Eğitim Fakülteleri Dergisi
Cilt: VII, Sayı: 2, 1992

Möbius Dönüşümleri

Hasan Basri ÖZDEMİR*

ÖZET

Bu çalışmada PSL (2, $\mathbb{C}$), PSL (2, $\mathbb{R}$) grupları ve bunların bazı alt grupları hakkında yeni tanım ve teoremler verildi.

SUMMARY

Möbius Transformations

In this study, some definitions and theorems about the groups of PSL (2, $\mathbb{C}$), PSL (2, $\mathbb{R}$) and some subgroups of this groups have been given.

1. Tanım:

$C_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $g(\infty) = \dfrac{a}{c}$, $g\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty$ ve $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$ olmak üzere,

$$g: \mathbb{C}_\infty \to C_\infty, \quad g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklindeki dönüşümlere doğrusal kesirli dönüşümler veya sadece doğrusal dönüşümler denir.

---

* *Yard. Doç. Dr.; Necatibey Eğitim Fakültesi, Balıkesir.*

Bu dönüşümler $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin otomorfizmalarıdır. Bu nedenle bu dönüşümlerin kümesi Aut $(\mathbb{C}_\infty)$ ile gösterilir. Bu dönüşümlere Möbius dönüşümleri de denir.

$g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünü sadece a, b, c, d katsayıları belirlemez.

$\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere λa, λb, λc, λd sayıları da aynı g dönüşümünü belirler[1].

Doğrusal dönüşümler kümesi, dönüşümlerin bileşkesi işlemiyle bir grup olur. Grup aksiyomlarının sağlandığını görmek kolaydır[10].

Doğrusal dönüşümlerin Aut $(\mathbb{C}_\infty)$ grubu ile singüler olmayan 2x2 matrislerinin GL(2, $\mathbb{C}$) ile gösterilen kümesi arasında çok önemli bir ilişki vardır. GL(2, $\mathbb{C}$) kümesinin çarpma işlemi ile bir grup olduğunu biliyoruz.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \text{ ve}$$

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$$

olmak üzere bir

$$f: GL(2, \mathbb{C}) \to \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$$

dönüşümü, $f(A) = g$ biçiminde tanımlıyalım.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}),\ h \in \text{Aut}(\mathbb{C}_\infty),\ h(z) = \frac{az + b}{\gamma z + \delta}$$

olmak üzere $f(B) = h$ olur.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

$$gh(z) = \frac{a \cdot \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z + \delta} + b}{c \cdot \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + d} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$$

olduğundan,

$$f(AB) = f(A) \circ f(B) = goh = gh$$

bulunur. O halde bu f dönüşümü bir grup homomorfizmasıdır. Bu homomorfizmanın K ile gösterilen çekirdeği,

$$K = \ker(f) = \{A \in GL(2, C) \mid f(A) = g, g(z) = z\}$$

olduğundan, K kümesi, $a = d \neq 0$, $b = c = 0$ olmak üzere,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I, \quad (\lambda \in C - \{0\})$$

şeklindeki A matrislerinden oluşur. ($z = 0$, $z = \infty$, $z = 1$ konarak $b = c = 0$, $a = d$ elde edilir. Burada $\lambda = a$ dır.)

İki $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$ matrisinin, C_∞ kümesinin aynı bir otomorfizmasını belirlemesi için gerek ve yeter koşul,

$$B^{-1} A \in K, \text{ yani } A = \lambda B$$

olmasıdır. Böylece,

$$\mathrm{Aut}\, \mathbb{C}_\infty \cong GL(2, \mathbb{C}) / K = GL(2, \mathbb{C}) / \{\lambda I \mid \lambda \neq 0\}$$

elde edilir. Çünkü,

$$GL(2, \mathbb{C}) / K = \{kA \mid k \in K = \{ \lambda I \mid \lambda \neq 0\} \}$$

olur. Bu $GL(2, \mathbb{C}) /K$ bölüm grubuna projektif Genel Lineer Grup (Projective General linear group) denir ve $PGL(2, \mathbb{C})$ ile gösterilir[10].

Her $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$ için $\det(AB) = \det A \,.\, \det B$ olduğundan,

$$\det: GL(2, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} - \{0\}$$

dönüşümü yine bir grup homomorfizmasıdır. Bunun çekirdeği $GL(2, \mathbb{C})$'nin bir normal alt grubudur. Bunu $SL(2, \mathbb{C})$ ile gösterelim. Yani $SL(2, \mathbb{C})$, $GL(2,C)$'nin determinantı 1 olan elemanlarının kümesidir.

$$B \in GL(2, \mathbb{C}) \text{ için } \det B = \lambda^2$$

ve $A \in SL(2, \mathbb{C})$ olmak üzere $B = \lambda A$ yazılabilir. Böylece $f(B) = f(A)$ bulunur. Yani A ile B'nin belirlediği otomorfizma aynı olur. Bu ise C_∞ kümesinin bütün otomorfizmalarının,

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \; ad - bc = 1$$

şeklinde olduğunu gösterir. O halde,

$$\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}_\infty) \cong \mathrm{PGL}\,(2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{C})$$

elde edilir.

2. Tanım:

$$\mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R}) = \{\, T \mid T(z) = \frac{az+b}{cz+d};\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1\}\ \text{ve}$$

$$G' = \{u \mid u(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\ ;\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = -1\}$$

olmak üzere,

$$G = \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{R})\ \cup G'$$

olsun. G nin öğeleri $\mathbb{C}_\infty$ kümesini kendi üzerine 1-1 resmeden dönüşümlerdir.

3. Teorem: Bir $T \in \mathrm{PSL}\,(2, \mathbb{C})=$ dönüşümünün $D = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{İm}\, z > 0\}$ yarı düzlemini D ye resmetmesi için gerek ve yeter koşul $T \in G$ olmasıdır.

İspat: Her $z \in D$ için $T(z) \in D$ olduğunu varsayalım.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ ;\ a, b, c, d \in C\ ,\ ad - bc = 1\ \text{dönüşümünde}\ c \neq 0\ \text{olsun.}$$

$$T(\infty) = \frac{a}{c},\ T(0) = \frac{b}{d},\ T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$$

olur. Bu $\frac{a}{c}, \frac{b}{d}, -\frac{d}{c}$ değerleri gerçel sayılar olduğundan,

$$T(z) = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

dönüşümü gerçel katsayılıdır.

$$\text{İm}\, T(z) = \frac{1}{c^2}\, \text{İm}\,(z)\, \left| z + \frac{d}{c} \right|^{-2}$$

bulunur. $\text{İm}(z) > 0$, $\text{İm}\, T(z) > 0$, $\left| z + \frac{d}{c} \right|^2 > 0$ olduğundan $\frac{1}{C^2} > 0$, yani $C \in \mathbb{R}$ olmalıdır. O halde, $\frac{a}{c}, \frac{d}{c} \in \mathbb{R}$ olduğundan $a, d \in \mathbb{R}$ ve $\frac{b}{d} \in \mathbb{R}$ olduğundan $b \in \mathbb{R}$ elde edilir. Böylece $T \in PSL\,(2, \mathbb{R})$, yani $T \in G$ bulunur.

$$\text{Eğer } C = 0 \text{ ise } T^{-1}\,(0) = -\frac{b}{a}$$

olur ve benzer olarak $T \in PSL\,(2, \mathbb{R})$ bulunur.

Aynı düşünce ile,

$U(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$; $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc = -1$ içinde, $Z \in D$ iken $U(z) \in D$ ise $U \in G'$ olduğu görülür.

Şimdi de $T \in G$ olsun. $T \in PSL\,(2, \mathbb{R})$ alalım.

$T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$ denirse,

$\text{İm}\, T(z) = \dfrac{\text{İm}(z)}{|cz+d|^2}$ olur. $\text{İm}\,(z) > 0$ iken $\text{İm}\, T(z) > 0$ bulunur. Bu da, $z \in D$ iken $T(z) \in D$ demektir. $U \in G'$ içinde aynı sonuç elde edilir.

Uyarı: G kümesinin öğeleri $\mathbb{R}$ kümesini kendisi üzerine resmederler. Çünkü $T \in G$ için,

$$\text{İm}\, T(z) = \frac{\text{İm}(z)}{|cz+d|^2}$$

elde etmiştik. $z \in \mathbb{R}$ için $\text{İm}\, z = 0$ olduğundan $\text{İm}\, T(z) = 0$ bulunur[1].

5. Teorem: $G = PSL(2, \mathbb{R}) \cup G'$ kümesi, bileşke işlemi ile bir gruptur[1].

İspat: $T_1, T_2 \in PSL(2, \mathbb{R})$ ise $T_1.T_2 \in PSL(2, \mathbb{R})$ olduğu açıktır. Eğer $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ $U \in G'$ ise

$$T(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}\ ; a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}, a_1d_1 - b_1c_1 = 1,$$

$$U(z) = \frac{a_2\bar{z} + b_2}{c_2\bar{z} + d_2}; a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}, a_2d_2 - b_2c_2 = -1$$

olmak üzere,

$$UT(z) = \frac{(a_1a_2+b_2c_1)\bar{z}+(a_2b_1+b_2d_1)}{(a_1c_2+c_1d_2)\bar{z}+(b_1c_2+d_1d_2)} \in G'$$

olur. Çünkü, katsayıların gerçel olduğu görülüyor ve diskiriminantı da,

$$\begin{aligned}\Delta &= (a_1a_2 + b_2c_1)(b_1c_2 + d_1d_2) - (a_2b_1 + b_2d_1)(a_1c_2 + c_1d_2) \\ &= a_1a_2b_1c_2 + a_1a_2d_1d_2 + b_1b_2c_1c_2 + b_2c_1d_1d_2 \\ &\quad - a_1a_2b_1c_2 - a_2b_1c_1d_2 - a_1c_2b_2d_1 - c_1d_2b_2d_1 \\ &= (a_2d_2 - b_2c_2)(a_1d_1 - b_1c_1) = -1\end{aligned}$$

olur. Eğer $u_1, u_2 \in G'$ ise $u_1u_2 \in PSL(2, \mathbb{R})$ olacağı da kolayca görülür.

G_2) $I \in G$ olduğu ise açıktır.

G_3) $g \in G$, $g(z) = \dfrac{az^i+b}{cz^i+d}$ için

$$g^{-1}(z) = \frac{-dz^i + b}{cz^i - a} \text{ olduğundan } g^{-1} \in G \text{ dir.}$$

Not: z^i değeri, $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ iken z, $g \in G'$ iken $\bar{z}$, olarak tanımlanmıştır.

G4) Birleşme özelliği de sağlanır.

Uyarı: PSL (2, IR) kümesi, G nin bir alt grubu olur. Fakat G' kümesi alt grup olmaz. Çünkü $u_1, u_2 \in G'$ için $u_1u_2 \in PSL(2, R)$ fakat $u_1u_2 \notin G'$ olur.

4. Sonuç: G grubu, $A = PSL(2, IR) \cup \{U \mid U(z) = -\bar{z}\}$ kümesi tarafından doğurulur[1].

İspat: $T_1, T_2 \in PSL(2, \mathbb{R})$ için, $T_1T_2 \in PSL(2, \mathbb{R})$ olduğunu biliyoruz. $T \in PSL(2, IR)$, $U(z) = -\bar{z}$ olsun.

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ olarak alınırsa,}$$

$$T\,U(z) = \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d} = \frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d}$$

olur. Burada, $\Delta = -ad + bc = -(ad - bc) = -1$ olduğundan $T\,U \in G'$ olur.

6. Teorem:

$$T \in PSL(2, IR) \text{ için, } \frac{|T'(z)|}{\text{İm}T(z)} = \frac{1}{\text{İm}(z)}$$

İspat: $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $T'(z) = \dfrac{1}{(cz+d)^2}$

$$|T'(z)| = \frac{1}{|cz+d|^2}, \tag{1}$$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}$$

$$= \frac{a|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}, \quad (z = x + iy)$$

$$= \frac{a|z|^2 + adx + adyi + bcx - bciy + bd}{|cz+d|^2}$$

$$= \frac{(ad-bc)iy}{|cz+d|^2} + \frac{a|z|^2 + adx + bcx + bd}{|cz+d|^2}$$

$$= \frac{a|z|^2 + (ad+bc)x + bd}{|cz+d|^2} + \frac{y}{|cz+d|^2} i$$

olduğundan,

$$\text{İm } T(z) = \frac{y}{|cz+d|^2} \tag{2}$$

elde edilir. 1 ve 2 sonuçları taraf tarafa bölünerek,

$$\frac{|T'(z)|}{\text{İm}T(z)} = \frac{1}{\text{İm}(z)}$$

elde edilir.

7. Tanım :

$A, B \in GL(2,C)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$B^* = (\bar{B})^t = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix}^t$ olmak üzere,

$[A,B] = \text{İz}(AB^*) = a\bar{\alpha} + b\bar{\beta} + c\bar{\gamma} + d\bar{\delta}$

değerine A ile B nin skaler çarpımı denir[4].

8. Teorem: [A,B] bir karmaşık iç çarpımdır[4].

İspat: GL (2, $\mathbb{C}$) nin bir vektör uzayı olduğu açıktır. O halde;

1) $[A, A] \geq 0$. Gerçekten,

$$[A,A] = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \geq 0$$

$$[A,A] = 0 \Leftrightarrow A = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $[\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, B] = \alpha_1 [A_1, B] + \alpha_2 [A_2, B]$ olacağından kolayca görülür (α_1, α_2 skalerler)

3) $[A,B] = \overline{[B,A]}$. Çünkü,

$$[A,B] = a\overline{\alpha} + b\overline{\beta} + c\overline{\gamma} + d\overline{\delta}$$

$$[B,A] = \overline{a}\alpha + \overline{b}\beta + \overline{c}\gamma + \overline{d}\delta$$

$$\overline{[B,A]} = a\overline{\alpha} + b\overline{\beta} + c\overline{\gamma} + d\overline{\delta}.$$

Bu iç çarpımdan elde edilen normu yazalım.

9. Tanım:

$A \in GL(2, \mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ için, A matrisinin normu diye,

$$||A|| = [A/A]^{1/2} = (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2)^{1/2}$$

değerine denir[4].

10. Tanım:

$g \in Aut(\mathbb{C}_\infty)$ için g dönüşümünün normu, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$ olmak üzere

$$||g||^2 = \frac{||A||^2}{\det A}$$ ile tanımlanan $||g||$ değerine denir.

$A \in PSL(2, \mathbb{C})$ için ise $\det A = 1$ olacağı için $||g|| = ||A||$ olur[4].

11. Tanım:

GL (2, $\mathbb{C}$) kümesindeki metriği, bu küme üzerindeki norma bağlı olarak,

$$d(A,B) = [A-B, A-B]^{1/2} = ||A-B||$$

biçiminde tanımlıyacağız.

12. Sonuç:

GL (2, $\mathbb{C}$) kümesi, yukarıda tanımladığımız iççarpım, norm ve metrik ile bir iççarpım uzayı, bir normlu uzay, bir metrik uzay ve dolayısiyle bir topolojik uzaydır.

13. Tanım:

G kümesi bir grup ve bir Hausdorff Uzay olsun. Aşağıdaki birinci koşul gerçeklenirse G bir yarı topolojik gruptur, her iki koşul birden gerçeklenirse G bir topolojik gruptur denir.

1) $F: G \times G \to G$, $F(g, h) = gxh = gh$ üzerine dönüşümü sürekli (*, G grubunun grup işlemi).

2) $f: G \to G$, $f(g) = g^{-1}$ üzerine dönüşümü sürekli[1].

14. Tanım:

G bir topolojik grup, $a \in G$ belli bir öğe olsun. Bu durumda,

$$r_a, l_a, t, k : G \to G,$$

$r_a: g \to ga$, $l_a: g \to ag$, $t: g \to g^{-1}$, $k: g \to aga^{-1}$ dönüşümleri birer topolojik eşyapı dönüşümü (Homeomorfizma) olur. Bunlara sırasıyla sağ kayma, sol kayma, tersinir ve öz eş yapı dönüşümleri denir[1].

15. Tanım:

X bir topolojik uzay olsun. Her $x_1, x_2 \in X$ için $f(x_1) = x_2$ olacak şekilde bir $f: x \to x$ topolojik eş yapı dönüşümü varsa bu x topolojik uzayına homogen uzay denir[1].

KAYNAKLAR

1. BAŞKAN, T.: Ayrık Gruplar. Hacettepe Üniversitesi, 1980.
2. BAŞKAN, T.: Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Uludağ Üniversitesi, 1989.
3. BAŞKAN, T. and MACBEATH, A.M.: Centralizers of Reflections in Crystallographic Groups, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 92(1982) pp. 79-91.
4. BEARDON, A.F.: The Geometry of Discrete Groups, Springer Verlag, New York, 1983.
5. BEARDON, A.F.: Hyperbolic Polygons and Funchsian Groups, London Math. Soc., 2 (1979), 247-254.
6. BEST, L.A.: On Discrete Subgroups of LF (2, C), Doktora Tezi, University of Birmingham, 1968.
7. BEST, L.A.: On torsion-Free discrete subgroups of PSL (2, C) with compact orbit-space. Canadian J. of Math. 23 (1971), 451-460.
8. CONWAY, J.B.: Functions of one Complex Variable, Springer Verlag, New York.
9. FORD, L.R.: Automorphic Functions, Chelsea, New York, 1951.
10. JONES, G.A. and SINGERMAN, D.: Complex Functions, University of Cambridge, 1987.
11. JORGENSENe, T.: Commutators in SL (2, C), Riemann Surfaces and Related Topics, University of Princeton, 1980.
12. MACBEATH, A.M.: Commensurability of Co-Compact Three-dimensional Hyperbolic Groups, Duke Mathematical Journal, 50 (1983), 1245-1253.
13. ÖZDEMİR, H.B.: Topoloji, Uludağ Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, 1987.