Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakülteleri Dergisi
Cilt: VI, Sayı: 2, 1991

SONLU FARKLAR VE YİNELEME YÖNTEMLERİYLE LAPLACE DENKLEMİNİN BİR BİLGİSAYAR UYGULAMASI

A. Hikmet AKSEL*

ÖZET

Laplace denkleminin sonlu farklar ve yineleme yöntemleriyle çözümüne ilişkin bir örnek incelendi. Bununla ilgili olarak bir basic bilgisayar programı verildi.

SUMMARY

Application of a Computer of Laplace Equation with The Method of The Finite Difference and The Iterative

A sample that connected to the solution of the Laplace eguation with the methods of the finite difference and the iterative was scrutinized. Relevent to this, a basic programme of the computer was given.

Dik koordinat sisteminde potansiyel için Laplace denkleminin genel şekli $\nabla^2 \nabla = 0$ veya daha açık olarak,

---

* *Doç. Dr.; Necatibey Eğitim Fakültesi, Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Fizik Öğretim Üyesi, Balıkesir.*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

şeklindeydi. Burada V elektriksel potansiyeli ifade etmektedir. Bu denklemin genel çözümünü bulmak için V yi X, Y, Z gibi üç fonksiyonun çarpımı olarak ifade edelim (3.4).

$$V = X\,Y\,Z \tag{2}$$

Burada X = yalnız x sin fonksiyonu
Y = yalnız y nin fonksiyonu
Z = yalnız z nin fonksiyonudur.

(2) denklemini (1) denkleminde yazarsak;

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \tag{3}$$

şeklinde kısmi türevden kurtarılmış ikinci derece diferansiyel denklemini elde ederiz.

Bu denklemin her terimini XYZ çarpımına bölerek

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \tag{4}$$

denklemini elde ederiz. Soldaki üç terimin toplamı sıfır olduğundan, aynı zamanda her değişken bağımsız olduğundan, her terim bir değişmeze (sabit) eşittir. Böylece

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = a^2 \tag{5}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = a^2{}_1\,X \tag{6}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = a^2{}_2\,Y \tag{7}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = a^2_3\ Z \qquad (8)$$

yazılabilir. (6), (7), (8) değerleri (4) denkleminde yerine konursa,

$$a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 = 0 \qquad (9)$$

denklemi elde edilir.

Şimdi sorun üç değişkenin bağımsız olarak birer çözümünün bulmaktır. Değişkenlerin bağımsızlığı yöntemi olarak adlandırılan yöntemle (6) denkleminin çözümü;

$$X = C_1\,e^{a_1x} + C_2\,e^{-a_1x} \qquad (10)$$

şeklinde bulunabilir. Burada C_1 ve C_2 değerleri sınır koşullarından hesaplanabilen keyfi değişmezlerdir. Benzer şekilde (7) ve (8) denklemlerinin de çözümü yazılabilir.

$$Y = C_3\,e^{a_2y} + C_4\,e^{-a_2y} \qquad (11)$$

$$Z = C_5\,e^{a_3z} + C_6\,e^{-a_3z} \qquad (12)$$

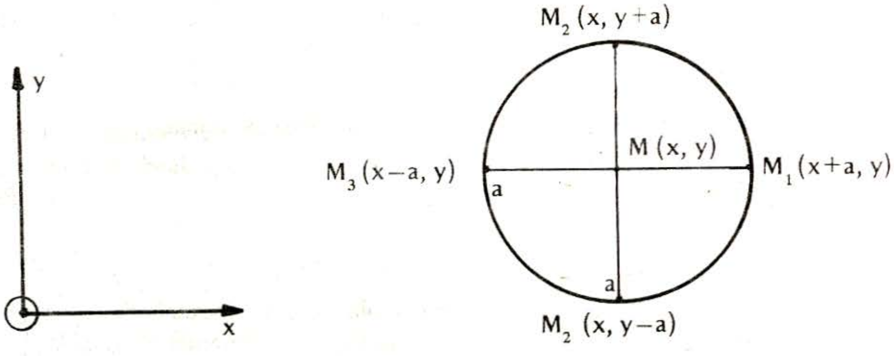
(10), (11), (12) denklemlerinin çarpımı (1) denkleminin genel çözümüdür. Böylece

$$V = (C_1e^{a_1x} + C_2e^{-a_1x})\,(C_3e^{a_2y} + C_4e^{-a_2y})\,(C_5e^{a_3z} + C_6e^{-a_3z}) \qquad (13)$$

şeklinde bir genel çözüm bulunabilir. Genel çözümler yukarıdaki gibi exponansiyel veya trigonometrik veya hiperbolik olabilir.

Bir diğer yol da sonlu farklar yöntemine (finite difference) göre Laplace denkleminin çözümünü bulmaktır. Şekil 1'deki gibi x, koordinat ekseninde M (x, y) noktasının potansiyeli V (x, y) olsun. Merkezi noktaya a uzaklıkta bulunan koordinat eksenleri üzerindeki M_1, M_2, M_3 ve M_4 noktalarındaki potansiyel yaklaşık olarak V(x, y) potansiyelini Taylor serisine açılarak bulunabilir.

$$V(x+a, y) = V(x, y) + a\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \ldots\ldots. \qquad (14)$$



Şekil: 1

a) x, y iki boyutlu koordinat ekseni,

b) M (x, y) merkezi noktası ile eşit uzaklıktaki çevre noktaları

$$V(x-a, y) = V(x, y) - a\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + ... \qquad (15)$$

yaklaşık olarak ilk üç terimi alarak (14) ve (15) denklemlerini taraf tarafa toplarsak,

$$V(x+a, y) + V(x-a, y) = 2V(x, y) + a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (16)$$

Buradan $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ yi çekersek;

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{V(x+a,y) + V(x-a,y) - 2V(x,y)}{a^2} \qquad (17)$$

bulunur. Aynı işlemleri M2 ve M4 noktalarına uygularsak benzer şekilde;

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V(x,y+a) + V(x,y-a) - 2V(x,y)}{a^2} \qquad (18)$$

denklemini yazabiliriz. (17) ve (18) denklemlerinin taraf tarafa toplamı iki boyutlu Laplace denklemini vereceğinden;

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{x^2} + \frac{\partial^2 V}{y^2} = \frac{1}{a^2} (V(x+a,y) + V(x-a,y) + V(x,y+a)$$

$$+ V(x,y-a) - 4V(x,y)) = 0 \qquad (19)$$

(19) denkleminden V(x,y) çözülürse;

$$V(x, y) \cong \frac{1}{4} (V(x+a,y) + V(x-a,y) + V(x,y+a) + V(x,y-a)) \qquad (20)$$

bulunur. Görülüyor ki M merkezi noktasındaki potansiyel, eşit uzaklıktaki 4 çevre noktasındaki potansiyellerin ortalamasıdır.

Eğer sistem 3 boyutlu olarak düşünülürse (20) denklemi;

$$V(x,y,z) = \frac{1}{6} (V(x+a,y,z) + V(x-a,y,z) + V(x,y+a,z)$$

$$+ V(x,y-a,z) + V(x,y,z+a) + V(x,y,z-a)) \qquad (21)$$

şeklinde hesaplanacaktır. Benzer şekilde bütün diğer noktaların potansiyeli de hesaplanabilir. Bu yönteme sonlu farklar (finite difference) veya noktadan noktaya (point-by-point) yöntemi adı verilir.

Aşağıda bu yöntemin uygulanmasına ait bir örnek ve bir bilgisayar uygulaması verilmektedir.

Örnek 1: Sonsuz kare içi potansiyel dağılımı: Şekil 2a da kesiti gösterilen sonsuz uzun metal levhalardan yapılmış kareyi düşünelim. Bu karenin yan ve alt kenarlarının potansiyeli 0 V ve üst kenarının potansiyeli ise 80 V olsun. Üst kenar küçük bir yarıkla diğer kenarlardan ayrılmıştır. Potansiyel dağılımını elde etmek için sonlu farklar yöntemini kullanalım. Önce merkezin potansiyelini hesaplayalım. (20) denkleminden;

$$\frac{80+0+0+0}{4} = 20 \text{ V}$$

bulunur. Şimdi kenarları merkeze birleştiren doğruların ayırdığı 4 karenin merkezindeki potansiyelleri bulalım. Bunun için üst ve yan yüzeyler arasındaki boşluğun potansiyelini, bu boşluğun iki tarafındaki potansiyellerin ortalaması olarak alalım;

$$\frac{80+0}{2} = 40 \text{ V}$$

Daha sonra xy eksenlerini 45° çevirelim. Üst sol ve sağ karelerin merkezindeki potansiyeli hesaplaalım.

$$\frac{20+0+40+80}{4} = 35 \text{ V}$$

Benzer şekilde sol alt ve sağ alt karelerin potansiyellerini hesaplıyalım.

$$\frac{20+0+0+0}{4} = 5 \text{ V}$$

(Şekil: 2b) şimdi xy eksenlerini yine normal konumuna döndürelim ve oluşan yeni karelerin merkezindeki potansiyelleri hesaplıyalım. Ortanın üstündeki küçük karenin merkezinin potansiyeli;

$$\frac{80+35+20+35}{4} = 42{,}5 \text{ V}$$

Ortanın iki yanındaki küçük karelerin potansiyeli

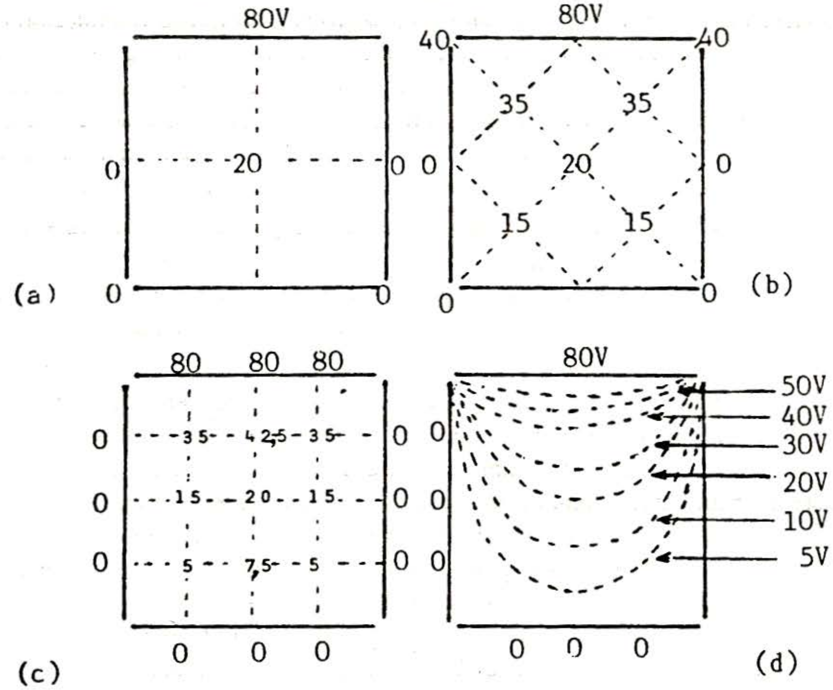
$$\frac{0+35+20+5}{4} = 15 \text{ V}$$

Ortam altındaki küçük karenin potansiyeli de

$$\frac{20+5+0+5}{4} = 7{,}5 \text{ V}$$

bulunur (Şekil: 2c).

Yukarıdaki hesaplamalar, değerler artık değişmiyecek şekilde bütün noktalar için tekrar tekrar yapılabilir. Bu şekildeki işleme de yineleme (iterative) yöntemi adı verilir. Çok nokta kullanıldığında bu yöntem bize Laplace denkleminin tam bir çözümünü verir. Daha çok nokta kullanmak ve hesaplamaları çok fazla tekrarlamak gerektiğinde bu iş için bilgisayarları kullanmak bizi daha kesin bir sonuca ulaştıracaktır. Bunun sonucunda bu potansiyellerin kullanımıyla Şekil 2d de gösterildiği gibi eşpotansiyel eğriler daha uygun çizilebilecektir. Bununla ilgili daha detaylı bilgisayar çözümü sağlıyan bir örnek aşağıda verilmektedir.



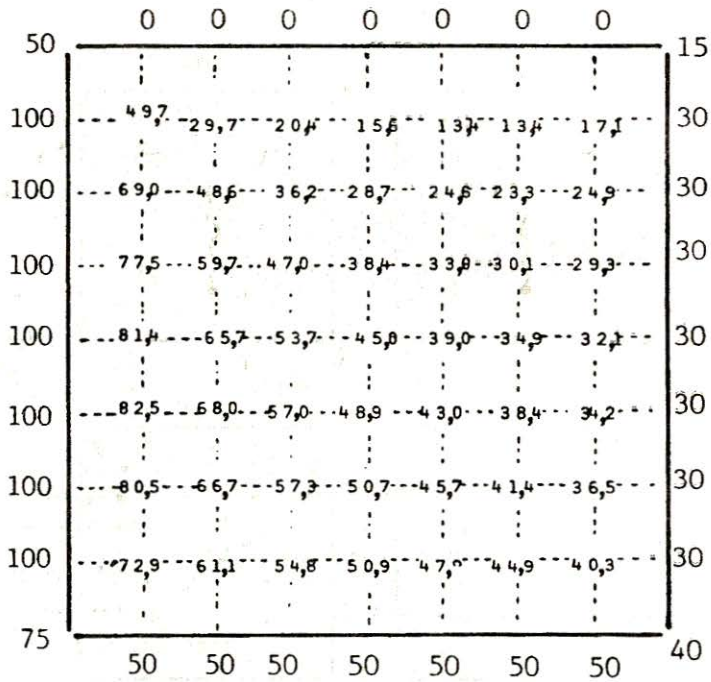
Şekil: 2
a, b, c) Yineleme yönteminin sonsuz kareye uygulanması,
d) Bu sonsuz kare için elde edilen eşpotansiyel yüzeyler

Örnek 2: Sonsuz kare içi potansiyelin sayısal bilgisayarla çözümü:

Yukarıda tartışılan yöntemler sonlu farklar ve yineleme yöntemleridir. Daha büyük kesinlik için daha fazla nokta ve daha fazla hesap tekrarı gerekir. Bu iş için sayısal bilgisayar (digital computer) çözümü ülküsel bir sonuçtur. Bunun için gerekli algoritma, sonlu farklar ve yineleme yöntemleriyle sistematik bir ortalama hesabı şeklinde ortaya koyulabilir.

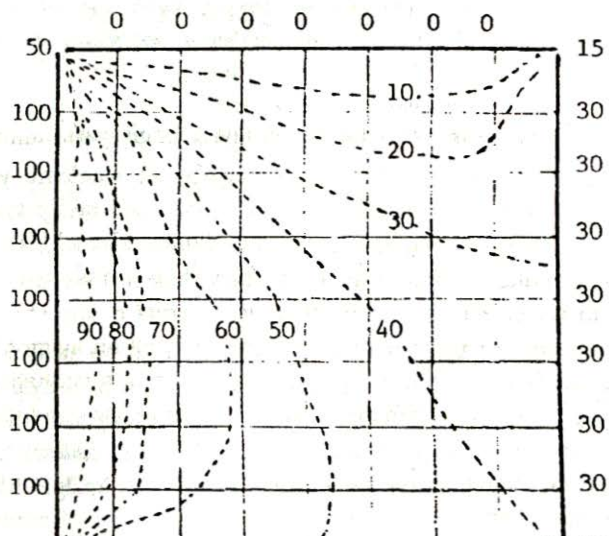
Şekil 3'de 0 V, 30 V, 50 V, 100 V şeklinde farklı potansiyeldeki 9x9 noktaya sahip 4 adet sonsuz levhanın oluşturduğu kare için bilgisayarla hesaplanan potansiyel değerleri verilmektedir. Şekil 4'de de bu değerlerden yararlanarak çizilen eşpotansiyel eğriler verilmektedir. Sonlu farklar ve yineleme yöntemleri ile hesap için yapılan basic dilindeki bilgisayar programı da Çizelge 1'de verilmektedir.

Görüldüğü gibi böyle bir bilgisayar yöntemi kullanmak suretiyle her konuda olduğu gibi Laplace denkleminin de çok daha kesin bir çözümü elde edilebilmektedir.



Şekil: 3

0 V, 30 V, 50 V ve 100 V luk gerilime sahip 4 sonsuz kare levha için bilgisayarca hesaplanan potansiyeller



Şekil: 4

Şekil 3'te verilen potansiyellere uygun olarak çizilen eşpotansiyel eğriler

Çizelge: 1

Laplace Denkleminin Sonlu Farklar ve Yineleme Yöntemleriyle Çözümüne İlişkin Basic Bilgisayar Programı

```
10 'YINELEME YONTEMIYLE ELEKTIRIKSEL POTANSIYELI HESAPLIYAN
PROGRAM
20 DIM Z(9,9), Z2(9,9)
30 ' BURADA Z(1,1) EN ALT SOL KAREDIR
40 CLS
50 YINE=0
60 ' KENARLAR UZERINDEKI BILINEN DEGERLERI YAZALIM
70 LOCATE 4,10:INPUT "SOL LEVHA POTANSIYELINI VERINIZ:";V1
80 LOCATE 6,10:INPUT "SAG LEVHA POTANSIYELINI VERINIZ:";V2
90 LOCATE 8,10:INPUT "UST LEVHA POTANSIYELINI VERINIZ:";V3
100 LOCATE 10,10:INPUT "ALT LEVHA POTANSIYELINI VERINIZ:";V4
110 FOR I=2 TO 8
120 Z(I,9)=V2: Z(I,1)=V1
130 NEXT I
140 FOR J=2 TO 8
150 Z(1,J)=V4: Z(9,J)=V3
160 NEXT J
170 Z(1,1)=(V1+V4)/2: Z(1,9)=(V2+V4)/2: Z(9,9)=(V2+V3)/2: Z(
9,1)=(V1+V3)/2
180 'DUZ DURUM ICIN 9*9 KARESINDEKI MERKEZI NOKTANIN HESAPLA
NMASI
190 D1=5: D2=5: D3=0: D4=4
200 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
210 'CAPRAZ DURUM ICIN 5*5 KARESININ 4 CEVRE NOKTASININ HE
SAPLANMASI
220 D1=3: D2=3: D3=1: D4=2
230 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
240 D1=3: D2=7
250 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
260 D1=7: D2=3
270 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
280 D1=7: D2=7
290 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
300 'DUZ DURUM ICIN 3*3 KARESININ 4 CEVRE NOKTASININ HESAPLA
NMASI
310 D1=3: D2=5: D3=0: D4=2
320 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
330 D1=5: D2=7
340 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
350 D1=7: D2=5
360 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
370 D1=5: D2=3
380 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
390 'CAPRAZ DURUM ICIN 3*3 KARESININ 4 CEVRE NOKTASININ HESA
PLANMASI
400 FOR SUT=2 TO 8 STEP 2
410 FOR SAT=2 TO 8 STEP 2
420 D1=SAT: D2=SUT: D3=1: D4=1
430 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
440 NEXT SAT,SUT
450 'DUZ DURUM ICIN CIFT NUMARALI SATIRLAR ICINDE 2*2 LIK KA
RELERIN ARASINDAKI NOKTALARIN HESABI
```

```
460 FOR SUT=2 TO 8 STEP 2
470 FOR SAT=3 TO 7 STEP 2
480 D1=SAT: D2=SUT: D3=0: D4=1
490 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
500 NEXT SAT,SUT
510  DUZ DURUM ICIN TEK NUMARALI SATIRLAR ICINDE 2*2 LIK KAR
ELERIN ARASINDAKI NOKTALARIN HESABI
520 FOR SUT=3 TO 7 STEP 2
530 FOR SAT=2 TO 8 STEP 2
540 D1=SAT: D2=SUT: D3=0: D4=1
550 GOSUB 1000: Z(D1,D2)=ORT
560 NEXT SAT,SUT
570 ' ARTIK BUTUN NOKTALAR BASLANGIC DEGERLERIYLE VERILMISTI
R.BOYLECE DEGERLERDEKI KESIN DEGERLERI HESAPLAMAK ICIN YINEL
EMEYE BASLIYABILIRIZ.
580 'DUZ DURUM ICIN YINELEMEYI TAMAMLADIGIMIZ ZAMAN EN BUYUK
 DEGISMEMIZIN 0.01 V TAN DAHA KUCUK OLMASINI ISTIYORUZ
590 FOR I=2 TO 8
600 FOR J=2 TO 8
610 D1=I: D2=J: D3=0: D4=1
620 GOSUB 1000: Z2(D1,D2)=ORT
630 NEXT J,I
640 ' YENI DEGERLERI GERIYE ORJINAL SIRAYA TASIYALIM VE EN K
UCUK FARKI BULALIM
650 FARK2=0
660 FOR I=2 TO 8
670 FOR J=2 TO 8
680 FARK1=Z2(I,J)-Z(I,J)
690 IF FARK1>FARK2 THEN FARK2=FARK1
700 Z(I,J)=Z2(I,J)
710 NEXT J,I
720 ' FARKI TEST EDIP, GEREKIRSE YINELEMEYI TEKRARLIYALIM.YI
NELEME SAYISINI SAKLAYALIM
730 YINE=YINE+1
740 IF FARK2>.01 THEN GOTO 590
750 ' LEVHA POTANSIYELLERINI, YINELEME SAYISINI VE Z(I,J) DI
ZISINI YAZALIM
760 CLS
770 LPRINT
780 LPRINT TAB(10) "SOL LEVHA POTANSIYELI:";USING "###.#";V1
;:LPRINT " V"
790 LPRINT TAB(10) "SAG LEVHA POTANSIYELI:";USING "###.#";V2
;:LPRINT " V"
800 LPRINT TAB(10) "UST LEVHA POTANSIYELI:";USING "###.#";V3
;:LPRINT " V"
810 LPRINT TAB(10) "ALT LEVHA POTANSIYELI:";USING "###.#";V4
;:LPRINT " V"
820 LPRINT :LPRINT
830 LPRINT "  COZUM ELDE EDILDIKTEN SONRA YINELEMELER:";YINE
840 LPRINT :LPRINT
850 LPRINT TAB(30) "SONUCLAR":LPRINT TAB(28) "------------"
860 LPRINT :LPRINT
870 FOR I=9 TO 1 STEP -1
880 FOR J=1 TO 9
890 LPRINT USING " ###.#";Z(I,J);
900 NEXT J
```

```
910 LPRINT
920 NEXT I
930 END
1000 ORT=.25*(Z(D1-D4,D2-D3*D4)+Z(D1-D4*D3,D2+D4)+Z(D1+D4,D2
1010 RETURN
        SOL LEVHA POTANSIYELI:100.0 V
        SAG LEVHA POTANSIYELI: 30.0 V
        UST LEVHA POTANSIYELI:  0.0 V
        ALT LEVHA POTANSIYELI: 50.0 V

 COZUM ELDE EDILDIKTEN SONRA YINELEMELER: 14

                        SONUCLAR
                        ------------
```

50.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	15.0
100.0	49.7	29.7	20.4	15.6	13.4	[illegible].4	17.1	30.0
100.0	69.0	48.[illegible]	36.2	28.7	24.6	[illegible].3	24.9	30.0
100.0	77.5	59.7	47.0	38.4	33.0	[illegible].1	29.3	30.0
100.0	81.4	65.7	53.7	45.0	39.0	[illegible]4.9	32.1	30.0
100.0	82.5	68.[illegible]	57.0	48.9	43.0	[illegible].4	34.2	30.0
100.0	80.5	66.7	57.3	50.7	45.7	4[illegible].4	36.5	30.0
100.0	72.9	61.1	54.8	50.9	47.9	44.9	40.3	30.0
75.0	50.0	50.0	50.0	50.0	50.0	5[illegible].0	50.0	40.0

Yukarıdaki hesap sonuçları 0,01 V fark kalana kadar 14 basamaklık yineleme yapılarak hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

1. A finite-difference procedure for the exterior problem inherent in capacitance computations for VLSI intercorrections. Zemanian A.H. IEEE Transactions Electron Devices. V: 35, S. 7, pp. 985-992, 1988.
2. Computers and computer graphics in teaching electromagnetic field. David T. Stephenson, Alvin A. Read. Proceeding 1987 Frontier in Education Conforence V: 2, pp: 523-30, 1987.
3. Electromagnetics John D. Kraus International Student Edition. Mc Graw Hill Co. 1983.
4. Fundamentals of electromagnetic field theory A.A. Zaky, R. Hawley. George G. Harrap Ltd. 1974.