Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakülteleri Dergisi
Cilt: V, Sayı: 2, 1990

e Sistemleri

İbrahim AKYÜZ*

ÖZET

Bu çalışmada Tensör Analiz de karşılaşılan kontravaryant ve kovaryant e sistemleri n boyutlu uzayda incelendi. Önce tanımlar verilerek e sistemleri yardımıyla kronecker deltanın tanımı yapıldı. Kronecker deltanın özelliğinden yararlanarak $e_{i_1 \ldots i_N} e^{i_1 \ldots i_N}$ çarpımının terim sayısı formülleştirildi ve determinantlara uygulanışı gösterildi. Bu uygulamadan faydalanarak, $e^{i_1 \ldots i_N}$ sembolünün $+1$ ağırlığında, $e_{i_1 \ldots i_N}$ sembolünün -1 ağırlığında relatif tensörler oldukları, permütasyonların özelliklerinden yararlanarak farklı iki yol izlenerek verildi.

SUMMARY

The e-Systems

In this study, contravariant and covariant e-systems which are met in tensor analysis are investigated in the n dimentional space. Firstly, kronocker delta is defined by the help of e-systems which are found out by previous definitions. The number of terms appearing in the sum of $e_{i_1 \ldots i_N} \cdot e^{i_1 \ldots i_N}$ multiplication is formülated by taking into consideration the charecteristics of kronocker delta. Later on, it is shown the applications of it to the determinants. It is known that the permotations symbols $e^{i_1 \ldots i_N}$ and $e_{i_1 \ldots i_N}$ are relative tensors of weights $+1$ and -1, respectively. It has been given to be the same tensors following, different ways by use particularly of permutations.

* *Doç.; U.Ü. Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Öğr. Üyesi.*

GİRİŞ

Kontravaryant ve kovaryant e sembollerinin relatif tensör olduğunu gösteren bağıntılar indislerin permütasyonları özelliklerinden yararlanarak gerçeklenebilir.

e Sistemleri

N indisine bağlı $A^{i_1 \ldots i_N}$ veya $A_{i_1 \ldots i_N}$ kemiyetlerinin kümeleri iki indis çiftine göre simetrik veya ters simetrik olduğu gibi ikiden fazla indislere göre de simetrik veya ters simetrik olabilir. Bu nedenle aşağıdaki tanımlar verilebilir.

TANIM 1

N indislerine bağlı $A^{i_1 \ldots i_N}$ (veya $A_{i_1 \ldots i_N}$) kemiyetler sistemi, indislerin bir permütasyonu ile A sembolünün değeri değişmiyorsa tamamen simetrikdir denir.

TANIM 2

N indislerine bağlı $A_{i_1 \ldots i_N}$ (veya $A^{i_1 \ldots i_N}$) kemiyetler sistemi, indislerin tek permütasyonundan sonra A sadece işaret değiştirir ve indislerin çift permütasyonu ile A sembolünün değeri değişmezse tamamen ters simetrikdir denir.

Ters simetrik bir sistemde, sistem iki benzer indis içeriyorsa Tanım 2 den değeri sıfır olması gerekir.

Sembol olarak, $A_{i_1 \ldots i_N}$ (veya $A^{i_1 \ldots i_N}$) yerine $e_{i_1 \ldots i_N}$ (veya $e^{i_1 \ldots i_N}$) kullanıldığında e sistemleri olarak adlandırılır ve relatif tensörlerdir.

TANIM 3

$e_{i_1 \ldots i_N}$ (veya $e^{i_1 \ldots i_N}$) sembolü, herhangi iki indis birbirine eşitse 0, $(i_1 \ldots i_N)$ dizisi $(1, 2 \ldots N)$ dizisinin çift permütasyonuna karşı gelirse +1, tek permütasyonuna karşı gelirse –1 değerini alır.

e sistemi yardımıyla kronecker delta tanımlanabilir. Bu da $e_{i_1 \ldots i_N}$ ve $e_{i_1 \ldots i_N}$ sistemlerinin çarpımından ve Tanım 3 den

$$e_{i_1 \ldots i_N} \; e^{j_1 \ldots j_N} = \delta^{j_1 \ldots j_N}_{i_1 \ldots i_N} \tag{1}$$

olarak tanımlanır. e sistemin aldığı değerler hesaba katıldığında kronocker delta aşağıdaki değerleri alır.

TANIM 4

$\delta^{j_1 \ldots j_N}_{i_1 \ldots i_N}$, $(i_1 \ldots i_N)$ veya $(j_1 \ldots j_N)$ nın herhangi iki indisi birbirine eşit veyahut, $(i_1 \ldots i_N)$ sayılar dizisi $(j_1 \ldots j_N)$ sayılar dizisinden farklı ise 0; $(i_1 \ldots i_N)$ veya $(j_1 \ldots j_N)$ dizisi $(1 \ldots N)$ sırasından seçilmiş farklı tamsayılar ve $(i_1 \ldots i_N)$ dizisi $(j_1 \ldots j_N)$ dizisinin çift permütasynu ise +1, tek permütasyonu ise –1 değerlerini alır.

Bu tanım gereğince e sistemleri kronecker delta ile tanımlanabilir. Bu da

$$e^{j_1 \dots j_N} = \delta^{j_1 \dots j_N}_{1 \dots N} \quad \text{ve} \quad e_{j_1 \dots j_N} = \delta^{1 \dots N}_{j_1 \dots j_N}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece Tanım 3 ve 4 gerçeklenir.

$e^{i_1 \dots i_N}$ ve $e_{i_1 \dots i_N}$ sembollerinin çarpımından elde edilen terimlerin sayısı formül olarak,

$$e^{i_1 \dots i_N} \; e_{i_1 \dots i_N} = N! \tag{2}$$

şeklinde verilir. Bunu gösterebilmemiz için,

$$\delta^{i_1 i_2}_{\alpha i_2} = (N-1)\,\delta^{i_1}_{\alpha} \quad \text{ve} \quad \delta^{i_1 i_2}_{i_1 i_2} = N\,(N-1)$$

terim sayılarından

$$\delta^{i_1 i_2 \dots i_r}_{i_1 i_2 \dots i_r} = N(N-1)\,(N-2) \dots (N-r+1) = \frac{N!}{(N-r)!} \tag{3}$$

bulunur. (1) ve (3) bağıntılarından (2) elde edilir.

e sistemleri determinantlara uygulanabilir. Elemanları $a_j^{\,i}$ (i satır, j sütun) olan N ci mertebeden $|a_j^{\,i}|$ determinantı

$$|a| = |a_j^{\,i}| = \Sigma \mp a_1^{\,i_1} \; a_2^{\,i_2} \dots a_N^{\,i_N}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (i_1, i_2 ... i_N) dizisi (1,2...N) dizisinin permütasyonudur, (+) ve (–) işareti $a_1^{\,i_1}\, a_2^{\,i_2} \dots a_N^{\,i_N}$ nin çift veya tek permütasyonundan birini verir. e sistemleri kullanılarak

$$|a| = |a_j^{\,i}| = e^{i_1 i_2 \dots i_N} \quad a_{i_1}^{\,1} \; a_{i_2}^{\,2} \dots e_{i_N}^{\,N}$$

$$= e_{i_1 i_2 \dots i_N} \; a_1^{\,i_1} \; a_2^{\,i_2} \dots a_N^{\,i_N}$$

yazılır. $j_1\, j_2 \dots j_N$ ye göre ters simetrik olan

$$e_{i_1 i_2 \dots i_N} \; a_{j_1}^{\,i_1} \; a_{j_2}^{\,i_2} \dots a_{j_N}^{\,i_N}$$

toplamı düşünüldüğünde i_1 i_2 ... i_N sessiz (dummy) indis olduğundan ve $j_1 j_2$ yer değiştirdiğinde işaret değişeceğinden

$$e_{i_1 i_2 \ldots i_N}\, a_{j_1}^{i_1}\, a_{j_2}^{i_2} \ldots a_{j_N}^{i_N} = - e_{i_1 i_2 \ldots i_N}\, a_{j_2}^{i_1}\, a_{j_1}^{i_2} \ldots a_{j_N}^{i_N}$$

bulunur. Buradan

$$e_{i_1 \ldots i_N}\, a_{j_1}^{i_1}\, a_{j_2}^{i_2} \ldots a_{j_N}^{i_N} = |a_j^i|\, e_{j_1 j_2 \ldots j_N} \tag{4}$$

olur. Benzer olarak

$$e^{i_1 i_2 \ldots i_N}\, a_{i_1}^{j_1}\, a_{i_2}^{j_2} \ldots a_{i_N}^{j_N} = |a_j^i|\, e^{j_1 j_2 \ldots j_N} \tag{5}$$

yazılır ve determinantların özelliklerini de sağlar.

(4) ve (5) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanır.

TEOREM 1: Kontravaryant e sistemi ağırlığı 1 olan relatif tensördür.

İSPAT: Elemanları a_j^i olan a determinantı $x^1, x^2, \ldots, x^N$ değişkenlerinin fonksiyonları olsunlar. Koordinat dönüşümleri,

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i (x^1, x^2, \ldots, x^N)$$

olduğu gözönüne alınırsa fonksiyonel determinant $J = \left| \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right|$ ve a_j^i elemanları ise $a_j^i = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$ dır. $\left| \dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| = \dfrac{1}{J}$ olduğundan bu değerler (5) bağıntısında yerine yazıldığında,

$$e^{i_1 \ldots i_N} \left| \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right| = e^{\alpha_1 \ldots \alpha_N} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_N}}{\partial x^{\alpha_N}}$$

veya

$$e^{i_1 \ldots i_N} = |J|\; e^{\alpha_1 \ldots \alpha_N} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial \bar{x}^{i_N}}{\partial x^{\alpha_N}} \tag{6}$$

bulunur.

Benzer şekilde kovaryant $e_{i_1 \ldots i_N}$ sembolü de

$$e_{i_1 \ldots i_N} = |J|^{-1} \,.\, e_{\alpha_1} \ldots e_{\alpha_N} \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{\alpha_N}}{\partial \bar{x}^{i_N}} \tag{7}$$

şeklinde –1 ağırlığında relatif tensör olduğu ispatlanır. Ancak (7) bağıntısı aşağıdaki şekilde de ispatlanabilir. Bunun için (7) bağıntısının sağ tarafı $|J|^{-1}\, \Phi_{i_1 \ldots i_N}$ ile ifade edilirse bu durumda

$$\Phi_{1\ldots N} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^1} \cdots \frac{\partial x^N}{\partial \bar{x}^N} e_{\alpha_1 \ldots \alpha_N}$$

eşitliğinin sağ tarafı $|J|$ determinantının açılımıdır. Benzer şekilde $\Phi_{i_1 \ldots i_N}$ nin her bir bileşeninin determinanta eşit olduğu görülür. Buradan şu sonuç çıkar. İki indis aynı ise: $\Phi_{i_1 \ldots i_N} = 0$, $(i_1 \ldots i_N)$ dizisi $(1 \ldots N)$ dizisinin çift permütasyonu ise; $\Phi_{i_1 \ldots i_N} = |J|$ tek permütasyonu ise; $\Phi_{i_1 \ldots i_N} = -|J|$ dir.

Bu nedenle

$$\Phi_{i_1 \ldots i_N} = |J| \, e_{i_1} \ldots e_{i_N}$$

olduğu görülür. Bu sonuç (7) bağıntısını gerçekler.

KAYNAKLAR

1. HAY, G.E.: Vektor and Tensor Analysis S (181-183).
2. MC CONNELL, A.J.: Applications of Tensor Analysis S (8-10, 30, 134, 165).
3. SOKOLNIKOFF, I.S.: Tensor Analysis S (97-104)
4. SYNGE, J.L. and SCHILD, A.: Tensor Calculus S (240-247).