Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakülteleri Dergisi
Cilt: VI, Sayı: 2, 1991

NÜMERİK ÇÖZÜMLERDE MAJONANTLARIN GENELLEŞTİRİLMESİ

Hasan SOYDAN*

ÖZET

Dahlguist z', u'nun majorantı ve $\forall z \varepsilon P$ *için* $L_1 z \le Lz \le L_2 z$ *oluyorsa,* $|Lu - (L_1 u + L_2 u)/2| \le (L_2 z' - L_1 z')/2$ *olduğunu bir lemma ile göstermiş ve* $\forall z \varepsilon P$ *için* $Lz \ge 0$ *ise* $|Lu| \le Lz'$ *olduğunu da Lemmanın sonucu olarak vermiştir.*

Bu çalışmada lemma genelleştirilmiş u_i *fonksiyonlarının* $i = 1, 2, ..., n$ *(n sonlu) için sıra ile majorantları* z'_i *ve* $\forall z_i \varepsilon P$ *için* $L_{i1} z_i \le z_i \le L_{i2} z_2$ *oluyorsa* $\left| \sum_{i=1}^{n} [L_i u_i - (L_{i1} u_i - (L_{i1} u_i + L_{i2} u_i)/2] \right| \le \sum_{i=1}^{n} (L_{i2} z'_2 - L_{i1} z'_i)/2$ *ve ayrıca* α_i *ler gerçel sayılar ve* $\alpha_i < 0$ *olduğunda* L_{i1} *yerine* L_{i2} *ve* L_{i2} *yerine de* L_{i1} *yazılmak suretiyle* $\forall \alpha_i$ *için,*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [L_i u_i - (L_{i1} u_i + L_{i2} u_i)/2] \right| \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (L_{i2} z'_i - L_{i1} z'_i)/2$$

olduğu kanıtlanmıştır.

---

* *U.Ü. Necatibey Eğitim Fakültesi, Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Öğretim Üyesi.*

SUMMARY

Generalization of the Majorants in Numerical Solutions

Dahlguist has shown that it's $|Lu - (L_1u + L_2u)/2| \leq (L_2z' - L_1z')/2$ *with a lemma, if* z' *is the majorant of* u *and it's* $L_1z \leq Lz \leq L_2z$ *for* $\forall z \varepsilon P$*, and he has also given that it's* $|Lu| \leq Lz'$ *if it's* $Lz > 0$ *for* $\forall z \varepsilon P$*, as a result of a lemma.*

In this article, lemma is generalized as it's $|\sum_{i=1}^{n} [L_iu_i - (L_{i1}u_i - (L_{i1}u_i + L_{i2}u_i)/2]| \leq \sum_{i=1}^{n} (L_{i2}z'_2 - L_{i1}z'_i)/2$*, if in* u_i *functions, it's* $L_{i1}z_i \leq L_iz_i \leq L_{i2}z_i$ *for it's majorant* z'_i *and for* $\forall z \varepsilon P$ *in order. And it has been proved that it's* $|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i[L_iu_i - (L_{i1}u_i + L_{i2}u_i)/2] \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (L_{i2}z'_i - L_{i1}z'_i)/2$ *if the* α_i*'s are real numbers and* $\alpha_i \leq 0$ *then it's substituted* L_{i2} *with* L_{i1} *and* L_{i1} *with* L_{i2}*.*

GİRİŞ

$z^{(k)}(x)$ türevi bir I aralığında sabit işaretli, L_1 ve L_2 değerleri sonlu algoritma ile hesaplanabilen lineer fonksiyonlar olmak üzere, birçok lineer L fonksiyonu yardımıyla,

$$L_1z \leq Lz \leq L_2z \tag{1}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Örnek 1: $I = [x_\upsilon, x_{\upsilon+k}]$, $x_\upsilon < x_{\upsilon+1} < \ldots < x_{\upsilon+k}$ ve L_1u ile L_2u da sırasıyla $\{u(x_\mu)_{\mu=\upsilon}\}^{\upsilon+k-1}$ ile $\{u(x_\mu)\}_{\mu=\nu+1}^{\upsilon+k}$ değerleri kullanılarak, polinomial interpolasyonla bulunan tahmin değerleri olsunlar. Eğer $u \varepsilon C^k(I)$ ise Lagrange interpolasyon formülleri,

$$u(x) - L_1u = \frac{1}{k!} \prod_{i=\nu}^{\nu+k-1} (x - x_\mu)\, u^{(k)}(\xi_1), \quad \xi_1 \ \varepsilon\ I$$

(2)

$$u(x) - L_2u = \frac{1}{k!} \prod_{i=\nu+1}^{\nu+k} (x - x_\mu)\, u^{(k)}(\xi_2), \quad \xi_2 \ \varepsilon\ I$$

olur. u yerine z yazılsın. O zaman sgn $z^{(k)}$ (x) I'da sabittir. u(x) yerine de Lu yazılsın. Böylece $\forall x \, \varepsilon I$ için,

$$\operatorname{sgn} (Lz - L_2 z) = \operatorname{sgn} \frac{x-x_{\nu+k}}{x-x_\nu} \operatorname{sgn} (Lz - Lz_1)$$

$$= - \operatorname{sgn} (Lz - Lz_1)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi x'in durumuna göre ya (1) eşitsizliği ya da tersi elde edilir.

Örnek 2: $h = 2^{-k}$ ile, Simpson formülünün

$$Lu = \int_0^1 u(x)\, dx$$

İntegraline uygulanmasından elde edilen sonuç $S_k u$ olsun. [0, 1] aralığında örnek 1'deki dönüşümlerle, $z^{(k)}(x) > 0$ ise,

(3) $$2S_k z - S_{k-1} z \leq L_z \leq S_k z$$

bulunur.

Konu aşağıdaki gibi genelleştirilirse;

Tanım;

$\propto_1 \geq 0$, $\propto_2 \geq 0$ $\propto_1 \varepsilon R$, $\propto_2 \varepsilon R$ ve S bir lineer uzay olsun. Belirli bir $P \subset S$ alt kümesine,

$$z_1 \,\varepsilon P,\ z_2 \,\varepsilon P \Rightarrow \propto_1 z_1 + \propto_2 z_2 \,\varepsilon P$$

ve

$$z \neq 0, \qquad z \,\varepsilon\, P \qquad -z \,\varepsilon\, P$$

şartlarını sağlıyorsa S'nin pozitif konisi adı verilir.

Tanım: P pozitif koni, $z - u \varepsilon P$ ve $z + u \, \varepsilon P$ oluyorsa z'ye u'nun majorantı adı verilir.

Bu tanım ile $z = [(z + u) - (z - u)]/2 \, \varepsilon P$ sonucu elde edilir; u'nun bir majorantını oluşturmak, u'yu P'nin iki elemanının farkı olarak yazabilme ile aynı anlamdadır. Gerçekten,

$$2u = (z+u) - (z-u)$$

dur. Tersine $z_1 \varepsilon P$, $z_2 \varepsilon P$ olmak üzere $u = z_1 - z_2$ yazılabiliyorsa $z_1 + z_2$'nin bir majorant olacağı açıktır.

Lemma, z', u'nun majorantı ve $\forall z \varepsilon P$ için $L_1 z \leq Lz \leq L_2 z$ oluyorsa,

$$|Lu - (L_1 u + L_2 u)/2| \leq (L_2 z' - L_1 z')/2$$

dir.

İspat: z' u'nun majorantı olduğundan $z' + u \varepsilon P$ dir. Öyleyse hipotezden,

$$L_1 (z' + u) \leq L(z' + u) \leq L_2 (z' + u),$$

aynı düşünce ile $z' - u \varepsilon P$ olduğundan da,

$$L_1 (z' - u) \leq L(z' - u) \leq L_2 (z' - u)$$

yazılabilirler. Son eşitsizliğin her tarafı -1 ile çarpılıp,

$$-L_2 (z' - u) \leq -L (z' - u) \leq -L_2 (z' - u)$$

ilk eşitsizlikte toplanırsa,

$$(L_1 - L_2)\, z' + (L_1 + L_2) u < 2Lu < (L_2 - L_1)\, z' + (L_2 + L_1)\, u$$

ifadesi elde edilir. Bu da,

$$(4) \qquad - (L_2 - L_1)\, z' \leq 2Lu - (L_1 + L_2) u \leq (L_2 - L_1)\, z'$$

veya bütün yanlar 2 ile bölünerek,

$$- \frac{L_2 - L_1}{2} z' \leq Lu - \frac{L_1 + L_2}{2} u \leq \frac{L_2 - L_1}{2} z'$$

veya

$$|Lu - (L_1 + L_2) u/2| \leq (L_2 - L_1)\, z'/2$$

ya da,

$$|Lu - (L_1 u + L_2 u)/2| \leq (L_2 z' - L_1 z')/2$$

demektir.

Sonuç: $\forall z \varepsilon P$ için $Lz \geq 0$ ise $|Lu| \leq Lz'$ dür.

İspat: Yukarıdaki son eşitsizlikte L_1 yerine 0, L_2 yerine L yazılırsa,

$$|Lu| \leq Lz'$$

elde edilir.

Burada u'nun z' majorantı oluşturulabilirse, L_1z' ve L_2z' 'ü ve yine L_1u ve L_2u yu hesaplanarak Lu için kesin hata sınırını elde edebiliriz. Lz' kesin olarak hesaplanabildiğinden z' 'nün seçilmesine gerek kalmaz.

Lemmanın genelleştirilmesi, z'_i, u_i'nin majorantı ve $z \varepsilon P$ için $L_{i1} z_i < L_i z_i < L_{i2} z_i$ $i = 1, 2, ..., n$ (ve n sonlu) ise,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [L_i u_i - (L_{1i} u_i + L_{2i} u_1)/2] \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (L_{i2} z'_i - L_{i1} z')/2$$

dir.

İspat: (4) eşitsizliği $L_{i1} z_i \leq L_i z_i \leq L_{i2} z_i$ için

$$(5) \qquad -(L_{i2} - L_{i1}) z'_i \leq 2L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2}) u_i \leq (L_{i2} - L_{i1}) z'_i$$

şeklinde yazılır ve bu sonucun $i = 1, 2, ..., n$ için bulunan değerleri yazılıp taraf tarafa toplanırsa,

$$(6) \qquad - \sum_{i=1}^{n} (L_{i2} - L_{i1}) z'_i \leq \sum_{i=1}^{n} [2L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2}) u_i]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (L_{i2} - L_{i1}) z'_i$$

bulunur. Bu da eşitsizliğin bütün yanları 2 ile bölünüp,

$$(7) \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} [L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2}) u_i/2] \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (L_{i2} z'_i - L_{i1} z'_1)$$

bulunur.

Sonuç: 1 $i = 1, 2, ..., n$ (n sonlu) olmak üzere $\forall z_i \varepsilon P$ için $L_i z_i \geq 0$

$$(8) \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} L_i u_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} L_i z'_i$$

İspat: (7) eşitliğinde, $\forall_i$ için L_{i1}, yerine 0, L_{i2} yerine L_i yazılıp eşitsizliğin iki yanı 2 ile çarpılarak aranan sonuç bulunur.

Sonuç: $2 \propto_i \geq 0$ gerçel sayılar olmak üzere genelleştirilmiş lemmanın şartlarında,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \propto_i [L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2}) u_i/2] \right| < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \propto_i (L_{i2} z'_i - L_{i1} z'_i)$$

dir.

İspat: (5) eşitsizliğinin her yanı $\propto_i$ ile çarpılıp,

$$- \propto_i (L_{i2} - L_{i1}) z'_i < \propto_i [2L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2}) u_i] < \propto_i (L_{i2} - L_{i1}) z'_i$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ için yazılarak taraf tarafa toplanırsa

$$(9) \qquad - \sum_{i=1}^{n} \propto_i (L_{i2} - L_{i1}) z'_i \leq \sum_{i=1}^{n} \propto_i [2L_i u_i - (L_{i1} - L_{i2}) u_i]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \propto_i (L_{i2} - L_{i1}) z'_i$$

veya bütün yanlar 2 ile bölünerek,

$$(10) \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} \propto_i [L_i u_i - (L_{i1} u_i - L_{i2} u_i)]/2 \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \propto_i (L_{i2} - L_{i1}) z'_i$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikten de istenirse $\forall_i$ için L_{i1} yerine 0 ve L_{i2} yerine de L_i yazılıp her iki yan 2 ile çarpılarak (8) eşitsizliğine benzer

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \propto_i L_i u_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \propto_i L_i z'_i$$

sonucu elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. DAHLGUIST, G.C.: Numerical Solution of Nonlinear Differantial Equation, 1986.
2. UHLMANN, W.: Fehlerabschatzungen bei Antangs Anfangswertaufgaben.
3. WIDDER, D.V.: The Laplace Transform Princton, 1976.