Uludağ Üniversitesi
Eğitim Fakülteleri Dergisi
Cilt: V, Sayı: 2, 1990

Denklik Bölütleri ve Latis

Nesrin DOĞANYILMAZ*

ÖZET

Bu çalışmada; denklik bölütleri kümesinin bir latis oluşturduğu gösterilmeye çalışılmıştır.

SUMMARY
Partition and Lattice

In this study, the set of all partitions of the set K form a lattice under the less than relation, definition for partition.

ÖN BİLGİLER

TANIM 1: Kısmi sıralı bir K kümesinin elemanlarından oluşturulan her ikili için bir en küçük üst sınır (eküs) ve en büyük alt sınır (ebas) varsa bu kısmi sıralı kümeye latis denir.

TANIM 2: $\forall$ k ε K için k ya D denklik bağıntısı ile bağlı k^s lerin oluşturduğu K^s ye denklik bloğu, denklik blokları kümesine denklik bölütü (partition) denir.

TANIM 3: Π_i ve Π_j denklik bölütlerinin çarpımı;

$$\Pi_i \cdot \Pi_j = \Pi_p$$

ile gösterilir.

* *Dr.; U.Ü. Necatibey Eğitim Fakültesi Metamatik Anabilim Dalı, Balıkesir.*

k_i ve k_j Π_p de aynı denklik bloğundadır $\Leftrightarrow$ k_i ve k_j, Π_i ve Π_j de aynı denklik bloğundadır.

Burada: $\Pi_p \leq \Pi_i$ ve $\Pi_p \leq \Pi_j$ dir.

TANIM 4: Π_i ve Π_j denklik bölütlerinin toplamı;

$$\Pi_i + \Pi_j = \Pi_t \text{ ile gösterilir.}$$

k_i ve k_j nin Π_t'nin aynı denklik bloğundadır $\Leftrightarrow$ k_i ve k_j, Π_i veya Π_j de aynı denklik bloğundadır ve

$$\Pi_t > \Pi_i \text{ ve } \Pi_t > \Pi_j \text{ dir.}$$

TANIM 5: Π_i nin denklik blokları Π_j nin bütün bloklarını içine alıyorsa $\Pi_i > \Pi_j$ dir.

DENKLİK BÖLÜTLERİNDE LATİS

TEOREM: Bir K kümesinin $\Pi(K) = \{\Pi_i \mid \Pi_i$ K nın bir denklik bölütü$\}$ ile tanımlanan $\Pi(K)$; "$\leq$" bağıntısı ile bir latis oluşturur.

İSPAT: $(\Pi(K), \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir. Çünkü:

i) $\Pi_i \varepsilon \Pi(K)$ için $\Pi_i \leq \Pi_i$ dir (Yansıma özelliği);

ii) $\Pi_i, \Pi_j \varepsilon \Pi(K)$ için $\Pi_i \leq \Pi_j$ ve $\Pi_j \leq \Pi_i \Leftrightarrow \Pi_i = \Pi_j$
(Ters simetri özelliği);

iii) $\Pi_i, \Pi_j, \Pi_k \varepsilon \Pi(K)$ için $\Pi_i \leq \Pi_j$ ve $\Pi_j \leq \Pi_k \Leftrightarrow \Pi_i \leq \Pi_k$
(Geçişme özelliği)

gerçeklendiğinden $(\Pi(K), \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir. Ayrıca $\Pi(K)$'dan oluşturulan her denkli bölütü ikilisinin bir eküs ve ebas'ı vardır.

$$\text{eküs}(\Pi_i, \Pi_j) = \Pi_i + \Pi_j$$

$$\text{ebas}(\Pi_i, \Pi_j) = \Pi_i \,.\, \Pi_j \text{ dir.}$$

ÖRNEK: $K = \{a, b, c\}$ kümesini alalım.

$$\Pi_1 = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$$

$$\Pi_2 = \{\overline{a}, \overline{b, c}\}$$

$$\Pi_3 = \{\overline{a, b}, \overline{c}\}$$

$$\Pi_4 = \{\overline{a, c}, \overline{b}\}$$

$$\Pi_5 = \{\overline{a, b, c}\} \text{ dir.}$$

Burada;

$$\Pi_1 \leq \Pi_1$$

$$\Pi_1 \leq \Pi_2$$

$$\Pi_1 \leq \Pi_3$$

$$\Pi_1 \leq \Pi_4$$

$$\Pi_1 \leq \Pi_4$$

$$\Pi_1 \leq \Pi_5$$

$$\Pi_2 \leq \Pi_5$$

$$\Pi_3 \leq \Pi_5$$

$$\Pi_4 \leq \Pi_5$$

fakat

$$\Pi_2 \nleq \Pi_3$$

$$\Pi_3 \nleq \Pi_2$$

$$\Pi_2 \nleq \Pi_4$$

$$\Pi_4 \nleq \Pi_2$$

$$\Pi_2 \nleq \Pi_3$$

olduğundan (Π (K), $\leq$) bir kısmi sıralı kümedir.

Ayrıca; ekün $(\Pi_1, \Pi_2) = \Pi_1 + \Pi_2 = \Pi_2$

ekün $(\Pi_3, \Pi_4) = \Pi_3 + \Pi_4 = \Pi_5$

ebas $(\Pi_1, \Pi_2) = \Pi_1 . \Pi_2 = \Pi_1$

ebas $(\Pi_3, \Pi_4) = \Pi_1$

dir. Tüm olasılıklı değerler için eküs ve ebas vardır. O halde (Π (K), $\leq$) bir latistir.

KAYNAKLAR

1. ALEKSANDER, I. and HANNA, F.K.: "Automata Theorey an Engineering Approach", London, 1976.
2. BIRKHOFF and MACLANE: "A Survey of Modern Algebra", New York, 1971.
3. BIRKHOFF, C.: "Lattice Theory", American Mathematical Soc. Colloquim Publication, Vol. XXV, 1948.
4. HARTMANIS, J. and STEARNS, R.E.: "Algebra Structure Theory of Sequential Machines", London, 1966.
5. MILLER, R.E.: "Swiching Theory", Vol. 1, New York.
6. ÖZSOY, N. and ÜNLÜ, F.: "Erişimli Konaklılarda Çiftler Cebiri İşleçleri İle Bilgi İşleme", Bilişim'82 Cilt-1, ss. 43-53, İzmir, 1982.
7. ————: "Cebirsel Yapı Konaklıklarında Çiftler Cebiri Öğeleri İle Bilgi İşleme Algoritmaları", Bilişim'82, Cilt-1, ss. 53-63, İzmir, 1982.
8. PRATHER, R.E.: "Discrete Mathematical Structures for Computer Science", Houghton Mifflin Company, Boston, 1976.