T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENDİSİ VE TERSİ YALINKAT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Şahsene ALTINKAYA

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2014

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KENDİSİ VE TERSİ YALINKAT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Şahsene ALTINKAYA

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde U açık birim diskinde normalize edilmiş analitik ve yalınkat fonksiyonların oluşturduğu S sınıfının ve reel kısmı pozitif fonksiyonların oluşturduğu P sınıfının temel özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde; tersi de yalınkat olan analitik fonksiyonların Σ sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfa ait örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; analitik, kendisi ve tersi yalınkat olan fonksiyonların bazı özel alt sınıfları tanımlanmış ve bu sınıfların katsayı sınırları araştırılmıştır. Ayrıca bu sınıflara ait teoremler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; elde edilen tüm sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yalınkat fonksiyonlar, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar, bi-ünivalent fonksiyonlar, sabordinasyon ilkesi

2014, vi + 93 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

SOME SUBCLASSES OF BI-UNIVALENT FUNCTIONS

Şahsene ALTINKAYA

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter; some of definitons and theorems about analytic functions which will be used later are introduced. Furthermore, basic properties are given belong to the class analytic and univalent functions in U .

In the second chapter; the class Σ of analytic and bi-univalent functions is defined and some properties and examples of the class Σ are given.

In the third chapter; the some special subclasses of analytic and bi-univalent functions are worked and coefficient estimates are given for functions in these classes. In addition, theorems for these classes were examined.

In the fourth chapter; all obtained results are discussed.

Key Words: Univalent functions, starlike and convex functions, bi-univalent functions, subordinate condition

2014, vi + 93 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten, çalışmanın süreklilik gerektirdiğini bana yüksek lisans öğrenimim sürecinde idrak ettiren, her türlü yardım ve desteğini esirgemeyen, ayrıca insani ve ahlaki değerleri ile de kendime örnek edindiğim danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ'e, eğitim ve öğretim hayatım boyunca matematik öğrenimime katkısı olan tüm hocalarıma, yüksek lisans eğitimi sürecinde desteklerinden faydalandığım bilimin ve bilim insanının destekçisi olan TÜBİTAK'a, sonsuz sabrı ve hoşgörüsü ile eğitimime destek olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Şahsene ALTINKAYA
…/…/….

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}\cup\{0\}$
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
D_r	Orjin merkezli r yarıçaplı disk
$D(z_0,r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk
$\overline{D}(z_0,r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk
$\partial D(z_0,r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık diskin sınırı
U	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<1\}$, Açık birim disk
$f(U)$	U diskinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
$f\prec g$	f fonksiyonunun g fonksiyonuna sabordine olması
$k(z)$	Koebe fonksiyonu
Σ	U diskinde tanımlı analitik ve yalınkat fonksiyonların sınıfı
A	U diskinde analitik ve normalizasyonu sağlayan fonksiyonların sınıfı
S	U diskinde analitik, yalınkat ve normalizasyonu sağlayan fonksiyonların sınıfı
P	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
S^*	U diskinde analitik, yalınkat ve yıldızıl olan fonksiyonların sınıfı
K	U diskinde analitik, yalınkat ve konveks olan fonksiyonların sınıfı
$S^*(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli yıldızıl olan fonksiyonların sınıfı
$K(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli konveks olan fonksiyonların sınıfı
$S^*_\Sigma(\alpha)$	U diskinde analitik, yalınkat ve α mertebeli bi-yıldızıl olan fonksiyonların sınıfı
$D^n f(z)$	f fonksiyonun $n.$ mertebeden Salagean türevi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

TEZ ONAYI

Şahsene ALTINKAYA tarafından hazırlanan "Kendisi ve Tersi Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Başkan **:** Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye **:** Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK
U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye **:** Prof. Dr. İlhan TAPAN
U.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Fizik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü
…/…/2014

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…/…/…

İmza

Şahsene ALTINKAYA

GİRİŞ

Analitik yalınkat fonksiyonlar teorisi ile ilgili ilk çalışmalar 1907 yılında Koebe tarafından yapılmıştır. Bunu 1914 de Gronwall'ın alan teoreminin ispatı ve 1916 da Bieberbach'ın katsayı tahmini izlemiştir.

Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesini birim diske konform olarak dönüştüren bir dönüşümün varlığı Riemann dönüşüm teoremi olarak bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan yalınkat fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskte tanımlanan yalınkat fonksiyonlarla çalışmak çoğu kez kolaylık sağlar. Yalınkat fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik, yalınkat ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalizasyonunu sağlayan f fonksiyonların oluşturduğu bir S sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1916 da Bieberbach tarafından ileri sürülen; $z \in U$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahip $f \in S$ fonksiyonu için $n \geq 2$ iken $|a_n| \leq n$ olduğu uzun yıllar matematikçileri meşgul etmiştir. $n = 2$ için ispat Bieberbach (1916) tarafından verilmiştir. Daha sonra $n = 3$ için doğruluğu Loewner (1923) tarafından, $n = 4$ için doğruluğu Garabedian ve Schiffer (1955) tarafından, $n = 5$ için doğruluğu Pederson ve Schiffer (1972) tarafından ve $n = 6$ için doğruluğu Pederson (1968) ve Ozawa (1969) tarafından gösterilmiş, genel ispat ise Louis de Branges (1985) tarafından yapılmıştır.

Lewin (1967); kendisi ve tersi yalınkat olan fonksiyonları bi-ünivalent olarak adlandırmış ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfı Σ ile göstermiştir. 1986 yılında Brannan and Taha bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarının başlangıç katsayıları için tahminler elde etmiştir. Son zamanlarda Σ sınıfı ve Taylor-Maclaurin serilerinin ilk iki katsayısı olan a_2 ve a_3 ün modüllerinin üst sınırlarını bulma ile ilgili çalışmalar yapılmaktadır. Fakat $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ için $|a_n|$ katsayı tahmini hala açık bir problemdir.

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir. Ayrıca birim diskte analitik yalınkat fonksiyonların sınıfı tanımlanacak ve bazı özellikleri üzerinde durulacaktır.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde verilecek temel tanımlar ve teoremler ile ilgili ayrıntılar Duren (1983), Palka (1991) ve Conway (1995) de bulunabilir.

1.1.1. Tanım. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

kümelerine sırasıyla z_0 merkezli r yarıçaplı *açık disk, kapalı disk* ve *çember* denir. Kısalık için $D(0,r)$ diski D_r ile gösterilecektir.

1.1.2. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme, V ve W, $\mathbb{C}$ de ayrık açık iki küme olsun. Eğer $A \cap V \neq 0$, $A \cap W \neq 0$ ve $A \subset V \cup W$ ise A kümesine *bağlantısız*dır denir. Bağlantısız olmayan kümeye *bağlantılı*dır denir. Açık ve bağlantılı bir kümeye *bölge* denir.

1.1.3. Tanım. Bir X vektör uzayında $L[f,g] = \{h = tf + (1-t)g : 0 \leq t \leq 1\}$ kümesine, f ve g noktalarını birleştiren *doğru parçası* denir. f ve g fonksiyonlarına $L[f,g]$

doğru parçasının *uç noktaları,* $0<t<1$ için h noktasına da $L[f,g]$ doğru parçasının *iç noktası* adı verilir. Bir $C \subset X$ alt kümesi verildiğinde her $f,g \in C$ için $L[f,g] \subset C$ oluyorsa C ye *konveks küme* denir. Eğer C konveks kümesindeki bir f noktası herhangi bir $L[f,g] \subset C$ doğru parçasının bir iç noktası değilse f noktasına C kümesinin *ekstrem noktası* denir. C kümesinin ekstrem noktalarının kümesi $E(C)$ ile gösterilir (Goodman 1983).

1.1.4. Tanım. $[a,b]$ kapalı aralığının $z=\varphi(t)$ sürekli fonksiyonu altındaki resmine $\mathbb{C}$ de bir *yol* veya *eğri* denir. Her $[a,b]$ için $\varphi'(t)$ mevcut ve $\varphi'(t) \neq 0$ ise eğriye *düzgün eğri* denir. Kendi kendini kesmeyen eğriye *basit eğri,* uç noktaları bitişik olan eğriye *kapalı eğri*, sadece uç noktalarında kesişen eğriye de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde her basit kapalı eğrinin sınırladığı küme sadece B kümesinin noktalarından oluşmuş ise B bölgesine *basit bağlantılı bölge* denir.

1.1.5. Tanım. f bir B bölgesinde kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $z_0 \in B$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *diferansiyellenebilir* veya *türevlenebilir*, limit değerine de f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* denir. Bu türev $f'(z_0)$ biçiminde gösterilir. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğundaki bütün noktalarda differansiyellenebiliyor ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitik*tir denir.

1.1.6. Teorem (Schwarz Yansıma Prensibi). B, $\mathbb{R}$ eksenindeki bir (a,b) aralığını bulunduran ve $\mathbb{R}$ ye göre simetrik olan bir bölge olsun. Üst yarı düzlemdeki kısmı B^+, alt yarı düzlemdeki kısmı B^{-} ile gösterilsin. Eğer f, B de analitik, $a<x<b$ için gerçel ve f nin B^{-} içine olan analitik devamına g denirse,

$$g(z)=\overline{f(\overline{z})}$$

dir.

1.1.7. Tanım. Kompleks düzlemin bir D bölgesinde $f:D\to\mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0\in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin; $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinin de $w_0=f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı varsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında bir *konform dönüşüm*dür denir. Eğer f fonksiyonu her $z_0\in D$ noktasında konform ise f fonksiyonuna D bölgesinde *konform*dur denir.

1.1.8. Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi). D, kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz alt kümesi ve $z_0\in D$ noktası verilmiş olsun. Bu taktirde $f(z_0)=0,\ f'(z_0)>0$ özelliğinde D yi $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diski üzerine birebir olarak resmeden bir tek f analitik fonksiyonu vardır (Riemann 1851).

Riemann Dönüşüm Teoremi gereği basit bağlantılı bir bölgede yalınkatlıkla ilgili problemleri çözmek için bu bölge yerine U birim diskini almak daha uygundur.

1.1.9. Teorem (Caratheodary Genişleme Teoremi). D bir γ Jordan eğrisi ile sınırlanmış bir bölge ve f fonksiyonu D bölgesini U birim diski üzerine konform olarak dönüştüren bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, f fonksiyonu $\overline{D}$ bölgesinde $\overline{U}$ üzerine bir homomorfizme genişletilebilir (Palka 1991).

1.2. Analitik Yalınkat Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri

Bu kısımda birim diskte analitik, birebir ve normalize edilmiş fonksiyonların S sınıfı tanımlanacaktır.

1.2.1. Tanım. D kompleks düzlemde bir bölge olsun. $f: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu birebir ise f fonksiyonuna D de *yalınkat* veya *ünivalent fonksiyon* denir. Başka bir ifade ile her $z_1, z_2 \in D$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa, f fonksiyonu D de *yalınkat*tır. Geometrik olarak, düzlemde $f(D)$ görüntü bölgesinin katlı bölge olmaması şeklinde yorumlanır.

D bölgesinde yalınkat bir fonksiyon, D bölgesinin bütün alt kümelerinde de yalınkattır. Bundan böyle çalışmamızda yalınkat fonksiyon denildiğinde analitik yalınkat fonksiyon anlaşılacaktır.

1.2.2. Tanım. U birim diskinde analitik ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı A ile gösterilsin. Her $f \in A$ fonksiyonu,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilebilir.

1.2.3. Tanım. U birim diskinde analitik, yalınkat ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartını sağlayan (1.1) formundaki fonksiyona *normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyon* denir. U da normalize edilmiş bütün yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir.

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli yer tutan Bieberbach Teoremi, S sınıfına ait bir f fonksiyonu için a_2 katsayısının hesaplanmasında büyük rol oynar.

1.2.4. Teorem (Bieberbach Teoremi). S sınıfındaki her f fonksiyonu için $|a_2| \le 2$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik hali, $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = z + 2z^2 + \cdots$ şeklinde Taylor seri açılımına sahip $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır (Bieberbach 1916).

1.2.5. Teorem (Koebe Dörtte Bir Teoremi). $f \in S$ ve f fonksiyonu γ değerini almasın. Yani $f(z) = \gamma$ denkleminin U da çözümü olmasın. Bu durumda $\gamma \ge \frac{1}{4}$ dür. Eşitlik, Koebe fonksiyonun ve rotasyonları tarafından sağlanır (Koebe 1907).

Koebe Dörtte Bir Teoremi, S sınıfına ait her f fonksiyonun $f(U)$ görüntü bölgesinin orijin merkezli $1/4$ yarıçaplı açık bir diski kapsadığını gösterir.

1.2.6. Teorem (Bieberbach Tahmini). S sınıfına ait her f fonksiyonu $n \ge 2$ olmak üzere $|a_n| \le n$ eşitsizliğini sağlar. Eşitlik ancak ve ancak Koebe fonksiyonu ve rotasyonları için sağlanır (Bieberbach 1916).

Aşağıdaki teorem S sınıfının bazı elemanter dönüşümler altında değişmez kaldığını gösterir.

1.2.7. Teorem. $z \in U$ ve $f \in S$ ise aşağıda tanımlanan g fonksiyonları da S sınıfına aittir.

(i) $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \overline{a}_3 z^3 + \ldots$ eşlenik dönüşümü.

(ii) $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ rotasyonu.

(iii) $0 < r < 1$ için $g(z) = \frac{1}{r} f(rz)$ genişlemesi.

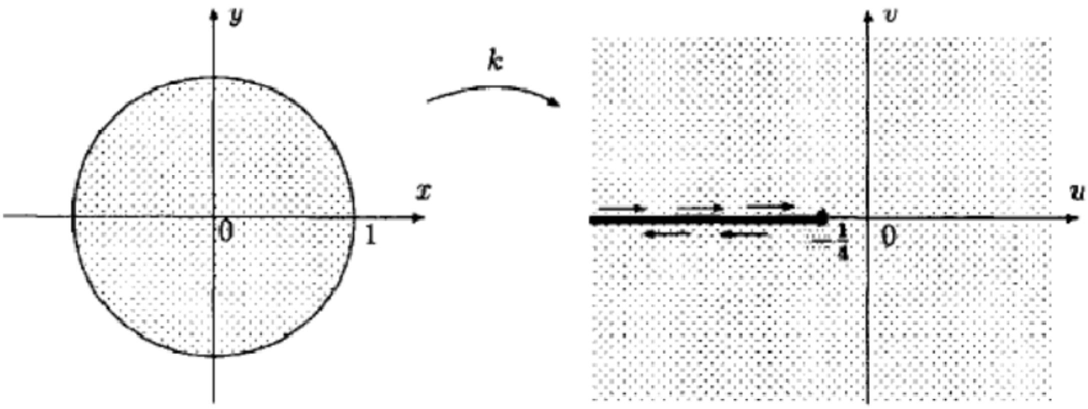
(iv) $|\alpha|<1$ ve $\varphi(z)=\dfrac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z}$ olmak üzere $g(z)=\dfrac{f(\varphi(z))-f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)}$ disk otomorfizmi.

(v) $n\in Z^+$ için $g(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z\left(\dfrac{f(z^n)}{z^n}\right)^{1/n}$ kök dönüşümü.

(vi) $f(z)\neq w$ olmak üzere $g(z)=\dfrac{wf(z)}{w-f(z)}$ atlanmış değer dönüşümü.

(vii) φ, f fonksiyonunun değer kümesi üzerinde yalınkat ve analitik bir fonksiyon olmak üzere $g(z)=(\varphi\circ f)(z)$ bileşke dönüşümü.

S sınıfına ait en önemli fonksiyonlardan biri; $z\in U$ için $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ şeklindeki *Koebe fonksiyonu*dur. Koebe fonksiyonu birim diski $\mathbb{C}-\{w\in\mathbb{C}:-\infty<w\leq -1/4\}$ bölgesi üzerine bire bir olarak dönüştürür (Şekil 1.2.1).



Şekil 1.2.1 $k(U)$ görüntü bölgesi

1.2.8. Teorem (Schwarz Lemma). $w(z)=c_1z+c_2z^2+\cdots$ fonksiyonu U birim diskinde tanımlanmış ve analitik olsun. Ayrıca $w(0)=0$ ve $|w(z)|<1$ koşullarını gerçeklesin. Bu durumda $|w(z)| \leq |z|$ ve $|w'(0)| \leq 1$ eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik durumu ancak ve ancak $w(z) = kz, \ |k| = 1$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.3. *P* Sınıfı ve Temel Özellikleri

Bu kısımda U birim diskinde analitik ve reel kısmı pozitif fonksiyonların sınıfı tanımlanacak ve kompleks düzlemde sabordinasyon prensibi verilecektir.

1.3.1. Tanım. U birim diskinde analitik $f(0) = 1$ ve $z \in U$ için $\operatorname{Re}\{f(z)\} > 0$ olan

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

biçiminde tanımlı fonksiyonlara *reel kısmı pozitif analitik fonksiyon* denir. U birim diskinde reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir.

$z \in U$ için,

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu P sınıfına ait önemli bir fonksiyondur. Bu fonksiyon U birim diskini $H^+ = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$ bölgesi üzerine konform olarak resmeder. Bir anlamda Koebe fonksiyonunun S sınıfında oynadığı temel rolü, p fonksiyonu P sınıfında oynar.

P sınıfına ait bir fonksiyonun yalınkat olması gerekli değildir. Örneğin, $n \geq 2$ tamsayısı için $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu P sınıfına ait fakat U birim diskinde yalınkat değildir.

Aşağıdaki teorem P sınıfına ait fonksiyonların belli işlemler altında değişmez kaldığını gösterir.

1.3.2. Teorem. f, f_1 ve f_2 fonksiyonları P sınıfına ait ise aşağıda verilen g fonksiyonları da P sınıfına aittir.

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ için $g(z) = f(e^{i\alpha} z)$.

(ii) $-1 \leq t \leq 1$ için $g(z) = [f(z)]^t$ veya $g(z) = f(tz)$.

(iii) $g(z) = 1/f(z)$.

(iv) $t_1, t_2 > 0$ ve $t_1 + t_2 \leq 1$ için $g(z) = [f_1(z)]^{t_1} [f_2(z)]^{t_2}$.

(v) $\lambda \in U, f(\lambda) = a + ib$ ise $g(z) = \dfrac{1}{a}\left[f\left(\dfrac{z+\lambda}{1-\bar{\lambda} z} \right) - ib \right]$.

(vi) $b \in \mathbb{R}$ için $g(z) = \dfrac{f(z) + ib}{1 + ibf(z)}$.

1.3.3. Teorem. Eğer reel kısmı pozitif olan $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu U da analitik bir fonksiyon ise

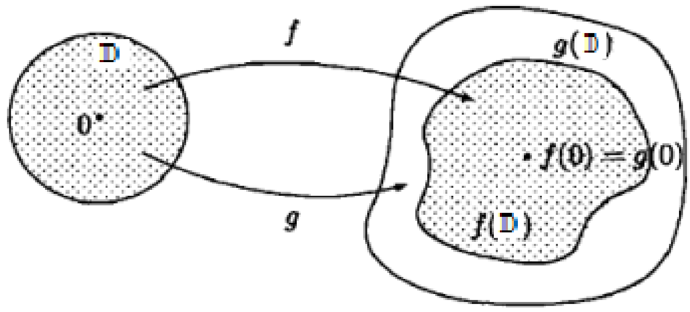
$$| p_n | \leq 2 \quad \left(n \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}\right)$$

ve

$$\left| p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right| \leq 2 - \frac{| p_2 |^2}{2}$$

dir (Pommerenke 1975).

1.3.4. Teorem (Sabordinasyon Prensibi). $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları U birim diskinde tanımlanmış analitik iki fonksiyon olsun. $w(z)$ fonksiyonu U da tanımlı, analitik ve $w(0)=0, |w(z)|<1$ koşullarını gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere $f(z)=g(w(z))$ şeklinde ifade edilebiliyorsa $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna *sabordine*dir denir ve $f(z) \prec g(z)$ olarak yazılır.



Şekil 1.3.1

Sabordinasyon Prensibi Schwarz Lemmanın genelleştirilmiş halidir. $w(z)=z$ olarak alındığında Sabordinasyon Prensibi Schwarz Lemmaya indirgenir.

Aşağıdaki teorem sabordinasyon prensibinin geometrik yorumunu verir.

1.3.5. Teorem. $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları U birim diskinde tanımlı analitik iki fonksiyon olsun. $g(z)$ fonksiyonu U birim diskinde yalınkat ise $f(z)$ fonksiyonunun $g(z)$ fonksiyonuna sabordine olması için gerek ve yeter şart

$$f(0)=g(0) \text{ ve } f(U) \subset g(U)$$

olmasıdır.

1.4. Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kısımda, birim diskte analitik yalınkat fonksiyonların görüntü bölgelerinin yıldızıl veya konveks bölge olması durumunda oluşan alt sınıflar tanımlanacaktır.

1.4.1. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ olsun. Eğer sabit bir $w_0 \in A$ noktasını, her bir $w \in A$ noktasına birleştiren doğru parçası A içinde kalıyorsa, yani her $t \in [0,1]$ için $(1-t)w_0 + tw \in A$ ise A kümesine w_0 *noktasına göre yıldızıl küme* denir. Eğer bütün $w_1, w_2 \in A$ noktalarını birleştiren doğru parçası A içinde kalıyorsa, yani her $t \in [0,1]$ için $(1-t)w_1 + tw_2 \in A$ ise A kümesine *konveks küme* denir. Başka bir ifadeyle, konveks küme her bir noktasına göre yıldızıl olan kümedir.

1.4.2. Tanım. $r \in (0,1]$, $f \in A(D_r)$ ve $z_0 \in D_r$ olsun. Eğer f fonksiyonu D_r de yalınkat ve $f(D_r)$ bölgesi $w_0 = f(z_0)$ noktasına göre yıldızıl ise f fonksiyonuna D_r üzerinde z_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. Orijine göre yıldızıl olan fonksiyona *yıldızıl fonksiyon* adı verilir. Ayrıca f fonksiyonu D_r de yalınkat ve $f(D_r)$ bölgesi $\mathbb{C}$ de konveks ise f fonksiyonuna D_r üzerinde *konveks fonksiyon* denir.

D_r diskinde yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfları sırası ile $S^*(D_r)$ ve $K(D_r)$ ile gösterilir. Özel olarak, U birim diskinde $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahip yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfları sırasıyla S^* ve K ile gösterilir.

Aşağıdaki iki teorem yıldızıl ve konveks fonksiyonların analitik ifadesini vermektedir.

1.4.3. Teorem. $f : U \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu takdirde, f fonksiyonun yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve her $z \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır.

1.4.4. Teorem. $f:U\to\mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $f'(0)\neq 0$ ve her $z\in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$$

olmasıdır.

1.5. Yıldızıl ve Konveks Fonksiyon Kavramından Hareketle Tanımlanan Yalınkat Fonksiyonlar

Bu kısımda U açık birim diskinde tanımlı yıldızıl ve konveks fonksiyonlara ait temel kavramlar verilecektir.

1.5.1. Tanım. $f:U\to\mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $0\le\alpha\le 1$, $f(0)=0$ ve $f'(0)\neq 0$ olmak üzere $z\in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha$$

ise f fonksiyonuna α *mertebeli yıldızıl fonksiyon* denir.

1.5.2. Tanım. $f:U\to\mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $0\le\alpha<1$, $f(0)=0$ ve $f'(0)\neq 0$ olmak üzere $z\in U$ için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha$$

ise f fonksiyonuna α *mertebeli konveks fonksiyon* denir.

U birim diskinde $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde normalize edilmiş α mertebeli yıldızıl ve konveks fonksiyonların sınıfı sırasıyla $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ ile gösterilir.

1.5.3. Teorem. Tanım 1.5.1 ve 1.5.2 den $f \in K(\alpha) \Leftrightarrow zf' \in S^*(\alpha)$ olduğu görülür.

2. Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Bu bölümde birim diskte tersi de yalınkat olan analitik fonksiyonların sınıfı üzerinde durulacaktır. Ayrıca adına alan teoremi denilen, Σ sınıfına ait fonksiyonların Laurent açılımının katsayılarıyla ilgili bir teoremi vermektir. Gronwall (1916) tarafından gösterilen bu teorem, Σ ve S sınıflarının elemanter özellikleri ile ilgili çalışmalarda önemli bir rol oynar.

2.1. Bi-ünivalent Fonksiyonların Temel Özellikleri

2.1.1.Tanım. f, (1.1) formunda bir fonksiyon olsun. S sınıfına ait (1.1) formundaki her f fonksiyonu için

$$f^{-1}(f(z))=z, \qquad (z\in U)$$

ve

$$f(f^{-1}(w))=w, \qquad \left(|w|<r_0(f),\ r_0(f)\geq \frac{1}{4}\right)$$

eşitliklerini sağlayan

$$f^{-1}(w)=w-a_2w^2+(2a_2^2-a_3)w^3-(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)w^4+\cdots$$

şeklinde bir f^{-1} ters fonksiyonuna vardır.

Eğer hem $f(z)$ hem de $f^{-1}(z)$ fonksiyonu U açık birim diskinde yalınkat ise A sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için U da *bi-ünivalenttir* denir.

U da (1.1) formunda verilen bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı Σ ile gösterilir. (1.1) formundaki bir $f(z)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa Σ sınıfına aittir denir.

(i) $f(z) \in S$

(ii) Orjinin belli bir komşuluğunda $f(g(z)) = g(f(z)) = z$ şartını sağlayan bir $g(z) \in S$ fonksiyonu vardır.

Bazen birim daire yerine birim dairenin dışını almak kullanışlı olabilir. O halde $U^* = \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < \infty\}$ bölgesi üzerinde

$$g(w) = w + b_0 + \frac{b_1}{w} + \frac{b_2}{w^2} + \cdots = w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{w_n} \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlı yalınkat fonksiyonların sınıfını alalım.

$\psi_1 = \phi_1$ olmak üzere $\phi(z) = \phi_1 z + \phi_2 z^2 + \cdots$ ve $\psi(z) = \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \cdots$ açık birim diski, açık birim diski içeren yalınkat bir bölge üzerine dönüştüren iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f(z) = \phi[\psi^{-1}(z)] \tag{2.2}$$

fonksiyonu *bi-ünivalent*tir (Nehari 1952).

Σ sınıfına ait bütün fonksiyonların (2.2) formunda temsil edilip edilemeyeceği açık değildir. Eğer temsil edilebiliyorlarsa, bu temsil tek türlü olmayabilir. $\phi(z)$ veya $\psi(z)$ ya da her ikisi de $|z| < 1$ de kutuplara sahip olmalarına rağmen (2.2) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu Σ ya aittir ve $z = p_\phi$, $z = p_\psi$ ayrı ayrı kutuplar olması şartı ile

$$|\phi(p_\phi)| \geq 1 \quad \text{ve} \quad |\phi(p_\psi)| \geq 1$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Ayrıca, Σ sınıfına ait bütün fonksiyonların, (2.2) formunda olsalar bile, $|z|<1$ de analitik $\phi(z)$ ve $\psi(z)$ fonksiyonları ile temsil edilip edilemeyeceği de açık değildir.

2.1.2 Teorem. $f \in S$ ve $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r < 1\}$ olsun. Bu durumda $f(\overline{D}_r)$ sınırlı bölgesinin alanı

$$\mathrm{A(r)} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n}$$

dir.

2.1.3. Teorem (Alan Teoremi). $\varphi \in \Sigma$ fonksiyonu (2.1) bağıntısı ile verilmiş ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \le 1$$

dir.

2.1.4. Alan Teoreminin Uygulaması. (1.1) formundaki $f(z) \in S$ fonksiyonuna alan teoremi uygulanırsa

$$\frac{1}{f(z)} = z^{-1} + \sum_{p=0}^{\infty} c_p z^n$$

olmak üzere

$$\sum_{p=1}^{\infty} p |c_p|^2 \le 1 \tag{2.3}$$

elde edilir.

$n \geq 1$ için $f_n(z) = [f(z^n)]^{1/n}$ olsun. Bu durumda eğer $f(z) \in S$ ise $f_n(z) \in S$ dir. Eğer $f(z) \in \Sigma$ ise $f_n(z) \in \Sigma$ dir.

$$f_n(z) = (f_n(z^n))^{\frac{1}{n}} = z + \frac{1}{n} a_2 z^{n+1} + \left(\frac{1}{n} a_3 - \frac{n-1}{2n^2} \right) z^{2n+1} + \cdots$$

$$\frac{1}{f_n(z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{n} a_2 z^{n-1} - \left(\frac{1}{n} a_3 - \frac{n-1}{2n^2} \right) z^{2n-1} + \cdots$$

(2.2) eşitsizliğini $f_n(z)$ ye uygulayarak,

$$(n-1)|a_2|^2 + (2n-1)\left| a_3 - \left((n+1)/2n \right) a_2^2 \right|^2 \leq n^2$$

elde edilir ve buradan

$$\left| a_3 - \frac{n+1}{2n} a_2^2 \right| \leq \left[\frac{n^2 - (n-1)|a_2|^2}{2n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

sonucuna ulaşılır.

$$f_n^{-1}(z) = z - \frac{1}{n} a_2 z^{n+1} - \left(\frac{1}{n} a_3 - \frac{3n+1}{2n^2} \right) z^{2n+1} + \cdots$$

ve

$$\frac{1}{f_n^{-1}(z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{n} a_2 z^{n-1} + \left(\frac{1}{n} a_3 - \frac{3n-1}{2n^2} \right) z^{2n-1} + \cdots$$

olduğundan $f_n(z)$ fonksiyonuna (2.3) eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|a_3 - \frac{3n+1}{2n}a_2^2\right| \leq \left[\frac{n^2 - (n-1)|a_2|^2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

ve

$$\left|a_3 - \frac{3n-1}{2n}a_2^2\right| \leq \left[\frac{n^2 - (n-1)|a_2|^2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(2.5) ve (2.6) eşitsizliklerinden

$$\frac{(n-1)}{2n}|a_2^2| \leq \left[\frac{n^2 - (n-1)|a_2|^2}{2n-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

bulunur ve $|a_2|^2$ için ikinci derece eşitsizliğin her iki tarafının karesini alarak

$$|a_2|^2 \leq \frac{2n^2}{(n-1)\left((2n)^{1/2}+1\right)} \tag{2.7}$$

eşitsizliği bulunur. $n=2$, 3 ve 4 için (2.7) eşitsizliğinin sağ tarafı sırasıyla 2.67, 2.61 ve 2.78 değerlerini alır. Böylece $n=3$ için

$$|a_2|^2 < 2.61$$

ya da

$$|a_2| < 1.62 \tag{2.8}$$

sonucu elde edilir.

Λ_1, U birim diskinde ünivalent olan ve $\phi(U)\supset U$ şartını sağlayan $\phi(z)=A_1z+A_2z^2+\cdots$ formundaki fonksiyonların sınıfı, Σ_1 ise $\phi,\psi\in\Lambda_1$ ve $\phi'(0)=\psi'(0)$ olmak üzere $\phi\circ\psi^{-1}$ formundaki fonksiyonların sınıfı olsun. $\Sigma_1\subset\Sigma$ olduğu Nehari tarafından gösterildi. Fakat $\Sigma_1=\Sigma$ olduğu bilinmiyordu. Suffridge (1969) $a_2=4/3$ olmak üzere Σ_1 de bir fonksiyon tanımladı ve Σ ya ait bütün fonksiyonlar için $a_2\le 4/3$ olduğunu tahmin etti. Netanyahu (1969) Σ_1 de $a_2\le 4/3$ olduğunun doğru olduğunu ispatladı.

U da lokal olarak ünivalent ve en fazla iki değerli olan $\phi(z)=A_1z+A_2z^2+\cdots$ formundaki fonksiyonlarının sınıfı Λ_2 olsun. Ayrıca $\phi,\psi\in\Lambda_2$ ve $\phi'(0)=\psi'(0)$ olmak üzere $\phi\circ\psi^{-1}$ formundaki fonksiyonların sınıfı Σ_2 olsun. Burada ψ^{-1} in dalı sıfırı sıfıra götüren olarak seçilebilir. Sonuç olarak $\Lambda_1\subset\Lambda_2$ ve $\Sigma_1\subset\Sigma_2$ dir.

2.2. Bi-ünivalent Fonksiyonlar Üzerine Sonuçlar

Bu bölümde bi-ünivalent fonksiyonların Σ sınıfı için bazı örnekler verilmiştir.

2.2.1. Teorem. $\Sigma_1\subset\Sigma\subset\Sigma_2$

İspat. h_θ, Σ da olduğu halde Σ_1 de olmayan bir fonksiyon olsun.

2.2.2. Örnek. $0\le\theta<\pi/2$ olmak üzere

$$h_\theta(z)=\cos\theta\,\frac{ze^{-i\theta}}{1-(ze^{-i\theta})^2}+\sin\theta\left[\frac{i}{2}\log\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\right]$$

ile tanımlanan $h_\theta\in S$ fonksiyonunu alalım. $u_0(\theta)=\pi/4\sin\theta$ ve $\theta\to\pi/2^-$ iken $v_0(\theta)\to+\infty$ olmak üzere h_θ altında U nun görüntüsü $\{w=u_0(\theta)+iv:v\le v_0(\theta)\}$ ve $\{w=-u_0(\theta)+iv:v\ge -v_0(\theta)\}$ dik ayrıklarından daha küçük olan kompleks düzlemdir.

$u_0(\theta)+iv_0(\theta)\notin U$ ve $u_0(\theta)\geq 1/2$ olmak üzere θ, $\pi/2$ nin yeteri kadar yakın komşuluğunda olsun. Yansıma prensibi gereği h_θ^{-1}, U üzerinde bire bir olduğu kolayca görülen $U\cap\{W:|\operatorname{Re} w|<u_\theta(\theta)\}$ dan U ya analitik bir genişlemeye sahiptir. Bu durumda $h_\theta\in\Sigma$ dır.

$h_\theta\in\Sigma_1$, bazı $\phi,\psi\in\Lambda_1$ ve $\phi'(0)=\psi'(0)$ için $h_\theta=\phi\circ\psi^{-1}$ olsun. ϕ fonksiyonu $\psi^{-1}(U)$ yu $h_\theta(U)$ ya dönüştürdüğü ve $h_\theta(U)$ düzlemde yoğun olduğu için, $\psi^{-1}(U)$ dan daha geniş bir bölge üzerinde bire bir olamaz. Böylece, $\psi^{-1}(U)=U$ ve $h_\theta(U)=\phi(U)$ dir. $U\subset\phi(U)$ fakat $B\not\subset H_\theta(B)$ olduğundan bu imkansızdır. Bu sonuç $f\in\Sigma_1$ iken $f(U)$ nun düzlemde yoğun olmadığını gösterir.

$\Sigma\subset\Sigma_2$ olduğunu göstermek için, sıfırı içeren $h(U)\cap U$ nun bileşeni boyunca U ve $h(U)$ yu parçalayarak $\mathbb{C}$ üzerinde, $h\in\Sigma$ için basit bağlantılı, iki katlı Riemann M yüzeyi inşa edelim. Sonra $\phi(0)=0$ olmak üzere $\phi:B\to\mathbb{C}$ tanımlayalım ve bu durumda ϕ^{-1} için Riemann yüzeyi olarak M elde edilir. Buradan $\phi\in\Lambda_2$ ve $\psi=h^{-1}\circ\phi\in\Lambda_2$ dir.

2.2.3. Teorem. $\Sigma\subset\Sigma_2$

İspat. $h\in\Sigma$, $B_1=\{(w,1):w\in U\}$ ve $B_2=\{(w,2):w\in h(U)\}$ olsun. Buradan $(w,1)=(\widetilde{w},2)$ eşitliği sağlanır ancak ve ancak $w=\widetilde{w}$ dir. Ayrıca bu nokta sıfırı içeren $h(U)\cap U$ nun Ω bileşeni boyunca uzanır. $\mathbb{C}$ nin topolojisinde $M=B_1\cup B_2$ olsun. $\pi(w,j)=w$ olmak üzere $\pi:M\to\mathbb{C}$ olarak tanımlansın ve $j=1,2$ için π_j, π nin B_j sınırlamasını temsil etsin. Bu durumda $\pi_i\circ\pi_f^{-1}$ dönüşümü tanımlı olduğu yerde tek türlüdür. Böylece $\{(\pi_1,B_1),\ (\pi_2,B_2)\}$, M için analitik bir atlastır ve M de bir Riemann yüzeyidir. Ayrıca B_1 ve B_2 basit bağlantılı olduğundan M de basit bağlantılıdır ve $B_1\cap \mathrm{B}_2$ bağlantılıdır. M nin hiperbolik olduğu açıktır ve böylece $g(0)=(0,1)$ olmak üzere U den M üzerine bijektif bir g fonksiyonu vardır. $\phi=\pi$ olmak üzere

$\phi : U \to \mathbb{C}$ olarak tanımlanırsa $\phi \in \Lambda_2$ olduğu açıkça görülür.

$h \in \Sigma$ olduğundan h^{-1}, U üzerinde analitik ve bire birdir. h^{-1} in $h(U)$ üzerindeki bire bir analitik dalını h_2^{-1} ile gösterelim. $j = 1,2$ için $g(z) \in B_j$ ise $\psi : U \to \mathbb{C}$ olmak üzere $\psi(z) = (h_j^{-1} \circ \pi \circ g)(z)$ olarak tanımlayalım. Ω üzerinde $h_1^{-1} = h_2^{-1}$ olduğu için ψ iyi tanımlıdır. Buradan $\psi \in \Lambda_2$ ve $h = \phi \circ \psi^{-1}$ olup $h \in \Sigma_2$ dır.

ϕ, Ω yı tam bir kere örter ve ψ, $h^{-1}(\Omega)$ yı tam bir kere örter. Böylece Σ üzerine $|a_2|$ yi maksimize etmek için, Λ_2 deki fonksiyonlar arasında 0 ın komşuluğunu tam bir kere örten bir uç fonksiyon bulunabilir.

Aşağıdaki örnek $\Sigma \subset \Sigma_2$ olduğunu gösteren bir örnektir.

2.2.4. Örnek. $\alpha > 1$ için $\tau(1) = 1$ olmak üzere $\tau(z) = \dfrac{(z+1)^{\alpha}}{2^{(\alpha-1)}} - 1$ olsun. $\tau\big|\mathbb{N}$ nin bire bir ve $\tau(\mathbb{N}) = U$ olan sıfırın bir $\mathbb{N}$ komşuluğunun olduğunu gösterelim. x_0, $\mathbb{N}$ de τ nun sıfırı olmak üzere $g(z) = \dfrac{z + x_0}{1 + zx_0}$ ve $\phi = \tau \circ g$ alalım. $2 < \alpha \le 4$ için $\phi \in \Lambda_2 - \Lambda_1$ dir. $\psi(z) = -\phi(-z)$ ise $\psi \in \Lambda_2$ ve $h = \phi \circ \psi^{-1} \in \Sigma_2$ dir. Fakat $\alpha > 2$ olduğu zaman -1 in komşuluğunda h fonksiyonu ünivalent olmaz. Özellikle $\alpha = 3$ için h fonksiyonu, -1 de holomorfiktir ve 2. mertebeden kritik noktaya sahiptir. Buradan $h \notin \Sigma$ dır.

τ nun U yu ünivalent olarak örttüğünü ya da buna eş olarak $f(z) = (1+z)^{\alpha}$ fonksiyonunun yarıçapı ve merkezi $2^{\alpha-1}$ olan D diskini ünivalent olarak örttüğünü gösterelim. $f(e^{it}) = [2\cos(t/2)]^{\alpha} e^{it\alpha/2}$ olduğunu ve kutup formunda ∂D yi tanımlayan $\rho = 2^{\alpha}\cos(t/2)$ yi düşünelim. $0 \le t \le \pi/a$ için $2^{\alpha}\cos(\alpha t/2) \le [2\cos(t/2)]^{\alpha}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $v(t) = [2\cos(t/2)]^{\alpha} - 2\cos(t/2)$ alarak $v(0) = 0$ ve

$$v'(t) = \frac{\alpha}{2}\left[\sin\left(\frac{\alpha t}{2}\right) - \cos^{(\alpha-1)}\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

elde edilir.

$0 < t \le \pi/a$ için $\sin(\alpha t/2) > \sin(\alpha t/2)$ ve sonuç olarak $v'(t) > 0$ dır. Böylece $0 \le t \le \pi/a$ için $v(t) > 0$ dır ve istenilen eşitsizlik kurulur.

2.2.5. Katsayı Problemi. $\phi(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \cdots$, $\psi(z) = B_1 z + B_2 z^2 + \cdots$ ve $A_1 = B_1$ ise

$$h(z) = (\phi \circ \psi^{-1})(z) = z + \left(\frac{A_2 - B_2}{A^2}\right) z^2 + \cdots$$

dir.

Eğer $j = 1{,}2$ olmak üzere $\psi(z) = -\phi(-z)$ alırsak $\phi \in \Lambda_j$ için $\psi \in \Lambda_j$, $h \in \Sigma_j$ ve $h(z) = z + (2A_2 / A_1^2) z^2 + \cdots$ elde edilir. Bu durumda h fonksiyonunun ikinci katsayısının yarıçapını maksimize etmek için

$$\text{maks}\left|\frac{A_2}{A_1^2}\right| \tag{2.9}$$

ekstremal problemini çözmek yeterlidir.

Netanyahu (1969) $j = 1$ olmak üzere (2.9) un çözümünün $2/3$ olduğunu ve bu ekstremal fonksiyonun U birim diskini $(-\infty, -1]$ aralığından daha küçük bir düzlem üzerine dönüştürdüğünü gösterdi. 2.2.6. örneğinde $|A_2/A_1^2| > 2/3$ olmak üzere bir $\phi \in \Lambda_2$ fonksiyonu elde etmek için bu ektremal fonksiyon genelleştirilmiştir.

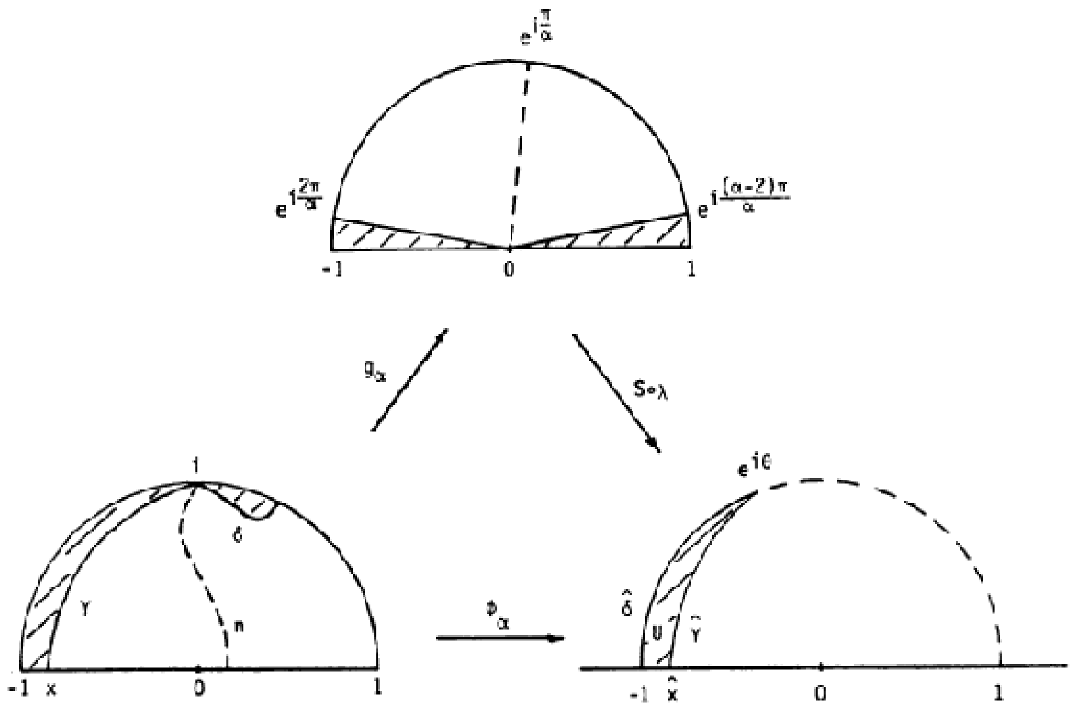
2.2.6. Örnek: $0<\theta<\pi$, $2-(\theta/4)<\alpha\le 4$ olmak üzere $U^{+}=\{z\in U:\operatorname{Im} z>0\}$ olsun. $S(z)=e^{i\theta}(z-e^{i\theta})/(z-e^{-i\theta})$ olmak üzere $\lambda(z)=z^{\alpha}$, $\lambda(1)=1$ olduğunu düşünelim. İlk fonksiyon U^{+} kümesini U birim diskinin içine; ikinci fonksiyon $\{re^{it}:0\le r\le 1\}$ dairesel parçalarını $e^{i\theta}$ dan reel eksene götüren dairesel yaylar üzerine dönüştürür. $e^{i\theta/\alpha}\to 0$ iken $\{re^{it}:0<t<(2\pi-\theta)/\alpha\}$ yayı $S\circ\lambda$ tarafından $(-1,\infty)$ üzerine dönüştürülür. Eğer g fonksiyonu, -1 i 1 e, 0 ı $e^{i\theta/\alpha}$ ya ve 1 i $e^{i(2\pi-\theta)/\alpha}$ ya götüren U^{+} kümesinin bir kendi dönüşümü ise $S\circ\lambda\circ g$ $(-1,1)$ i $(-1,\infty)$ a ve 0 ı 0 a dönüştürür. Yansıma prensibi ile U ya genişletilerek istenen ϕ fonksiyonu elde edilir. Burada $0<\alpha\le 2$ ise $\phi\in\wedge_1$ ve $\alpha>2$ ise $\phi\in\wedge_2$ dir.

g fonksiyonunu elde etmek için $a=\mu(e^{i(2\pi-\theta)/\alpha})$ ve $b=\mu(e^{i\theta/\alpha})$ olmak üzere $\mu(z)=[(1+z)/(1-z)]^2$ ve $T(z)=(az+b-a)/z$ olsun. Bu durumda $g=\mu^{-1}\circ T\circ\mu$ dür.

$\xi=\phi^{-1}(e^{i\theta})=\mu^{-1}((b-a)/(1-a))$ olsun. Sadece $\xi=i$ olma durumu yani $(b-a)/(1-a)=\mu(i)=-1$ alındığında

$$m(\theta,\alpha)=\cot^2\left(\frac{\theta}{2\alpha}\right)-2\cot^2\left(\frac{2\pi-\theta}{2\alpha}\right)=1 \tag{2.10}$$

eşitliği ile verilen m fonksiyonu α nın 2 civarındaki bir aralıkta sürekli bir fonksiyonu olarak θ yı ifade eder. Böylece g_α, T_α, ϕ_α fonksiyonlarının bir parametreli aileleri elde edilir. $\alpha=2$ için $\theta=2\arccos(1/3)$ bulunur ve $j=1$ olmak üzere (2.9) için ϕ_2 bir ekstremal fonksiyondur. Bundan sonra α, 2 den büyük fakat 2 nin komşuluğunda olsun.



Şekil 2.2.1

$\hat{\delta}$ ve $\hat{\gamma}$, $S\circ\lambda$ altında sırası ile $[0,1]$ ve $[-1,0]$ ın resmini temsil etsin. Bu durumda $\hat{\delta}=\{e^{it}:\theta\le t\le\pi\}$ ve $\hat{\gamma}$ $e^{i\theta}$ ya bağlı bir dairesel yaydır ve $\hat{x}$ reel eksen üzerinde bir noktadır. $\hat{\delta}$, $\hat{\gamma}$ eğrileri ve $[-1,\hat{x}]$ U bölgesini $\phi_\alpha|B^+$ ile iki defa kaplanan üst yarı düzleme sınırlar. ϕ_α dönüşümü $\phi_\alpha^{-1}(U)$ nun Şekil 2.2.1 de taralı bölge ile gösterilen iki bileşenden oluştuğunu gösterir. Şekil 2.2.1 de, γ, δ, η eğrileri sırasıyla $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$ ve $\{e^{it}:\theta\le t\le\pi\}$ eğrilerine karşılık gelir ve $\phi_\alpha(x)=\hat{x}$ dir. Eğer V, γ, $[x,1]$ ve $\{e^{it}:\theta\le t\le\pi/2\}$ ile sınırlı bölge ise $\phi_\alpha|V$ birebirdir ve $\phi_\alpha(V),\gamma$ dan daha küçük üst yarı düzlemdir. $\{e^{it}:\pi/2\le t\le\pi\}$ eğrisi tarafından ϕ_α nın W bölgesine sınırlaması olan $[-1,y]$, η ünivalenttir ve $\phi_\alpha(W)=B^+$ dir. $\psi_\alpha(z)=-\phi_\alpha(z)$, $h_\alpha=\phi_\alpha\circ\psi_\alpha^{-1}$ ve imajiner eksende η nin yansıması $\hat{\eta}$ olsun. Bu takdirde $\psi_\alpha,-\overline{W}=\{-z:z\in W\}$ üzerine birebirdir ve $\psi_\alpha(-\overline{W})=B^+$ dır. Böylece h_α fonksiyonunun ünivalent olduğunu göstermek için $-\overline{W}\subset V$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunu 2 nin yeteri kadar yakın komşuluğundaki α-lar için γ ve $\hat{\eta}$ eğrilerinin sadece i de kesiştiğini göstererek yapacağız. a ve b α nın sürekli fonksiyonları olduğu için α 2 ye yakınsarken T_α^{-1} düzgün olarak kapalı T_2^{-1} üst yarı düzlemine yakınsar. Bu durumda B^+ nın kapanışı üzerinde g_α^{-1} düzgün olarak g_2^{-1} ye yakınsar.

$\eta_2 = g_2^{-1}([0,i])$ ve $\gamma_2 = g_2^{-1}([0,1])$ olsun. Bu durumda g_2^{-1} yansıması 0 da konformdur ve bu yüzden η_2 ve γ_2 i noktasında $\pi/2$ açısı altında kesişirler.

Bu ϕ_α fonksiyonları için

$$\frac{A_2}{A_1^2} = \frac{\sin\theta}{\alpha\sin(\theta/\alpha)}\left\{1+\cos(\theta/\alpha) - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\theta/\alpha)}{\sin((\pi-\theta)/\alpha)} + \frac{\sin((\pi-\theta)/\alpha)}{\sin(\theta/\alpha)}\right]\right\} - \cos\theta$$

bulunur.

$\alpha = 2,\ \theta = \theta_0 = 2\arccos(1/3)$ ve $m(\theta,\alpha) = 1$ olmak üzere (2.10) ile verilen m fonksiyonu $d\alpha/d\theta = 3/[3\arccos(1/3) - \pi] \approx 5.44$ eğimine sahiptir. Bu durumda artan α yolu boyunca $(\theta_0, 2)$ noktasında (2.10) düz eğrisinin bir tanjant vektörü

$$\vec{v} = (1, 3/[3\arccos(1/3) - \pi])$$

dir.

Σ üzerinde $|a_2|$ nin maksimumunun Σ_2 üzerindeki kadar büyük olup olmadığı açık bir problemdir. Sonraki problem ise, örnek 2.2.7 de gösterileceği gibi, $j = 2$ iken (2.10) nun değeri en az 0.7236 olarak bulunmasıdır.

2.2.7. Örnek: $0 < b < 1$ olmak üzere

$$f(z) = -z\frac{(1+b)z-2b}{(1+b)z-2bz}\left[\frac{1-bz}{z-b}\right]^2$$

olsun. f bu özellikteki fonksiyonların bir üretimi olduğu için $f(\partial B) \subset \partial B$ dir. Ayrıca f fonksiyonunun türevi alınırsa

$$f'(z) = \frac{-2b^2(1+b)(1-bz)(1-z)^2[z^2+(1-3b)z+1]}{(1+b-2bz)^2(z-b)^3}$$

elde edilir.

f fonksiyonu b de ikinci mertebeden bir kutba, $1/b$ de ikinci mertebeden sıfıra, 1 de ikinci mertebeden bir kritik noktaya sahiptir ve bazı kritik noktalar $z^2+(1-3b)z+1=0$ denkleminin z_0 ve $\overline{z}_0$ köklerindedir. f fonksiyonun görüntüsünün bütün ayrık noktaları için bu kökler hesaplanır. $|z_0|=1$ olmak üzere $\mathrm{I}mz_0 > 0$ olsun. Bu özellikler göz önüne alındığında f fonksiyonu B birim diskini $[-1,\infty)$ aralığından daha küçük bir düzlem üzerine ünivalent olarak dönüştürdüğü görülür. Ayrıca f fonksiyonu $[-1,b)$ aralığını $[-1,\infty)$ üzerine dönüştürür. g fonksiyonu -1 i -1 e, 0 ı 0 a ve 1 i b ye götüren B^+ nın kendi dönüşümü olsun ve $\phi = f \circ g$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\phi(B^+) = f(B^+)$ eşitliği gerçeklenir ve ϕ fonksiyonu $(-1,1)$ i $(-1,\infty)$ üzerine dönüştürür. Yansıma prensibini B ye genişleterek $\phi \in \Lambda_2$ elde edilir. $\mu(z) = [(1+z)/(1-z)]^2$ ve $T(z) = \mu(b)z/[z+\mu(b)-1]$ olduğu yerde g fonksiyonu $\mu^{-1} \circ T \circ \mu$ ile verilir.

Bütün bu işlemlerin sonucunda $A_2/A_1^2 = (-5b^3+3b+2)/4$ elde edilir ki bu $b = 1/\sqrt{5}$ civarında $(1+\sqrt{5})/2\sqrt{5} = 0.7236\ldots$ noktasının (0,1) üzerindeki maksimum değeridir. Bu işlemler $\phi \in \Lambda_2$ özelliğindeki bütün ϕ fonksiyonları için $|A_2/A_1^2| \leq (1+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$ eşitsizliğinin sağlanıp sağlanmadığı sorusunu meydana getirir. Bütün $f \in \Sigma_2$ için

$|a_2| \leq (1+\sqrt{5})/\sqrt{5}$ bulunur ve $f \in \Sigma$ için $|a_2|$ muhtemelen daha küçük bulunur. Herhangi bir durumda $f \in \Sigma$ olduğu zaman $|a_2|$ için $4/3^{+}$ ve 1.51^{-} arasındaki uzaklık oldukça artar (Stayer ve Wright 1981).

3. Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI TAHMİNLERİ

Bu bölümde, birim diskte tersi de yalınkat olan analitik fonksiyonların bazı alt sınıfları tanımlanıp, bu sınıflara ait fonksiyonların katsayı sınırları incelenecektir. Ayrıca bu sınıflar için bulunan katsayı tahminlerinin karşılaştırılması ile ilgili sonuçlar verilecektir.

3.1. $B_\Sigma(\alpha,\lambda)$ ve $B_\Sigma(\beta,\lambda)$ Sınıfları için Katsayı Sınırları

3.1.1. Tanım. g fonksiyonu

$$g(w)=w-a_2w^2+(2a_2^2-a_3)w^3-(5a_2^3-5a_2a_3+a_4)w^4+\ldots \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlı olmak üzere (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f\in\Sigma \text{ ve } \left|\arg\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \qquad (0<\alpha\le 1,\ \lambda\ge 1,\ z\in U) \tag{3.2}$$

ve

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w}+\lambda g'(w)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \qquad (0<\alpha\le 1,\ \lambda\ge 1,\ w\in U) \tag{3.3}$$

şartlarını sağlıyorsa $B_\Sigma(\alpha,\lambda)$ sınıfındadır (Frasin ve Aouf 2011).

3.1.2. Teorem. $0<\alpha\le 1$, $\lambda\ge 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $B_\Sigma(\alpha,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2|\le\frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+1)^2+\alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{4\alpha^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2\alpha}{2\lambda+1}$$

dir.

İspat. (3.2) ve (3.3) den

$$(1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) = [p(z)]^{\alpha} \tag{3.4}$$

ve

$$(1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) = [q(w)]^{\alpha} \tag{3.5}$$

yazılır. Burada $p(z)$ ve $q(w)$ fonksiyonları

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$$

ve

$$q(w) = 1 + q_1 w + q_2 w^2 + \cdots$$

formlarına sahiptir ve P sınıfındadır.

(3.4) ve (3.5) de katsayıları eşitleyerek,

$$(\lambda+1)a_2=\alpha p_1 \tag{3.6}$$

$$(2\lambda+1)a_3=\alpha p_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}p_1^2 \tag{3.7}$$

ve

$$-(\lambda+1)a_2=\alpha q_1 \tag{3.8}$$

$$(2\lambda+1)(2a_2^2-a_3)=\alpha q_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}q_1^2 \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden

$$p_1=-q_1 \tag{3.10}$$

ve

$$2(\lambda+1)^2a_2^2=\alpha^2(p_1^2+q_1^2) \tag{3.11}$$

olduğu görülür. Şimdi (3.6), (3.8) ve (3.11) eşitliklerini kullanarak

$$a_2^2=\frac{\alpha^2(p_2+q_2)}{(\lambda+1)^2+\alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}$$

bulunur. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanarak

$$|a_2|\leq\frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+1)^2+\alpha(1+2\lambda-\lambda^2)}}$$

olduğu kolayca görülür. Bu da teoremde ileri sürülen $|a_2|$ katsayı sınırını verir.

Benzer şekilde, $|a_3|$ sınırını bulmak için (3.7) den (3.9) u çıkararak

$$2(2\lambda+1)a_3 - 2(2\lambda+1)\,a_2^2 = \alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}p_1^2 - \left(\alpha q_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}q_1^2\right) \qquad (3.12)$$

ve devamında (3.9) – (3.11) den

$$a_3 = \frac{\alpha^2(p_1^2+q_1^2)}{2(\lambda+1)^2} + \frac{\alpha(p_2-q_2)}{2(2\lambda+1)}$$

elde edilir. p_1, p_2, q_1, q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 den

$$|a_3| \le \frac{4\alpha^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2\alpha}{2\lambda+1} \qquad (3.13)$$

sonucuna ulaşılır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.1.3. Tanım. g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f \in \Sigma \text{ ve } \mathrm{Re}\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z)\right) > \beta \qquad (0 \le \beta < 1,\ \lambda \ge 1,\ z \in U) \qquad (3.14)$$

ve

$$\mathrm{Re}\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w)\right) > \beta \qquad (0 \le \beta < 1,\ \lambda \ge 1,\ w \in U) \qquad (3.15)$$

şartlarını sağlıyorsa $B_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfındadır (Frasin ve Aouf 2011).

3.1.4. Teorem. $0 \leq \beta < 1$, $\lambda \geq 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $B_{\Sigma}(\beta, \lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2\lambda+1}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2(1-\beta)}{2\lambda+1}$$

dir.

İspat. (3.14) ve (3.15) den

$$(1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) = \beta + (1-\beta)p(z) \tag{3.16}$$

ve

$$(1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) = \beta + (1-\beta)q(w) \tag{3.17}$$

yazılır. (3.16) ve (3.17) de katsayıları eşitleyerek

$$(\lambda+1)a_2 = (1-\beta)p_1 \tag{3.18}$$

$$(2\lambda+1)a_3 = (1-\beta)p_2 \tag{3.19}$$

ve

$$-(\lambda+1)a_2=(1-\beta)q_1 \tag{3.20}$$

$$(2\lambda+1)(2a_2^2-a_3)=(1-\beta)q_2 \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.18) ve (3.20) den

$$p_1=-q_1 \tag{3.22}$$

ve

$$2(2\lambda+1)a_2^2=(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2) \tag{3.23}$$

ve ayrıca (3.19) ve (3.21) den

$$2(\lambda+1)^2a_2^2=(1-\beta)(p_2+q_2)$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi, $|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.19) dan (3.21) i çıkararak

$$2(2\lambda+1)a_3-2(2\lambda+1)a_2^2=(1-\beta)(p_2-q_2)$$

ve (3.23) den a_2^2 nin değeri çekilerek yukarda yerine yazılırsa

$$a_3=\frac{(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2)}{2(\lambda+1)^2}+\frac{(1-\beta)(p_2-q_2)}{2(2\lambda+1)}$$

elde edilir. p_1,p_2,q_1,q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3| \le \frac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+1)^2} + \frac{2(1-\beta)}{2\lambda+1}$$

sonucuna ulaşılır.

3.2. $G_\Sigma(\alpha,\lambda)$ ve $G_\Sigma(\beta,\lambda)$ Sınıfları için Katsayı Sınırları

3.2.1 Tanım. $g = f^{-1}$ olmak üzere A sınıfına ait bir f fonksiyonu,

$$f \in \Sigma, \quad \left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \le 1, z \in U)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \le 1, w \in U)$$

şartlarını sağlıyorsa α mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların $S_\Sigma^*(\alpha)$ sınıfındadır.

3.2.2. Tanım. g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f \in \Sigma \text{ ve } \left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z) + \lambda zf'(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \le 1,\ 0 \le \lambda < 1,\ z \in U) \quad (3.24)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wg'(w)}{(1-\lambda)g(w) + \lambda wg'(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0 < \alpha \le 1,\ 0 \le \lambda < 1,\ w \in U) \quad (3.25)$$

şartlarını sağlıyorsa $G_\Sigma(\alpha,\lambda)$ sınıfındadır (Murugusundaramoorthy ve diğerleri 2013).

Eğer $\lambda = 0$ alınırsa α mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların $S^*_\Sigma(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

3.2.3. Teorem. $0 < \alpha \le 1, 0 \le \lambda < 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $G_\Sigma(\alpha,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{(1-\lambda)\sqrt{1+\alpha}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{4\alpha^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{1-\lambda}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.24) ve (3.25) den

$$\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)} = [p(z)]^\alpha \tag{3.26}$$

ve

$$\frac{wg'(w)}{(1-\lambda)g(w)+\lambda wg'(w)} = [q(w)]^\alpha \tag{3.27}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.26) ve (3.27) de katsayılar eşitlenerek

$$(1-\lambda)a_2 = \alpha p_1 \tag{3.28}$$

$$(\lambda^2-1)a_2^2+2(1-\lambda)a_3=\frac{1}{2}\left[\alpha(\alpha-1)p_1^2+2\alpha p_2\right] \tag{3.29}$$

ve

$$-(1-\lambda)a_2=\alpha q_1 \tag{3.30}$$

$$(\lambda^2-4\lambda+3)a_2^2-2(1-\lambda)a_3=\frac{1}{2}\left[\alpha(\alpha-1)q_1^2+2\alpha q_2\right] \tag{3.31}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.28) ve (3.30) dan

$$p_1=-q_1 \tag{3.32}$$

ve

$$2(1-\lambda)^2a_2^2=\alpha^2(p_1^2+q_1^2) \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.29), (3.31) ve (3.33) den

$$a_2^2=\frac{\alpha^2(p_2+q_2)}{(\alpha+1)(1-\lambda)^2}$$

elde edilir. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 den

$$|a_2|\le\frac{2\alpha}{(1-\lambda)\sqrt{1+\alpha}}$$

bulunur.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.29) dan (3.31) i çıkararak

$$4(1-\lambda)a_3-4(1-\lambda)a_2^2=\alpha(p_2-q_2)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(p_1^2-q_1^2)$$

ve p_1, p_2, q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3|\leq\frac{4\alpha^2}{(1-\lambda)^2}+\frac{\alpha}{1-\lambda}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.2.4. Sonuç. Eğer $0<\alpha\leq 1$ için $\lambda=0$ alınırsa

$$|a_2|\leq\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}},\qquad |a_3|\leq 4\alpha^2+\alpha$$

bulunur. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu α mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların $S_\Sigma^*(\alpha)$ sınıfındadır.

3.2.5 Tanım. $g=f^{-1}$ olmak üzere A sınıfına ait bir f fonksiyonu,

$$f\in\Sigma,\quad \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\beta\quad (0\leq\beta<1, z\in U)$$

ve

$$\mathrm{Re}\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)>\beta\quad (0\leq\beta<1, w\in U)$$

şartlarını sağlıyorsa β mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların $S_\Sigma^*(\beta)$ sınıfındadır.

3.2.6. Tanım. g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, (1.1) formunda verilen bir

$f(z)$ fonksiyonu

$$f \in \Sigma \text{ ve } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)}\right) > \beta \qquad (0 \le \beta < 1,\ 0 \le \lambda < 1,\ z \in U) \tag{3.34}$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{wg'(w)}{(1-\lambda)g(w)+\lambda wg'(w)}\right) > \beta \qquad (0 \le \beta < 1,\ 0 \le \lambda < 1,\ w \in U) \tag{3.35}$$

şartlarını sağlıyorsa $G_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfındadır (Murugusundaramoorthy ve diğerleri 2013).

Eğer $\lambda = 0$ alınırsa β mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların $S_\Sigma^*(\beta)$ sınıfı elde edilir.

3.2.7. Teorem. $0 \le \beta < 1$, $0 \le \lambda < 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $G_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \le \frac{\sqrt{2(1-\beta)}}{(1-\lambda)}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{4(1-\beta)^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(1-\beta)}{1-\lambda}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.34) ve (3.35) den

$$\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)} = \beta + (1-\beta)p(z) \tag{3.36}$$

ve

$$\frac{wg'(w)}{(1-\lambda)g(w)+\lambda wg'(w)}=\beta+(1-\beta)q(w) \tag{3.37}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.36) ve (3.37) de katsayılar eşitlenerek

$$(1-\lambda)a_2=(1-\beta)p_1$$

$$(\lambda^2-1)a_2^2+2(1-\lambda)a_3=(1-\beta)p_2$$

ve

$$-(1-\lambda)a_2=(1-\beta)q_1$$

$$(\lambda^2-4\lambda+3)a_2^2-2(1-\lambda)a_3=(1-\beta)q_2$$

eşitlikleri elde edilir. Devamında benzer teknikler uygulanarak teoremin ispatı tamamlanır.

3.2.8. Sonuç. Eğer $0\le\beta<1$ için $\lambda=0$ alınırsa

$$|a_2|\le\sqrt{2-2\beta}, \qquad |a_3|\le 4(1-\beta)^2+(1-\beta)$$

bulunur. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu β mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların $S_\Sigma^*(\beta)$ sınıfındadır.

3.3. $B_\Sigma(n,\alpha,\lambda)$ ve $B_\Sigma(n,\beta,\lambda)$ Sınıfları için Katsayı Sınırları

3.3.1. Tanım. $f\in A$ olmak üzere

$$D^0 f(z) = f(z)$$

$$D' f(z) = zf'(z)$$

$$\vdots$$

$$D^n f(z) = D^1(D^{n-1} f(z)) \quad (n \in \mathbb{N})$$

ile verilen türev operatörü Salagean (1983) tarafından tanımlanmıştır. Buradan

$$D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k$$

olduğu kolayca görülür.

3.3.2. Tanım. g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon ve D^n Salagean operatörü olmak üzere, (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f \in \Sigma \text{ ve } \left| \arg\left\{ \frac{(1-\lambda)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}{z} \right\} \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (0 < \alpha \le 1,\ \lambda \ge 1,\ z \in U) \quad (3.38)$$

ve

$$\left| \arg\left\{ \frac{(1-\lambda)D^n g(w) + \lambda D^{n+1} g(w)}{w} \right\} \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (0 < \alpha \le 1,\ \lambda \ge 1,\ w \in U) \quad (3.39)$$

şartlarını sağlıyorsa $B_\Sigma(n,\alpha,\lambda)$ sınıfındadır (Porwal ve Darus 2013).

3.3.3. Teorem. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $0 < \alpha \le 1, \lambda \ge 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $B_\Sigma(n,\alpha,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4^n(1+\lambda)^2 + \alpha[2.3^n(1+2\lambda) - 4^n(1+\lambda)^2]}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]} + \frac{4\alpha^2}{[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. $p(z)$ ve $q(w)$ fonksiyonları P sınıfına ait olsun. (3.38) ve (3.39) dan

$$\frac{(1-\lambda)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}{z} = [p(z)]^\alpha \tag{3.40}$$

ve

$$\frac{(1-\lambda)D^n g(w) + \lambda D^{n+1} g(w)}{w} = [q(w)]^\alpha \tag{3.41}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.40) ve (3.41) de katsayılar eşitlenerek

$$[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]a_2 = \alpha p_1 \tag{3.42}$$

$$[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]a_3 = \alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p_1^2 \tag{3.43}$$

ve

$$-[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]a_2 = \alpha q_1 \tag{3.44}$$

$$[(1-\lambda)3^{n}+\lambda 3^{n+1}](2a_2^2-a_3)=\alpha q_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}q_1^2 \tag{3.45}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.42) ve (3.44) den

$$p_1=-q_1 \tag{3.46}$$

ve

$$2[(1-\lambda)2^{n}+\lambda 2^{n+1}]^2 a_2^2=\alpha^2(p_1^2+q_1^2) \tag{3.47}$$

elde edilir. (3.43), (3.45) ve (3.47) den

$$a_2^2=\frac{\alpha^2(p_2+q_2)}{4^n(1+\lambda)^2+\alpha[2.3^n(1+2\lambda)-4^n(1+\lambda)^2]}$$

elde edilir. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_2|\leq\frac{2\alpha}{\sqrt{4^n(1+\lambda)^2+\alpha(2.3^n(1+2\lambda)-4^n(1+\lambda)^2)}}$$

bulunur.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.43) den (3.45) i çıkararak

$$a_3=\frac{\alpha(p_2-q_2)}{2[(1-\lambda)3^n+\lambda 3^{n+1}]}+\frac{\alpha^2(p_1^2+q_1^2)}{2[(1-\lambda)2^n+\lambda 2^{n+1}]^2}$$

ve p_1,p_2,q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]} + \frac{4\alpha^2}{[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.3.4. Sonuç. Eğer Teorem 3.3.3 de $n = 0$ alınırsa $B_\Sigma(\alpha, \lambda)$ sınıfı elde edilir (Frasin ve Aouf 2011).

3.3.5. Tanım. g fonksiyonu (3.1) ile tanımlı olmak üzere (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f \in \Sigma, \ \mathrm{Re}\left\{\frac{(1-\lambda)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}{z}\right\} > \beta \ \ (0 < \beta \leq 1, \ \lambda \geq 1, \ n \in \mathbb{N}_0, \ z \in U) \quad (3.48)$$

ve

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{(1-\lambda)D^n g(w) + \lambda D^{n+1} g(w)}{w}\right\} > \beta \ \ (0 < \beta \leq 1, \ \lambda \geq 1, \ n \in \mathbb{N}_0, \ w \in U) \quad (3.49)$$

şartlarını sağlıyorsa $B_\Sigma(n, \beta, \lambda)$ sınıfındadır (Porwal ve Darus 2013).

3.3.6. Teorem. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $0 \leq \beta < 1$, $\lambda \geq 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $B_\Sigma(n, \beta, \lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]}}$$

ve

$$| a_3 | \leq \frac{4(1-\beta)^2}{[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]^2} + \frac{2(1-\beta)}{[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.48) ve (3.49) dan

$$\frac{(1-\lambda)D^n f(z) + \lambda D^{n+1} f(z)}{z} = \beta + (1-\beta)p(z) \tag{3.50}$$

ve

$$\frac{(1-\lambda)D^n g(w) + \lambda D^{n+1} g(w)}{w} = \beta + (1-\beta)q(w) \tag{3.51}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.50) ve (3.51) de katsayılar eşitlenerek

$$[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]a_2 = (1-\beta)p_1 \tag{3.52}$$

$$[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}]a_3 = (1-\beta)p_2 \tag{3.53}$$

ve

$$-[(1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}]a_2 = (1-\beta)q_1 \tag{3.54}$$

$$[(1-\lambda)3^n + \lambda 3^{n+1}](2a_2^2 - a_3) = (1-\beta)q_2 \tag{3.55}$$

bulunur. (3.52) ve (3.54) den

$$p_1 = -q_1 \tag{3.56}$$

ve

$$2[(1-\lambda)2^n+\lambda 2^{n+1}]^2 a_2^2=(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2) \tag{3.57}$$

elde edilir. (3.52)-(3.57) den

$$a_2^2=\frac{(1-\beta)(p_2+q_2)}{2[(1-\lambda)3^n+\lambda 3^{n+1}]}$$

elde edilir.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.53) den (3.55) i çıkararak

$$a_3=a_2^2+\frac{(1-\beta)(p_2-q_2)}{2[(1-\lambda)3^n+\lambda 3^{n+1}]}$$

bulunur ve a_2^2 nin değeri yerine yazılarak

$$a_3=\frac{(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2)}{2[(1-\lambda)2^n+\lambda 2^{n+1}]^2}+\frac{(1-\beta)(p_2-q_2)}{2[(1-\lambda)3^n+\lambda 3^{n+1}]}$$

elde edilir. p_1, p_2, q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3|\leq\frac{4(1-\beta)^2}{[(1-\lambda)2^n+\lambda 2^{n+1}]^2}+\frac{2(1-\beta)}{[(1-\lambda)3^n+\lambda 3^{n+1}]}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.3.7. Sonuç. Eğer Teorem 3.3.6 da $n=0$ alınırsa $B_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfı elde edilir (Frasin ve Aouf 2011).

3.4. $M_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ ve $M_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ Sınıfları için Katsayı Sınırları

3.4.1. Tanım. g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f \in \Sigma \text{ ve } \left|\arg\left((1-\lambda)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\lambda\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (0<\alpha\le 1, \lambda\ge 0,\ z\in U) \quad (3.58)$$

ve

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{wg'(w)}{g(w)}+\lambda\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad (0<\alpha\le 1, \lambda\ge 0,\ w\in U) \qquad (3.59)$$

şartlarını sağlıyorsa $M_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ sınıfındadır (Li ve Wang 2012).

3.4.2. Teorem. $0<\alpha\le 1, \lambda\ge 0$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $M_{\Sigma}(\alpha,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{(1+\lambda)(\alpha+1+\lambda-\alpha\lambda)}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{4\alpha^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{\alpha}{1+2\lambda}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.58) ve (3.59) dan

$$(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\lambda\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)=[p(z)]^{\alpha} \tag{3.60}$$

ve

$$(1-\lambda)\frac{wg'(w)}{g(w)}+\lambda\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)=[q(w)]^{\alpha} \tag{3.61}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.60) ve (3.61) de katsayılar eşitlenerek

$$(1+\lambda)a_2=\alpha p_1 \tag{3.62}$$

$$2(1+2\lambda)a_3=p_2\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)p_1^2}{2}+\frac{1+3\lambda}{(1+\lambda)^2}p_1^2\alpha^2 \tag{3.63}$$

ve

$$-(1+\lambda)a_2=\alpha q_1 \tag{3.64}$$

$$2(1+2\lambda)\left(2a_2^2-a_3\right)=q_2\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)q_1^2}{2}+\frac{1+3\lambda}{(1+\lambda)^2}q_1^2\alpha^2 \tag{3.65}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.62) ve (3.64) den

$$p_1=-q_1 \tag{3.66}$$

ve

$$2(1+\lambda)^2a_2^2=\alpha^2(p_1^2+q_1^2) \tag{3.67}$$

elde edilir. (3.63), (3.65) ve (3.67) den

$$a_2^2=\frac{\alpha^2(p_2+q_2)}{(1+\lambda)(\alpha+1+\lambda-\alpha\lambda)}$$

elde edilir. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_2|\le\frac{2\alpha}{\sqrt{(1+\lambda)(\alpha+1+\lambda-\alpha\lambda)}}$$

bulunur.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.63) den (3.65) i çıkararak

$$2(1+2\lambda)(2a_3-2a_2^2)=\alpha(p_2-q_2)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(p_1^2-q_1^2)+\frac{(1+3\lambda)\alpha^2(p_1^2-q_1^2)}{(1+\lambda)^2}$$

ve (3.67) den a_2^2 değerini çekerek,

$$a_3=\frac{\alpha^2(p_1^2+q_1^2)}{2(1+\lambda)^2}+\frac{\alpha(p_2-q_2)}{4(1+2\lambda)}$$

elde edilir. p_1,p_2,q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3|\le\frac{4\alpha^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{\alpha}{1+2\lambda}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.4.3. Sonuç. Teorem 3.4.2 de $\lambda=0$ alınırsa (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $S_\Sigma^*(\alpha)$ sınıfındadır. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}$$

ve

$$|a_3| \leq 4\alpha^2 + \alpha$$

dir.

3.4.4. Tanım. g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f \in \Sigma \text{ ve } \operatorname{Re}\left((1-\lambda)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \lambda\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right) > \beta \quad (0 \leq \beta < 1,\ \lambda \geq 0,\ z \in U) \qquad (3.68)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left((1-\lambda)\frac{wg'(w)}{g(w)} + \lambda\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)\right) > \beta \quad (0 \leq \beta < 1,\ \lambda \geq 0,\ w \in U) \qquad (3.69)$$

şartlarını sağlıyorsa $M_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfındadır (Li ve Wang 2012).

3.4.5. Teorem. $0 \leq \beta < 1, \lambda \geq 0$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $M_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{1+\lambda}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{4(1-\beta)^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{(1-\beta)}{1+2\lambda}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.68) ve (3.69) dan

$$(1-\lambda)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \lambda\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = \beta + (1-\beta)p(z) \tag{3.70}$$

ve

$$(1-\lambda)\frac{wg'(w)}{g(w)} + \lambda\left(1 + \frac{wg''(w)}{g'(w)}\right) = \beta + (1-\beta)q(w) \tag{3.71}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.70) ve (3.71) de katsayılar eşitlenerek

$$(1+\lambda)a_2 = (1-\beta)p_1 \tag{3.72}$$

$$2(1+2\lambda)a_3 = (1-\beta)p_2 + \frac{1+3\lambda}{(1+\lambda)^2}(1-\beta)^2 p_1^2 \tag{3.73}$$

ve

$$-(1+\lambda)a_2 = (1-\beta)p_1 \tag{3.74}$$

$$2(1+2\lambda)(2a_2^2 - a_3) = (1-\beta)q_2 + \frac{1+3\lambda}{(1+\lambda)^2}(1-\beta)^2 q_1^2 \tag{3.75}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.72) ve (3.74) den

$$p_1 = -q_1 \tag{3.76}$$

ve

$$2(1+\lambda)^2 a_2^2 = (1-\beta)^2 (p_1^2 + q_1^2) \tag{3.77}$$

elde edilir. (3.73), (3.75) ve (3.77) den

$$a_2^2 = \frac{(1-\beta)(p_2 + q_2)}{2(1+\lambda)}$$

elde edilir. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{1+\lambda}}$$

bulunur.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.73) den (3.75) i çıkararak

$$4(1+2\lambda)a_3 = \frac{2(1+2\lambda)(1-\beta)^2 (p_1^2 + q_1^2)}{(1+\lambda)^2} + (1-\beta)(p_2 - q_2)$$

elde edilir. p_1, p_2, q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3| \leq \frac{4(1-\beta)^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{(1-\beta)}{1+2\lambda}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.4.6. Sonuç. Teorem 3.4.5 de $\lambda = 0$ alınırsa (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $S_\Sigma^*(\beta)$ sınıfındadır. Bu takdirde

$$|a_2| \le \sqrt{2(1-\beta)}$$

ve

$$|a_3| \le 4(1-\beta)^2 + 1 - \beta$$

dir.

3.5. $S_\Sigma(\alpha,\lambda)$ ve $S_\Sigma(\beta,\lambda)$ Sınıfları için Katsayı Sınırları

3.5.1. Tanım. g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon, $0 < \alpha \le 1$, $0 \le \lambda \le 1$ ve $z, w \in U$ olmak üzere, (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f \in \Sigma \text{ ve } \left| \arg\left(\frac{zf'(z) + (2\lambda^2 - \lambda)z^2 f''(z)}{4(\lambda - \lambda^2)z + (2\lambda^2 - \lambda)zf'(z) + (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)f(z)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (3.78)$$

ve

$$\left| \arg\left(\frac{wg'(w) + (2\lambda^2 - \lambda)w^2 g''(w)}{4(\lambda - \lambda^2)w + (2\lambda^2 - \lambda)wg'(w) + (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)g(w)} \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (3.79)$$

şartlarını sağlıyorsa $S_\Sigma(\alpha,\lambda)$ sınıfındadır (Magesh ve Yamini 2013).

Eğer $\lambda = 0$ alınırsa α mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların $S_\Sigma^*(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

3.5.2. Teorem. $0 < \alpha \le 1, 0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $S_\Sigma(\alpha,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha(1-2\lambda+25\lambda^2-44\lambda^3+20\lambda^4)+(1+3\lambda-2\lambda^2)^2}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{\alpha}{1-2\lambda^2} + \frac{4\alpha^2}{(1+3\lambda-2\lambda^2)^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.78) ve (3.79) dan

$$\frac{zf'(z)+(2\lambda^2-\lambda)z^2 f''(z)}{4(\lambda-\lambda^2)z+(2\lambda^2-\lambda)zf'(z)+(2\lambda^2-3\lambda+1)f(z)} = [p(z)]^\alpha$$

ve (3.80)

$$\frac{wg'(w)+(2\lambda^2-\lambda)w^2 g''(w)}{4(\lambda-\lambda^2)w+(2\lambda^2-\lambda)wg'(w)+(2\lambda^2-3\lambda+1)g(w)} = [q(w)]^\alpha$$

eşitlikleri elde edilir. (3.80) de katsayılar eşitlenerek

$$(1+3\lambda-2\lambda^2)a_2 = \alpha p_1 \tag{3.81}$$

$$(12\lambda^4-28\lambda^3+11\lambda^2+2\lambda-1)a_2^2+(4\lambda^2+2)a_3 = \frac{1}{2}\left[\alpha(\alpha-1)p_1^2+2\alpha p_2\right] \tag{3.82}$$

ve

$$-(1+3\lambda-2\lambda^2)a_2 = \alpha q_1 \tag{3.83}$$

$$(12\lambda^4 - 28\lambda^3 + 19\lambda^2 + 2\lambda + 3)a_2^2 - (4\lambda^2 + 2)a_3 = \frac{1}{2}\left[\alpha(\alpha - 1)q_1^2 + 2\alpha q_2\right] \tag{3.84}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.81) ve (3.83) den

$$p_1 = -q_1 \tag{3.85}$$

ve

$$2(1 + 3\lambda - 2\lambda^2)^2 a_2^2 = \alpha^2 (p_1^2 + q_1^2) \tag{3.86}$$

elde edilir. (3.81)-(3.85) ve (3.86) dan

$$a_2^2 = \frac{\alpha^2 (p_2 + q_2)}{\alpha(1 - 2\lambda + 25\lambda^2 - 44\lambda^3 + 20\lambda^4) + (1 + 3\lambda - 2\lambda^2)^2}$$

elde edilir. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_2| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha(1 - 2\lambda + 25\lambda^2 - 44\lambda^3 + 20\lambda^4) + (1 + 3\lambda - 2\lambda^2)^2}}$$

bulunur.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.82) den (3.84) ü çıkararak

$$2(2 + 4\lambda^2)a_3 - 2(2 + 4\lambda^2)a_2^2 = \alpha(p_2 - q_2) + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}(p_1^2 - q_1^2)$$

ve p_1, p_2, q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulayarak

$$|a_3| \leq \frac{\alpha}{1+2\lambda^2} + \frac{4\alpha^2}{(1+3\lambda-2\lambda^2)^2}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.5.3. Tanım. g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon, $0 \leq \beta < 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $z, w \in U$ olmak üzere (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f \in \Sigma \text{ ve } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)+(2\lambda^2-\lambda)z^2f''(z)}{4(\lambda-\lambda^2)z+(2\lambda^2-\lambda)zf'(z)+(2\lambda^2-3\lambda+1)f(z)}\right) > \beta \qquad (3.87)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{wg'(w)+(2\lambda^2-\lambda)w^2g''(w)}{4(\lambda-\lambda^2)w+(2\lambda^2-\lambda)wg'(w)+(2\lambda^2-3\lambda+1)g(w)}\right) > \beta \qquad (3.88)$$

şartlarını sağlıyorsa $S_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfındadır (Magesh ve Yamini 2013).

Eğer $\lambda = 0$ alınırsa β mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S_\Sigma(\beta)$ elde edilir.

3.5.4. Teorem. $0 \leq \beta < 1, 0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $S_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{12\lambda^4-28\lambda^3+15\lambda^2+2\lambda+1}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{12\lambda^4-28\lambda^3+15\lambda^2+2\lambda+1}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.87) ve (3.88) den

$$\frac{zf'(z)+(2\lambda^2-\lambda)z^2f''(z)}{4(\lambda-\lambda^2)z+(2\lambda^2-\lambda)zf'(z)+(2\lambda^2-3\lambda+1)f(z)}=\beta+(1-\beta)p(z) \qquad (3.89)$$

ve

$$\frac{wg'(w)+(2\lambda^2-\lambda)w^2g''(w)}{4(\lambda-\lambda^2)w+(2\lambda^2-\lambda)wg'(w)+(2\lambda^2-3\lambda+1)g(w)}=\beta+(1-\beta)q(w) \qquad (3.90)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.89) ve (3.90) da katsayılar eşitlenerek

$$(1+3\lambda-2\lambda^2)a_2=(1-\beta)p_1$$

$$(12\lambda^4-28\lambda^3+11\lambda^2+2\lambda-1)a_2^2+(2+4\lambda^2)a_3=(1-\beta)p_2$$

ve

$$-(1+3\lambda-2\lambda^2)a_2=(1-\beta)q_1$$

$$(12\lambda^4-28\lambda^3+19\lambda^2+2\lambda+3)a_2^2-(2+4\lambda^2)a_3=(1-\beta)q_2$$

eşitlikleri elde edilir. Devamında benzer teknikler uygulanarak teoremin ispatı tamamlanır.

3.6. $B_\Sigma(\alpha,\lambda,\mu)$ ve $B_\Sigma(\beta,\lambda,\mu)$ Sınıfları için Katsayı Sınırları

3.6.1. Tanım. $0<\alpha\le 1,\ 0\le\mu\le\lambda\le 1$; $z,w\in U$ ve g fonksiyonu (3.1) ile tanımlı olmak üzere (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu

$$f \in \Sigma, \qquad \left| \arg\left[\frac{\lambda\mu z^3 f'''(z) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu) z^2 f''(z) + z f'(z)}{\lambda\mu z^2 f''(z) + (\lambda - \mu) z f'(z) + (1 - \lambda + \mu) f(z)} \right] \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{3.91}$$

ve

$$\left| \arg\left[\frac{\lambda\mu w^3 g'''(w) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu) w^2 g''(w) + w g'(w)}{\lambda\mu w^2 g''(w) + (\lambda - \mu) w g'(w) + (1 - \lambda + \mu) g(w)} \right] \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \tag{3.92}$$

şartlarını sağlıyorsa $B_\Sigma(\alpha, \lambda, \mu)$ sınıfına aittir (Keerthi ve Raja 2013).

3.6.2. Teorem. $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \mu \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $B_\Sigma(\alpha, \lambda, \mu)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(1 + 2\lambda - 2\mu + 6\lambda\mu) + (1 - 3\alpha)(1 + \lambda - \mu + 2\lambda\mu)^2}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{4\alpha^2}{(1 + \lambda - \mu + 2\lambda\mu)^2} + \frac{\alpha}{1 + 2\lambda - 2\mu + 6\lambda\mu}$$

dir.

İspat. $p(z)$ ve $q(w)$ fonksiyonları için $\mathrm{Re}(p(z)) > 0$ ve $\mathrm{Re}(q(w)) > 0$ olmak üzere (3.91) ve (3.92) den

$$\frac{\lambda\mu z^3 f'''(z) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu) z^2 f''(z) + z f'(z)}{\lambda\mu z^2 f''(z) + (\lambda - \mu) z f'(z) + (1 - \lambda + \mu) f(z)} = [p(z)]^\alpha$$

ve

$$\frac{\lambda\mu w^3 g'''(w) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu) w^2 g''(w) + w g'(w)}{\lambda\mu w^2 g''(w) + (\lambda - \mu) w g'(w) + (1 - \lambda + \mu) g(w)} = [q(w)]^{\alpha}$$

yazılır ve katsayılar eşitlenerek

$$(1 + \lambda - \mu + 2\lambda\mu) a_2 = p_1 \alpha \tag{3.93}$$

$$(2 + 4\lambda - 4\mu + 12\lambda\mu) a_3 = p_2 \alpha + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} p_1^2 + \alpha^2 p_1^2 \tag{3.94}$$

ve

$$-(1 + \lambda - \mu + 2\lambda\mu) a_2 = q_1 \alpha \tag{3.95}$$

$$(2 + 4\lambda - 4\mu + 12\lambda\mu)(2a_2^2 - a_3) = q_2 \alpha + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} q_1^2 + \alpha^2 q_1^2 \tag{3.96}$$

elde edilir. (3.93) ve (3.95) den

$$p_1 = -q_1 \tag{3.97}$$

ve

$$2a_2^2 (1 + \lambda - \mu + 2\lambda\mu)^2 = \alpha^2 (p_1^2 + q_1^2) \tag{3.98}$$

olduğu görülür ve (3.94), (3.96) ve (3.97) göz önüne alındığında

$$a_2^2 = \frac{\alpha^2 (p_2 + q_2)}{4\alpha(1 + 2\lambda - 2\mu + 6\lambda\mu) + (1 - 3\alpha)(p_1^2 + q_1^2)^2}$$

elde edilir. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 ü uygulayarak

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)+(1-3\alpha)(p_1^2+q_1^2)^2}}$$

eşitsizliği elde edilir.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.94) den (3.96) yı çıkararak

$$(2a_3-2a_2^2)(2+4\lambda-4\mu+12\lambda\mu)=\alpha(p_2-q_2)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(p_1^2-q_1^2)+\alpha^2(p_1^2-q_1^2)$$

bulunur. (3.97) de a_2^2 nin değeri ve $p_1^2=q_1^2$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$a_3=\frac{\alpha^2(p_1^2+q_1^2)}{2(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)}+\frac{\alpha(p_2-q_2)}{2(2+4\lambda-4\mu+12\lambda\mu)}$$

elde edilir. p_1, p_2, q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3| \leq \frac{4\alpha^2}{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}+\frac{\alpha}{1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.6.3. Tanım. $0 \leq \beta < 1,\ 0 \leq \mu \leq \lambda \leq 1;\ z, w \in U$ ve g fonksiyonu (3.1) ile tanımlı olmak üzere (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f \in \Sigma, \qquad \operatorname{Re}\left[\frac{\lambda\mu z^3 f'''(z)+(2\lambda\mu+\lambda-\mu)z^2 f''(z)+zf'(z)}{\lambda\mu z^2 f''(z)+(\lambda-\mu)zf'(z)+(1-\lambda+\mu)f(z)}\right] > \beta \tag{3.99}$$

ve

$$f \in \Sigma, \qquad \operatorname{Re}\left[\frac{\lambda\mu w^3 g'''(w) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu)w^2 g''(w) + wg'(w)}{\lambda\mu w^2 g''(w) + (\lambda - \mu)wg'(w) + (1 - \lambda + \mu)g(w)}\right] > \beta \tag{3.100}$$

şartlarını sağlıyorsa $B_\Sigma(\beta, \lambda, \mu)$ sınıfına aittir (Keerthi ve Raja 2013).

3.6.4. Teorem. $0 \le \beta < 1$ ve $0 \le \mu \le \lambda \le 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $B_\Sigma(\beta, \lambda, \mu)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2(1 + 2\lambda - 2\mu + 6\lambda\mu) - (1 + \lambda - \mu + 2\lambda\mu)^2}}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{4(1-\beta)^2}{(1 + \lambda - \mu + 2\lambda\mu)^2} + \frac{(1-\beta)}{1 + 2\lambda - 2\mu + 6\lambda\mu}$$

dir.

İspat. (3.99) ve (3.100) den

$$\frac{\lambda\mu z^3 f'''(z) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu)z^2 f''(z) + zf'(z)}{\lambda\mu z^2 f''(z) + (\lambda - \mu)zf'(z) + (1 - \lambda + \mu)f(z)} = \beta + (1-\beta)p(z)$$

ve

$$\frac{\lambda\mu w^3 g'''(w) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu)w^2 g''(w) + wg'(w)}{\lambda\mu w^2 g''(w) + (\lambda - \mu)wg'(w) + (1 - \lambda + \mu)g(w)} = \beta + (1-\beta)q(w)$$

yazılır ve bu eşitliklerde katsayılar eşitlenerek

$$(1 + \lambda - \mu + 2\lambda\mu)a_2 = (1-\beta)p_1 \tag{3.101}$$

$$2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)a_3=(1-\beta)p_2+(1-\beta)^2p_1^2 \tag{3.102}$$

ve

$$-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)a_2=(1-\beta)q_1 \tag{3.103}$$

$$2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)(2a_2^2-a_3)=(1-\beta)q_2+(1-\beta)^2q_1^2 \tag{3.104}$$

elde edilir. (3.101) ve (3.103) den

$$p_1=-q_1 \tag{3.105}$$

ve

$$2a_2^2(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2=(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2) \tag{3.106}$$

olduğu görülür ve (3.102), (3.104) ve (3.106) göz önüne alındığında

$$a_2^2=\frac{(1-\beta)(p_2+q_2)}{2[2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2]}$$

elde edilir. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 ü uygulayarak

$$|a_2|\leq\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}}$$

eşitsizliği elde edilir.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.102) den (3.104) ü çıkararak

$$2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)(2a_3-2a_2^2)=(1-\beta)(p_2-q_2)+(1-\beta)^2(p_1^2-q_1^2)$$

bulunur. $p_1^2=q_1^2$ olduğu göz önünde bulundurulur ve p_1, p_2, q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3|\leq\frac{4(1-\beta)^2}{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}+\frac{(1-\beta)}{1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.7. $B_\Sigma(\lambda,\mu,\phi)$ Sınıfı için Katsayı Sınırları

3.7.1. Tanım. $\phi(0)=1$ ve $\phi'(0)>0$ olmak üzere ϕ fonksiyonu U birim diskinde reel kısmı pozitif analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\phi(U)$ reel eksene göre simetrik ve 1 noktasına göre yıldızıl olsun. Bu durumda ϕ fonksiyonu

$$\phi(\mathrm{z})=1+\mathrm{B}_1 z+B_2 z^2+\cdots \qquad (B_1>0) \tag{3.107}$$

biçiminde Taylor seri açılımına sahiptir.

$u(0)=v(0)=0,\ |u(z)|<1,\ |v(w)|<1$ olmak üzere $u(z)$ ve $v(w)$ fonksiyonları U birim diskinde analitik ve

$$\mathrm{u(z)}=\mathrm{b}_1 z+\sum_{n=2}^{\infty}b_n z^n, \qquad \mathrm{v(w)}=\mathrm{c}_1 w+\sum_{n=2}^{\infty}c_n w^n \tag{3.108}$$

biçiminde seri açılımına sahip olsunlar. Bu durumda

$$|b_1|\leq 1, \quad |b_2|\leq 1-|b_1|^2, \quad |c_1|\leq 1, \quad |c_2|\leq 1-|c_1|^2 \tag{3.109}$$

olduğu bilinmektedir.

(3.107) ve (3.108) eşitliklerinden

$$\phi(u(z)) = 1 + B_1 b_1 z + (B_1 b_2 + B_2 b_1^2) z^2 + \cdots, \qquad |z| < 1 \tag{3.110}$$

ve

$$\phi(v(w)) = 1 + B_1 c_1 w + (B_1 c_2 + B_2 c_1^2) w^2 + \cdots, \qquad |w| < 1 \tag{3.111}$$

elde edilir.

3.7.2. Tanım. $\lambda \geq 0,\ 0 \leq \mu \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere bir $f \in \Sigma$ fonksiyonu,

$$\frac{\lambda\mu z^3 f'''(z) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu) z^2 f''(z) + z f'(z)}{\lambda\mu z^2 f''(z) + (\lambda - \mu) z f'(z) + (1 - \lambda + \mu) f(z)} \prec \phi(z)$$

ve

$$\frac{\lambda\mu w^3 g'''(w) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu) w^2 g''(w) + w g'(w)}{\lambda\mu w^2 g''(w) + (\lambda - \mu) w g'(w) + (1 - \lambda + \mu) g(w)} \prec \phi(w)$$

sabordinasyon şartlarını sağlıyorsa $B_\Sigma(\lambda, \mu, \phi)$ sınıfındadır (Altınkaya ve Yalçın 2014).

3.7.3. Teorem. (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $B_\Sigma(\lambda, \mu, \phi)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{|2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^2 - (1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)| + (1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2 B_1}} \tag{3.112}$$

ve

$$|a_3| \le \begin{cases} \dfrac{B_1}{2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)}; & B_1 \le \dfrac{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \\ \dfrac{|2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^2-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)|B_1+2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^3}{2[|2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^2-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)|+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2B_1](1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \\ & B_1 > \dfrac{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \end{cases}$$

dir. (3.113)

İspat. $\lambda \ge 0,\ 0 \le \mu \le \lambda \le 1$ için $f \in B_\Sigma(\lambda, \mu, \phi)$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{\lambda\mu z^3 f'''(z) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu)z^2 f''(z) + zf'(z)}{\lambda\mu z^2 f''(z) + (\lambda - \mu)zf'(z) + (1-\lambda+\mu)f(z)} = \phi(u(z)) \tag{3.114}$$

ve

$$\frac{\lambda\mu w^3 g'''(w) + (2\lambda\mu + \lambda - \mu)w^2 g''(w) + wg'(w)}{\lambda\mu w^2 g''(w) + (\lambda - \mu)wg'(w) + (1-\lambda+\mu)g(w)} = \phi(v(w)) \tag{3.115}$$

eşitliklerini sağlayan ve (3.108) ile tanımlı analitik $u, v : U \to U$ fonksiyonları vardır. (3.114) ve (3.115) eşitliklerinden

$$(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)a_2 = B_1 b_1 \tag{3.116}$$

$$(2+4\lambda-4\mu+12\lambda\mu)a_3 - (1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2 a_2^2 = B_1 b_2 + B_2 b_1^2 \tag{3.117}$$

ve

$$-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)a_2 = B_1 c_1 \tag{3.118}$$

$$(2+4\lambda-4\mu+12\lambda\mu)(2a_2^2 - a_3) - (1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2 a_2^2 = B_1 c_2 + B_2 c_1^2 \tag{3.119}$$

elde edilir. (3.116) ve (3.118) den

$$b_1 = -c_1 \tag{3.120}$$

olduğu görülür. (3.117) ile (3.119) eşitlikleri toplandığında ve (3.120) göz önüne alındığında

$$2[(2+4\lambda-4\mu+12\lambda\mu)B_1^2-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)]a_2^2=B_1^3(b_2+c_2)$$

elde edilir. Bu son eşitlik için (3.109) uygulanırsa

$$|(2+4\lambda-4\mu+12\lambda\mu)B_1^2-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)||a_2|^2 \le B_1^3(1-|b_1|^2)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$|a_2| \le \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{|2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^2-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)|+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2B_1}} \tag{3.121}$$

sonucuna ulaşılır.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.117) den (3.119) denklemini çıkararak

$$2(2+4\lambda-4\mu+12\lambda\mu)a_3-2(2+4\lambda-4\mu+12\lambda\mu)a_2^2=B_1(b_2-c_2)$$

bulunur. Bu son eşitlik için (3.119) uygulanırsa

$$(2+4\lambda-4\mu+12\lambda\mu)B_1|a_3| \le [(2+4\lambda-4\mu+12\lambda\mu)B_1-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2]|a_2|^2+B_1^2$$

elde edilir. (3.121) göz önüne alındığında

$$
|a_3| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)}; & B_1 \leq \dfrac{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \\ \dfrac{|2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^2-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)|B_1+2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^3}{2[|2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^2-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)|+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2B_1](1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} & \\ & B_1 > \dfrac{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \end{cases}
$$

eşitsizliği elde edilir.

3.7.4. Sonuç. Eğer

$$
\phi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \cdots \qquad (0 < \alpha \leq 1)
$$

olarak alınırsa (3.112) ve (3.113) eşitlikleri

$$
|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\left|4\left(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu\right)-3(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2\right|\alpha+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}} \tag{3.122}
$$

ve

$$
|a_3| \leq \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu}; & \alpha \leq \dfrac{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \\ \dfrac{[|4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-3(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2|+4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)]\alpha^2}{[|4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-3(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2|\alpha+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2](1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)}; & \\ & \dfrac{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} < \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{3.123}
$$

olarak elde edilir. (3.122) ve (3.123) ile verilen $|a_2|$ ve $|a_3|$ sınırları Teorem 3.6.2 de bulunan sınırlardan daha küçüktür (Altınkaya ve Yalçın 2014).

3.7.5. Sonuç. Eğer

$$\phi(z)=\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}=1+2(1-\alpha)z+2(1-\alpha)z^2+\cdots \qquad (0\le\alpha<1)$$

olarak alınırsa (3.112) ve (3.113) eşitlikleri

$$|a_2|\le\frac{2(1-\alpha)}{\sqrt{\left|\,|4(1-\alpha)(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(3-2\alpha)(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2|+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2\right|}} \tag{3.124}$$

ve

$$|a_3|\le\begin{cases}\dfrac{1-\alpha}{1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu}; & \dfrac{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)}\le\alpha<1\\[2ex] \dfrac{[|4(1-\alpha)(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(3-2\alpha)(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2|](1-\alpha)+4(1-\alpha)^2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)}{[|4(1-\alpha)(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(3-2\alpha)(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2|+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2](1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)}; & 0\le\alpha<\dfrac{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)}\end{cases} \tag{3.125}$$

elde edilir. (3.124) ve (3.125) ile verilen $|a_2|$ ve $|a_3|$ sınırları Teorem 3.6.4 de bulunan sınırlardan daha küçüktür (Altınkaya ve Yalçın 2014).

3.8. $N_{\Sigma}^{\mu}(\alpha,\lambda)$ ve $N_{\Sigma}^{\mu}(\beta,\lambda)$ Sınıfları için Katsayı Sınırları

3.8.1. Tanım. $0<\alpha\leq 1, \mu\geq 0;\ z,w\in U$ ve g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f\in\Sigma \text{ ve } \left|\arg\left((1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \tag{3.126}$$

ve

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \tag{3.127}$$

şartlarını sağlıyorsa $N_{\Sigma}^{\mu}(\alpha,\lambda)$ sınıfındadır (Çağlar ve diğerleri 2012).

3.8.2. Teorem. $0<\alpha\leq 1, \lambda\geq 1$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $N_{\Sigma}^{\mu}(\alpha,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2|\leq\frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\alpha(\mu+2\lambda-\lambda^2)}}$$

ve

$$|a_3|\leq\frac{4\alpha^2}{(\lambda+\mu)^2}+\frac{2\alpha}{2\lambda+\mu}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.126) ve (3.127) den

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}=[p(z)]^{\alpha}$$

$$(1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}=[q(w)]^{\alpha} \tag{3.128}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.128) de katsayılar eşitlenerek

$$(\lambda+\mu)a_2=\alpha p_1 \tag{3.129}$$

$$(2\lambda+\mu)a_3+(\mu-1)\left(\lambda+\frac{\mu}{2}\right)a_2^2=\alpha p_2+\frac{\alpha(\alpha-1)p_1^2}{2} \tag{3.130}$$

ve

$$-(\lambda+\mu)a_2=\alpha q_1 \tag{3.131}$$

$$-(2\lambda+\mu)a_3+(3+\mu)\left(\lambda+\frac{\mu}{2}\right)a_2^2=\alpha q_2+\frac{\alpha(\alpha-1)q_1^2}{2} \tag{3.132}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.129) ve (3.131) den

$$p_1=-q_1 \tag{3.133}$$

ve

$$2(\lambda+\mu)^2a_2^2=\alpha^2(p_1^2+q_1^2) \tag{3.134}$$

elde edilir. (3.130), (3.132) ve (3.134) den

$$a_2^2=\frac{\alpha^2(p_2+q_2)}{(\lambda+\mu)^2+\alpha(\mu+2\lambda-\lambda^2)}$$

elde edilir. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\alpha(\mu+2\lambda-\lambda^2)}}$$

bulunur.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.130) dan (3.132) yi çıkararak

$$2(2\lambda+\mu)a_3 - 2(2\lambda+\mu)a_2^2 = \alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}p_1^2 - \left(\alpha q_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}q_1^2\right)$$

$$a_3 = \frac{\alpha^2(p_1^2+q_1^2)}{2(\lambda+\mu)^2} + \frac{\alpha(p_2-q_2)}{2(2\lambda+\mu)}$$

elde edilir. p_1, p_2, q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3| \leq \frac{4\alpha^2}{(\lambda+\mu)^2} + \frac{2\alpha}{2\lambda+\mu}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.8.3. Sonuç. Teorem 3.8.2 de $\mu = 1$ alınırsa Teorem 3.1.2 elde edilir.

3.8.4. Sonuç. Teorem 3.8.2 de $\lambda = \mu + 1 = 1$ alınırsa $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfı $N_\Sigma^1(\alpha,1) = S_\Sigma^*(\alpha)$ elde edilir. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} \qquad \text{ve} \qquad |a_3| \leq \alpha(4\alpha+1)$$

dir.

3.8.5. Tanım. $0 \le \beta < 1,\ \mu \ge 0, \lambda \ge 1;\ z, w \in U$ ve g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f \in \Sigma \text{ ve } \operatorname{Re}\left((1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1} \right) > \beta \qquad (3.135)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left((1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1} \right) > \beta \qquad (3.136)$$

şartlarını sağlıyorsa $N_{\Sigma}^{\mu}(\beta, \lambda)$ sınıfındadır (Çağlar ve diğerleri 2012).

3.8.6. Teorem. $0 \le \beta < 1, \lambda \ge 1$ *ve* $\mu \ge 0$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $N_{\Sigma}^{\mu}(\beta, \lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \le \min\left\{ \sqrt{\frac{4(1-\beta)}{(\mu+1)(2\lambda+\mu)}}, \frac{2(1-\beta)}{\lambda+\mu} \right\}$$

ve

$$|a_3| \le \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{4(1-\beta)}{(\mu+1)(2\lambda+\mu)}, \dfrac{4(1-\beta)^2}{(\lambda+\mu)^2} + \dfrac{2(1-\beta)}{2\lambda+\mu} \right\}; & 0 \le \mu < 1 \\[2ex] \dfrac{2(1-\beta)}{2\lambda+\mu}; & \mu \ge 1 \end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.135) ve (3.136) dan

$$(1-\lambda)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1}=\beta+(1-\beta)p(z) \tag{3.137}$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1}=\beta+(1-\beta)q(w) \tag{3.138}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.137) ve (3.138) de katsayılar eşitlenerek

$$(\lambda+\mu)a_2=(1-\beta)p_1 \tag{3.139}$$

$$(2\lambda+\mu)a_3+(\mu-1)\left(\lambda+\frac{\mu}{2}\right)a_2^2=(1-\beta)p_2 \tag{3.140}$$

ve

$$-(\lambda+\mu)a_2=(1-\beta)q_1 \tag{3.141}$$

$$-(2\lambda+\mu)a_3+(3+\mu)\left(\lambda+\frac{\mu}{2}\right)a_2^2=(1-\beta)q_2 \tag{3.142}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.139) ve (3.141) den

$$p_1=-q_1 \tag{3.143}$$

ve

$$2(\lambda+\mu)^2a_2^2=(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2) \tag{3.144}$$

elde edilir. Ayrıca (3.140) ve (3.142) den

$$(\mu+1)(2\lambda+\mu)a_2^2=(1-\beta)(p_2+q_2) \tag{3.145}$$

elde edilir. (3.144) ve (3.145) eşitliklerinden

$$|a_2|^2 \le \frac{(1-\beta)^2}{2(\lambda+\mu)^2}(|p_1|^2+|q_1|^2)$$

ve

$$|a_2|^2 \le \frac{(1-\beta)}{(\mu+1)(2\lambda+\mu)}(|p_2|+|q_2|)$$

elde edilir ve sırasıyla Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_2| \le \frac{2(1-\beta)}{\lambda+\mu}$$

ve

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{4(1-\beta)}{(\mu+1)(2\lambda+\mu)}}$$

bulunur.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.140) dan (3.142) çıkarılarak

$$2(2\lambda+\mu)a_3-2(2\lambda+\mu)a_2^2=(1-\beta)(p_2-q_2) \tag{3.146}$$

ve (3.143) den

$$a_3 = \frac{(1-\beta)^2 (p_1^2 + q_1^2)}{2(\lambda + \mu)^2} + \frac{(1-\beta)(p_2 - q_2)}{2(2\lambda + \mu)}$$

elde edilir. p_1, p_2, q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3| \le \frac{4(1-\beta)^2}{(\lambda + \mu)^2} + \frac{2(1-\beta)}{2\lambda + \mu}$$

bulunur.

Diğer yandan (3.139) eşitliğini (3.146) da kullanarak

$$a_3 = \frac{1-\beta}{2(2\lambda + \mu)} \left[\frac{\mu + 3}{\mu + 1} p_2 + \frac{1-\mu}{\mu + 1} q_2 \right] \tag{3.147}$$

elde edilir ve (3.147) için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3| \le \frac{1-\beta}{(2\lambda + \mu)} \left[\frac{\mu + 3}{\mu + 1} + \frac{|1-\mu|}{\mu + 1} \right]$$

elde edilir. Buradan

$$|a_3| \le \begin{cases} \dfrac{4(1-\beta)}{(2\lambda + \mu)(1 + \mu)}; & 0 \le \mu < 1 \\ \\ \dfrac{2(1-\beta)}{2\lambda + 1}; & \mu \ge 1 \end{cases}$$

elde edilir.

3.8.7. Sonuç. Teorem 3.8.6 da $\mu = 1$ alınırsa $0 \le \beta < 1,\ \lambda \ge 1$ olmak üzere $N_{\Sigma}^{1}(\beta,\lambda) = B_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ sınıfı elde edilir. Bu takdirde

$$|a_2| \le \min\left\{\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{(2\lambda+1)}}, \frac{2(1-\beta)}{\lambda+1}\right\} \qquad \text{ve} \qquad |a_3| \le \frac{2(1-\beta)}{2\lambda+1}$$

dir.

3.8.8. Sonuç. Teorem 3.8.6 da $\lambda = \mu + 1 = 1$ alınırsa $0 \le \beta < 1$ olmak üzere β mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfı $N_{\Sigma}^{1}(\alpha,1) = S_{\Sigma}^{*}(\beta)$ elde edilir. Bu takdirde

$$|a_2| \le \sqrt{2(1-\beta)} \qquad \text{ve} \qquad |a_3| \le \begin{cases} 2(1-\beta); & 0 \le \beta < \dfrac{3}{4} \\ (1-\beta)(5-4\beta); & \dfrac{3}{4} \le \beta < 1 \end{cases}$$

dir.

3.9. $S_{S,\Sigma}^{*}(\alpha,\phi)$ Sınıfı için Katsayı Sınırları

3.9.1. Tanım. Bir $f \in \Sigma$ fonksiyonu,

$$\frac{2[(1-\alpha)zf'(z) + \alpha z(zf'(z))']}{(1-\alpha)(f(z)-f(-z)) + \alpha z(f'(z)+f'(-z))} \prec \phi(z)$$

ve

$$\frac{2[(1-\alpha)wg'(z) + \alpha w(wg'(w))']}{(1-\alpha)(g(w)-g(-w)) + \alpha w(g'(w)+g'(-w))} \prec \phi(w)$$

şartlarını sağlıyorsa $S_{S,\Sigma}^{*}(\alpha,\phi)$ sınıfındadır (Crişan 2013).

3.9.2. Teorem. (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $S^*_{S,\Sigma}(\alpha,\phi)$ sınıfında ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{2\,|(1+2\alpha)B_1^2 + 2(1+\alpha)^2(B_1 - B_2)|}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{1}{2}B_1\left(\frac{1}{1+2\alpha} + \frac{1}{2(1+\alpha)^2}B_1\right)$$

dir.

İspat. $z,w \in U$ için $u(0)=v(0)=0, |u(z)|<1$ ve $|v(w)|<1$ olmak üzere

$$\frac{2(zf'(z) + \alpha z^2 f''(z))}{(1-\alpha)(f(z) - f(-z) + \alpha z(f'(z) + f'(-z)))} = \phi(u(z)), \quad (z \in U)$$

$$\frac{2(wg'(w) + \alpha w^2 g''(w))}{(1-\alpha)(g(w) - g(-w) + \alpha w(g'(w) + g'(-w)))} = \phi(v(w)), \quad (w \in U) \tag{3.148}$$

olacak şekilde U da analitik u,v fonksiyonları vardır. Ayrıca p_1 ve p_2 fonksiyonları

$$p_1(z) = \frac{1+u(z)}{1-u(z)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \tag{3.149}$$

ve

$$p_2(w) = \frac{1+v(w)}{1-v(w)} = 1 + b_1 w + b_2 w^2 + \cdots \tag{3.150}$$

olarak tanımlansın. u, v Schwarz fonksiyonları olduğundan ve $p_1(0) = p_2(0) = 1$ olmak üzere p_1 ve p_2 fonksiyonları U da analitik ve pozitif reel kısma sahip olduğundan (3.149) ve (3.150) eşitlikleri

$$u(z) = \frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1} = \frac{1}{2}\left(c_1 z + \left[c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right] z^2 + \cdots\right) \tag{3.151}$$

ve

$$v(w) = \frac{p_2(w)-1}{p_2(w)+1} = \frac{1}{2}\left(b_1 w + \left[b_2 - \frac{b_1^2}{2}\right] w^2 + \cdots\right) \tag{3.152}$$

elde edilir. Devamında (3.148) kullanılarak

$$\begin{gathered}\frac{2(zf'(z) + \alpha z^2 f''(z))}{(1-\alpha)(f(z) - f(-z)) + \alpha z(f'(z) + f'(-z))} = \phi\left(\frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1}\right) \\ \frac{2(wg'(w) + \alpha w^2 g''(w))}{(1-\alpha)(g(w) - g(-w)) + \alpha w(g'(w) + g'(-w))} = \phi\left(\frac{p_2(w)-1}{p_2(w)+1}\right)\end{gathered} \tag{3.153}$$

sonucuna ulaşılır. (3.153) eşitliklerinden

$$2(1+\alpha)a_2 = \frac{1}{2}B_1 c_1$$

$$2(1+2\alpha)a_3 = \frac{1}{2}B_1\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right) + \frac{1}{4}B_2 c_1^2$$

ve

$$-2(1+\alpha)a_2 = \frac{1}{2}B_1 b_1$$

$$2(1+2\alpha)(2a_2^2 - a_3) = \frac{1}{2}B_1\left(b_2 - \frac{b_1^2}{2}\right) + \frac{1}{4}B_2 b_1^2$$

elde edilir. Benzer işlemler uygulanarak

$$a_2^2 = \frac{B_1^3(b_2 + c_2)}{8[(1+2\alpha)B_1^2 + 2(1+\alpha)^2(B_1 - B_2)]}$$

ve

$$a_3 = \frac{1}{16(1+\alpha)^2}B_1^2 b_1^2 + \frac{1}{8(1+2\alpha)}B_1(b_2 - c_2)$$

elde edilir ve Lemma 1.3.3 uygulanırsa teoremin ispatı tamamlanır.

3.10. $L_{S,\Sigma}(\alpha,\phi)$ Sınıfı için Katsayı Sınırları

3.10.1. Tanım. Bir $f \in \Sigma$ fonksiyonu,

$$\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)}\right)^{\alpha}\left(\frac{2(zf'(z))'}{(f'(z)+f'(-z))}\right)^{1-\alpha} \prec \phi(z)$$

ve

$$\left(\frac{2wg'(w)}{g(w)-g(-w)}\right)^{\alpha}\left(\frac{2(wg'(w))'}{(g'(w)+g'(-w))}\right)^{1-\alpha} \prec \phi(w)$$

sabordinasyon şartlarını sağlıyorsa $L_{S,\Sigma}(\alpha,\phi)$ sınıfındadır (Crişan 2013).

3.10.2. Teorem. (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu $L_{S,\Sigma}(\alpha,\phi)$ sınıfında ait bir fonksiyon ise

$$|a_2| \le \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{2\,|(\alpha^2-3\alpha+3)B_1^2+2(2-\alpha)^2(B_1-B_2)|}} \tag{3.154}$$

ve

$$|a_3| \le \frac{1}{2}B_1\left(\frac{1}{3-2\alpha}+\frac{1}{2(2-\alpha)^2}B_1\right) \tag{3.155}$$

dir.

İspat. $f \in L_{S,\Sigma}(\alpha,\phi)$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Benzer işlemler yapılarak

$$2(2-\alpha)a_2 = \frac{1}{2}B_1c_1$$

$$2(3-2\alpha)a_3 - 2\alpha(1-\alpha)a_2^2 = \frac{1}{2}B_1\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2c_1^2$$

ve

$$-2(2-\alpha)a_2 = \frac{1}{2}B_1b_1$$

$$2(3-2\alpha)(2a_2^2-a_3) - 2\alpha(1-\alpha)a_2^2 = \frac{1}{2}B_1\left(b_2-\frac{b_1^2}{2}\right)+\frac{1}{4}B_2b_1^2$$

eşitlikleri elde edilir. Devamında

$$a_2^2 = \frac{B_1^3(c_2+b_2)}{8\,|\,(\alpha^2-3\alpha+3)B_1^2+2(2-\alpha)^2(B_1-B_2)\,|}$$

ve

$$a_3 = \frac{1}{16(20-\alpha)^2}B_1^2c_1^2 + \frac{1}{8(3-2\alpha)}B_1(c_2-b_2)$$

bulunur ve Lemma 1.3.3 den (3.154) ve (3.155) de iddia edilen katsayı tahminlerine ulaşılır.

3.11. $P_\Sigma(\alpha,\lambda)$ ve $P_\Sigma(\beta,\lambda)$ Sınıfları için Katsayı Sınırları

3.11.1. Tanım. g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu

$$f\in\Sigma \text{ ve } \left|\arg\left(\frac{z^{1-\lambda}f'(z)}{f(z)^{1-\lambda}}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (0<\alpha\le 1,\ \lambda\ge 0,\ z\in U) \qquad (3.156)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{w^{1-\lambda}g'(w)}{g(w)^{1-\lambda}}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (0<\alpha\le 1,\ \lambda\ge 0,\ w\in U) \qquad (3.157)$$

şartlarını sağlıyorsa $P_\Sigma(\alpha,\lambda)$ sınıfındadır (Prema ve Keerthi 2013).

Eğer $\lambda=0$ alınırsa α mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların $S_\Sigma^*(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

3.11.2. Teorem. $0<\alpha\leq 1$, $\lambda\geq 0$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $P_\Sigma(\alpha,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2|\leq \frac{2\alpha}{\sqrt{(1+\lambda)(1+\alpha+\lambda)}}$$

ve

$$|a_3|\leq \frac{4\alpha^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{2\alpha}{2+\lambda}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.156) ve (3.157) den

$$\left[\frac{z^{1-\lambda}f'(z)}{f(z)^{1-\lambda}}\right]=[p(z)]^\alpha \tag{3.158}$$

ve

$$\left[\frac{w^{1-\lambda}g'(w)}{g(w)^{1-\lambda}}\right]=[q(w)]^\alpha \tag{3.159}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.158) ve (3.159) da katsayılar eşitlenerek

$$(1+\lambda)a_2=\alpha p_1 \tag{3.160}$$

$$(2+\lambda)a_3=\alpha p_2+\frac{\alpha(\alpha-1)p_1^2}{2}+\frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{2}\right)p_1^2\alpha^2}{(1+\lambda)^2} \tag{3.161}$$

ve

$$-(1+\lambda)a_2 = \alpha q_1 \tag{3.162}$$

$$(2+\lambda)(2a_2^2 - a_3) = \alpha q_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)q_1^2}{2} + \frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}-\frac{\lambda^2}{2}\right)q_1^2\alpha^2}{(1+\lambda)^2} \tag{3.163}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.160) ve (3.162) den

$$p_1 = -q_1 \tag{3.164}$$

ve

$$2(1+\lambda)^2 a_2^2 = \alpha^2 (p_1^2 + q_1^2) \tag{3.165}$$

elde edilir. (3.161), (3.163) ve (3.164) den

$$a_2^2 = \frac{\alpha^2 (p_2 + q_2)}{(\alpha + 1 + \lambda)(1+\lambda)}$$

elde edilir. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 den

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{(1+\lambda)(1+\alpha+\lambda)}}$$

bulunur.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.161) den (3.163) çıkarılırsa

$$(2+\lambda)(2a_3-2a_2^2)=\alpha(p_2-q_2)+\frac{\alpha(\alpha-1)(p_1^2-q_1^2)}{2}+\frac{(1+\lambda)\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\alpha^2(p_1^2+q_1^2)}{(1+\lambda)^2}$$

bulunur ve p_1, p_2, q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3|\leq\frac{4\alpha^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{2\alpha}{2+\lambda}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.11.3. Sonuç. Eğer $0<\alpha\leq 1$ için $\lambda=0$ alınırsa

$$|a_2|\leq\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}, \qquad |a_3|\leq 4\alpha^2+\alpha$$

bulunur. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu α mertebeli bi-yıldızıl fonksiyonların $S_\Sigma^*(\alpha)$ sınıfındadır.

3.11.4. Tanım. g (3.1) ile tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, (1.1) formunda verilen bir $f(z)$ fonksiyonu,

$$f\in\Sigma \text{ ve } \operatorname{Re}\left(\frac{z^{1-\lambda}f'(z)}{f(z)^{1-\lambda}}\right)>\beta \qquad (0\leq\beta<1,\ \lambda\geq 0,\ z\in U) \tag{3.166}$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w^{1-\lambda}g'(w)}{g(w)^{1-\lambda}}\right)>\beta \qquad (0\leq\beta<1,\ \lambda\geq 0,\ w\in U) \tag{3.167}$$

şartlarını sağlıyorsa $P_\Sigma(\beta,\lambda)$ sınıfındadır (Prema ve Keerthi 2013).

3.11.5. Teorem. $0 \leq \beta < 1$, $\lambda \geq 0$ olmak üzere (1.1) formunda verilen $f(z)$ fonksiyonu $P_{\Sigma}(\beta,\lambda)$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{(1+\lambda)}}$$

ve

$$|a_3| \leq \frac{4(1-\beta)^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{2(1-\beta)}{2+\lambda}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.166) ve (3.167) den

$$\left[\frac{z^{1-\lambda} f'(z)}{f(z)^{1-\lambda}}\right] = \beta + (1-\beta)p(z) \tag{3.168}$$

ve

$$\left[\frac{w^{1-\lambda} g'(w)}{g(w)^{1-\lambda}}\right] = \beta + (1-\beta)q(w) \tag{3.169}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.168) ve (3.169) da katsayılar eşitlenerek

$$(1+\lambda)a_2 = (1-\beta)p_1 \tag{3.170}$$

$$(2+\lambda)a_3 = (1-\beta)p_2 + \frac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)^2}(1-\beta)^2 p_1^2 \tag{3.171}$$

ve

$$-(1+\lambda)a_2=(1-\beta)q_1 \tag{3.172}$$

$$(2+\lambda)(2a_2^2-a_3)=(1-\beta)q_2+\frac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)^2}(1-\beta)^2q_1^2 \tag{3.173}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.170) ve (3.172) den

$$p_1=-q_1 \tag{3.174}$$

ve

$$2(1+\lambda)^2a_2^2=(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2) \tag{3.175}$$

elde edilir. (3.170), (3.172) ve (3.175) den

$$a_2^2=\frac{(1-\beta)(p_2+q_2)}{2(1-\lambda)}$$

elde edilir. p_2 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 den

$$|a_2|\leq\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{(1+\lambda)}}$$

bulunur.

$|a_3|$ katsayısını bulmak için (3.171) den (3.173) ü çıkararak

$$(2+\lambda)2a_3=(1-\beta)(p_2-q_2)+\frac{(2+\lambda)(1-\beta)^2(p_1^2+q_1^2)}{(1+\lambda)^2}$$

ve p_1,p_2,q_1 ve q_2 katsayıları için Lemma 1.3.3 uygulanırsa

$$|a_3| \leq \frac{4(1-\beta)^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{2(1-\beta)}{2+\lambda}$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3.11.6. Sonuç. Eğer $0 \leq \beta < 1$ için $\lambda = 0$ alınırsa bi-yıldızıl fonksiyonların $S_{\Sigma}^{*}(\beta)$ elde edilir ve

$$|a_2| \leq \sqrt{2(1-\beta)}, \qquad |a_3| \leq 4(1-\beta)^2 + 1 - \beta$$

bulunur.

4. SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde, kendisi ve tersi yalınkat olan fonksiyonlara sabordinasyon prensibi kullanılarak yeni bir sınıf tanımlanmıştır. Tanımlanan sınıfın katsayı sınırları araştırılmıştır ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Tezin üçüncü bölümü, bi-ünivalent fonksiyonların katsayı tahminleri üzerinedir. Bu bölüm on alt başlıktan oluşmaktadır. Bu alt başlıklarda çeşitli yazarlar tarafından tanımlanan bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları verilmiştir. Ayrıca bu sınıflara çeşitli teknikler uygulanarak elde edilen $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı sınırları ifade edilmiştir ve bulunan sonuçlar birbiriyle karşılaştırılmıştır. Bu bölümün yedinci kısmında $B(\lambda,\mu,\phi)$ sınıfı tanımlanmış ve sabordinasyon prensibi uygulanarak,

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{|2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^2-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)|+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2 B_1}}$$

ve

$$|a_3| \leq \begin{cases} \dfrac{B_1}{2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)}; & B_1 \leq \dfrac{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \\[2ex] \dfrac{|2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^2-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)|B_1+2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^3}{2[|2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)B_1^2-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2(B_1^2+B_2)|+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2B_1](1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \\ & B_1 > \dfrac{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \end{cases}$$

biçiminde $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı sınırları elde edilmiştir (Altınkaya ve Yalçın 2014).

Tanımlanan $B(\lambda, \mu, \phi)$ sınıfında ϕ fonksiyonu özel olarak seçilirse elde edilen $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı sınırları değişmektedir.

Eğer

$$\phi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} = 1 + 2\alpha z + 2\alpha^2 z^2 + \cdots \qquad (0 < \alpha \leq 1)$$

olarak alınırsa

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\left|4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-3(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2\right|\alpha+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}}$$

ve

$$|a_3| \leq \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu}; & \alpha \leq \dfrac{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \\ \dfrac{[|41+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-3(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2|+4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)]\alpha^2}{[|41+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-3(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2|\alpha+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2](1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} & \\ & \dfrac{(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

elde edilir. Bulunan bu $|a_2|$ ve $|a_3|$ sınırları Keerthi ve Raja (2013) tarafından elde edilen sınırlardan daha küçüktür (Altınkaya ve Yalçın 2014).

Eğer

$$\phi(z) = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z} = 1 + 2(1-\alpha)z + 2(1-\alpha)z^2 + \cdots \qquad (0 \leq \alpha < 1)$$

olarak alınırsa

$$|a_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{\sqrt{\left| 4(1-\alpha)(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(3-2\alpha)(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2 \right| + (1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}}$$

ve

$$|a_3| \leq \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu}; & \dfrac{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \leq \alpha < 1 \\ \dfrac{[|4(1-\alpha)(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(3-2\alpha)(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2|](1-\alpha)+4(1-\alpha)^2(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)}{[|4(1-\alpha)(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(3-2\alpha)(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2|+(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2](1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)}; & \\ & 0 \leq \alpha < \dfrac{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)-(1+\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2}{4(1+2\lambda-2\mu+6\lambda\mu)} \end{cases}$$

elde edilir. Bu $|a_2|$ ve $|a_3|$ sınırları Keerthi ve Raja (2013) tarafından elde edilen sınırlardan daha küçüktür (Altınkaya ve Yalçın 2014).

KAYNAKLAR

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014. Initial coefficient bounds for a general class of bi-univalent functions. *International Journal of Analysis,* Article ID. 867841: 4 pages.

Bieberbach, L. 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vernitteln. *Sitzungsber. Preuss. Akad.Wiss. Phys-Math.*, 940-955.

Branges, L. De 1985. A prof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.,* 154: 137-152.

Brannan, D.A., Taha, T.S. 1986. On some classes of bi-univalent functions. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai. Mathematica,* 31(2): 70-77.

Conway, J.B. 1995. Functions of One Complex Variable II, Springer-Verlag, New York.

Crişan, O. 2013. Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent functions. *Gen. Math. Notes,* 16(2): 93-102.

Çağlar, M., Orhan, H., Yağmur, N. 2012. Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions. **arXiv:1204.4285v1** [math.CV].

Duren, P.L. 1983. Univalent Functions, Springer-Verlag, New York.

Frasin, B.A., Aouf, M.K. 2011. New subclasses of bi-univalent functions. *Applied Mathematics Letters,* 24:1569-1573.

Garabedian, P.R. and Schiffer, M. 1955. A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. *J. Rational Mech. Anal.*, 4: 427-465.

Goodman, A.W. 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 556 pp.

Gronwall, T. 1916. Sur la deformation dans la representation conforme. *C.R. Acad. Sci.Paris*, 162: 249-252.

Keerthi B.S., Raja, B. 2013. Coefficient inequality for certain new subclasses of analytic bi-univalent functions. *Theoretical Mathematics and Applications,* 3(1): 1-10.

Koebe, P. 1907. Über die uniformisierung beliebeger analytischer kurven. *Nach. Ges. Wiss. Gottingen,* 191-210.

Lewin, M. 1967. On a coefficient problem for bi-univalent functions. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 18(1): 63-68.

Li, X.F., Wang, A.P., 2012. Two new subclasses of bi-univalent functions. *International Mathematical Forum,* 7(30): 1495-1504.

Loewner, C. 1923. Uniersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I., *Math. Ann.*, 89: 103-121.

Magesh, N., Yamini, J. 2013. Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent functions. *International Mathematical Forum,* 8(27): 1337-1344.

Murugusundaramoorthy, G., Magesh, N., Prameela, V. 2013. Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent functions. *Abstract and Applied Analysis,* Article ID. 573017: 3 pages.

Nehari, Z. 1952. Conformal Mapping, Mcgraw-Hill, New York.

Netanyahu, E.1969. The minimal distance of the image boundary from the orijin and the second coefficient of a univalent function in $|z|<1$, *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* 32:100-112.

Orhan H., Magesh, N., Balaji, V.K. 2013. Initial coefficient bounds for a general class of bi-univalent functions. **arXiv:1303.2527v1** [math.CV].

Ozowa, M. 1969. On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 21: 97-128.

Palka, B.P. 1991. An Introduction to Complex Function Theory, Springer-Verlag, New York.

Pederson, R.W., Schiffer M. 1972. A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 45: 161-193.

Pederson, R.W. 1968. A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 31: 331-351.

Prema, S., Keerthi, B.S. 2013. Coefficient bounds for certain subclasses of analytic functions. *Journal of Mathematical Analysis,* 4(1): 22-27.

Pommerenke, C. 1975. Univalent Functions, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Porwal, S., Darus, M. 2013. On a new subclass of bi-univalent functions. *Journal of the Egyptian Mathematical Society,* 21(3): 190-193.

Riemann, B. 1851. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veranderlichen complexen Grösse. *PhD Thesis,* University of Göttingen, Germany.

Salagean, G.S. 1983. Subclasses of univalent functions. *Lecture Notes in Math.,* Springer-Verlag, Heidelberg, 1013: 362-372.

Srivastava, H.M., Mishra, A.K., Gochhayat, P. 2010. Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions. *Appl.Math. Lett.,* 23: 1188-1192.

Styer, D., Wright, D.J. 1981. Results on bi-univalent functions. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 82 (2): 243-248.

Suffridge, T.J. 1969. On unıvalent polynomials. *J. London Math. Soc.,* 44: 496-504.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şahsene ALTINKAYA

Doğum Yeri ve Tarihi : Kırcaali/Bulgaristan, 11.04.1990

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Bursa Erkek Lisesi 2004-2008

Lisans : Erciyes Üniversitesi 2008-2012

Çalıştığı Kurum ve Yıl : Uludağ Üniversitesi-2013

İletişim : sahsene@uludag.edu.tr

Yayınları :

Altınkaya, Ş., Yalçın, S. 2014. Initial coefficient bounds for a general class of bi-univalent functions. *International Journal of Analysis,* Article ID. 867841: 4 pages.