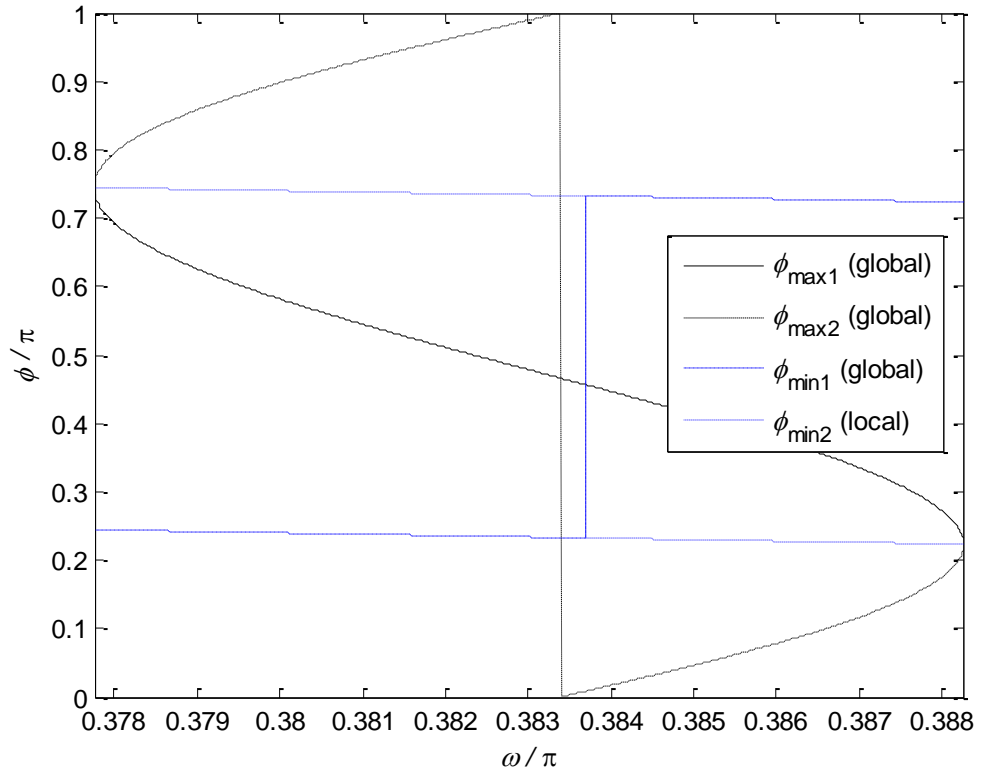
Burada görüldüğü gibi, $\omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-]$ aralığı için $f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2)$ ifadesi, daha önce $\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$ aralığı için bulunan $f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2)$ ifadesinin negatiftir.

Çizelge 3.8. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi, için $f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2)$ işaret analizi ($\omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-]$)

λ	-1	$-\sqrt{\lambda_1}$	$\sqrt{\lambda_1}$	+1
$f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2)$	+	0	0	+

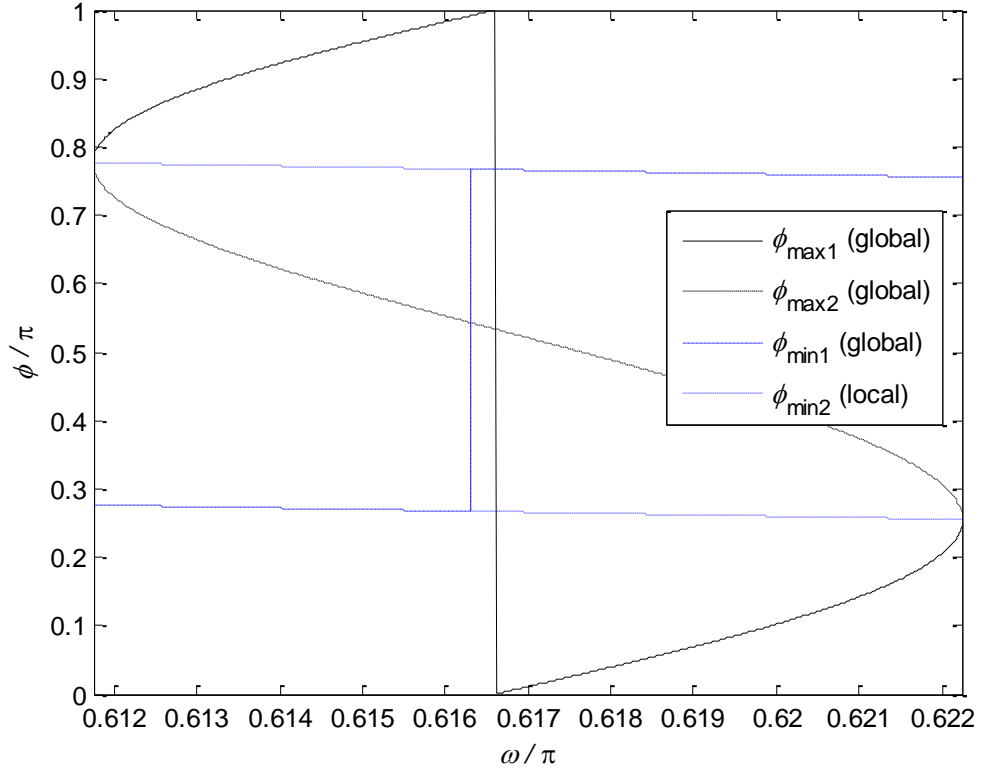
$$\begin{aligned}
f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2) &< 0 & \omega \in [\omega_3^+, \omega_6^-] & \text{ ve } \phi_1 = \text{global minimum} \\
f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2) &= 0 & \omega = \omega_6 & \text{ ve } \phi_1 = \phi_2 = \text{global minimum} \\
f(\omega, \phi_1) - f(\omega, \phi_2) &> 0 & \omega \in [\omega_6^+, \omega_4^-] & \text{ ve } \phi_2 = \text{global minimum}
\end{aligned}$$

Burada, $\omega_6 = \cos^{-1}(-\sqrt{\lambda_1}) \cong 0,6163\pi$ olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca görüldüğü gibi, $\omega_6 = \pi - \omega_5$ olarak elde edilir.



Şekil 3.15. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin (ω_1, ω_2) bandında frekans ile değişimi.

Şekil 3.15'te görüldüğü gibi $\omega \in [\omega_1^-, \omega_2^+]$ aralığında bir frekans değerinde iki maksimum ve iki minimum faz değeri bulunmaktadır. Bu durum şekil 3.16'da da görülmektedir. Ayrıca $\omega = \omega_5 = \cos^{-1}(\sqrt{\lambda_1}) \cong 0,3837\pi$ değerinde $\phi_1 = \phi_2 = \text{global minimum}$ olduğu da şekilde görülür.



Şekil 3.16. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin (ω_3, ω_4) bandında frekans ile değişimi.

Şekilde görüldüğü gibi $\omega = \omega_6 = \cos^{-1}(-\sqrt{\lambda_1}) \cong 0,6163\pi$ değerinde $\phi_1 = \phi_2 = \text{global minimum}$ noktasıdır. Şekil 3.15 ve 3.16’da gösterilen $\phi_{\max1}$ ve $\phi_{\max2}$ global maksimum faz değerleri olan ϕ_3 ve ϕ_4 değerleridir. $\phi_{\min1}$ ve $\phi_{\min2}$ ise ϕ_1 ve ϕ_2 değerleridir.

$\omega = \omega_1$ frekans değerinde maksimum ve minimum faz değerlerinin belirlenmesi

$\omega = \omega_1$ frekans değerinde maksimum ve minimum faz değerlerini elde edebilmek için her kestirici için yapılan işlemler tekrarlanır.

Burada, $\omega = \omega_1$ değeri için $K_1(\omega) = K_2(\omega)$ olarak elde edilmektedir. Buna göre eşitlik (3.56)’ya göre;

$$f'(\omega_1, \phi) = \frac{\sin(2\phi + 4\omega_1) \cdot [K_2(\omega_1) + K_2(\omega_1) \cdot \cos(2\phi + 4\omega_1)]}{D_1^3(\omega_1, \phi)}$$

$$f'(\omega_1, \phi) \equiv N_1(\omega_1, \phi) \cdot R_1(\omega_1, \phi)$$

olarak tanımlayalım. Burada;

$$N_1(\omega_1, \phi) = K_2(\omega_1) \cdot [\sin(2\phi + 4\omega_1) + \frac{1}{2} \cdot \sin(4\phi + 8\omega_1)]$$

$$R_1(\omega_1, \phi) = \frac{1}{D_1^3(\omega_1, \phi)}$$

olarak ifade edilmektedir. Daha sonra $f'(\omega_1, \phi) = 0$ için $N_1(\omega_1, \phi) = 0$ olması gerekmektedir.

$$\sin(2\phi + 4\omega_1) = 0$$

$$\phi = \frac{k}{2} \cdot \pi - 2\omega_1 \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\phi_1 = \pi - 2\omega_1$$

$$\phi_2 = \frac{3\pi}{2} - 2\omega_1 \quad (3.63)$$

ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri eşitlik (3.63) ile elde edilir. Daha sonra $f''(\omega_1, \phi)$ ile işaret analizi yapılır.

$$f''(\omega_1, \phi) = N_1'(\omega_1, \phi) \cdot R_1(\omega_1, \phi) + N_1(\omega_1, \phi) \cdot R_1'(\omega_1, \phi)$$

$$N_1'(\omega_1, \phi) = 2 \cdot K_2(\omega_1) \cdot [\cos(2\phi + 4\omega_1) + \cos(4\phi + 8\omega_1)]$$

$$f''(\omega_1, \phi_1) = N_1'(\omega_1, \phi_1) \cdot R_1(\omega_1, \phi_1) > 0$$

Burada $N_1(\omega_1, \phi)$ ifadesi $\phi = \phi_1$ için sıfır olmaktadır. Böylece $\phi_1 = \pi - 2\omega_1$ minimum faz değeri olarak elde edilir. Daha sonra $\phi = \phi_2$ için aynı işlem tekrarlanmaktadır.

$$f''(\omega_1, \phi_2) = 0$$

Burada $N_1'(\omega_1, \phi_2) = N_1(\omega_1, \phi_2) = 0$ olarak elde edilir. Bu yüzden ikinci mertebeden türevi sıfıra eşit olarak bulunur. Bu durumda sıfıra eşit olmayıncaya kadar türev alınmaya devam edilmektedir.

$$\begin{aligned}
f'''(\omega_1, \phi) &= N_1''(\omega_1, \phi) \cdot R_1(\omega_1, \phi) + 2 \cdot N_1'(\omega_1, \phi) \cdot R_1'(\omega_1, \phi) + N_1(\omega_1, \phi) \cdot R_1''(\omega_1, \phi) \\
N_1''(\omega_1, \phi) &= -4 \cdot K_2(\omega_1) \cdot [\sin(2\phi + 4\omega_1) + 2 \cdot \sin(4\phi + 8\omega_1)] \\
f'''(\omega_1, \phi_2) &= 0
\end{aligned}$$

Burada $N_1''(\omega_1, \phi_2) = N_1'(\omega_1, \phi_2) = N_1(\omega_1, \phi_2) = 0$ olduğu için üçüncü mertebeden türevi de sıfıra eşit olarak bulunur. Bu yüzden tekrar türev almamız gerekmektedir.

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(\omega_1, \phi) &= N_1'''(\omega_1, \phi) \cdot R_1(\omega_1, \phi) + 3 \cdot N_1''(\omega_1, \phi) \cdot R_1'(\omega_1, \phi) \\
&\quad + 3 \cdot N_1'(\omega_1, \phi) \cdot R_1''(\omega_1, \phi) + N_1(\omega_1, \phi) \cdot R_1'''(\omega_1, \phi) \\
N_1'''(\omega_1, \phi) &= -8 \cdot K_2(\omega_1) \cdot [\cos(2\phi + 4\omega_1) + 4 \cdot \cos(4\phi + 8\omega_1)] \\
f^{(4)}(\omega_1, \phi_2) &= N_1'''(\omega_1, \phi_2) \cdot R_1(\omega_1, \phi_2) < 0
\end{aligned}$$

Burada, $\phi_2 = \frac{3\pi}{2} - 2\omega_1$ ifadesi maksimum faz değeri olarak elde edilir. Sonuç olarak, $\omega = \omega_1$ noktası için $\phi_1 = \phi_{\min}$ ve $\phi_2 = \phi_{\max}$ olarak bulunmuş oldu.

$\omega = \omega_2$ frekans değerinde maksimum ve minimum faz değerlerinin belirlenmesi

$\omega = \omega_2$ değeri için $K_1(\omega) = -K_2(\omega)$ olarak elde edilir. Böylece, eşitlik (3.56)'ya göre;

$$\begin{aligned}
f'(\omega_2, \phi) &= \frac{\sin(2\phi + 4\omega_2) \cdot [-K_2(\omega_2) + K_2(\omega_2) \cdot \cos(2\phi + 4\omega_2)]}{D_1^3(\omega_2, \phi)} \\
f'(\omega_2, \phi) &\equiv N_2(\omega_2, \phi) \cdot R_2(\omega_2, \phi)
\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Burada;

$$\begin{aligned}
N_2(\omega_2, \phi) &= -K_2(\omega_2) \cdot [\sin(2\phi + 4\omega_2) - \frac{1}{2} \cdot \sin(4\phi + 8\omega_2)] \\
R_2(\omega_2, \phi) &= \frac{1}{D_1^3(\omega_2, \phi)}
\end{aligned}$$

olarak ifade edilmektedir. $f'(\omega_2, \phi) = 0$ için $N_2(\omega_2, \phi) = 0$ olması gerektiği bilinmektedir. Buna göre ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri eşitlik (3.64)'te bulunmuştur.

$$\begin{aligned}
\sin(2\phi + 4\omega_2) &= 0 \\
\phi &= \frac{k}{2} \cdot \pi - 2\omega_2 \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
\phi_1 &= \pi - 2\omega_2 \\
\phi_2 &= \frac{3\pi}{2} - 2\omega_2
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Burada görüldüğü gibi $\omega = \omega_1$ için bulunan ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri ile aynı ifadeler elde edilmiştir. Fakat burada, $K_1(\omega) = -K_2(\omega)$ olarak elde edilmiştir. Bu yüzden ikinci mertebeden türevleri analiz edilmektedir.

$$\begin{aligned}
f''(\omega_2, \phi) &= N_2'(\omega_2, \phi) \cdot R_2(\omega_2, \phi) + N_2(\omega_2, \phi) \cdot R_2'(\omega_2, \phi) \\
N_2'(\omega_2, \phi) &= -2 \cdot K_2(\omega_2) \cdot [\cos(2\phi + 4\omega_2) - \cos(4\phi + 8\omega_2)] \\
f''(\omega_2, \phi_1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(\omega_2, \phi) &= N_2''(\omega_2, \phi) \cdot R_2(\omega_2, \phi) + 2 \cdot N_2'(\omega_2, \phi) \cdot R_2'(\omega_2, \phi) + N_2(\omega_2, \phi) \cdot R_2''(\omega_2, \phi) \\
N_2''(\omega_2, \phi) &= 4 \cdot K_2(\omega_2) \cdot [\sin(2\phi + 4\omega_2) - 2 \cdot \sin(4\phi + 8\omega_2)] \\
f'''(\omega_2, \phi_1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(\omega_2, \phi) &= N_2'''(\omega_2, \phi) \cdot R_2(\omega_2, \phi) + 3 \cdot N_2''(\omega_2, \phi) \cdot R_2'(\omega_2, \phi) \\
&\quad + 3 \cdot N_2'(\omega_2, \phi) \cdot R_2''(\omega_2, \phi) + N_2(\omega_2, \phi) \cdot R_2'''(\omega_2, \phi) \\
N_2'''(\omega_2, \phi) &= 8 \cdot K_2(\omega_2) \cdot [\cos(2\phi + 4\omega_2) - 4 \cdot \cos(4\phi + 8\omega_2)] \\
f^{(4)}(\omega_2, \phi_1) &= N_2'''(\omega_2, \phi_1) \cdot R_2(\omega_2, \phi_1) < 0
\end{aligned}$$

Burada, $N_2''(\omega_2, \phi_1) = N_2'(\omega_2, \phi_1) = N_2(\omega_2, \phi_1) = 0$ olduğundan dördüncü mertebeden türevde maksimum ve minimum değerler elde edilmiştir.

$f^{(4)}(\omega_2, \phi_1) < 0$ bulunarak, $\phi_1 = \pi - 2\omega_2$ maksimum faz değeri olarak elde edilmektedir. $\phi = \phi_2$ için incelenecek olursa;

$$f''(\omega_2, \phi_2) = N_2'(\omega_2, \phi_2) \cdot R_2(\omega_2, \phi_2) > 0$$

Sonuç olarak, $\omega = \omega_2$ değerinde, $\phi_2 = \frac{3\pi}{2} - 2\omega_2$ ifadesi minimum faz değeri (ϕ_{\min}) ve $\phi_1 = \phi_{\max}$ olarak elde edilmiştir.

$\omega = \omega_3$ frekans değerinde maksimum ve minimum faz değerlerinin belirlenmesi

$\omega = \omega_3$ noktası için $K_1(\omega) = -K_2(\omega)$ olarak elde edilmektedir. Bu durumda, eşitlik (3.56)'ye göre ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri şu şekilde elde edilmektedir;

$$f'(\omega_3, \phi) = \frac{\sin(2\phi + 4\omega_3) \cdot [-K_2(\omega_3) + K_2(\omega_3) \cdot \cos(2\phi + 4\omega_3)]}{D_1^3(\omega_3, \phi)}$$

$$f'(\omega_3, \phi) \equiv N_3(\omega_3, \phi) \cdot R_3(\omega_3, \phi)$$

olarak tanımlayalım. Burada;

$$N_3(\omega_3, \phi) = -K_2(\omega_3) \cdot [\sin(2\phi + 4\omega_3) - \frac{1}{2} \cdot \sin(4\phi + 8\omega_3)]$$

$$R_3(\omega_3, \phi) = \frac{1}{D_1^3(\omega_3, \phi)}$$

olarak tanımlanmaktadır. $f'(\omega_3, \phi) = 0$ için $N_3(\omega_3, \phi) = 0$ olması gerektiği biliniyor.

$$\sin(2\phi + 4\omega_3) = 0$$

$$\phi = \frac{k}{2} \cdot \pi - 2\omega_3 \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\phi_1 = \frac{3\pi}{2} - 2\omega_3$$

$$\phi_2 = 2\pi - 2\omega_3 \quad (3.65)$$

Eşitlik (3.65) ile ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri elde edilmiş oldu. Maksimum ve minimum faz değerleri şu şekilde belirlenmektedir;

$$f''(\omega_3, \phi) = N_3'(\omega_3, \phi) \cdot R_3(\omega_3, \phi) + N_3(\omega_3, \phi) \cdot R_3'(\omega_3, \phi)$$

$$N_3'(\omega_3, \phi) = -2 \cdot K_2(\omega_3) \cdot [\cos(2\phi + 4\omega_3) - \cos(4\phi + 8\omega_3)]$$

$$f''(\omega_3, \phi_1) = N_3'(\omega_3, \phi_1) \cdot R_3(\omega_3, \phi_1) > 0$$

$\phi = \phi_1 = \pi - 2\omega_3$ değeri, minimum faz değeri olarak bulunmuştur. $\phi = \phi_2 = 2\pi - 2\omega_3$ değeri için;

$$f''(\omega_3, \phi_2) = 0$$

$$f'''(\omega_3, \phi) = N_3''(\omega_3, \phi) \cdot R_3(\omega_3, \phi) + 2 \cdot N_3'(\omega_3, \phi) R_3'(\omega_3, \phi) + N_3(\omega_3, \phi) \cdot R_3''(\omega_3, \phi)$$

$$N_3''(\omega_3, \phi) = 4 \cdot K_2(\omega_3) \cdot [\sin(2\phi + 4\omega_3) - 2 \cdot \sin(4\phi + 8\omega_3)]$$

$$f'''(\omega_3, \phi_2) = 0$$

$$f^{(4)}(\omega_3, \phi) = N_3'''(\omega_3, \phi) \cdot R_3(\omega_3, \phi) + 3 \cdot N_3''(\omega_3, \phi) \cdot R_3'(\omega_3, \phi)$$

$$+ 3 \cdot N_3'(\omega_3, \phi) \cdot R_3''(\omega_3, \phi) + N_3(\omega_3, \phi) \cdot R_3'''(\omega_3, \phi)$$

$$N_3'''(\omega_3, \phi) = 8 \cdot K_2(\omega_3) \cdot [\cos(2\phi + 4\omega_3) - 4 \cdot \cos(4\phi + 8\omega_3)]$$

$$f^{(4)}(\omega_3, \phi_2) = N_3'''(\omega_3, \phi_2) \cdot R_3(\omega_3, \phi_2) < 0$$

burada, $N_3''(\omega_3, \phi_2) = N_3'(\omega_3, \phi_2) = N_3(\omega_3, \phi_2) = 0$ olarak elde edilmiştir. Sonuç olarak, $\phi = \phi_1 = \pi - 2\omega_3 = \phi_{\min}$ ve $\phi = \phi_2 = 2\pi - 2\omega_3 = \phi_{\max}$ olarak elde edilir.

$\omega = \omega_4$ frekans değerinde maksimum ve minimum faz değerlerinin belirlenmesi

Bu bölümde, $K_1(\omega) = K_2(\omega)$ olarak elde edilmektedir. Böylece, eşitlik (3.56)'ya göre;

$$f'(\omega_4, \phi) = \frac{\sin(2\phi + 4\omega_4) \cdot [K_2(\omega_4) + K_2(\omega_4) \cdot \cos(2\phi + 4\omega_4)]}{D_1^3(\omega_4, \phi)}$$

$$f'(\omega_4, \phi) \equiv N_4(\omega_4, \phi) \cdot R_4(\omega_4, \phi)$$

olarak tanımlayalım. Burada;

$$N_4(\omega_4, \phi) = K_2(\omega_4) \cdot [\sin(2\phi + 4\omega_4) + \frac{1}{2} \cdot \sin(4\phi + 8\omega_4)]$$

$$R_4(\omega_4, \phi) = \frac{1}{D_1^3(\omega_4, \phi)}$$

olarak ifade edilmektedir. Daha sonra $f'(\omega_1, \phi) = 0$ için;

$$\begin{aligned}
\sin(2\phi + 4\omega_4) &= 0 \\
\phi &= \frac{k}{2} \cdot \pi - 2\omega_4 \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
\phi_1 &= \frac{3\pi}{2} - 2\omega_4 \\
\phi_2 &= 2\pi - 2\omega_4
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Burada görüldüğü gibi, $\omega = \omega_3$ için bulunan ϕ_1 ve ϕ_2 değerleri ile aynı değerler elde edilmiştir. Fakat burada, $K_1(\omega) = K_2(\omega)$ olarak elde edildiğinden maksimum ve minimum faz değerleri farklılık gösterebilir.

$$\begin{aligned}
f''(\omega_4, \phi) &= N_4'(\omega_4, \phi) \cdot R_4(\omega_4, \phi) + N_4(\omega_4, \phi) \cdot R_4'(\omega_4, \phi) \\
N_4'(\omega_4, \phi) &= 2 \cdot K_2(\omega_4) \cdot [\cos(2\phi + 4\omega_4) + \cos(4\phi + 8\omega_4)] \\
f''(\omega_4, \phi_1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(\omega_4, \phi) &= N_4''(\omega_4, \phi) \cdot R_4(\omega_4, \phi) + 2 \cdot N_4'(\omega_4, \phi) \cdot R_4'(\omega_4, \phi) + N_4(\omega_4, \phi) \cdot R_4''(\omega_4, \phi) \\
N_4''(\omega_4, \phi) &= -4 \cdot K_2(\omega_4) \cdot [\sin(2\phi + 4\omega_4) + 2 \cdot \sin(4\phi + 8\omega_4)] \\
f'''(\omega_4, \phi_1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(\omega_4, \phi) &= N_4'''(\omega_4, \phi) \cdot R_4(\omega_4, \phi) + 3 \cdot N_4''(\omega_4, \phi) \cdot R_4'(\omega_4, \phi) \\
&\quad + 3 \cdot N_4'(\omega_4, \phi) \cdot R_4''(\omega_4, \phi) + N_4(\omega_4, \phi) \cdot R_4'''(\omega_4, \phi) \\
N_4'''(\omega_4, \phi) &= -8 \cdot K_2(\omega_4) \cdot [\cos(2\phi + 4\omega_4) + 4 \cdot \cos(4\phi + 8\omega_4)] \\
f^{(4)}(\omega_4, \phi_1) &= N_4'''(\omega_4, \phi_1) \cdot R_4(\omega_4, \phi_1) < 0
\end{aligned}$$

Burada, $N_2''(\omega_2, \phi_1) = N_2'(\omega_2, \phi_1) = N_2(\omega_2, \phi_1) = 0$ olmaktadır.

$f^{(4)}(\omega_2, \phi_1) < 0$ bulunarak, $\phi_1 = \frac{3\pi}{2} - 2\omega_4$ maksimum faz değeri olarak elde edilmektedir. $\phi = \phi_2$ için;

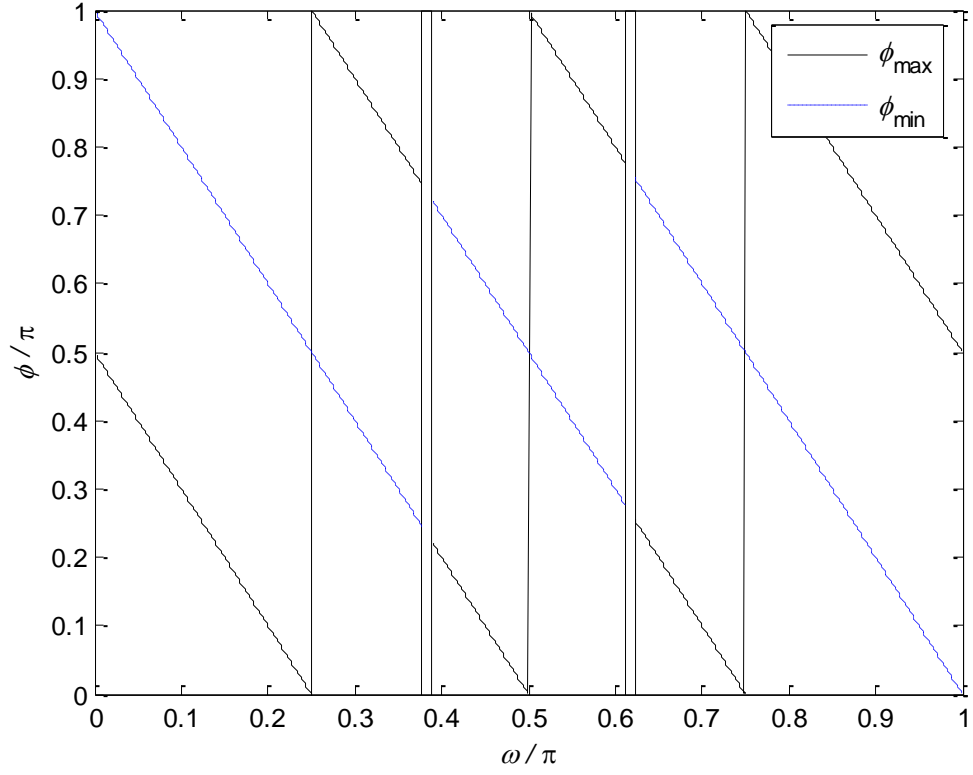
$$f''(\omega_4, \phi_2) = N_4'(\omega_4, \phi_2) \cdot R_4(\omega_4, \phi_2) > 0$$

Böylece $\omega = \omega_4$ değerinde, $\phi = \phi_2 = 2\pi - 2\omega_4 = \phi_{\min}$ ve $\phi = \phi_1 = \frac{3\pi}{2} - 2\omega_4 = \phi_{\max}$ olarak elde edilir.

Sonuçta, $\omega = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$ noktaları için de analiz edilerek, tüm $\omega \in (0, \pi)$ frekans aralığında maksimum ve minimum faz değerleri elde edilmiş oldu. Böylece, Modified covariance (5 nokta) algoritması için maksimum ve minimum faz değerleri eşitlik (3.67) ve (3.68)'de gösterilmektedir.

$$\phi_{\max} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega_1\right] \\ \phi_3 \text{ ve } \phi_4 & \omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-] \\ \pi - 2\omega & \omega \in \left[\omega_2, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in \left[\frac{\pi}{2}, \omega_3\right] \\ \phi_3 \text{ ve } \phi_4 & \omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-] \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\omega_4, \frac{3\pi}{4}\right) \\ \frac{5\pi}{2} - 2\omega & \omega \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \end{cases} \quad (3.67)$$

$$\phi_{\min} = \begin{cases} \pi - 2\omega & \omega \in (0, \omega_5^-] \\ \pi - 2\omega \text{ ve } \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega = \omega_5 \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega & \omega \in [\omega_5^+, \omega_6^-] \\ \frac{3\pi}{2} - 2\omega \text{ ve } 2\pi - 2\omega & \omega = \omega_6 \\ 2\pi - 2\omega & \omega \in [\omega_6^+, \pi) \end{cases} \quad (3.68)$$



Şekil 3.17. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için maksimum ve minimum faz değerlerinin frekans ile değişimi.

Şekil 3.17’de eşitlik (3.67) ve (3.68)’de bulunan ϕ_{\max} ve ϕ_{\min} değerlerinin ω frekans değerleri ile değişimi gösterilmiştir. Burada, $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ frekans bantları hariç tutulmuştur.

4. BULGULAR

4.1 Maksimum ve Minimum Varyans İfadeleri

Bu bölümde en büyük ve en küçük varyans ifadeleri elde edilmektedir. Bu ifadeler, tüm kestiriciler için daha önce elde edilen maksimum ve minimum faz ifadeleri, varyans ifadelerinde kullanılarak elde edilmektedir. Tüm kestiriciler için elde edilen teorik sonuçlar benzetim sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. Benzetim sonuçlarında, frekans varyansının SNR değeriyle değişimleri gösterilmektedir. Ayrıca, maksimum faz değeri en kötü durum olarak ve minimum faz değeri ise en iyi durum olarak tanımlanmaktadır ve arasındaki farklar incelenmektedir.

4.1.1 Desa-1a (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri

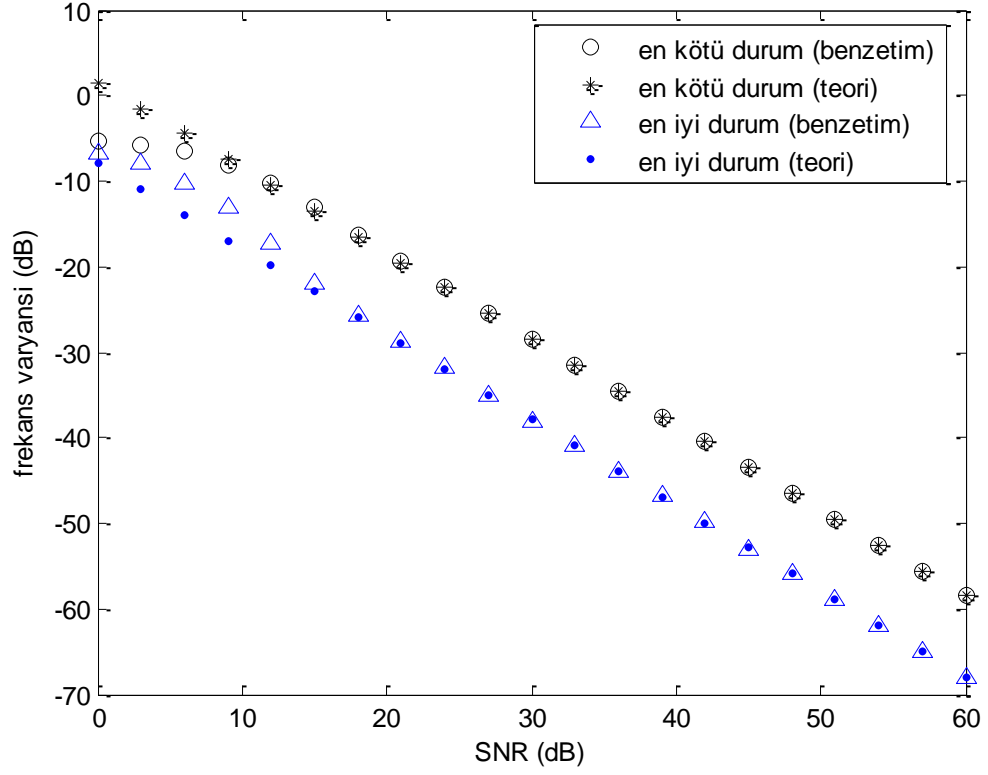
Desa-1a kestiricisi için maksimum ve minimum varyans ifadeleri eşitlik (4.1) ve (4.2)'de verilmektedir. Benzetim sonuçları ise şekil 4.1'de verilmektedir.

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\max} = \begin{cases} V_1 & \omega \in \left(0, \frac{\pi^-}{2}\right] \\ V_2 & \omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\min} = \begin{cases} V_2 & \omega \in \left(0, \frac{\pi^-}{2}\right] \\ V_1 & \omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$V_1 = \frac{2 + 2 \cdot \cos(\omega) + \cos(2\omega)}{2 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^4(\omega)}$$

$$V_2 = \frac{(2 - 2 \cdot \cos(\omega) + \cos(2\omega)) \cdot \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2 \cdot \text{SNR} \cdot \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \sin^4(\omega)}$$



Şekil 4.1. DESA-1a (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.

Şekil 4.1’de $\omega = 3\pi/8$ sabit frekans değerinde, DESA-1a kestiricisinin SNR ile değişimi gösterilmiştir. SNR değerinin yaklaşık 15 dB’den sonra teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının neredeyse tamamen uyduğu görülmektedir. Ayrıca en iyi durum ile en kötü durum arasında yaklaşık 10 dB fark bulunmaktadır.

4.1.2 Prony (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri

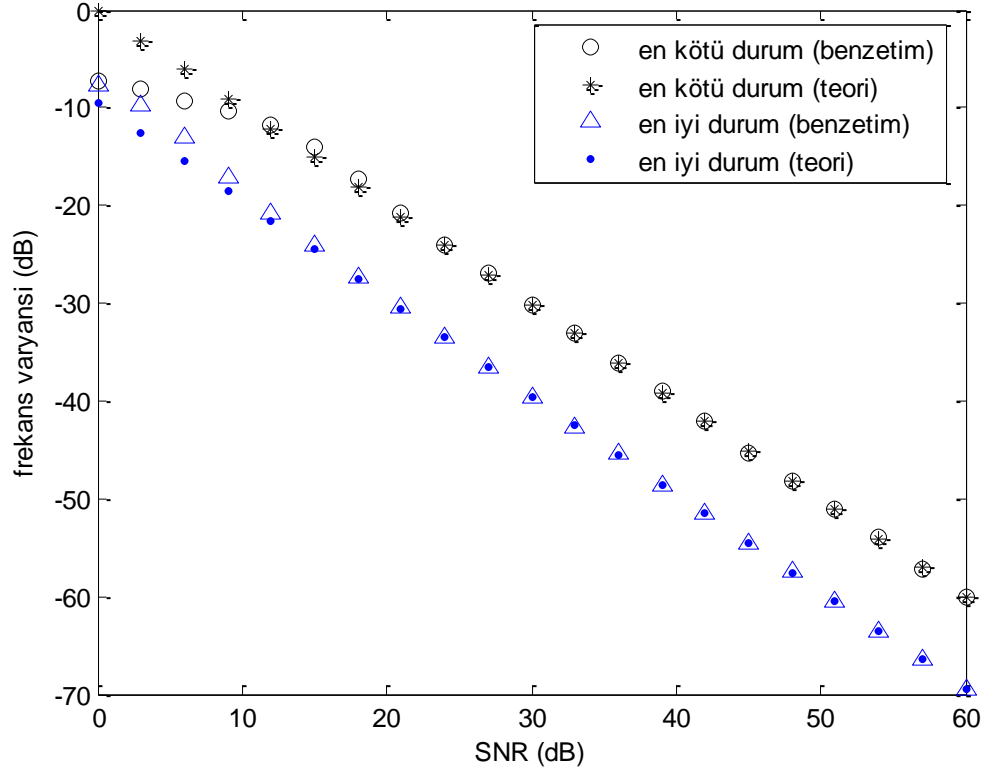
En büyük ve en küçük varyans ifadeleri eşitlik (4.3) ve (4.4)'te gösterilmektedir. Şekil 4.2'de teorik sonuçların karşılaştırıldığı benzetim sonuçları verilmektedir.

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\max} = \begin{cases} V_1 & \omega \in \left(0, \frac{\pi^-}{2}\right] \\ V_2 & \omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\min} = \begin{cases} V_2 & \omega \in \left(0, \frac{\pi^-}{2}\right] \\ V_1 & \omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$V_1 = \frac{(2 + 2 \cdot \cos(\omega) + \cos(2\omega)) \cdot \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^4(\omega)}$$

$$V_2 = \frac{(2 - 2 \cdot \cos(\omega) + \cos(2\omega)) \cdot \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^4(\omega)}$$



Şekil 4.2. Prony (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.

Şekil 4.2’de $\omega = 3\pi/8$ sabit frekans değerinde, Prony kestiricisinin SNR ile değişimi gösterilmiştir. SNR değerinin yaklaşık 15 dB’den sonra teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının neredeyse tamamen uyduğu görülmektedir. Ayrıca en iyi durum ile en kötü durum arasında yaklaşık 10 dB fark bulunmaktadır.

4.1.3 DESA-1 (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri

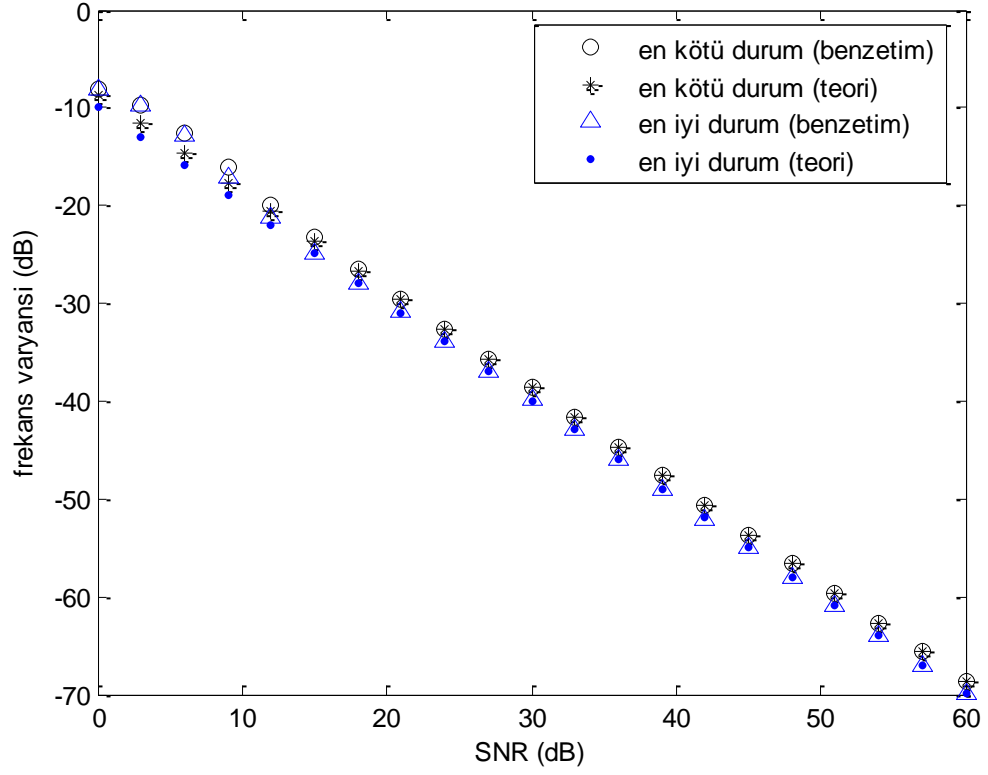
Maksimum ve minimum varyans ifadeleri eşitlik (4.5) ve (4.6)'da verilmektedir. Benzetim sonuçları ise şekil 4.3'te gösterilmektedir.

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\max} = \begin{cases} V_1 & \omega \in (0, \omega_1^-] \\ V_2 & \omega \in [\omega_1^+, \pi) \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\min} = \begin{cases} V_2 & \omega \in (0, \omega_1^-] \\ V_1 & \omega \in [\omega_1^+, \pi) \end{cases} \quad (4.6)$$

$$V_1 = \frac{3 + 2 \cdot \cos(2\omega)}{16 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^4(\omega)}$$

$$V_2 = \frac{(13 - 16 \cdot \cos(\omega) + 6 \cdot \cos(2\omega)) \cdot \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{16 \cdot \text{SNR} \cdot \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \sin^4(\omega)}$$



Şekil 4.3. DESA-1 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.

Şekil 4.3'te $\omega = 3\pi/8$ sabit frekans değerinde, DESA-1 (5 nokta) kestiricisinin SNR ile değişimi gösterilmiştir. SNR değerinin yaklaşık 15 dB'den sonra teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının neredeyse tamamen aynı olduğu görülmektedir. Ayrıca En iyi durum ile en kötü durum arasında çok az fark olduğu görülmektedir.

4.1.4 DESA-2 (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri

Eşitlik (4.7) ve (4.8)'de maksimum ve minimum varyans ifadeleri verilmektedir. Elde edilen sonuçların karşılaştırıldığı benzetim sonuçları ise şekil 4.4'te verilmektedir.

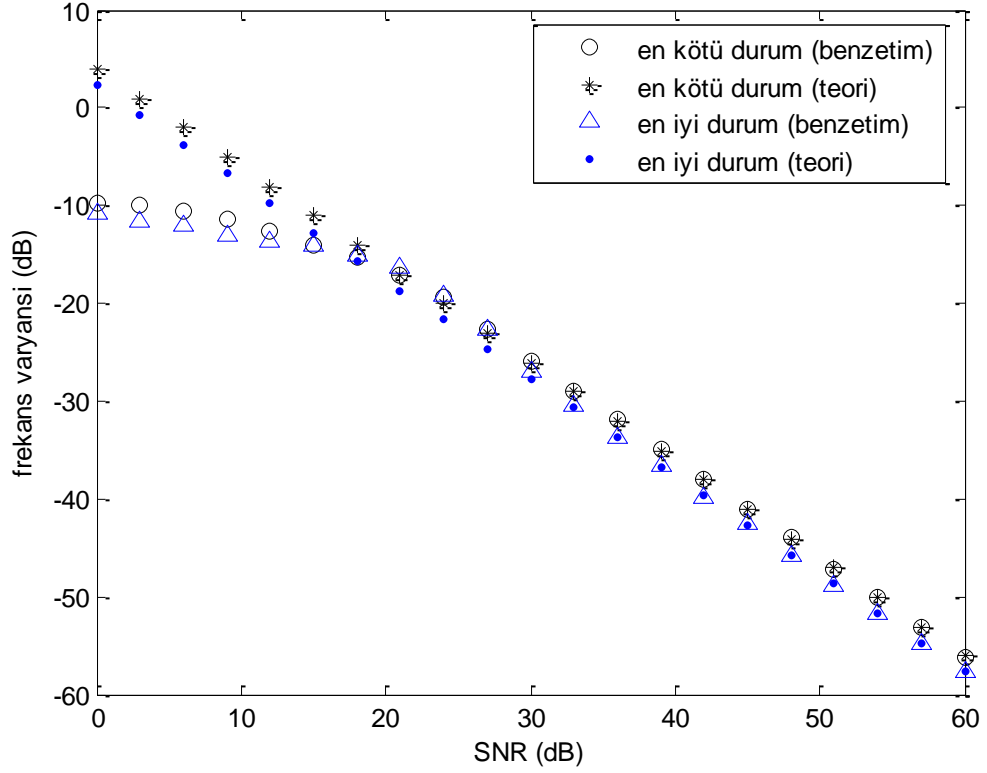
$$\text{var}(\hat{\omega})_{\max} = \begin{cases} V_1 & \omega \in (0, \omega_1^-] \\ V_2 & \omega \in [\omega_1^+, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\min} = \begin{cases} V_2 & \omega \in (0, \omega_1^-] \\ V_1 & \omega \in [\omega_1^+, \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (4.8)$$

$$V_1 = \frac{3 + 2 \cdot \cos(2\omega)}{16 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^4(\omega)}$$

$$V_2 = \frac{5 + 2 \cdot \cos(2\omega)}{16 \cdot \text{SNR} \cdot \cos^2(\omega) \cdot \sin^2(\omega)}$$

Burada görüldüğü gibi DESA-2 algoritması için $\hat{\lambda} = \cos(2\hat{\omega})$ olarak tanımlandığından sadece $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ aralığında çalışmaktadır.



Şekil 4.4. DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/16$ iken SNR ile değişimi.

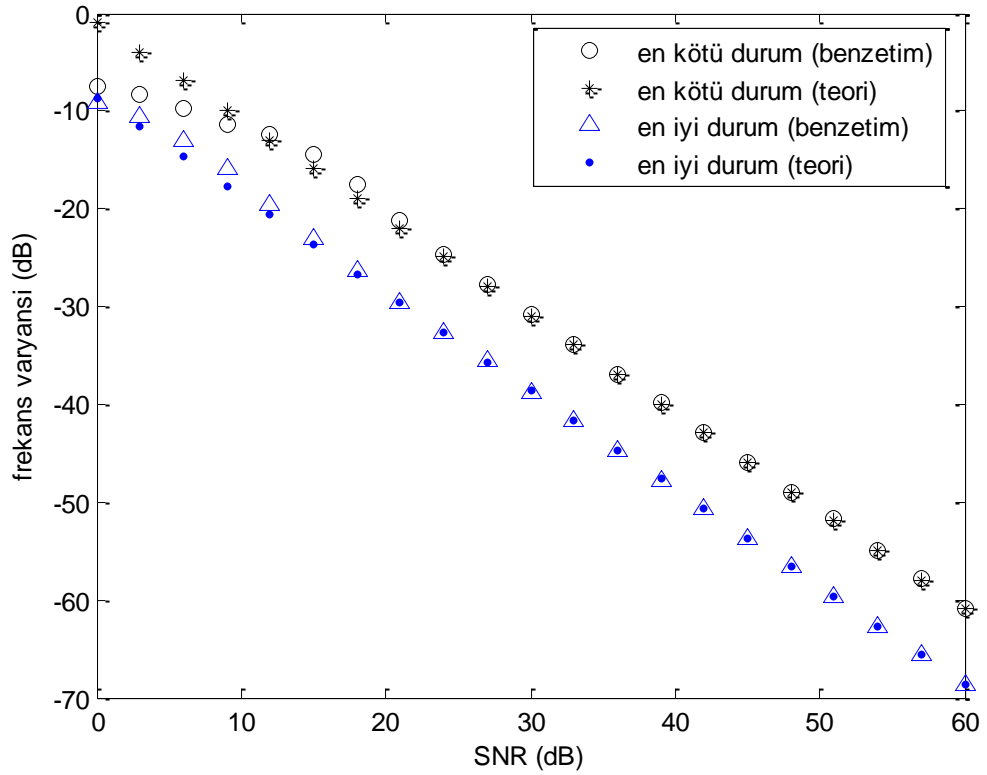
Şekil 4.4'te DESA-2 kestiricisi için $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında çalıştığından $\omega = 3\pi/16$ sabit frekans değerinde, DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin SNR ile değişimi gösterilmiştir. Yüksek SNR değerinde teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının uyuştugu görülmektedir. Ayrıca en iyi durum ile en kötü durum arasında yaklaşık birkaç dB fark bulunmaktadır. Düşük SNR değerlerinde teorik sonuçlar ile benzetim sonuçları arasında büyük fark bulunmaktadır. Bu yüzden DESA-2 kestiricisi düşük SNR değerinde iyi bir kestirici olmadığı söylenebilir.

4.1.5 Modified Prony (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri

Eşitlik (4.9) ve (4.10)'da maksimum ve minimum varyans ifadeleri elde edilmektedir. Benzetim sonucu ise şekil 4.5'te verilmektedir.

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\max} = \left\{ \frac{38+31 \cdot \cos(2\omega) + \cos(4\omega)}{32 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^6(\omega)} \right. \quad \omega \in (0, \pi] \quad (4.9)$$

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\min} = \left\{ \frac{3+2 \cdot \cos(2\omega)}{16 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^4(\omega)} \right. \quad \omega \in (0, \pi] \quad (4.10)$$



Şekil 4.5. Modified Prony (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.

Şekil 4.5'te Modified Prony kestiricisi için $\omega = 3\pi/8$ sabit frekans değerinde SNR ile değişimi gösterilmiştir. SNR değerinin yaklaşık 18 dB'den sonra teorik sonuçlar ile neredeyse tamamen uyduğu görülmektedir. Ayrıca en iyi durum ile en kötü durum arasında yaklaşık 10 dB fark görülmektedir.

4.1.6 Modified Covariance (4 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri

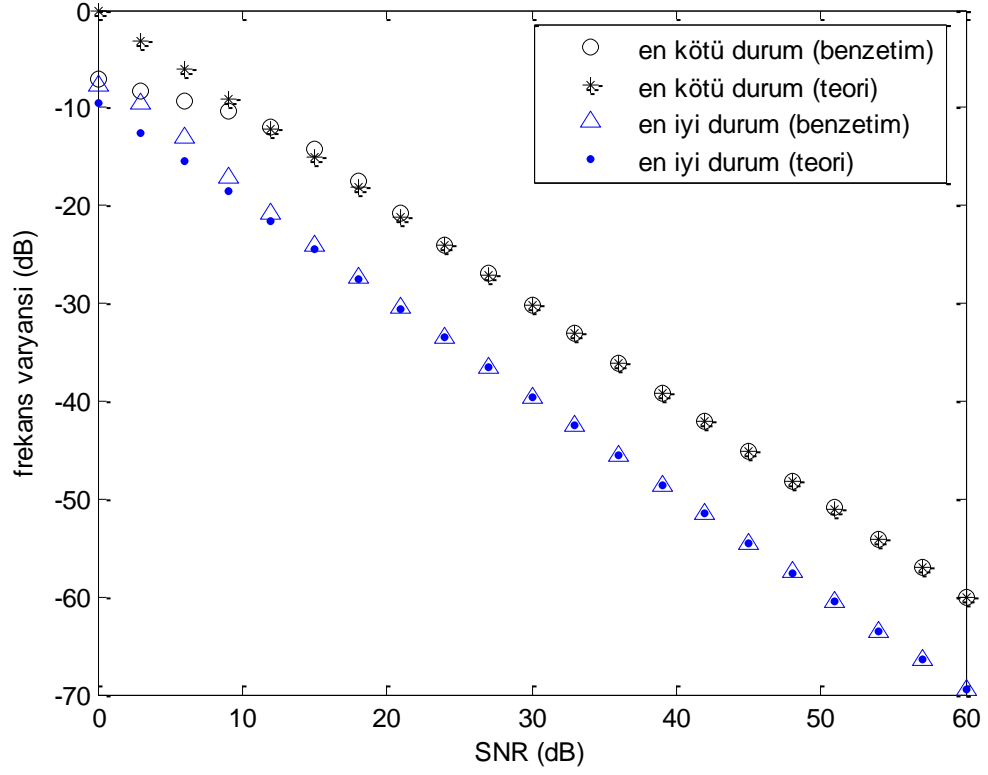
En büyük ve en küçük varyans ifadeleri aşağıda verilmektedir. Ayrıca teorik sonuçlar ile karşılaştırıldığı benzetim sonucu şekil 4.6'da verilmektedir.

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\max} = \begin{cases} V_1 & \omega \in \left(0, \frac{\pi^-}{2}\right] \\ V_2 & \omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\min} = \begin{cases} V_2 & \omega \in \left(0, \frac{\pi^-}{2}\right] \\ V_1 & \omega \in \left[\frac{\pi^+}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad (4.12)$$

$$V_1 = \frac{(2 + 2 \cdot \cos(\omega) + \cos(2\omega)) \cdot \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2 \cdot \text{SNR} \cdot (1 - \cos(\omega))^2 \cdot \sin^2(\omega)}$$

$$V_2 = \frac{(2 - 2 \cdot \cos(\omega) + \cos(2\omega)) \cdot \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2 \cdot \text{SNR} \cdot (1 + \cos(\omega))^2 \cdot \sin^2(\omega)}$$



Şekil 4.6. Modified Covariance (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.

Şekil 4.6’da $\omega = 3\pi/8$ sabit frekans değerinde, Modified Covariance (4 nokta) kestiricisinin SNR ile değişimi gösterilmiştir. SNR değerinin yaklaşık 15 dB’den sonra teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının uyduğu görülmektedir. Ayrıca en iyi durum ile en kötü durum arasında yaklaşık 10 dB fark olduğu görülmektedir.

4.1.7 Modified Covariance (5 nokta) algoritmasının maksimum ve minimum varyans ifadeleri

Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi için eşitlik (3.13)'te varyans ifadesi, eşitlik (3.67) ve (3.68)'de ise maksimum ve minimum faz ifadeleri verilmektedir. Maksimum ve minimum varyans ifadeleri ise aşağıdaki eşitliklerle elde edilmektedir. Ayrıca karşılaştırmalı benzetim sonuçları ise şekil 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 ve 4.11'de verilmektedir. Şekil 4.8 ve 4.9 $\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$ aralığında bir frekans değerinde SNR ile değişimini, şekil 4.10 ve 4.11 ise $\omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-]$ aralığında bir frekans değerinde SNR ile değişimini gösteren benzetim sonuçları verilmektedir.

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\max} = \begin{cases} V_1 & \omega \in (0, \omega_1] \text{ ve } \omega \in [\omega_4, \pi) \\ V_2 & \omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-] \text{ ve } \omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-] \\ V_3 & \omega \in [\omega_2, \omega_3] \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\text{var}(\hat{\omega})_{\min} = \begin{cases} V_3 & \omega \in (0, \omega_5] \text{ ve } \omega \in (\omega_6, \pi) \\ V_1 & \omega \in (\omega_5, \omega_6] \end{cases} \quad (4.14)$$

$$V_1 = \frac{3 + 2 \cdot \cos(2\omega)}{16 \cdot \text{SNR} \cdot \sin^4(\omega)}$$

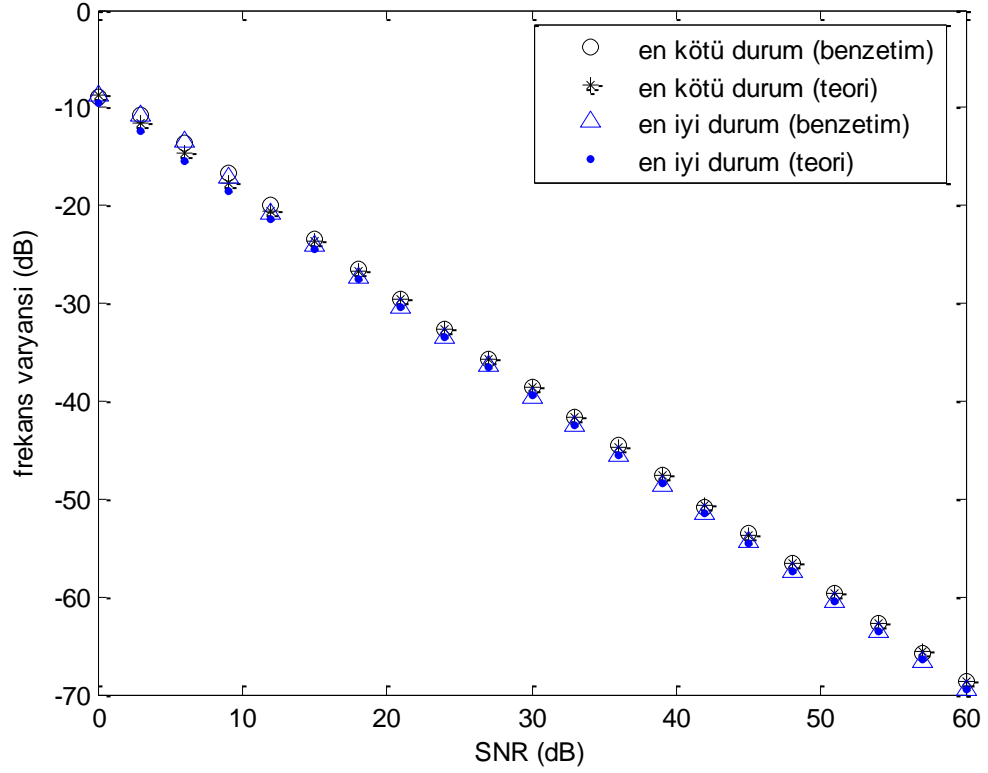
$$V_2 = \frac{(1 - 2 \cdot \cos(2\omega))^2 \cdot \cos^4(\omega)}{4 \cdot \text{SNR} \cdot [-(11 + 16 \cdot \cos(2\omega) + 6 \cdot \cos(4\omega))] \cdot \sin^4(\omega)}$$

$$V_3 = \frac{2 + \cos(2\omega) + \cos(4\omega)}{8 \cdot \text{SNR} \cdot (2 + \cos(2\omega))^2 \cdot \sin^2(\omega)}$$

Burada maksimum faz ifadelerinde bulunan ϕ_3 ve ϕ_4 değerlerinin $f(\phi_3) = f(\phi_4)$ olduğu biliniyor. Böylece;

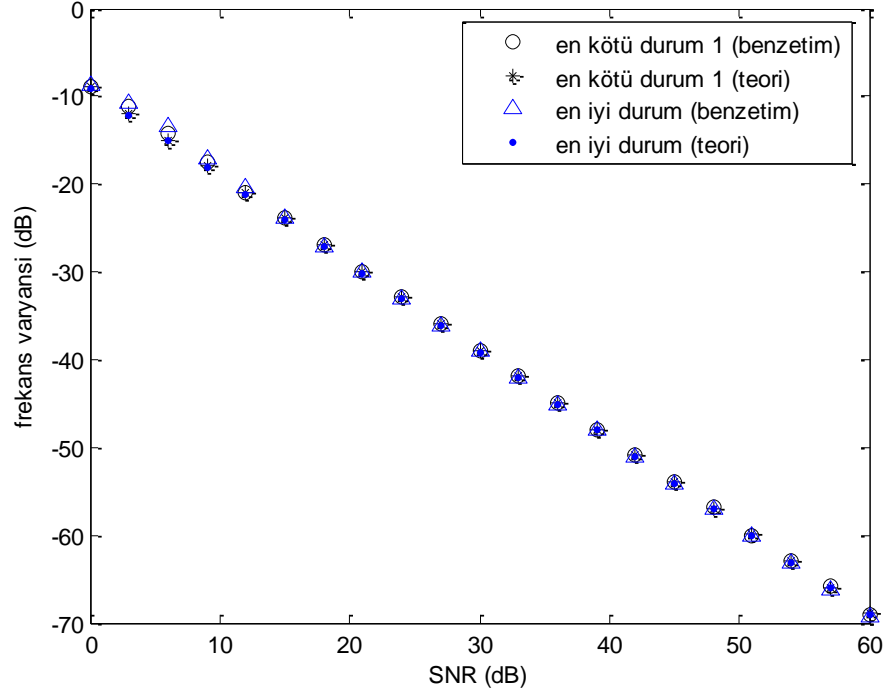
$$\cos(2\phi_3 + 4\omega) = \cos(2\phi_4 + 4\omega) = -\frac{4 + 5 \cdot \cos(2\omega) - 3 \cdot \cos(4\omega)}{(2 + 4 \cdot \cos(4\omega)) \cdot \cos^2(\omega)}$$

Olarak elde edilmektedir.

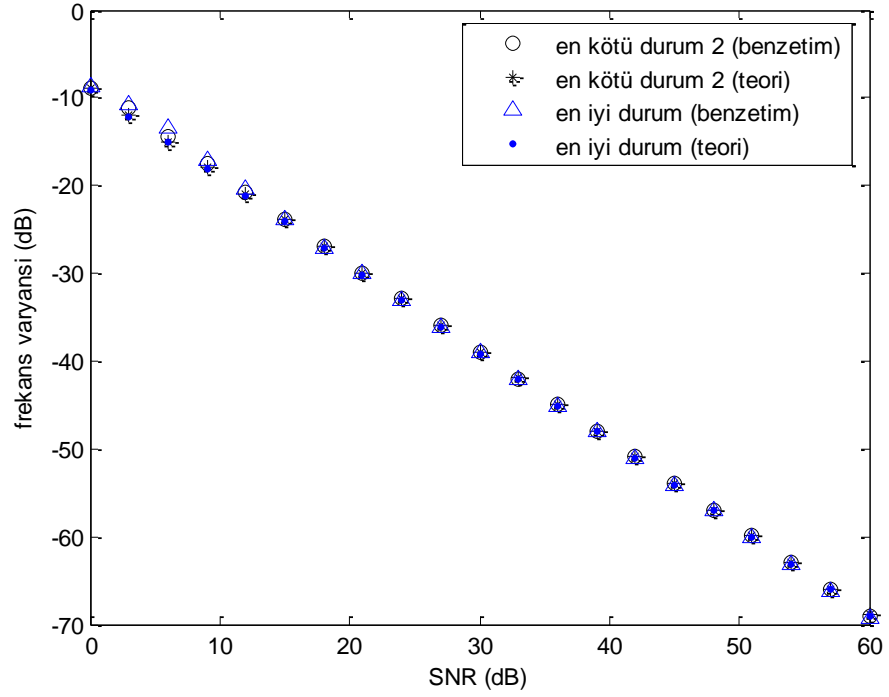


Şekil 4.7. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega = 3\pi/8$ iken SNR ile değişimi.

Şekil 4.7’de $\omega = 3\pi/8$ frekans değerinde, Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin SNR ile değişimi gösterilmiştir. Burada $\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$ ve $\omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-]$ aralıkları dışında kalan sabit frekans değeri için inceleme yapılmıştır. SNR değerinin yaklaşık 15 dB’den sonra teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının uyduğu görülmektedir. Fakat en iyi durum ile en kötü durum arasında çok az fark bulunmaktadır.

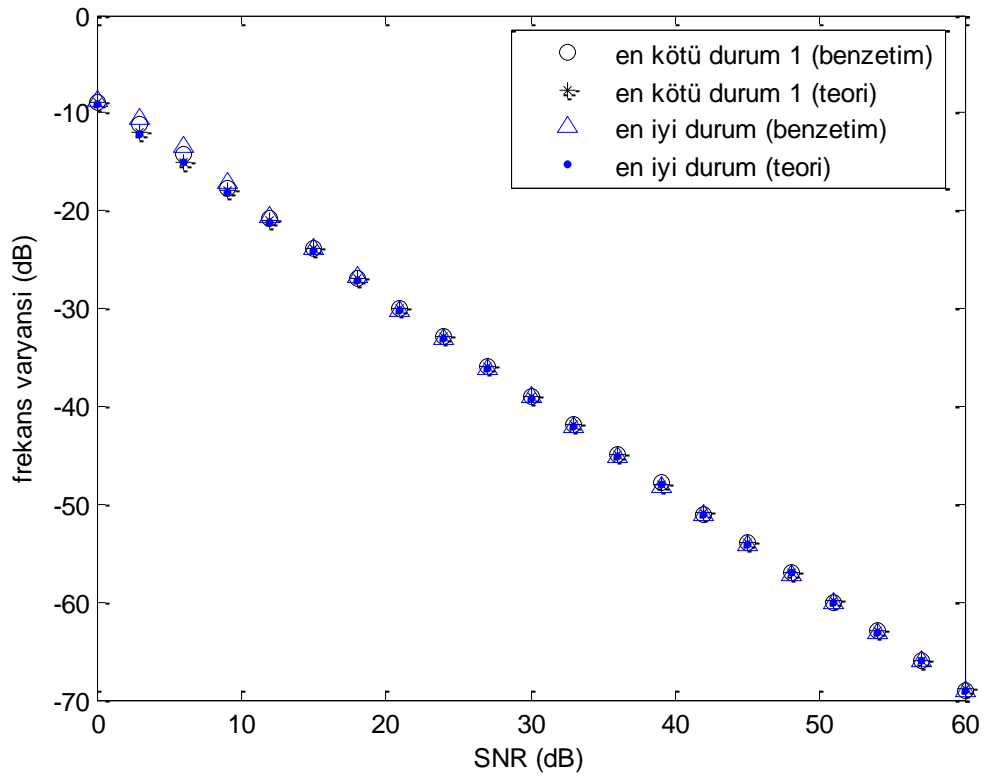


Şekil 4.8. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı $\omega = 0,3830\pi$ iken SNR ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,1}$ alınmıştır.

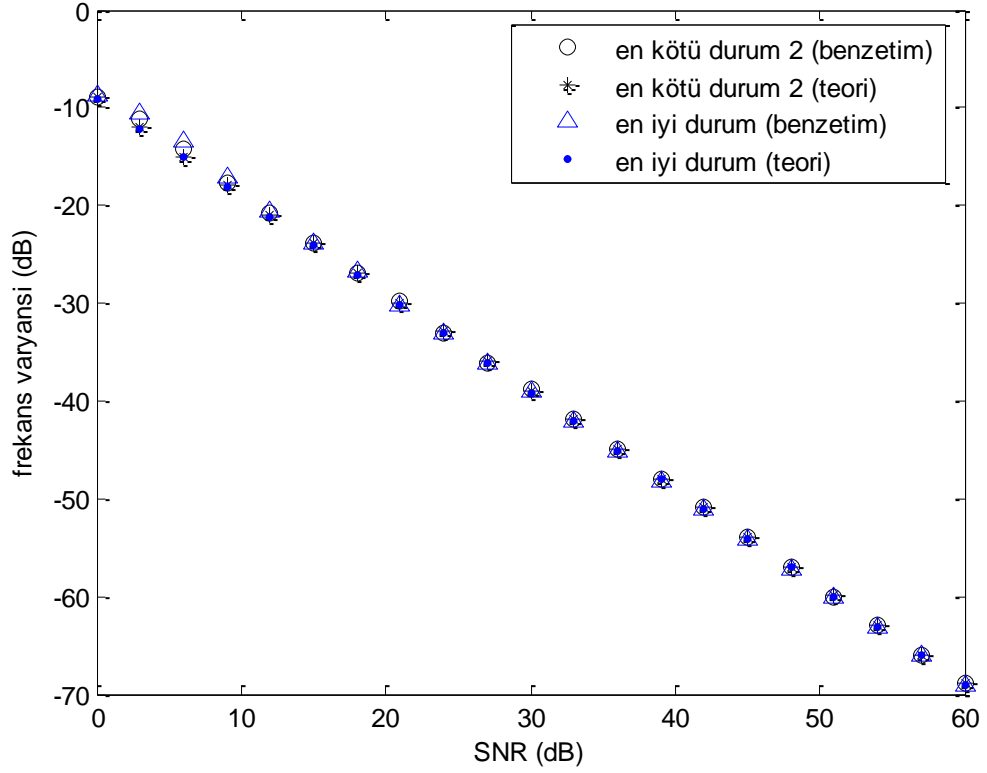


Şekil 4.9. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı $\omega = 0,3830\pi$ iken SNR ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,2}$ alınmıştır.

Şekil 4.8 ve 4.9’da görüldüğü gibi Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$ aralığında $\omega = 0.3830\pi$ sabit frekans değerinde SNR ile değişimi gösterilmiştir. $\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$ aralığı için iki global maksimum (ϕ_3 ve ϕ_4), bir global minimum faz ifadeleri elde edilmiştir. Şekil 4.8’de en iyi durum için bir global minimum faz değeri, en kötü durum için ise $\phi = \phi_{\max,1} = \phi_3$ faz ifadesi için incelenmiştir. Şekil 4.9’da ise en kötü durum için $\phi = \phi_{\max,2} = \phi_4$ faz ifadesi için gösterilmiştir. Teorik sonuçlarda $f(\phi_3) = f(\phi_4)$ olarak elde edildiğinden benzetim sonuçlarında da $\phi_{\max,1}$ ve $\phi_{\max,2}$ için elde edilen sonuçlar neredeyse aynıdır. Şekillerde SNR değerinin yaklaşık 15 dB’den sonra teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının uyuştugu görülmektedir. Ayrıca en iyi durum ile en kötü durum arasında neredeyse hiç fark bulunmamaktadır.



Şekil 4.10. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı $\omega = 0,6170\pi$ iken SNR ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,1}$ alınmıştır.



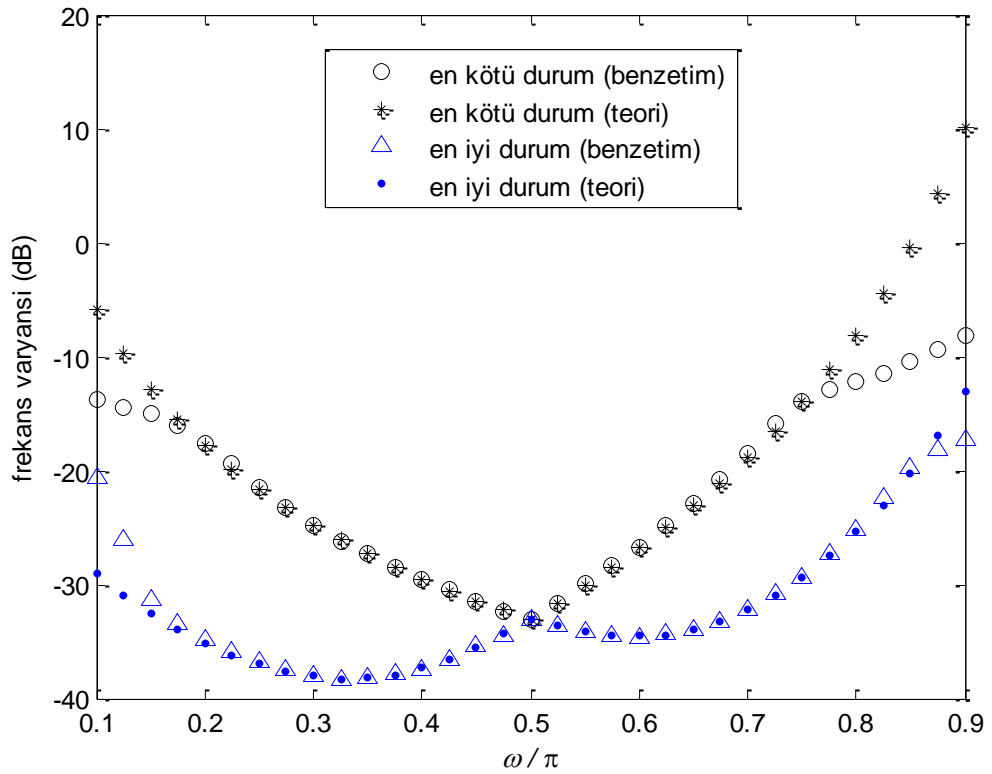
Şekil 4.11. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı $\omega = 0,6170\pi$ iken SNR ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,2}$ alınmıştır.

Şekil 4.10 ve 4.11’de $\omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-]$ aralığında $\omega = 0.6170\pi$ sabit frekans değerinde SNR ile değişimi gösterilmiştir. $\omega \in [\omega_1^+, \omega_2^-]$ aralığında olduğu gibi $\omega \in [\omega_3^+, \omega_4^-]$ aralığı için de iki global maksimum (ϕ_3 ve ϕ_4), bir global minimum faz ifadeleri elde edilmişti. Bu yüzden, şekil 4.10’da en iyi durum için bir global minimum faz değeri, en kötü durum için ise $\phi = \phi_{\max,1} = \phi_3$ faz ifadesi, şekil 4.11’de ise en kötü durum için $\phi = \phi_{\max,2} = \phi_4$ faz ifadesi için benzetim sonuçları verilmiştir. Şekil 4.8 ve 4.9’da olduğu gibi burada da benzetim sonuçlarında $\phi_{\max,1}$ ve $\phi_{\max,2}$ için elde edilen sonuçlar birbirleriyle neredeyse aynıdır. SNR değerinin yaklaşık 15 dB’den sonra teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının uyduğu görülmektedir. Ayrıca en iyi durum ile en kötü durum arasında neredeyse hiç fark bulunmamaktadır.

4.2 Frekans Varyansının Sabit SNR Değerinde Frekans ile Değişimleri

Bu bölümde elde edilen en büyük ve en küçük varyans ifadelerinin teorik ve benzetim sonuçlarının karşılaştırılması, frekans varyansının SNR sabit iken $\omega \in (0, \pi)$ aralığında frekans ile değişimi gösterilmektedir. Benzetim sonuçlarında, en büyük ve en küçük faz ifadeleri, en kötü durum ve en iyi durum olarak tanımlanmakta ve arasındaki farklar incelenmektedir.

DESA-1a (4 nokta) algoritması için;

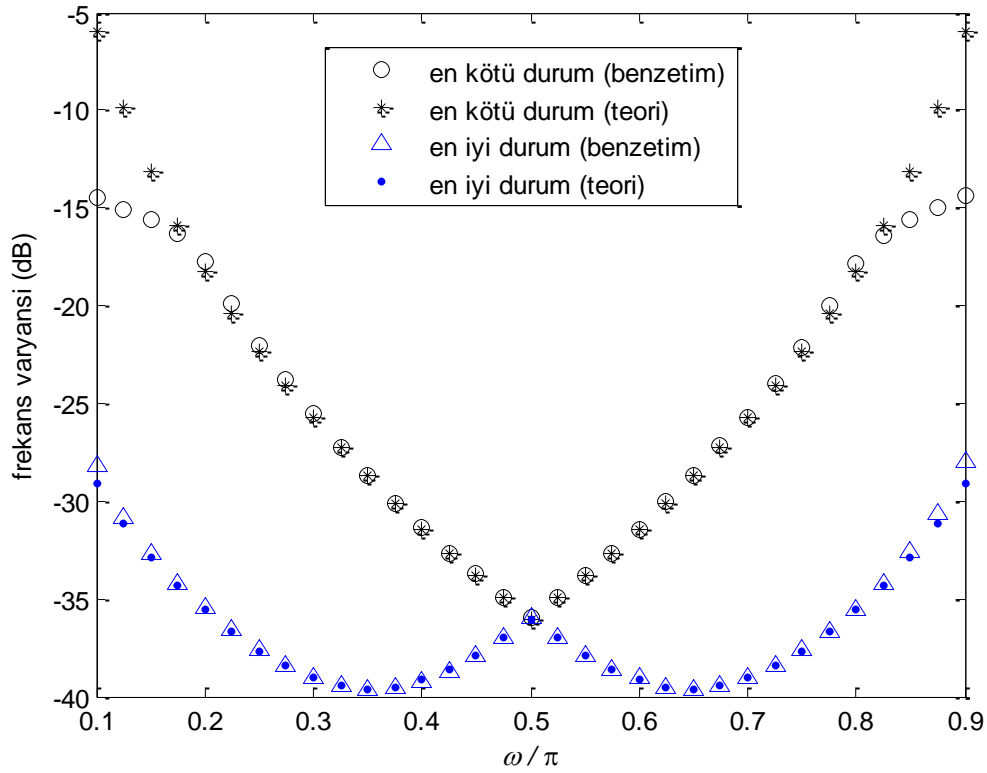


Şekil 4.12. DESA-1a (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.

Şekil 4.12’de SNR = 30 dB iken frekans ($\omega \in (0, \pi)$) ile değişimi gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi ω değeri 0 ve π ’ye yakın değerlerde teorik sonuçlar ile benzetim sonuçları uyuşmuyor. Fakat geniş frekans bandında uyuştugu görülüyor. Bu yüzden, yüksek SNR durumunda tüm frekans değerlerinde sonuçların aynı olacağı bilinmektedir. DESA-1a

kestiricisi için daha önce maksimum ve minimum faz değerinin bulunmadığı kritik frekans değeri olan $\omega = \pi/2$ değeri bulunmuştu. Şekil 4.12’de bu değere karşılık gelen ω/π değeri 0,5 iken teorik ve benzetim sonuçlarında en iyi ve en kötü durum için frekans varyanslarının eşit olduğu görülüyor.

Prony (4 nokta) algoritması için;

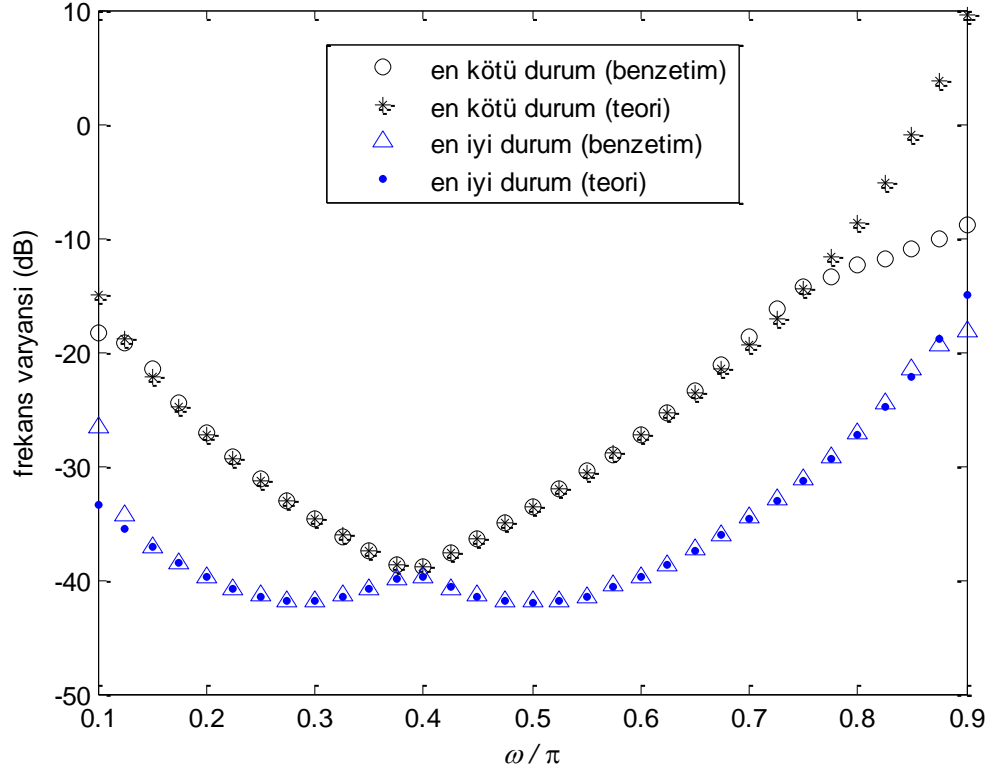


Şekil 4.13. Prony (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.

Şekil 4.13’te frekans varyansının SNR = 30 dB iken frekans ($\omega \in (0, \pi)$) ile değişimi gösterilmiştir. ω değeri 0 ve π ’ye yakın olduğunda daha çok en kötü durum için olmak üzere teorik sonuçlar ile benzetim sonuçları uyuşmuyor. Fakat geniş frekans bandında SNR = 30 dB iken uyuştugu görülüyor. Prony kestiricisi için de maksimum ve minimum faz değerinin bulunmadığı kritik frekans değeri olan $\omega = \pi/2$ değerinde, şekil 4.13’te ω/π değeri 0,5 iken teorik ve benzetim sonuçları için en iyi ve en kötü durum aynı frekans

varyansına sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca en kötü durum ile en iyi durum arasında geniş bir frekans bandında yaklaşık 15 dB fark olduğu görülmektedir.

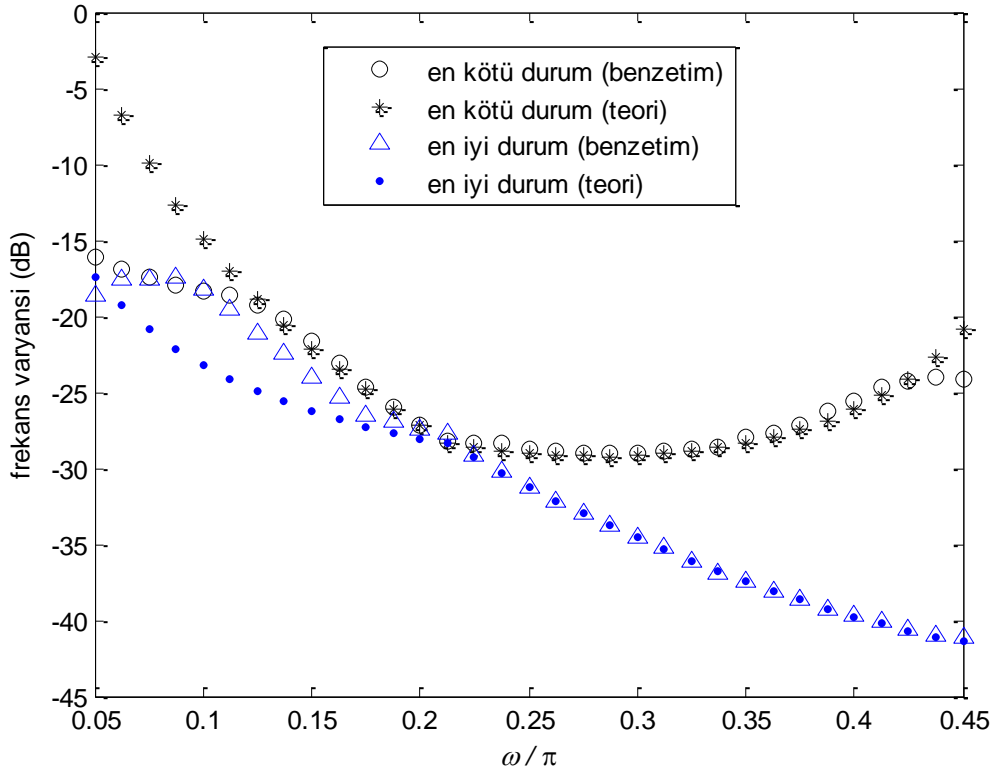
DESA-1 (5 nokta) algoritması için;



Şekil 4.14. DESA-1 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.

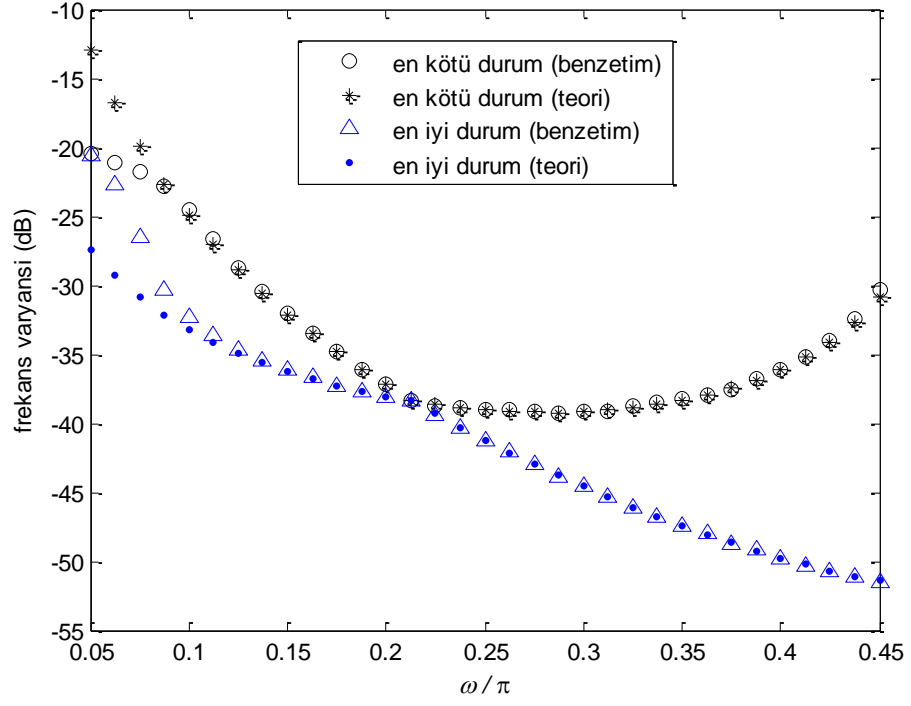
Şekil 4.14'te frekans varyansının sabit SNR = 30 dB iken frekans ile değişimi gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi ω değeri daha çok π 'ye yakın olduğunda ve en kötü durum için teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının uyuşmadığı görülmüyor. Fakat geniş frekans bandında SNR = 30 dB iken uyuştugu görülmüyor. DESA-1 kestiricisi için daha önce $\omega \cong 1,22504 \cong 0,389943\pi$ kritik frekans değerinde maksimum ve minimum faz değerlerinin olmadığı bulunmuştu. Bu yüzden şekil 4.14'te ω/π değeri yaklaşık 0,38 değerinde teorik ve benzetim sonuçlarında en iyi ve en kötü durumun aynı frekans varyansına sahip olduğu görülmüyor.

DESA-2 (5 nokta) algoritması için;

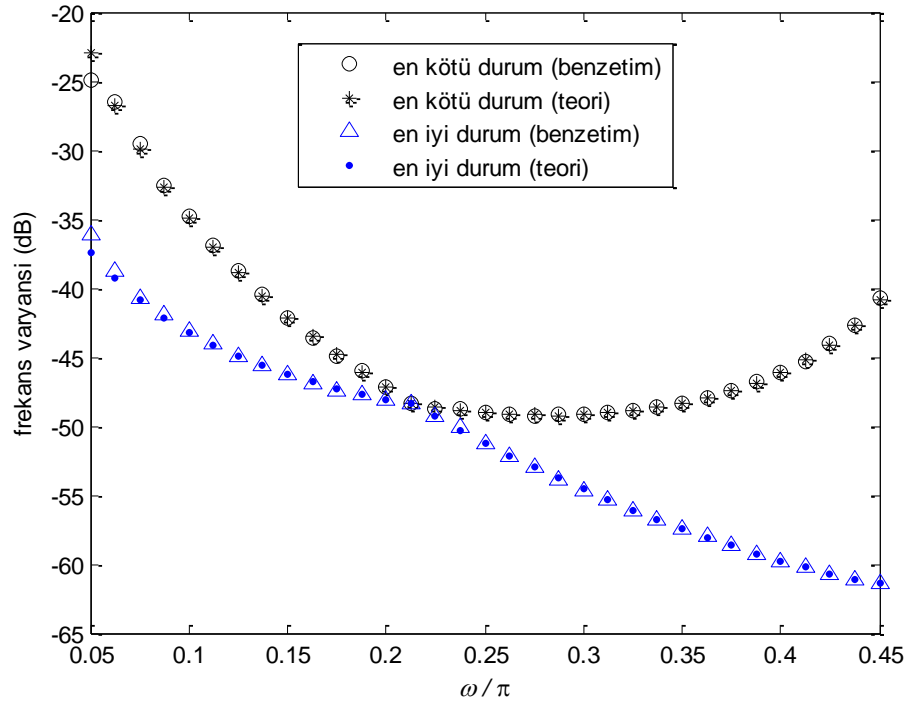


Şekil 4.15. DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.

Şekil 4.15'te frekans varyansının sabit SNR = 30 dB iken farklı frekans değerleri ile değişimi gösterilmiştir. DESA-2 kestiricisi için $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ aralığında çalıştığından benzetim sonucunda $\omega \in [0,05\pi, 0,45\pi]$ aralığında gösterilmiştir. DESA-2 kestiricisi için daha önce $\omega \cong 0,672058 \cong 0,213923\pi$ kritik frekans değerinde maksimum ve minimum faz değerlerinin olmadığı bulunmuştur. Bu yüzden ω/π değeri yaklaşık 0,21 değerinde teorik ve benzetim sonuçlarında en iyi ve en kötü durumun aynı frekans varyansına sahip olduğu görülüyor. Ayrıca şekilde ω değeri daha çok 0'a yakın olduğunda teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının neredeyse yarısının uyuşmadığı görülüyor. SNR değeri arttığında sonuçların aynı olacağı biliniyor. Bu yüzden şekil 4.16 ve 4.17'de daha yüksek SNR değerlerinde frekans ile değişimi incelenmiştir. Şekiller incelendiğinde, SNR = 50 dB iken teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının tüm ω aralığında neredeyse tamamen uyuştugu görülmektedir.

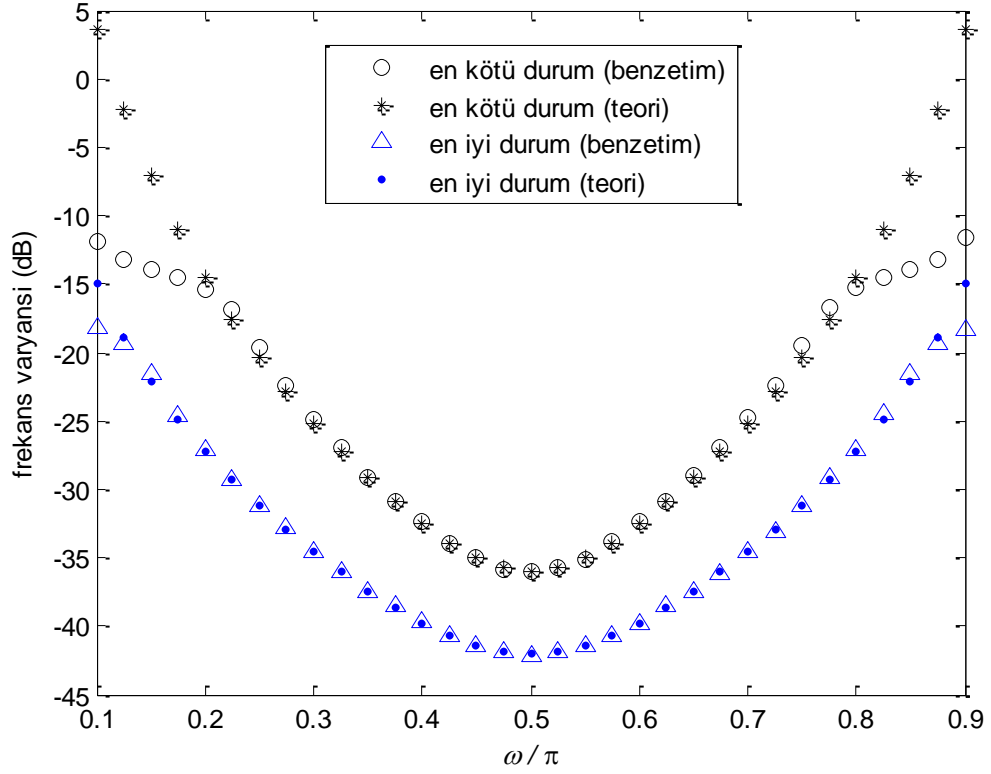


Şekil 4.16. DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\text{SNR} = 40$ dB iken ω ile değişimi.



Şekil 4.17. DESA-2 (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının $\text{SNR} = 50$ dB iken ω ile değişimi.

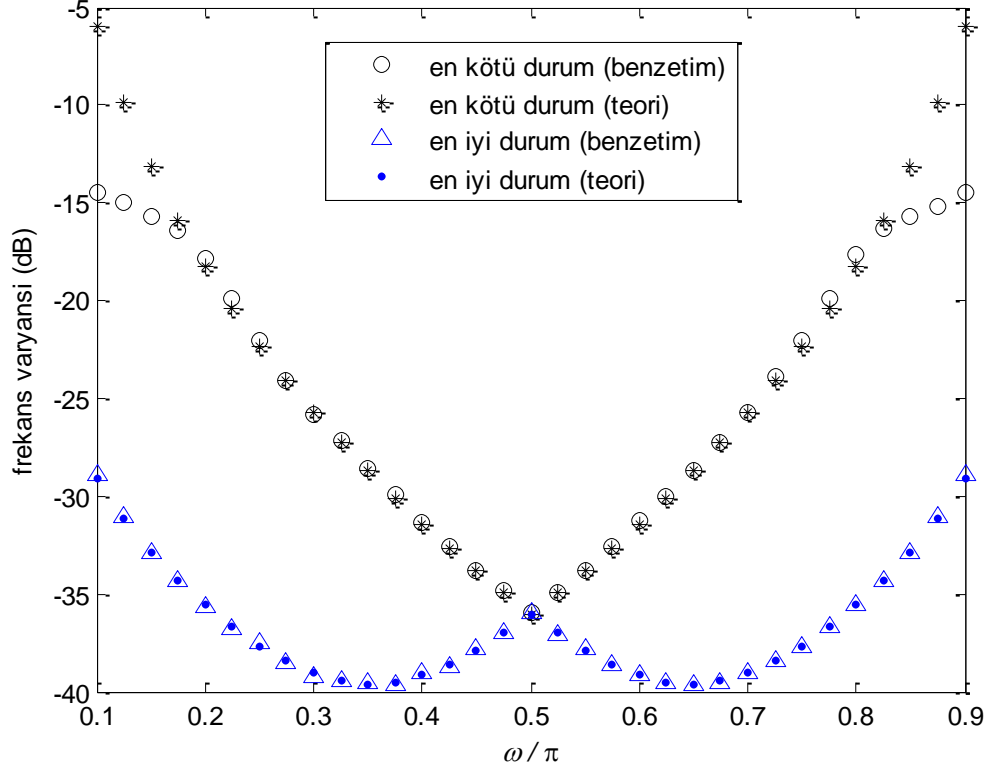
Modified Prony (5 nokta) algoritması için;



Şekil 4.18. Modified Prony (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.

Şekil 4.18’de frekans varyansının sabit SNR = 30 dB iken frekans ile değişimi gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi ω değeri 0 ve π ’ye yakın olduğunda daha çok en kötü durum için olmak üzere teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının uyuşmadığı görülüyor. Bunun için DESA-2 kestiricisinde olduğu gibi SNR değerini arttırmamız sonuçların uyuşmasını sağlayacaktır. Fakat geniş frekans bandında SNR = 30 dB iken uyuştugu görülmektedir. Diğer tüm kestiriciler için maksimum ve minimum faz değerlerinin olmadığı belli bir frekans değeri bulunmuştu. Fakat Modified Prony (5 nokta) kestiricisi için böyle bir frekans değerinin olmadığı biliniyor. Bu yüzden şekildeki teorik ve benzetim sonuçlarında en iyi ve en kötü durumun aynı frekans varyansına sahip olduğu bir nokta bulunmadığı görülmektedir. En kötü durum ile en iyi durum arasında geniş frekans bandında yaklaşık en az 10 dB fark bulunmaktadır.

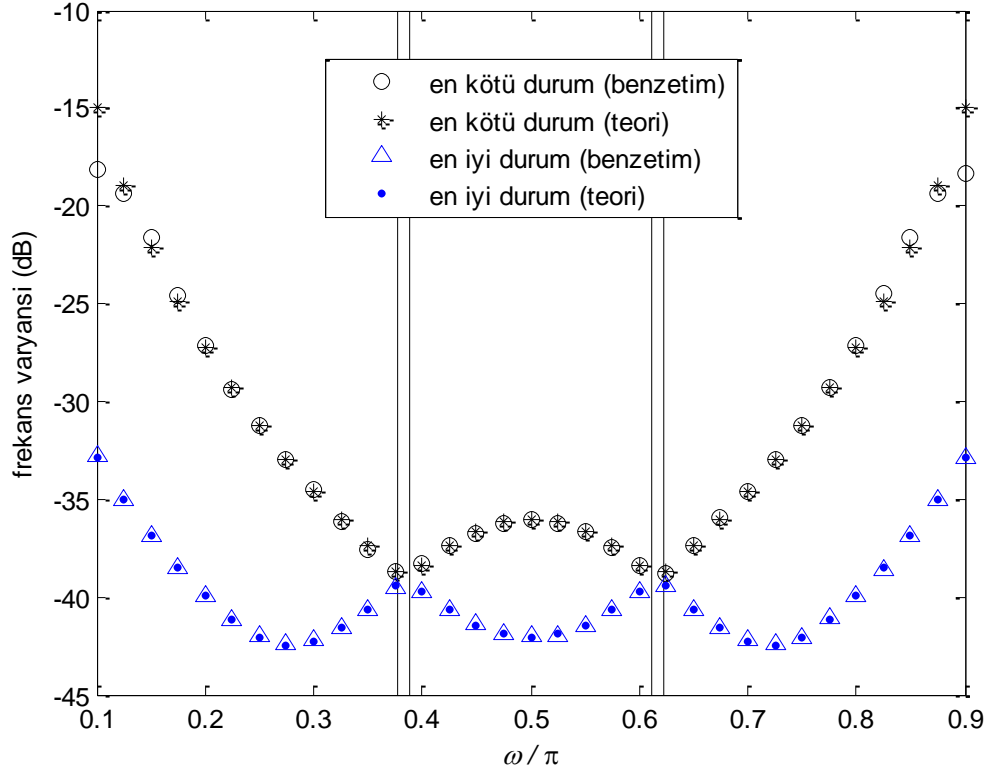
Modified Covariance (4 nokta) algoritması için;



Şekil 4.19. Modified Covariance (4 nokta) kestiricisinin frekans varyansının SNR = 30 dB iken ω ile değişimi.

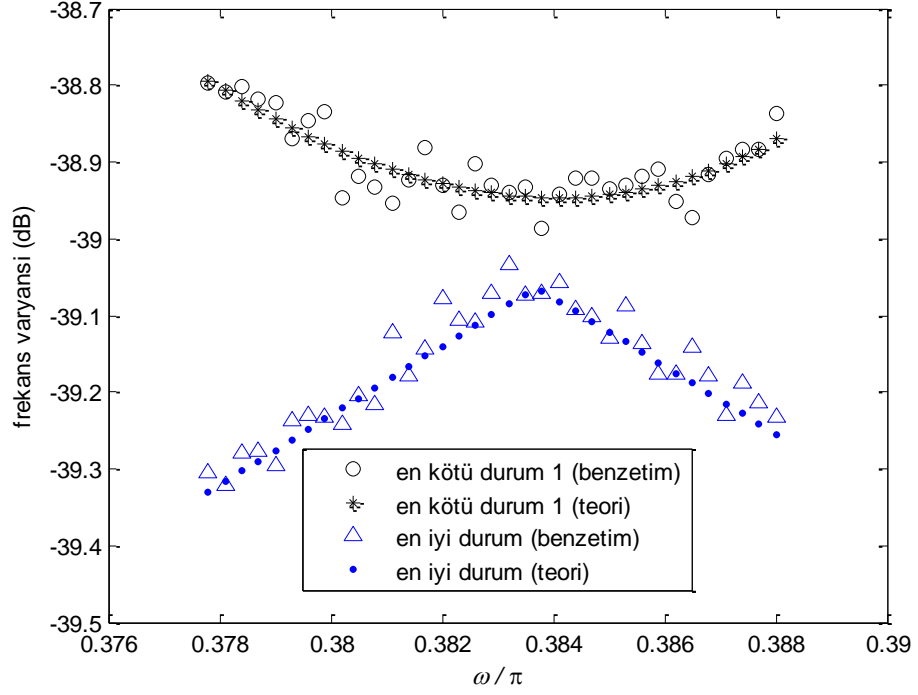
Şekilde frekans varyansının sabit SNR = 30 dB değerindeyken frekans ile değişimi gösterilmiştir. ω değeri 0 ve π 'ye yakın olduğunda en kötü durum için teorik sonuçlar ile benzetim sonuçları uyuşmuyor. Fakat geniş frekans bandında SNR = 30 dB iken uyuştugu ve en iyi durum için neredeyse tamamen aynı olduğu görülüyor. Modified Covariance (4 nokta) kestiricisi için $\omega = \pi/2$ frekans değerinde maksimum ve minimum faz değerlerinin bulunmadığı biliniyor. Bu yüzden DESA-1a ve Prony kestiricilerinde olduğu gibi ω/π değeri 0,5 değerinde teorik ve benzetim sonuçlarında en iyi durumun ve en kötü durumun aynı frekans varyansına sahip olduğu görülüyor. Ayrıca en kötü durum ile en iyi durum arasında yaklaşık 20 dB fark bulunmaktadır. Bu fark geniş frekans bandında önemli mertebede olduğu görülmektedir.

Modified Covariance (5 nokta) algoritması için;

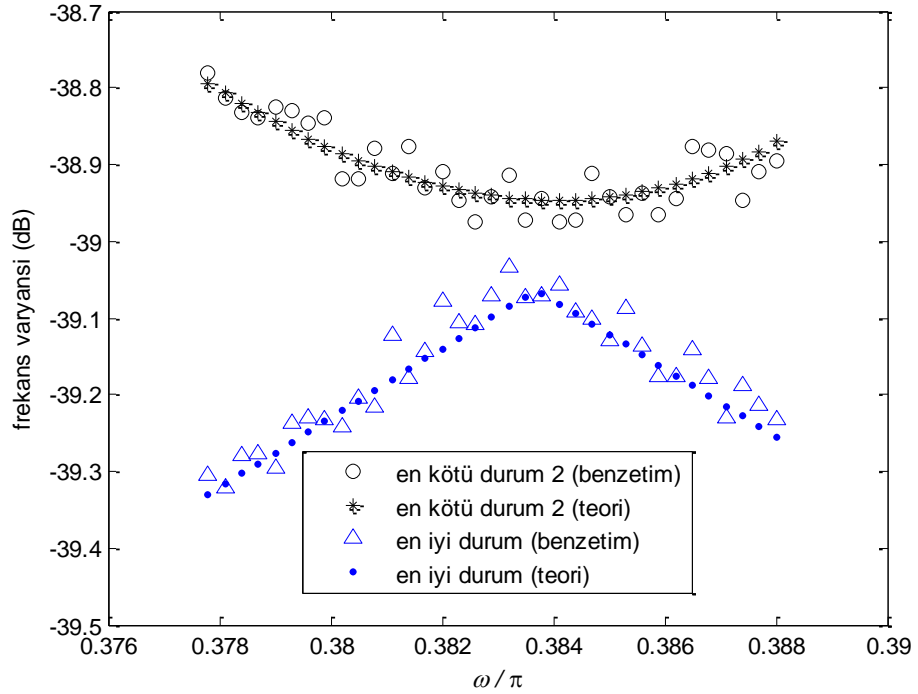


Şekil 4.20. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı SNR = 30 dB iken ω ile değişimi. (ω_1, ω_2) ve (ω_3, ω_4) frekans bantları hariç tutulmuştur.

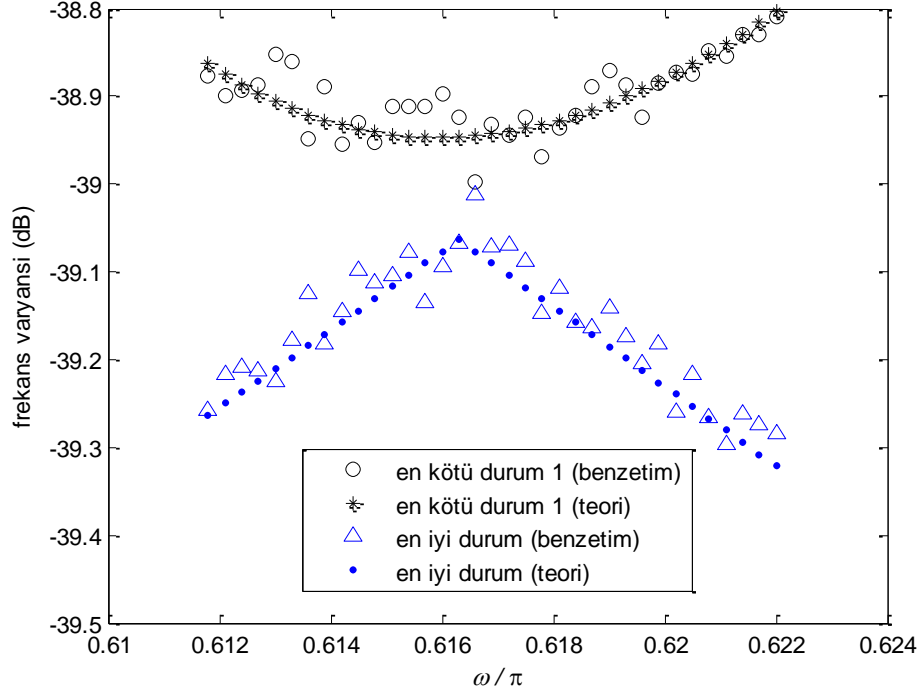
Şekil 4.20’de frekans varyansının sabit SNR = 30 dB iken farklı frekans değerleri ile değişimi gösterilmiştir. Burada, ikişer maksimum ve minimum faz değerlerinin bulunduğu dar aralıklar $((\omega_1, \omega_2)$ ve $(\omega_3, \omega_4))$ dahil edilmemiştir. Bu yüzden şekil 4.21 ve 4.22 (ω_1, ω_2) bandında ω ile değişimi, şekil 4.23 ve 4.24 (ω_3, ω_4) bandında ω ile değişimi gösterilmiştir. Ayrıca şekilde görüldüğü gibi dar aralıklar tüm $\omega \in (0, \pi)$ frekans aralığının %3’lük kısmında yer almaktadır. Şekil 4.20’de en iyi durum için tüm $\omega \in (0, \pi)$ aralığında teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının neredeyse tamamen uyduğu görülmektedir. Ayrıca en kötü durum ile en iyi durum arasında yaklaşık 15 dB gibi önemli mertebede bir fark olduğu görülmektedir.



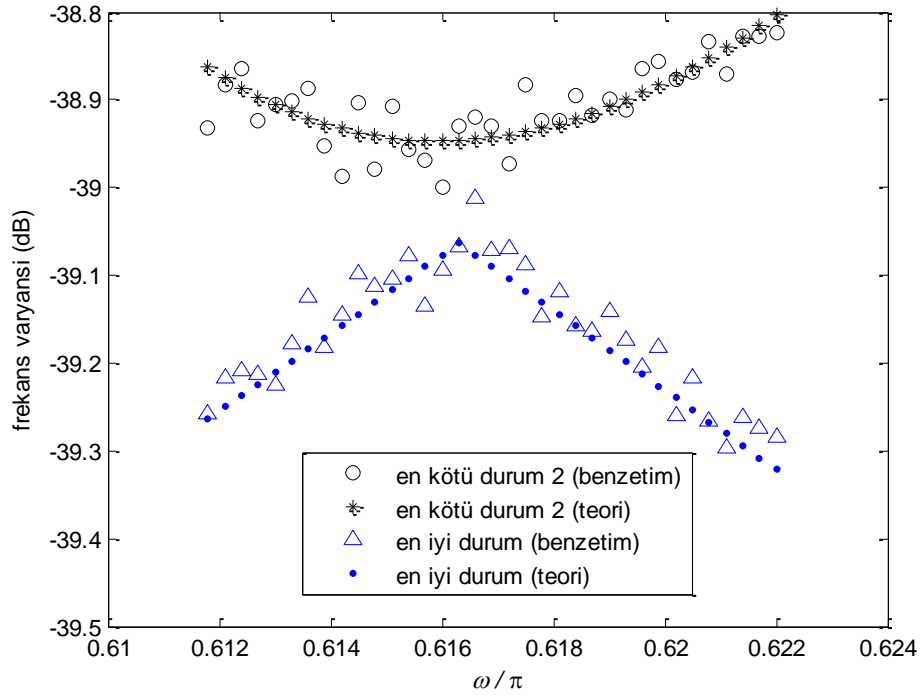
Şekil 4.21. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı SNR = 30 dB iken (ω_1, ω_2) bandında ω ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,1}$ alınmıştır.



Şekil 4.22. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı SNR = 30 dB iken (ω_1, ω_2) bandında ω ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,2}$ alınmıştır.



Şekil 4.23. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı SNR = 30 dB iken (ω_3, ω_4) bandında ω ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,1}$ alınmıştır.

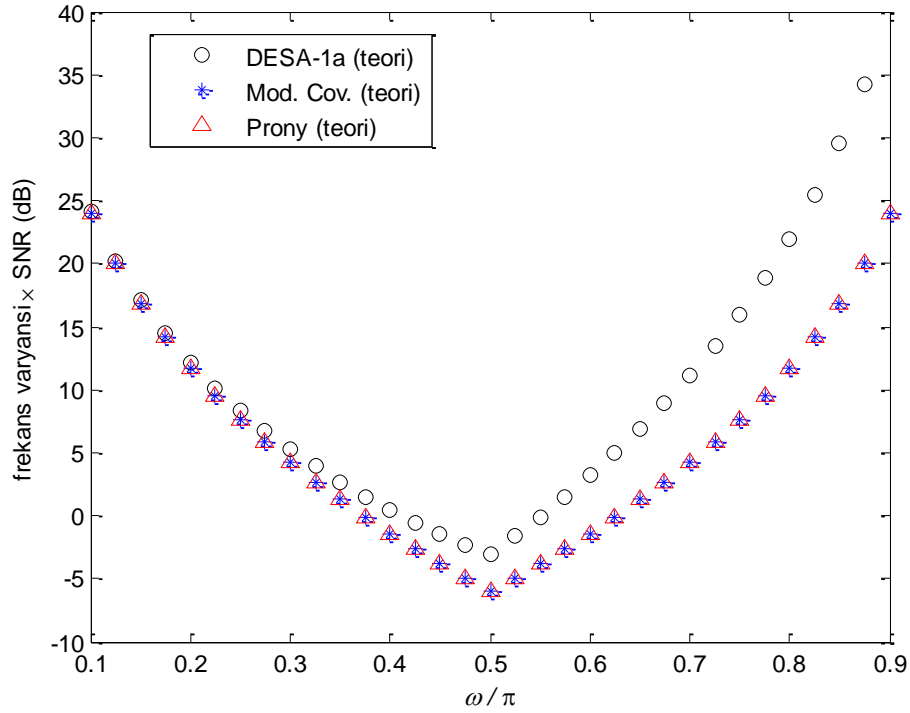


Şekil 4.24. Modified Covariance (5 nokta) kestiricisinin frekans varyansı SNR = 30 dB iken (ω_3, ω_4) bandında ω ile değişimi. En kötü durum için $\phi = \phi_{\max,2}$ alınmıştır.

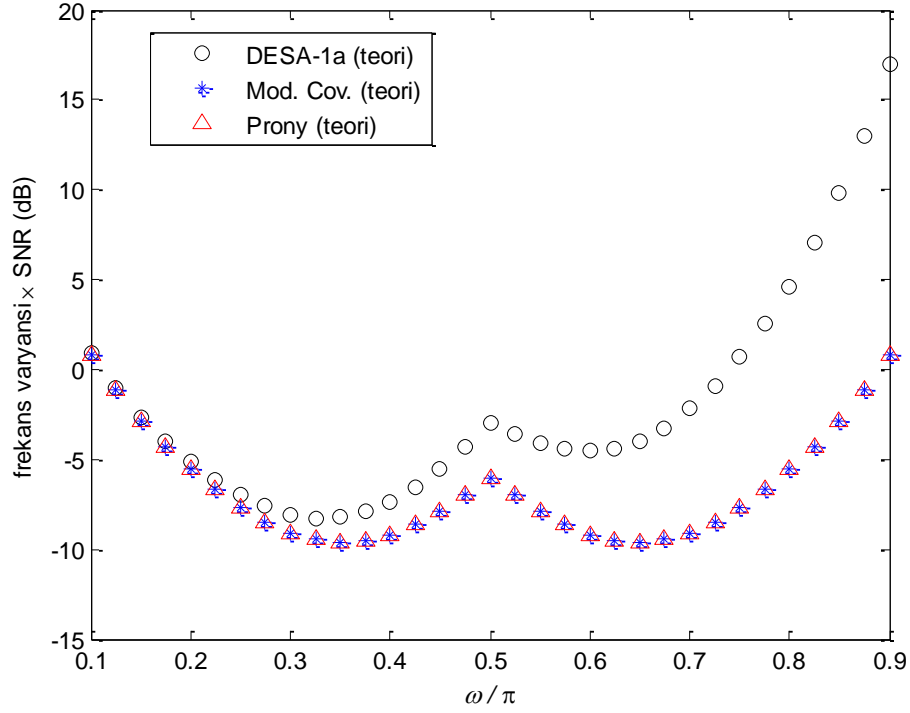
Şekil 4.21, 4.22, 4.23 ve 4.24'te en iyi durum için bir global minimum faz değeri, en kötü durum için ise $\phi = \phi_{\max,1} = \phi_3$ faz ifadesi ve $\phi = \phi_{\max,2} = \phi_4$ faz ifadesi için incelenmiştir. Teorik sonuçlarda $f(\phi_3) = f(\phi_4)$ olarak elde edildiğinden benzetim sonuçlarında da $\phi_{\max,1}$ ve $\phi_{\max,2}$ için elde edilen sonuçlar neredeyse aynıdır. Şekillerde teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlar arasında en fazla 0,1 dB fark bulunmaktadır. Bu yüzden incelenen frekans aralıklarında teorik sonuçlar ile benzetim sonuçlarının neredeyse aynı olduğu söylenebilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bölüm (4.2)'de tüm kestiriciler için frekans varyanslarının ω ile değişimi gösterilmiştir. Bu bölümde ise dört nokta veri örneği sayısına sahip kestiriciler kendi aralarında, beş nokta veri örneği sayısına sahip kestiriciler kendi aralarında benzetim sonuçları ile karşılaştırılmış ve yorumlanmıştır. Bu karşılaştırmalar, elde edilen teorik sonuçların en kötü ve en iyi durumları için yapılmıştır. Maksimum varyans ifadeleri en kötü durum, minimum varyans ifadeleri ise en iyi durum olarak tanımlanmaktadır. Benzetim sonuçları yüksek SNR durumunda ve frekans varyansı \times SNR değerinin $\omega \in [0,1\pi, 0,9\pi]$ ile değişimi için karşılaştırmalar gösterilmektedir. DESA-2 (5 nokta) kestiricisi, $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında çalıştığı için ve benzetim sonuçlarında ω/π değeri 0 ile 0,5 arasında incelendiğinden şekil 5.5 ve 5.6 beş nokta veri örneği sayısına sahip tüm kestiriciler ile DESA-2 kestiricisi dahil edilerek en kötü ve en iyi durumları $\omega \in [0,05\pi, 0,45\pi]$ aralığında karşılaştırması yapılmıştır. Karşılaştırmalı benzetim sonuçlarında değerler, $\omega \in [0,1\pi, 0,9\pi]$ aralığında 0,025 hata ile ve $\omega \in [0,05\pi, 0,45\pi]$ aralığında ise 0,0125 hata ile verilmektedir.



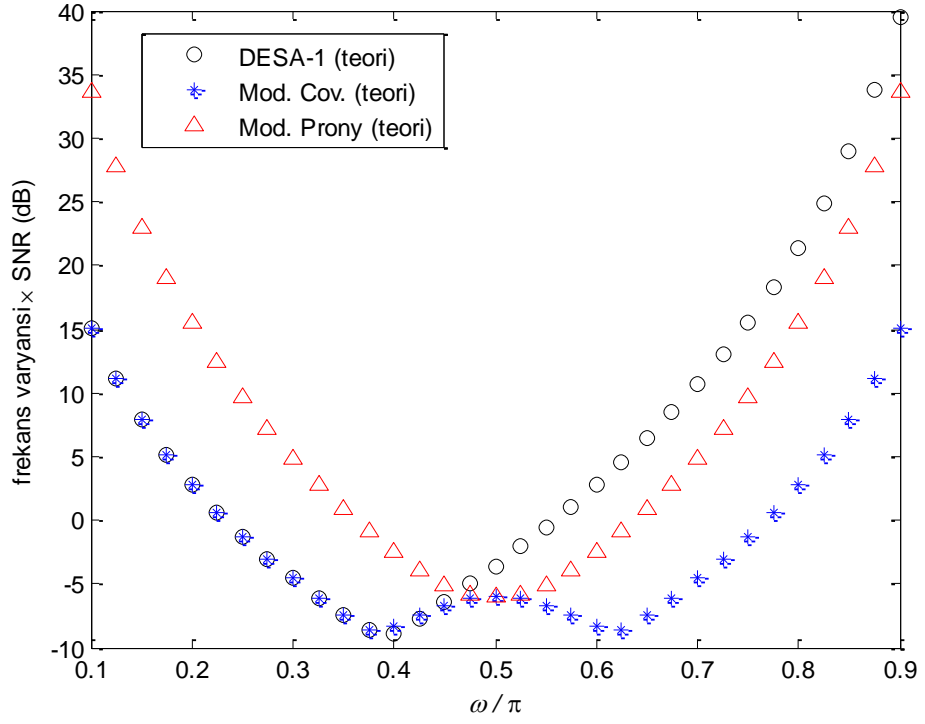
Şekil 5.1. Dört nokta kestiricilerin en kötü durum frekans varyanslarının ω ile değişimi



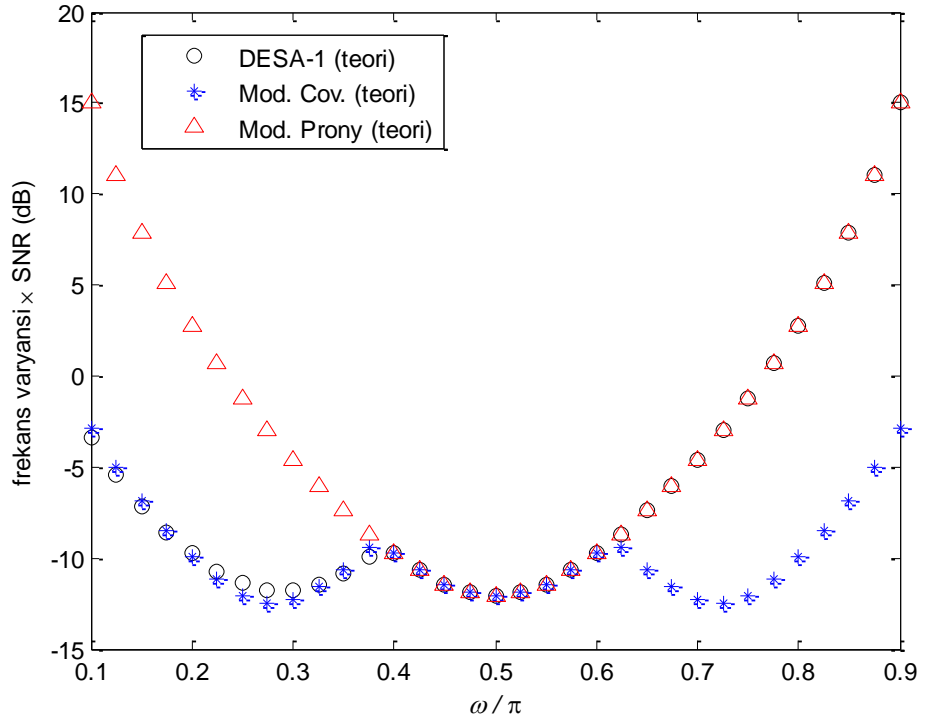
Şekil 5.2. Dört nokta kestiricilerin en iyi durum frekans varyanslarının ω ile değişimi

Şekil 5.1 dört nokta kestiricilerin (DESA-1a, Modified Covariance, Prony) en kötü durum için ve şekil 5.2 ise en iyi durum için karşılaştırmalı benzetim sonuçlarını göstermektedir. Şekil 5.1’deki benzetim sonuçlarına göre, $\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1a}})_{\max} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Prony}})_{\max}$ ve $\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Prony}})_{\max} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\max}$ ilişkisinin genel $\omega \in [0,1\pi,0,9\pi]$ aralığında geçerli olduğu görülüyor. Şekil 5.2’deki benzetim sonuçlarına göre, $\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1a}})_{\min} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Prony}})_{\min}$ ve $\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Prony}})_{\min} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\min}$ olduğu ve şekil 5.1 ile aynı sonuçları verdiği görülüyor.

En kötü durum ve en iyi durum için de $\omega > 0,5\pi$ için frekans arttıkça DESA-1a ile Prony ve Modified Covariance kestiricileri arasındaki varyans farkları gittikçe artmaktadır. Sonuç olarak, dört nokta kestiricileri için DESA-1a en kötü kestirici ve Prony ve Modified Covariance kestiricileri ise en küçük varyansa sahip kestiricilerdir.



Şekil 5.3. Beş nokta kestiricilerin en kötü durum frekans varyanslarının ω ile değişimi



Şekil 5.4. Beş nokta kestiricilerin en iyi durum frekans varyanslarının ω ile değişimi

Şekil 5.3'te beş nokta kestiricilerin (DESA-1, Modified Covariance, Modified Prony) en kötü durum için ve şekil 5.4'te ise en iyi durum için karşılaştırmalı benzetim sonuçları gösterilmektedir. Şekil 5.3'teki benzetim sonuçlarına göre, $\omega < 0,45\pi$ aralığında $\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\text{max}} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\text{max}}$ ve $\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\text{max}} \cong \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\text{max}}$ olduğu görülmektedir. Böylece bu aralıkta en kötü kestiricinin Modified Prony olduğu görülür. $\omega > 0,45\pi$ için ise;

$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\text{max}} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\text{max}} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\text{max}}$ olduğu görülüyor.

Dolayısıyla, bu aralık için de en kötü kestirici DESA-1, en iyi kestirici ise Modified Covariance olarak bulunur.

Şekil 5.4'teki en iyi durum benzetim sonuçlarına göre, $\omega < 0,4\pi$ aralığında,

$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\text{min}} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\text{min}}$ ve $\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\text{min}} \cong \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\text{min}}$

ilişkisi ile burada Modified Prony'nin en kötü kestirici olduğu görülür. $\omega > 0,6\pi$ için,

$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\text{min}} < \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\text{min}}$ ve $\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\text{min}} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\text{min}}$

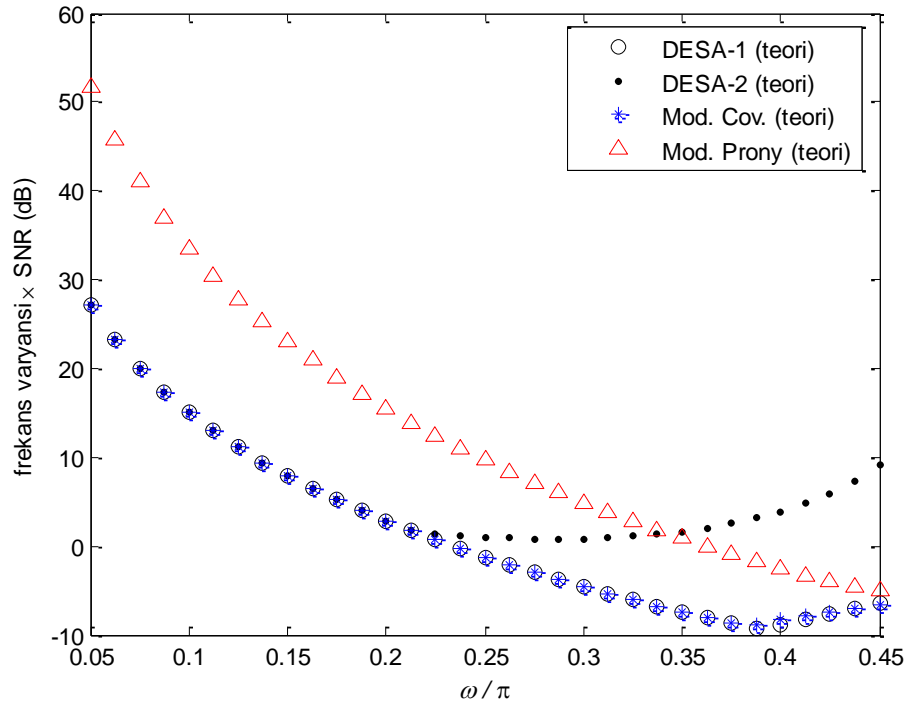
olarak bulunur ve bu aralıkta en küçük varyansa sahip olarak Modified Covariance'in en iyi kestirici olduğu görülmektedir. $\omega \in [0,4\pi, 0,6\pi]$ aralığında ise;

$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\text{min}} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\text{min}} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\text{min}}$ olarak beş nokta

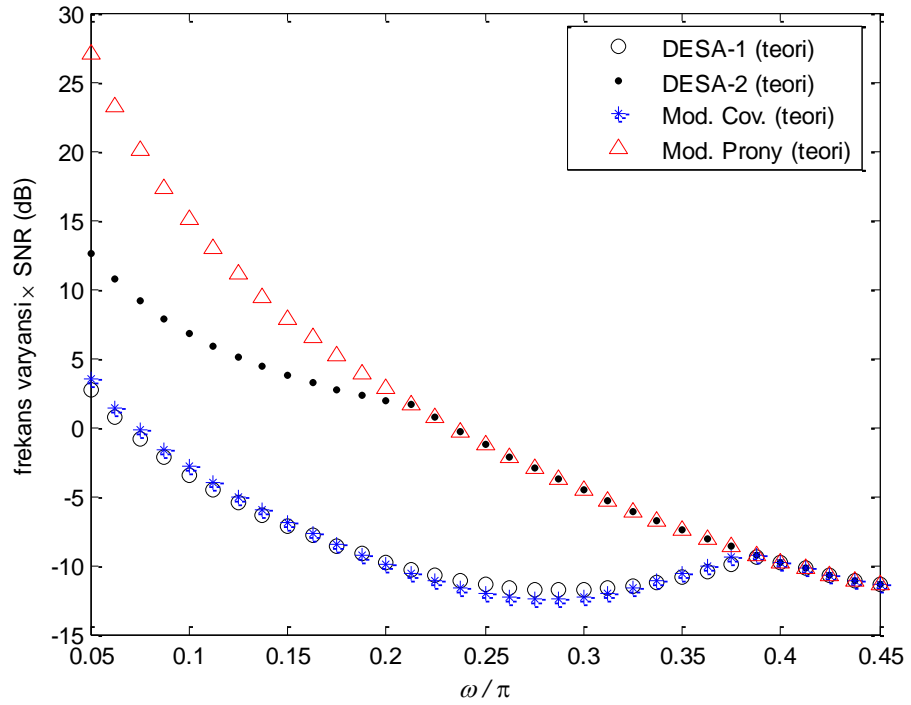
kestiricilerin frekans varyanslarının birbirine eşit olduğu görülüyor. Sonuçta, beş nokta

kestiriciler için (DESA-2 hariç) Modified Covariance kestiricisinin her iki durum için

tüm ω aralığında en küçük varyansa sahip olarak en iyi kestirici olduğu söylenebilir.



Şekil 5.5. Beş nokta kestiricilerin en kötü durum frekans varyanslarının ω ile değişimi (DESA-2 kestiricisi dahil edilmiştir)



Şekil 5.6. Beş nokta kestiricilerin en iyi durum frekans varyanslarının ω ile değişimi (DESA-2 kestiricisi dahil edilmiştir)

DESA-2 kestiricisi benzetim sonuçlarında $\omega \in [0,05\pi, 0,45\pi]$ aralığında incelendiğinden şekil 5.3 ve 5.4'te gösterilen beş nokta kestiricilerin karşılaştırmalarına DESA-2 dahil edilmemiştir. Bu yüzden şekil 5.5 ve 5.6'da DESA-2 kestiricisi de dahil edilerek tüm beş nokta kestiricilerin en kötü ve en iyi durumları için karşılaştırmalı benzetim sonuçları $\omega \in [0,05\pi, 0,45\pi]$ aralığında gösterilmektedir. Şekil 5.5'teki en kötü durum benzetim sonuçlarına göre; $\omega < 0,2125\pi$ aralığı için,

$$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\max} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\max}$$

$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\max} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\max} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-2}})_{\max}$ olduğu görülüyor. Böylece bu aralıkta en kötü kestirici Modified Prony olarak elde edilir.

$\omega \in [0,2125\pi, 0,3375\pi]$ frekans aralığında ise,

$$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\max} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-2}})_{\max} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\max}$$

$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\max} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\max}$ olarak bulunur ve bu aralık için de en kötü kestirici Modified Prony'dir. $\omega > 0,3375\pi$ aralığı için,

$$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-2}})_{\max} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\max} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\max}$$

$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\max} \cong \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\max}$ ilişkisi bulunur. Bu aralık için en kötü kestirici DESA-2 kestiricisidir.

Şekil 5.6'daki en iyi durum benzetim sonuçlarına göre; $\omega < 0,2125\pi$ aralığı için,

$$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\min} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-2}})_{\min} > \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\min}$$

$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\min} \cong \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\min}$ olduğu ve bu aralık için en kötü kestiricinin tekrar Modified Prony olduğu görülüyor. $\omega \in [0,2125\pi, 0,3375\pi]$ aralığında,

$$[\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\min} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-2}})_{\min}] > [\text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\min} \cong \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\min}]$$

olduğu görülüyor. $\omega \in [0,3375\pi, 0,45\pi]$ aralığı için,

$$\text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Prony}})_{\min} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-2}})_{\min} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{DESA-1}})_{\min} = \text{var}(\hat{\omega}_{\text{Mod. Cov.}})_{\min}$$

olarak tüm kestiriciler bu aralıkta birbirine eşit olarak elde edilir. DESA-2 kestiricisi dahil edilerek tüm beş nokta kestiriciler için yapılan karşılaştırmada tekrar en iyi kestirici Modified Covariance olarak elde edilmiş oldu.

Sonuç olarak, gürültü içeren bir sinüsün çok az sayıda veri örneği kullanılarak yedi anlık frekans kestiricilerin en kötü ve en iyi durumlar için varyansları karşılaştırılarak performans analizi benzetim sonuçları ile sunulmuştur. Bu karşılaştırmalar, yüksek SNR

ve sabit faz durumu için $\phi \in (0, \pi]$ aralığında ve $\omega \in (0, \pi)$ frekans aralığında gerçekleştirilmiştir. Karşılaştırmalar sonucunda, Modified Covariance (5 nokta) kestiricisi tüm $\omega \in (0, \pi)$ aralığında en kötü ve en iyi durumlar için en düşük frekans varyansına sahip olarak en iyi kestirici olduğu görülmektedir. Ayrıca kestiricilerin maksimum ve minimum varyansları arasındaki farkın geniş frekans bandında önemli mertebelerde olduğu gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

- Boashash, B. 1992.** Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal - Part 2: Algorithms and applications. *Proceedings of the IEEE*, 80 (4): 540 - 568
- Cheveigné, A., Kawahara, H. 2002.** YIN, A fundamental frequency estimator for speech and music. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111 (4): 1917 – 1930
- Fertig L. B., McClellan J. H. 1993.** Instantaneous Frequency Estimation Using Linear Prediction with Comparisons to the DESAs. *IEEE Signal, Processing Letters*, 3 (2): 54-56
- Georgakis, A., Stergioulas, L., Giakas, G. 2003.** Fatigue analysis of the surface EMG signal in isometric constant force contractions using the averaged instantaneous frequency. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 50 (2): 262 - 265
- Jokanovic, B., Amin B. G., Stankovic S. 2013.** Instantaneous frequency and time-frequency signature estimation using compressive sensing. SPIE Defense, Security, and Sensing, 2013, Baltimore, Maryland, United States.
- Kay, S. M. 1993.** Fundamentals of statistical signal processing: Estimation theory. Prentice-Hall, New Jersey, 595p.
- Knight, W. C., Pridham R. G., Kay, S. M. 1981.** Digital signal processing for sonar. *Proceedings of the IEEE*, 69 (11): 1451-1506.
- Kwok, H. K., Jones, D.L. 2000.** Improved instantaneous frequency estimation using an adaptive short-time fourier transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 48 (10):2964-2972.
- Maragos, P., Kaiser, J. F., Quateri, T. F. 1992.** On seperating amplitude from frequency modulations using energy operators. *Proc. ICASSP-92*, 2: 1-4.
- Stanković, L., Djurović, I., Stanković, S., Simeunović, M., Djukanović, S., Daković, M. 2014.** Instantaneous frequency in time–frequency analysis: Enhanced concepts and performance of estimation algorithms. *Digital Signal Processing*, 35 (2014): 1-13.
- So, H. C., Chan, Y. T., Ho, K. C., Chen, Y. 2013.** Simple Formulas for Bias and Mean Square Error Computation, *IEEE Signal Processing Magazine* 30 (4): 162-165
- Tu, X., Hu, Y., Li, F., Abbas, F., Liu, Y. 2017.** Instantaneous Frequency Estimation for Nonlinear FM Signal Based on Modified Polynomial Chirplet Transform, 66 (10):2898-2908

Uz, H., Dilaveroğlu E., 2019 Simple and accurate bias and variance expressions of some instantaneous frequency estimators including the DESAs. ISAS 2019, April 2019, Ankara.

Yılmaz, E. 2007. Frekans kestiricilerin performans analizi. *Doktora Tezi*, BUÜ, Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Bursa.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ahmet DEMİR
Doğum Yeri ve Tarihi : Konya / 1992
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Selçuklu Anadolu Teknik Lisesi
Lisans : İstanbul Üniversitesi
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Bursa Uludağ Üniversitesi – Elektrik-Elektronik Müh.

İletişim (e-posta) : ahmetdemir@uludag.edu.tr