

**n-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA
 λ -HİPERYÜZEYLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU**

Alim SÜTVEREN



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**n-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA λ -HİPERYÜZEYLERİNİN BİR
KARAKTERİZASYONU**

Alim SÜTVEREN
0000-0002-5902-9508

Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2021
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Alim Sütveren tarafından hazırlanan “n-boyutlu Öklid Uzayında λ -hiperyüzeylerin Bir Karakterizasyonu” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN



Başkan: Prof. Dr. Kadri ARSLAN
0000-0002-1440-7050
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza



Üye : Prof. Dr. Günay ÖZTÜRK
0000-0002-1608-0354
İzmir Demokrasi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza



Üye : Doç. Dr. Betül BULCA
0000-0002-2273-3243
Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım



Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN *Y.*

Enstitü Müdürü

12/01/2021

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

(2.11.2021)

Alim SÜTVEREN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

n-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA λ -HİPERYÜZEYLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

Alim SÜTVEREN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

Bu tezin amacı Öklid uzaylarında rotasyonel λ -hiperyüzeylerini ve Monge yaması ile verilen λ -hiperyüzeylerini karakterize etmektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde sonraki bölüm için gerekli olan kuramsal temeller verilmiştir.

Üçüncü bölümde \mathbb{R}^n deki hiperyüzeylerin kendine benzer ve λ -hiperyüzeyi olması ile ilgili şu ana kadar yapılan hesaplamalar verilmiş ve soliton olma koşulları irdelenmiştir.

Dördüncü bölüm bulgulardan ibaret olup iki alt bölümden oluşmaktadır. İlk olarak \mathbb{R}^{n+1} deki rotasyonel hiperyüzeyleri ikinci olarak ise \mathbb{R}^{n+1} deki Monge yaması ile verilen hiperyüzeyler ele alınmıştır. Bu hiperyüzeylerin kendine benzer ve λ -hiperyüzeyi olma koşulları incelenmiş bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bu sonuçları destekleyici bazı örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde diğer bölümlerde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Sonuç ve öneriler dile getirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ortalama eğrilik akısı, Kendine benzer hiperyüzey, Rotasyonel hiperyüzey, Graf hiperyüzeyi, Soliton.

2020, vi+ 42 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

A CHARACTERIZATION OF λ -HYPERSURFACES IN n-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACES

Alim SÜTVEREN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Kadri ARSLAN

The aim of this thesis is to characterize the rotational λ -hypersurfaces in Euclidean spaces and the λ -hypersurfaces given by the Monge patch.

This thesis consists of 5 chapters.

The first section is the introduction.

Second chapter consist of some basic definitions which will be use in the other chapters.

In the third section, the calculations made so far regarding the hyper surfaces of \mathbb{R}^{n+1} to be soliton, self-similar and λ -hypersurface are given.

The fourth section consists of the findings and consists of two sub-sections. First, the rotational hypersurfaces with \mathbb{R}^{n+1} are second, and the hypersurfaces given by the monge patch in \mathbb{R}^{n+1} are discussed. The conditions for these hypersurfaces to be compact and λ -hypersurfaces were examined and some original results were obtained. In addition, some examples supporting these results are given.

In the fifth section, the results obtained in other sections are discussed. The results and suggestions are expressed.

Key Words: Mean curvature flow, self-similar hypersurface, Rotational hypersurface, Graph hypersurface, Soliton.

2020, vi+42 pages.

TEŞEKKÜR

Gerek lisans gerek yüksek lisans eğitimim boyunca engin bilgilerinden yararlandığım, desteğini benden hiç esirgemeyen, hoşgörüsü ve sabrıyla benim yanımda olduğunu her zaman hissettiren, matematiğe, öğretmenliğe ve hayata dair bana çok şey öğreten kıymetli hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN' a çok teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca yardımlarını ve desteğini gördüğüm, bana çokça vaktini ayıran ve destek olan kıymetli hocam Doç. Dr. Betül BULCA' ya ve üzerimde emeği olan, bana ışık olan bütün hocalarıma çok teşekkür ederim.

Beni bugünlere getiren, bana gösterdikleri sevgi ve güvenle zorlukları aşmamda yardımcı olan, emeklerinin hakkını asla ödeyemeyeceğim elleri öpülesi anneme, babama ve ablama sonsuz teşekkürler.

Bu çalışmamla bilim okyanusuna bir damla bırakabilmiş olacaksam eğer, bundan dolayı mutluluk duyacağım.

Alim SÜTVEREN

.../.../....

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	8
4. BULGULAR.....	13
4.1. \mathbb{R}^{n+1} de Rotasyonel λ -Hiperyüzeyleri.....	13
4.1.1. \mathbb{R}^3 de Rotasyonel λ -Yüzeyleri.....	13
4.1.2. \mathbb{R}^4 de Rotasyonel λ -Hiperyüzeyleri.....	20
4.1.3. \mathbb{R}^4 de Bi-Rotasyonel λ -Hiperyüzeyleri.....	23
4.1.4. \mathbb{R}^{n+1} de Rotasyonel λ -Hiperyüzeyleri.....	26
4.2. \mathbb{R}^{n+1} de Monge Yamasıyla Verilen λ -Hiperyüzeyleri.....	29
4.2.1. \mathbb{R}^3 de Monge Yamasıyla Verilen λ -Yüzeyleri.....	29
4.2.2. \mathbb{R}^4 de Monge Yamasıyla Verilen λ -Hiperyüzeyleri.....	32
4.2.3. \mathbb{R}^4 de Riemann Çarpımıyla Verilen λ -Hiperyüzeyleri.....	34
4.2.4. \mathbb{R}^{n+1} de Monge Yamasıyla Verilen λ -Hiperyüzeyleri.....	36
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	38
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ.....	41

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
U_α	Açık alt küme
$A(t)$	Ağırlıklı alan fonksiyoneli
$V(t)$	Ağırlıklı hacim
w	Ağırlık fonksiyonu
$d\mu_t$	Alan elemanı
N	Birim normal vektör
(g_{ij})	Birinci temel form matrisi
(g^{ij})	Birinci temel form matrisinin tersi
M, \tilde{M}	Diferansiyellenebilir manifoldlar
x_α	Dönüşüm
∇f	f nin gradienti
\langle, \rangle	İç çarpım
h	İkinci Temel form
L_{ij}, g_{ij}	İkinci temel form katsayıları
x	İzometrik daldırma
Δ	Laplas operatörü
$[,]$	Lie parantez operatörü
e_i	Lokal çatı alanı
∇	M nin Levi-Civita koneksiyonu
$T^\perp M$	M nin tanjant demeti
$\chi(M)$	M nin tanjant vektör alanları uzayı
$T_p M$	M nin tanjant vektör uzayı
γ	Meridyen eğrisi
$\ \cdot \ $	Norm
x^N	Normal bileşen
H	Ortalama eğrilik
\vec{H}	Ortalama eğrilik vektörü
$\tilde{\nabla}$	\mathbb{R}^{n+1} in Levi-Civita koneksiyonu
λ	Skaler
A_H	Şekil operatörü
x^T	Teğet bileşen
$\chi(M)$	Tanjant vektör alanları uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Azrail eğrisi.....	12
Şekil 4.1. Catenary eğrisi ve Katenoid yüzeyi	15
Şekil 4.2. $f(u) = 3u + 5$, $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ parametrizasyonlu silindir	17
Şekil 4.3. $f(u) = 3$, $g(u) = 3u + 5$ parametrizasyonlu düzlem	18
Şekil 4.4. $f(u) = 3u$, $g(u) = 3u + 5$ parametrizasyonlu koni.....	18
Şekil 4.5. $r = 1$ polar parametrizasyonlu küre	19
Şekil 4.6. $f(u) = 3u + 1$, $g(v) = 3v + 4$ parametrizasyonlu düzlem	31

1. GİRİŞ

M , n -boyutlu diferansiyellenebilir manifold olmak üzere $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ bir izometrik daldırma olsun. Bu daldırma altında M ye \mathbb{R}^{n+1} içine daldırılan n -boyutlu hiperyüzey adı verilir. M nin en önemli geometrik nesnelereinden biri x pozisyon vektörüdür. Bu vektör $p \in M$ noktasını $o \in \mathbb{R}^{n+1}$ referans noktasına bağlayan $x = \overrightarrow{op}$ şeklinde tanımlı olan yer vektörü ya da yarıçap vektörüdür. M nin önemli invaryantlarından biri de ortalama eğrilik vektör alanı \vec{H} dir. Fizikte ortalama eğrilik vektör alanı, hiperyüzey üzerine uygulanan burulma alanıdır. Malzeme biliminde yüzey gerilimi, yüzey stresi veya yüzey serbest enerjisi için kullanılır (Chen 2017).

E. Beltrami'nin iyi bilinen formülü, pozisyon vektör alanı x ile M nin ortalama eğrilik vektör alanı \vec{H} nin arasında

$$\Delta x = -n\vec{H}$$

biçiminde basit bir ilişki sağlar. Burada Δ , M nin indirgenmiş metriğe göre Laplasını ifade etmektedir. Bu eşitlikten M nin minimal (yani $\vec{H} = 0$) olması için gerek ve yeter koşul $\Delta x = 0$ olmasıdır. Diğer bir deyişle M nin harmonik olmasıdır (Chen 1973).

M nin x pozisyon vektör alanı,

$$x = x^T + x^N$$

biçiminde doğal bir ayrışmaya sahiptir. Burada x^T ve x^N , x in sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir. B.Y. Chen, 2017 yılında yapmış olduğu bir çalışmada Öklid altmanifoldlarının konum vektörü alanlarıyla ilişkili diferansiyel geometride çeşitli konuların bir araştırmasını sunmuştur.

Ortalama eğrilik akısı, n -boyutlu M hiperyüzeyinin fonksiyonel alanın gradyant akısıdır. Analizin bakış açısından, bu akış doğrusal olmayan bir parabolik denklem ile üretilir. Her ne kadar analizin sınıflandırılmış sonuçları ortalama eğrilik akısının kısa süreli varlığını gösterse de uzun süreli davranışın anlaşılması, akı boyunca ortaya çıkabilecek olası tekilliklerin kontrol edilmesini gerektiren zor bir sorundur. Ortalama eğrilik akısı, hiperyüzeyinin varış uzayındaki alan fonksiyonelinin gradyant akısıdır. Kendine-benzer akılar, hiperyüzeyin şeklini koruyan ortalama eğrilik akısının özel bir çözümü olarak ortaya çıkar (Halldorsson 2013).

En önemli ortalama eğrilik akısı, değişimin bir homoteti haline geldiğinde elde edilen kendine-benzer akıdır. Bu tür kendine-benzer hiperyüzeyin ortalama eğrilik vektörü \vec{H} aşağıdaki doğrusal olmayan eliptik sistemi sağlar;

$$\vec{H} + \lambda x^N = 0.$$

Burada x^N vektörü x in normal bileşeni ve $\lambda \in \mathbb{R}$ sabittir. Eğer λ bir pozitif sabitse, hiperyüzey, ortalama eğrilik akısının etkisi altında değişmeden kalan tek bir noktaya sonsuz olarak küçülür. Eğer λ bir negatif sabitse, hiperyüzey genişler fakat şekli aynı kalır; Bu durumda, hiperyüzey tıkız olmak zorunda değildir. Son olarak $\lambda = 0$ durumunda ise hiperyüzey akısının etkisi altında değişime uğramaz. Bu durumda hiperyüzey minimaldir (Halldorsson 2013). Özel olarak $\lambda = 1$ için daralan kendine-benzer, $\lambda = -1$ için genişleyen kendine-benzer akı söz konusudur (Ecker ve Huisken 1989).

Bir M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik vektörü \vec{H} için

$$\langle \vec{H}, x \rangle = -\frac{1}{c}$$

eşitliği sağlanırsa M ye *homotetik soliton* adı verilir. Burada c sıfırdan farklı sabittir. Homotetik soliton ortalama eğrilik akısının kendine-benzer çözümüdür (Kim ve Pyo 2019).

Kendine-benzer hiperyüzeylerin bir genellemesini Chang ve Wei tarafından tanımlanmış olup bunlara λ –hiperyüzeyi adı verildi. Bu tür hiperyüzeyler Öklid uzayında ağırlıklı hacim koruyucu ortalama eğrilik akısını olarak ifade edilmiştir. Chang ve Wei'ye göre bir hiperyüzeyin λ -hiperyüzeyi olması için

$$H + \langle x, \vec{N} \rangle = \lambda,$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $H = \|\vec{H}\|$, M nin ortalama eğriliği ve λ bir reel sabittir. Eğer $\lambda = 0$ ise M kendisi-büzüşendir (Cheng and Wei 2015).

Bu çalışmanın bulgular bölümü iki altbölümden oluşur. Birinci alt bölümde \mathbb{R}^{n+1} deki rotasyonel hiperyüzeyler incelenmiştir. Sırasıyla \mathbb{R}^3 deki rotasyonel yüzeyler ile bunların genellemeleri olan \mathbb{R}^4 ve \mathbb{R}^{n+1} deki rotasyonel hiperyüzeyler ele alınmıştır. İlk olarak \mathbb{R}^3 deki rotasyonel yüzeylerin homotetik soliton ve λ -yüzeyi olma koşulları elde edilmiştir. \mathbb{R}^3 deki r -yarıçaplı kürenin $c = 1$ için homotetik soliton olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte $\gamma = (au + b, d)$ meridyen eğrisi üzerine kurulan silindirin $c = 1$ için homotetik soliton olduğu sonucuna varılmıştır.

Ayrıca \mathbb{R}^3 deki tüm küre ve silindirlerin birer λ -yüzeyi şartını sağladıkları konik yüzeylerin ise bu şartı sağlamadıkları sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte \mathbb{R}^4 deki rotasyonel hiperyüzeylerin homotetik soliton ve λ -hiperyüzeyi olma koşulları ele edilmiştir. Benzer şekilde \mathbb{R}^4 deki bi-rotasyonel hiperyüzeylerin kendine-büzüşen ve λ -hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter koşullar elde edilmiş olup Clifford konisinin kendisi-büzüşen bir hiperyüzey olduğu örneği verilmiştir. Son olarak \mathbb{R}^{n+1} deki rotasyonel hiperyüzeylerin homotetik soliton ve λ -hiperyüzeyi olma koşulları elde edilmiş ve bazı örnekler verilmiştir.

Graf yüzeyleri, ya da basit olarak graflar modern diferansiyel geometrinin önemli yüzeylerinden biridir. Analizde ise iki değişkenli bir fonksiyonun grafikleri olarak ifade edilirler. Mimaride bu yüzeyler çatı kaplama yüzeyleri olarak bilinir. Graflar parametrik olarak Monge yamasıyla verilen yüzeylerdir. Bu yüzeyler ayrıca bilgisayar destekli geometrik tasarım için önemli bir yere sahiptir. Ayrıca mimaride tasarım ve yüzey modellemelerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bulgular bölümünün ikinci alt bölümde \mathbb{R}^{n+1} deki Monge yaması ile verilen graf hiperyüzeylerin λ -hiperyüzey olması durumları incelenmiştir. Sırasıyla \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 ve \mathbb{R}^{n+1} deki Monge yaması ile verilen hiperyüzeylerin λ -hiperyüzey olması durumları incelenmiştir. \mathbb{R}^3 deki graf yüzeylerin kendisi-büzüşen olma koşulları elde edilmiştir. Ayrıca \mathbb{R}^3 deki öteleme yüzeylerin λ -hiperyüzey olması için gerek ve yeter koşullar irdelenmiştir. Benzer şekilde \mathbb{R}^4 deki Aminov tipinde hiperyüzeylerin λ -hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir. Örnek olarak $S^1(r_0) \times \mathbb{R}^2$ biçiminde küresel hipersilindirin $\lambda = \frac{3r_0^2-1}{3r_0}$ değeri için bir λ -hiperyüzeyi olduğu gösterilmiştir.

Eğer $r_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ise hiperyüzey kendisi-büzüşendir. Aslında bu yüzey hiperyüzey $H = \frac{-1}{3r_0}$ sabit ortalama eğriliklidir. Ayrıca \mathbb{R}^4 deki Riemann çarpımı olarak verilen hiperyüzeylerin kendisi-büzüşen ve λ -hiperyüzeyi olma koşulları incelenmiştir. Son olarak \mathbb{R}^{n+1} deki graf hiperyüzeylerin λ -hiperyüzeyi olma koşulları elde edilmiş ve Cheng ve Wei'nin sonucu ile bağlantılı olarak bu hiperyüzeylerin düzlemin bir parçası olması gerektiği sonucuna varılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teoremler ve tanımlar verilmiştir. Özellikle diferansiyellenebilir dönüşümler, hiperyüzeyler ve bunların birinci ve ikinci temel formları, Gauss ve Weingarten eşitlikleri, ortalama eğriliği ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Ağırlıklı olarak (do Carmo 1976) ve (Chen 1973) çalışmalarından yararlanılmıştır.

Tanım 2.1. M kümesi ve $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ açık alt kümesi için $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ dönüşümlerinin bire bir (injective) bir ailesi tanımlansın. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa M ye n -boyutlu *diferansiyellenebilir manifold* adı verilir;

i) $x_\alpha(U_\alpha)$ ların sonlu birleşimleri M kümesini örtecektir.

ii) $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ şartını sağlayan herhangi α, β çifti için $x_\alpha^{-1}(W)$ ve $x_\beta^{-1}(W)$ kümeleri \mathbb{R}^n nin açık alt kümeleridir. Bununla birlikte $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ koordinat değişimi fonksiyonları türevlenebilirdir.

iii) (U_α, x_α) ailesi (atlası) i) ve ii) şartlarıyla birlikte maksimaldir.

(U_α, x_α) çifti (ya da x_α dönüşümü) $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ için M nin p noktasındaki bir *parametrizasyonu* (ya da *koordinat sistemi*) olarak bilinir. Burada $x_\alpha(U_\alpha)$ lara *koordinat komşuluğu* (ya da *harita*) adı verilir (do Carmo 1976).

Tanım 2.2. M ve \tilde{M} sırasıyla n ve m -boyutlu diferansiyellenebilir manifoldları için $x : M \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü verilsin. Bu takdirde $x(p)$ noktasında tanımlanan $\phi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{M}$ parametrizasyonu için $x(\phi(U)) \subset \phi(V)$ ve $\phi^{-1} \circ x \circ \phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümü diferansiyellenebilir olacak şekilde p noktasında bir $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ parametrizasyonu bulunabilirse x e *diferansiyellenebilir dönüşüm* adı verilir (do Carmo 1976).

Tanım 2.3. M bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlı ∇ dönüşümü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f, g \in D(M)$ için aşağıdaki şartları sağlar ise ∇ ya M üzerinde bir *afin koneksiyon* denir (do Carmo 1976).

- 1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ dir.
 2) $\nabla_X(fY + Z) = X(f)Y + f\nabla_X Y + \nabla_X Z$ dir.

Tanım 2.4. M diferansiyellenebilir manifold ve ∇ da M nin bir afin koneksiyonu olsun.

- a) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ ise ∇ simetriktir.
 b) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ ise ∇ Riemann metriği ile uyumludur denir. Bu iki şartlarını sağlayan ∇ afin koneksiyonuna M üzerinde bir *Levi-Civita koneksiyonu* adı verilir (do Carmo 1976).

Tanım 2.5. M ve \tilde{M} sırasıyla n ve m -boyutlu diferansiyellenebilir manifoldları için $x: M \rightarrow \tilde{M}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Herhangi $p \in M$ ve her $v \in T_p M$ tanjant vektörü için bir $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eğrisi $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ olacak şekilde seçilsin. Böylece $\beta = x \circ \gamma$ eğrisi alındığında $dx_p: T_p M \rightarrow T_{x(p)} \tilde{M}$ dönüşümü $dx_p(v) = \beta'(0)$ biçiminde tanımlı olan lineer bir dönüşüm olup γ eğrisi seçiminden bağımsızdır. Burada dx_p dönüşümüne x in *türev dönüşümü* olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2.6. M ve \tilde{M} sırasıyla n ve m -boyutlu diferansiyellenebilir manifoldları için $x: M \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü verilsin. Eğer x dönüşümü diferansiyellenebilir, örten ve x^{-1} de diferansiyellenebilir ise x dönüşümüne bir *difeomorfizm* adı verilir. Benzer şekilde $p \in M$ ve $x(p) \in \tilde{M}$ noktalarının komşulukları sırasıyla U ve V olmak üzere bunlar arasındaki $x: U \rightarrow V$ dönüşümü bir difeomorfizm ise x dönüşümüne bir *lokal difeomorfizm* adı verilir (do Carmo 1976).

Tanım 2.7. M ve \tilde{M} Riemann manifoldları için $x: M \rightarrow \tilde{M}$ bir difeomorfizm olsun. Her $p \in M$ ve $X, Y \in T_p M$ tanjant vektörleri için

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle dx_p(X), dx_p(Y) \rangle_{x(p)}$$

şartı sağlanırsa x dönüşümüne bir *izometri* adı verilir (do Carmo 1976).

Tanım 2.8. M ve \tilde{M} sırasıyla n ve m -boyutlu diferansiyellenebilir manifoldları için $x: M \rightarrow \tilde{M}$ dönüşümü verilsin. Bu takdirde $dx_p: T_p M \rightarrow T_{x(p)} \tilde{M}$ dönüşümü her $p \in M$

injektif ise x e bir *daldırma* (*immersion*) adı verilir. Bununla birlikte $x(M)$ alt uzayı \tilde{M} den indirgenen alt uzay topolojisi ile birlikte x daldırması $x(M) \subset \tilde{M}$ üzerinde bir homeomorfizm ise x e bir *gömme* (*embedding*) adı verilir (do Carmo 1976).

Açıklama 2.9. Varış uzayı $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ alınırsa M diferansiyellenebilir manifoldta n -boyutlu bir *hiperyüzey* adı verilir. Şu andan itibaren aksi söylenmedikçe $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+1}$ alınacaktır.

Tanım 2.10. M hiperyüzeyi $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırması ile verilsin. \mathbb{R}^{n+1} de Levi-Civita koneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\forall X_i, X_j \in \chi(M)$ lokal vektör alanları için M hiperyüzeyinin \mathbb{R}^{n+1} dan indirgenmiş Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin *ikinci temel form dönüşümü*

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M) ; h(X_i, X_j) = \tilde{\nabla}_{X_i} X_j - \nabla_{X_i} X_j, \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanır. Bu dönüşüm iyi tanımlı olup simetrik ve 2-lineerdir. Literatürde (2.1) eşitliği *Gauss denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Tanım 2. 11. M hiperyüzeyi $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırması verilsin. M nin birim normal vektörü N olmak üzere M nin *şekil operatörü dönüşümü*

$$A: \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M); A_N X_i = -\tilde{\nabla}_{X_i} N \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanır. Burada A_N dönüşümü N ya karşılık gelen *şekil operatörüdür*. (2.2) eşitliği *Weingarten denklemi* olarak bilinir (Chen 1973).

Herhangi $X_i, X_j \in T_p(M)$ için

$$\langle A_N X_i, X_j \rangle = \langle h(X_i, X_j), N \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.3)$$

eşitliği sağlanır. M nin *ortalama eğrilik vektör alanı*

$$\vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i, X_j) \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanır. Bununla birlikte M nin *ortalama eğrilik fonksiyonu* $H = \|\vec{H}\|$ ile hesaplanır. Eğer $H = 0$ ise M ye minimaldir denir (Chen 1973).

\mathbb{R}^4 de $\vec{\alpha} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{\beta} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $\vec{\gamma} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ biçiminde verilen lineer bağımsız vektörlerinin üçüne birden dik olan \vec{N} vektörü

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

determinantı yardımıyla hesaplanır. Burada $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}\}$ vektörleri \mathbb{R}^4 ün standart bazıdır.

Basitliğin hatrına

$$(yz)_{ij} = \begin{vmatrix} y_i & y_j \\ z_i & z_j \end{vmatrix} = y_i z_j - y_j z_i, \quad 1 \leq i, j \leq 4$$

alınarak

$$\begin{aligned} \vec{N} = & \{x_2(yz)_{34} - x_3(yz)_{24} + x_4(yz)_{23}\}\vec{i} + \{-x_1(yz)_{34} + x_3(yz)_{14} - x_4(yz)_{13}\}\vec{j} \\ & + \{x_1(yz)_{24} - x_2(yz)_{14} + x_4(yz)_{12}\}\vec{k} + \{-x_1(yz)_{23} + x_2(yz)_{13} - x_3(yz)_{12}\}\vec{l} \end{aligned}$$

elde edilir (Güler ve ark. 2018).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

n -boyutlu hiperyüzeyi $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırma ile verilsin. Türevlenebilir daldırmaların bir ailesi $x(p, t): M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $x(p, 0) = x(p)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $M_t = x(M^n, t)$ hiperyüzeyinin $x(p, t)$ noktasındaki ortalama eğrilik vektörü $\vec{H}(t) = \vec{H}(p, t)$ olmak üzere

$$\frac{\partial x(p, t)}{\partial t} = \vec{H}(p, t), \quad x(p, 0) = x(p) \quad (3.1)$$

eşitliği sağlanırsa bu aileye *ortalama eğrilik akısı (MCF)* adı verilir (Brakke 1978). Ortalama eğrilik akısı detaylı olarak (Sigal 2014) ve (Schulze 2017) de çalışılmıştır. Yüksek mertebeden altmanifoldlar için bakınız (Cooper 2011) ve (Smoczyk 2012). Bununla birlikte, tüm grafların ortalama eğrilik akısı (Ecker ve Huisken 1989) de analiz edilmiştir. Ortalama eğrilik akısı ile ilgili detaylı bilgi için (Montegazza 2011) çalışması incelenebilir.

Tanım. 3.1. $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırması ile verilen M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik vektörü \vec{H} ve M nin pozisyon vektörünün normal bileşeni x^N olmak üzere

$$\vec{H} + \lambda x^N = 0 \quad (3.2)$$

eşitliği sağlanırsa M hiperyüzeyi (3.1) denkleminin *kendine-benzer (self similar)* bir çözümü olarak ifade edilir. Eğer, $\lambda = 1$ için *daralan kendine-benzer* (kendisi-büzüşen), $\lambda = -1$ için *genişleyen kendine-benzer* (kendisi-genişleyen) bir çözümdür (Ecker ve Huisken 1989).

Düşük indeksli ortalama eğrilik akısı ve otomatik büzüşmenin sınıflandırılması ve analizi (Hussey 2012) de ele alınmıştır. Kendisi-büzüşen tam yüzeyler için bakınız (Peng 2013). Son zamanlarda kendine-benzer yüzeylerin çözümleri (Etemoğlu ve ark. 2013) de incelenmiştir. Kendisi-büzüşen ve simetriyi içeren kapalı hiperyüzeyler ile ilgili bir inceleme makalesi (Drugan ve ark 2018) dikkate değerdir. Ortalama eğrilik akısının kendiliğinden büzülmesi ve singülerlik ile ilgili sonuçlar (Guo 2017) de görülebilir.

M hiperyüzeyinin ortalama eğriliği $H = \|\vec{H}\|$ ve birim normal vektörü \vec{N} olsun. Bu takdirde (3.2) eşitliğinin her iki tarafı \vec{N} ile iç çarpılırsa

$$H + \lambda \langle \vec{N}, x \rangle = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Ayrıca $\lambda = 1$ durumunda benzer bir tanım aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.2. $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırması ile verilen M hiperyüzeyinin ortalama eğriliği $H = \|\vec{H}\|$ ve birim normal vektörü \vec{N} olmak üzere

$$H + \langle \vec{N}, x \rangle = 0 \quad (3.4)$$

eşitliği sağlanırsa M ye *kendisi-büzüşen (self shrinker) hiperyüzey* adı verilir (Cheng ve Wei 2015). Burada \langle, \rangle , \mathbb{R}^{n+1} nin standart iç çarpımdır.

Kendisi-büzüşen hiperyüzeyler ortalama eğrilik akısı ile ilgili çalışmalarda oldukça önemli bir yer teşkil etmektedir. Bunlar eğrilik akısının verilen bir singüler noktasındaki mümkün olan tüm kopmaları tanımlar (Cheng ve Wei 2015). $n = 1$ durumunda Abresch ve Langer 1986 yılında \mathbb{R}^2 deki tüm türevlenebilir ve kapalı kendisi-büzüşen eğrilerin çemberden ibaret olduğunu ispatlamışlardır.

Tanım 3.3. Türevlenebilir daldırmaların bir ailesi $x(., t): M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $x(., 0) = x(.)$ biçiminde tanımlansın.

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -\alpha(t)\vec{N}(t) + \vec{H}(t), \quad x(t) = x(., t) \quad (3.5)$$

biçiminde tanımlanan ortalama eğrilik akısına *ağırlıklı hacmi koruyan ortalama eğrilik akısı* denir. Burada

$$\alpha(t) = \frac{\int_M H(t) \langle N(t), N \rangle e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu}{\int_M \langle N(t), N \rangle e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu} \quad (3.6)$$

ve $\vec{H}(t) = \vec{H}(., t)$ ve $\vec{N}(t)$ sırasıyla $M_t = x(M^n, t)$ nin ortalama eğrilik vektörü ve birim normal vektörü, \vec{N} ise M nin birim normal vektörüdür.

(3.5) eşitliği ile verilen ağırlıklı hacmi koruyan ortalama eğrilik akısı

$$V(t) = \int_M \langle x(t), \vec{N} \rangle e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanan *ağırlıklı hacmi korur* (Cheng ve Wei 2015). $d\mu$ hacim elamanı olup

$$d\mu = \sqrt{\det g_{ij}}, \quad g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial x_i}, \frac{\partial x}{\partial x_j} \right\rangle \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır. Bununla birlikte ağırlıklı alan fonksiyoneli

$$A(t) = \int_M e^{-\frac{|x|^2}{2}} d\mu, \quad (3.9)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $d\mu_t$ fonksiyonu M nin $x(., t)$ yardımıyla indirgenen metriğe göre alan elemanıdır. Böylece $x(., t): M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $x(., 0) = x(.)$ biçiminde tanımlanan türevlenebilir daldırmaların bir ailesi (varyasyonu) olmak üzere, her t için $V(t)$ sabit oluyor ise $x(., t)$ ailesi $x(.)$ in *ağırlıklı hacmi koruyan bir ailesidir* denir. Ağırlıklı hacmi koruyan her bir $x(.)$ ailesi ağırlıklı alan fonksiyoneli $A(t)$ nin bir kritik noktası olması için gerek ve yeter şart

$$H + \langle x, \vec{N} \rangle = \lambda, \quad (3.10)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $H = \|\vec{H}\|$, M nin ortalama eğriliği ve λ bir reel sabittir. (3.3) şartı sağlanırsa M ye λ -hiperyüzeyi adı verilir. Eğer $\lambda = 0$ ise M kendisi-büzüşendir (Cheng and Wei 2015). λ -hiperyüzeylerin ile ilgili sonuçları (Ross 2015), (Shiho 2015), (Lejdfors 2003), (Cheng 2016) ve (Cheng ve ark. 2014) da verilmiştir.

Literatürde aşağıdaki iyi bilinen örnekler (Cheng and Wei 2015) çalışmasında bulunabilir.

Örnek 3.4. n -boyutlu, r -yarıçaplı küre $S^n(r)$ küresi \mathbb{R}^{n+1} nin $\lambda = \frac{n}{r} - r$ olacak şekilde kompakt bir λ -hiperyüzeyidir.

Örnek 3.5. $1 \leq k \leq n - 1$ için $S^k(r) \times \mathbb{R}^{n-k}$ şeklinde verilen n -boyutlu hipersilindiri \mathbb{R}^{n+1} nin $\lambda = \frac{k}{r} - r$ olacak şekilde tam, kompakt olmayan bir λ -hiperyüzeyidir.

Örnek 3.6. \mathbb{R}^n n -boyutlu Öklid uzayı \mathbb{R}^{n+1} nin $\lambda = 0$ olacak şekilde tam, kompakt olmayan bir λ -hiperyüzeyidir diğer bir deyişle kendisi-büzüşendir.

Önerme 3.7. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sabit ortalama eğriliği bir hiperyüzey olsun. M bir λ -hiperyüzeyi ise bu taktirde M hiperyüzeyi \sqrt{n} -yarıçaplı kürenin bir parçasına izometriktir.

λ -hiperyüzeylerin bir genellemesini aşağıda tanımda verilmiştir.

Tanım. 3.8. $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırması ile verilen M hiperyüzeyinin ortalama eğriliği H ve birim normal vektörü \vec{N} olmak üzere

$$H + w \langle x, \vec{N} \rangle = \lambda, \quad (3.11)$$

şartı sağlanırsa M ye w ağırlık fonksiyonuna karşılık gelen bir λ -hiperyüzeyi adı verilir (Li ve Chang 2015).

(3.11) eşitliğinde $w = 0$ alındığında sabit eğrilikli hiperyüzeyler elde edilir. Fakat $w = \text{sbt}$ ve $\lambda = 0$ durumunda M hiperyüzeyi kendisi-büzüşendir. Sonuç olarak $w = -\frac{1}{2}$ ve $\lambda = 0$ durumunda (Huisken, 1990) çalışmasında $n \geq 2$ için negatif ortalama eğriliğe sahip olmayan kompakt kendisi-büzüşen hiperyüzeylerin $x(M) = S^n(\sqrt{n})$ olduğunu göstermiştir. Yine aynı çalışmada aşağıdaki sonuç ispatlanmıştır.

Teorem 3.9. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırması ile verilen $H \geq 0$ ortalama eğrilikli bir hiperyüzey olsun. Eğer M hiperyüzeyi

$$H - \frac{1}{2} \langle x, \vec{N} \rangle = 0$$

şartını sağlarsa bu takdirde M aşağıdakilerden birine eşittir:

- 1) S^n ,
- 2) $S^{n-m} \times \mathbb{R}^m$,
- 3) $\gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Burada γ eğrisi Abresch ve Langer tarafından \mathbb{R}^2 de yatan homotetik olarak kendisi-büzüşen bir eğri olduğu gösterilmiştir. Bu eğri \mathbb{R}^2 de yatan homotetik olarak kendisi-büzüşen bir eğri olup aşağıdaki şekilde yorumlanabilir;

γ eğrisi

$$\gamma(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$$

polar parametrelendirme ile verildiğinde γ nın eğriliği

$$\kappa = ce^{-\frac{1}{2}a^2r^2}$$

dir. Böylece γ kendine-büzüşen olup eğrinin eğriliği bilindiğinden

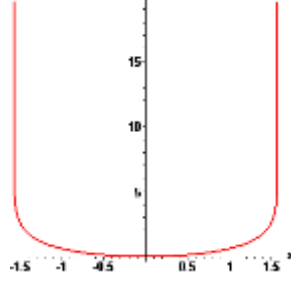
$$\gamma(\theta) = \left(\int \cos \left(ce^{-\frac{1}{2}a^2r^2(\theta)} \right) d\theta + d, \int \sin \left(ce^{-\frac{1}{2}a^2r^2(\theta)} \right) d\theta + e \right)$$

biçiminde birim hızlı parametrizasyona sahip olacaktır. Ayrıca \mathbb{R}^2 de $\gamma(x) = (x, y(x))$ biçiminde graf olarak tanımlanan eğrinin kendine-büzüşen olması için gerek ve yeter şart

$$y_{xx} = 1 + (y_x)^2$$

denkleminin sağlanmasıdır. Bu diferansiyel denklemin çözümü $y = -\ln(\cos x)$, $|x| < \frac{\pi}{2}$

Azrail Eğrisi (Grim Reaper) dir.



Şekil 3.1. Azrail Eğrisi

M. Mcgonagle ve J. Rose 2014 yılında yaptıkları çalışmada \mathbb{R}^{n+1} deki λ -hiperyüzeyleri ağırlık fonksiyonu $w = \frac{1}{2}$ olarak hesaplamalar yapmışlardır. Yine aynı yıl Q.M. Chang ve G. Wei $w = -1$ durumunu incelemişlerdir. Bu çalışmada ağırlıklı hacim koruyan ortalama eğrilik akısının tam λ -hiperyüzeyleri ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

Tanım 3.10. $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırması ile verilen M hiperyüzeyinin ortalama eğriliği $H = \|\vec{H}\|$ ve birim normal vektörü \vec{N} olmak üzere

$$\langle \vec{H}, x \rangle = -\frac{1}{c} \quad (3.12)$$

eşitliği sağlanırsa M ye *homotetik soliton* adı verilir. Burada c sıfırdan farklı sabittir. Homotetik soliton ortalama eğrilik akısının kendine-benzer çözümüdür (Kim ve Pyo 2019).

Tanım 3.11. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırması ile verilsin. M üzerindeki türevlenebilir bir $Z \in T(M)$ vektör alanı $div(Z) = 0$ ise Z e *sıkıştırılmaz vektör alanı* adı verilir (Chen ve Deshmukd 2014).

Aşağıdaki teoremin ispatı için bakınız (Chen ve Deshmukd 2014).

Teorem 3.12. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırması ile verilsin. x nin teğet bileşeni x^T nin sıkıştırılmaz olması için gerek ve yeter koşul

$$\langle \vec{H}, x \rangle = -1 \quad (3.13)$$

olmasıdır.

Sonuç. 3.13. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $x: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ izometrik daldırması ile verilsin. x nin teğet bileşeni x^T nin sıkıştırılmaz ise bu takdirde M hiperyüzeyi $c = 1$ olduğundan bir solitondur.

4. BULGULAR

4.1. \mathbb{R}^{n+1} de Rotasyonel λ -hiperyüzeyleri

Rotasyonel hiperyüzeyleri modern diferansiyel geometrinin önemli konularından biridir. Bu hiperyüzeyler \mathbb{R}^3 de özellikle bilgisayar destekli geometrik tasarım ve yüzey modellemelerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu alt bölümde rotasyonel hiperyüzeylerin λ -hiperyüzey olması durumları incelenmiştir. Sırasıyla \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^4 ve \mathbb{R}^{n+1} deki rotasyonel hiperyüzeylerin λ -hiperyüzey olması durumları ile ilgili orijinal sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçları destekleyici örnekler verilmiştir.

4.1.1. \mathbb{R}^3 de Rotasyonel λ -Yüzeyleri

\mathbb{R}^3 de

$$x(u, v) = (f(u), g(u)\cos v, g(u)\sin v) \quad (4.1)$$

regüler yamasıyla verilen yüzey rotasyon yüzeyi olarak bilinir. Burada

$$\gamma(u) = (f(u), g(u))$$

M nin meridyen eğrisidir (Gray 1993). M nin ortonormal çatı alanı

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{g} \frac{\partial x}{\partial v} \quad (4.2)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{\varphi} (g', -f' \cos v, -f' \sin v)$$

vektörleri tarafından gerilir (Bulca ve ark. 2009). Burada

$$\varphi = \sqrt{(f')^2 + (g')^2} \quad (4.3)$$

M üzerinde reel değerli türevlenebilir bir fonksiyondur. Bununla birlikte x in ikinci kısmi türevleri yardımıyla M nin ikinci temel form katsayıları

$$L_{11} = \langle x_{uu}, \vec{e}_3 \rangle = \frac{k}{\varphi}$$

$$L_{12} = \langle x_{uv}, \vec{e}_3 \rangle = 0 \quad (4.4)$$

$$L_{22} = \langle x_{vv}, \vec{e}_3 \rangle = \frac{f'g}{\varphi}$$

elde edilir. Burada

$$k = f''g' - f'g'' \quad (4.5)$$

M üzerinde türevlenebilir fonksiyondur. Bununla birlikte M nin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} h(x_u, x_u) &= L_{11}\vec{e}_3 \\ h(x_u, x_v) &= L_{12}\vec{e}_3 \\ h(x_v, x_v) &= L_{22}\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

ve

$$\begin{aligned} h(\vec{e}_1, \vec{e}_1) &= h\left(\frac{x_u}{\|x_u\|}, \frac{x_u}{\|x_u\|}\right) = \frac{L_{11}}{\varphi^2} \vec{e}_3 \\ h(\vec{e}_1, \vec{e}_2) &= h\left(\frac{x_u}{\|x_u\|}, \frac{x_v}{\|x_v\|}\right) = \frac{L_{12}}{\varphi g} \vec{e}_3 = \vec{0} \\ h(\vec{e}_2, \vec{e}_2) &= h\left(\frac{x_v}{\|x_v\|}, \frac{x_v}{\|x_v\|}\right) = \frac{h(x_u, x_u)}{g^2} = \frac{L_{22}}{g^2} \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (4.7)$$

eşitlikleri karşılaştırılarak

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{k}{\varphi^3} \\ h_{12} &= h_{21} = 0 \\ h_{22} &= \frac{f'}{g\varphi} \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Böylece (4.8) yardımıyla M nin şekil operatörü matrisi

$$A_{\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\varphi^3} & 0 \\ 0 & \frac{f'}{g\varphi} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

olarak bulunur. Buradan (4.9) kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.1. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi (4.1) pozisyon vektörü ile verilsin. M nin ortalama eğriliği

$$H = \frac{kg + f'\varphi^2}{2g\varphi^3} \quad (4.10)$$

dir. Burada k ve φ türevlenebilir fonksiyonlar olup sırasıyla (4.5) ve (4.3) de tanımlanmıştır.

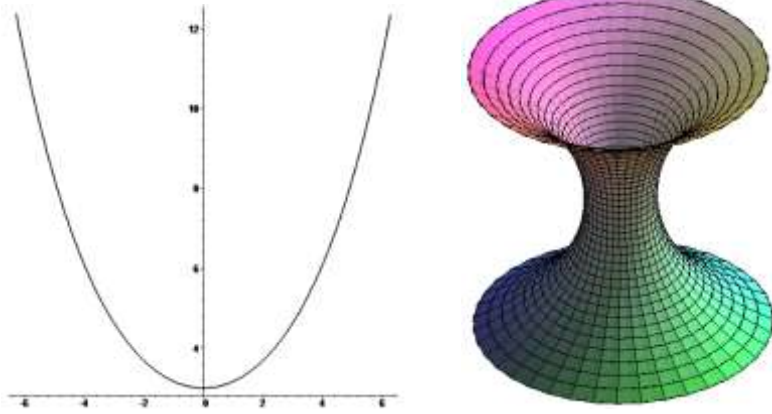
M nin minimal olması durumunu iki aşamalı inceleyebiliriz:

1) f bileşeni sabit olsun bu takdirde (4.5) eşitliğinden $k = 0$ dır. Bu yüzey düzlemin bir parçasıdır.

2) $f(u) = u$ olsun, bu durumda (4.5) ve (4.10) eşitliklerinden

$$g''g - (g')^2 = 1$$

elde edilir. Bu denklemin aşikar olmayan bir reel çözümü $g = b \cosh\left(\frac{u}{a}\right)$ dir. Böylece meridyen eğrisi catenary eğrisidir ve rotasyonel yüzey de katenoiddir (Bkz. Şekil 4.1.).



Şekil 4.1 Catenary eğrisi ve katenoid yüzeyi

(Kenmotsu 2003) çalışmasında aşağıdaki sınıflandırma verilmiştir.

Teorem 4.2. (Delaunay Teoremi) $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi (4.1) parametrizasyonu ile verilsin. M sabit eğrilikli ise M bir küre, bir katenoid ya da meridyen eğrisi

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \frac{1+b\sin 2Ht}{\sqrt{1+b^2+2b\sin 2Ht}} dt, \frac{1}{2H} \sqrt{1+b^2+2b\sin 2Hs} \right) \quad (4.11)$$

olan bir yüzeydir. Burada $b \in \mathbb{R}$ ve $H > 0$ sabittir.

Bununla birlikte, x pozisyon vektörü ile \vec{e}_3 ün iç çarpımından

$$\langle x, \vec{e}_3 \rangle = \frac{fg' - f'g}{\varphi} \quad (4.12)$$

bulunur. Burada φ türevlenebilir fonksiyon olup sırasıyla (4.3) de tanımlanmıştır.

Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Teorem 4.3. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi (4.1) parametrizasyonu ile verilsin. M nin homotetik soliton olması için gerek ve yeter şart

$$c(kg + f'\varphi^2)\delta + 2g\varphi^4 = 0 \quad (4.13)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada

$$\delta = fg' - f'g \quad (4.14)$$

türevlenebilir fonksiyon olup φ, k sırasıyla (4.3) ve (4.5) eşitliklerinde verilmiştir.

İspat: (\Rightarrow): $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi bir homotetik soliton olsun. Bu takdirde

$$\langle \vec{H}, x \rangle = H \langle \vec{e}_3, x \rangle = -\frac{1}{c}$$

dir. Böylece (4.10) ve (4.12) eşitlikleri yardımıyla

$$\frac{(kg + f'\varphi^2)(fg' - f'g)}{2g\varphi^4} = -\frac{1}{c}$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse (4.13) elde edilir.

(\Leftarrow): Aşikâr. \square

Örnek 4.4. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi r -yarıçaplı küre olsun. Bu takdirde M yüzeyi $c = 1$ için bir homotetik solitondur.

Örnek 4.5. Meridyen eğrisi $\gamma(u) = (au + b, d)$ doğrusu olsun. Bu yüzey bir *silindir* belirtir (Şekil 4.2). Bu durumda $\varphi = a$, $\delta = -ad$, $k = 0$ bulunur. Böylece bu değerler (4.13) denkleminde yerine yazılırsa $c = 2$ elde edilir. Diğer bir deyişle bu yüzey bir homotetik solitondur.

(4.10) ve (4.12) ve (3.11) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.6. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi (4.1) parametrizasyonu ile verilsin. M nin w ağırlık fonksiyonuna karşılık gelen bir λ -yüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$w = \frac{-(kg + f'\varphi^2) + 2\lambda g\varphi^3}{2g\delta\varphi^2} \quad (4.15)$$

olmalıdır.

Sonuç 4.7. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi (4.1) parametrizasyonu ile verilsin. M nin w ağırlık fonksiyonu $w = 0$ olması durumunda

$$-(kg + f'\varphi^2) + 2\lambda g\varphi^3 = 0$$

dır. Böylece M rotasyonel yüzeyi sabit ortalama eğrilikli bir λ -yüzevidir.

Sonuç 4.8. Meridyen eğrisi $\gamma(s) = (s, g(s))$ parametrizasyonu ile verilen rotasyonel yüzey λ sabit eğrilikli ise

$$\lambda = \frac{1 + (g')^2 - g''g}{2g(1 + (g')^2)^3}$$

dir.

Önerme 4.9. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi (4.1) parametrizasyonu ile verilsin. M nin λ -yüzeyi (yani, $w = 1$) olması için gerek ve yeter şart

$$kg + \varphi^2 f' + 2g\varphi^2 \delta - 2\lambda g\varphi^3 = 0 \quad (4.16)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada φ, k, δ sırasıyla (4.3), (4.5) ve (4.14) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

Böylece $\lambda = 0$ durumunda Önerme 4.9 un bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.10. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi (4.1) parametrizasyonu ile verilsin. M nin kendisi- büzüşen bir yüzey olması için gerek ve yeter şart

$$kg + \varphi^2 f' + 2g\varphi^2 \delta = 0 \quad (4.17)$$

olmasıdır.

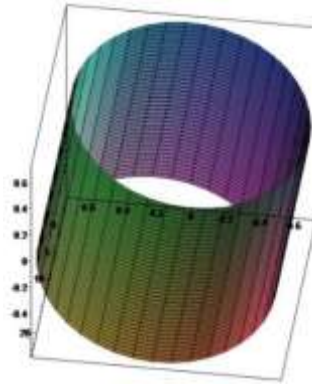
Meridyen eğrisini birim hızlı olması durumunda Önerme 4.9 aşağıdaki şekilde yorumlanabilir:

Sonuç 4.11. $M \subset \mathbb{R}^3$ meridyen eğrisi birim hızlı olan bir rotasyonel yüzey olsun. M nin bir λ -yüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$g(2\lambda - 2\delta - k) = f' \quad (4.18)$$

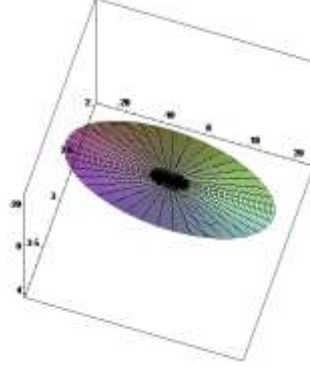
eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.12. $f(u) = au + b$, $g(u) = c$ olsun. Bu takdirde $\varphi = a$, $\delta = -ac$, $k = 0$ bulunur. Böylece $\lambda = \frac{1-2c^2}{2c}$ elde edilir. Bu yüzey bir *silindir* belirtir ve $c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ değeri için kendisi-büzüşendir (Bkz. Şekil 4.2.).



Şekil 4.2. $f(u) = 3u + 5$, $g(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ parametrizasyonlu silindir

Örnek 4.13. $f(u) = a$, $g(u) = bu + c$ olsun. Bu takdirde $\lambda = a$ bulunur. Bu yüzey bir *düzlem* belirtir ve $a = 0$ değeri için kendisi-büzüşendir (Bkz. Şekil 4.3.).



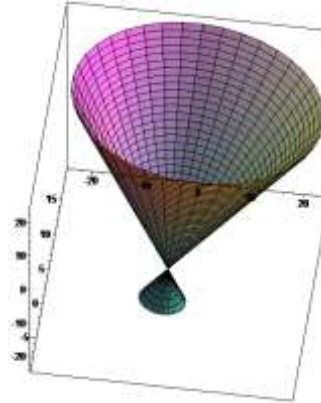
Şekil 4.3. $f(u) = 3$, $g(u) = 3u + 5$ parametrisasyonlu düzlem

Örnek 4.14. $f(u) = au + b$, $g(u) = cu + d$ olsun. Bu takdirde (4.16) denklemi sağlanırsa

$$\lambda = \frac{a + 2(cu + d)(bc - ad)}{2(cu + d)\sqrt{a^2 + c^2}}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur:

- 1) $a = 0$ ise Örnek 4.13 deki yüzey elde edilir.
- 2) $c = 0$ ise Örnek 4.12 deki yüzey elde edilir.
- 3) $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ ise M bir *koni* olup bu yüzey bir λ – yüzeyi değildir (Bkz. Şekil 4.4.).



Şekil 4.4. $f(u) = 3u$, $g(u) = 3u + 5$ parametrisasyonlu koni

Tanım 4.15. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eğrisi

$$\gamma(u) = (r(u)\cos u, r(u)\sin u)$$

pozisyon vektörü ile verilsin. Bu eğriye *polar parametrelendirme* ile verilmiştir denir.

$M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyinin meridyen eğrisi polar parametrelendirmesiyle verilsin. Bu taktirde (4.12) deki fonksiyonlar

$$k = r''r - 2(r')^2 - r^2, \quad \varphi = \sqrt{r^2 + (r')^2}, \quad \delta = r^2 \quad (4.19)$$

biçimine dönüşür. Böylece aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.16. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi polar parametrelendirme ile verilsin. M nin λ -yüzeyi olması için gerek ve yeter şart,

$$\varphi^2 r' \cos u + (2\varphi^2 r^2 - 2\lambda\varphi^3 + k - \varphi^2) r \sin u = 0 \quad (4.20)$$

olmasıdır. Burada φ ve k fonksiyonları (4.3) ve (4.5) de verilmiştir.

Sonuç 4.17. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi polar parametrelendirme ile verilsin. M nin kendisi-büzüşen olması için gerek ve yeter şart

$$\varphi^2 r' \cos u + (2\varphi^2 r^2 + k - \varphi^2) r \sin u = 0 \quad (4.21)$$

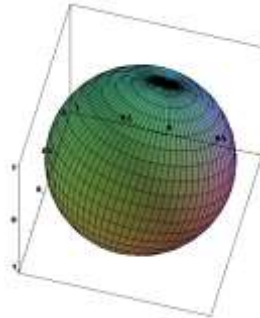
olmasıdır.

Sonuç 4.18. $M \subset \mathbb{R}^3$ rotasyonel yüzeyi $f(u) = r_0 \cos u$, $g(u) = r_0 \sin u$; $r_0 = sbt.$ polar parametrelendirme ile verilsin. M nin λ -yüzeyi olması için gerek ve yeter şart,

$$\lambda = r_0 - \frac{1}{r_0} \quad (4.22)$$

olmasıdır. Bununla birlikte $r = 1$ için yüzey kendisi-büzüşendir.

İspat. (4.19) denkleminde $r(u) = r_0$ yazılırsa $2r_0^3 \sin u (-1 + r_0^2 - \lambda r_0) = 0$ bulunur. Bununla birlikte $g(u) = r_0 \sin u$ fonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan $r_0^2 - \lambda r_0 - 1 = 0$ bulunur. Buradan (4.22) elde edilir. Dolayısıyla yüzey bir λ -hiperyüzeydir. Eğer M , $r_0 > 0$ yarıçaplı bir küre ise bu takdirde $r_0 = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$ dır. Yani r_0 yarıçaplı küre bir λ -yüzeyidir. Ayrıca M kendisi-büzüşen bir yüzey ise $r_0 = 1$ olmalıdır (Şekil 4.5). \square



Şekil 4.5. $r = 1$ polar parametrizasyonlu küre

4.1.2. \mathbb{R}^4 de Rotasyonel λ -Hiperyüzeyleri

$M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyi,

$$x(s, u, v) = (f(s), g(s)\sin u, g(s)\cos u\sin v, g(s)\cos u\cos v) \quad (4.23)$$

regüler koordinat yamasıyla verilsin. Burada $\gamma(s) = (f(s), g(s))$ regüler bir eğridir (Güler ve ark. 2018). M nin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\varphi} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{g} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{g\cos u} \frac{\partial x}{\partial v} \end{aligned} \quad (4.24)$$

ortonormal vektörleri tarafından gerilir. Böylece M nin birim normali

$$\vec{e}_4 = \frac{1}{\varphi} (g', -f'\sin u, -f'\cos u\sin v, -f'\cos u\cos v) \quad (4.25)$$

olarak hesaplanır. Bununla birlikte x in ikinci kısmi türevleri yardımıyla M nin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} L_{11} &= \langle x_{ss}, \vec{e}_4 \rangle = \frac{k}{\varphi} \\ L_{22} &= \langle x_{uu}, \vec{e}_4 \rangle = \frac{f'g}{\varphi} \\ L_{33} &= \langle x_{vv}, \vec{e}_4 \rangle = \frac{f'g\cos^2 u}{\varphi} \end{aligned} \quad (4.26)$$

dir. Burada φ ve k fonksiyonları (4.3) ve (4.5) eşitliklerinde verilmiştir. Bununla birlikte Gauss denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} h(\vec{e}_1, \vec{e}_1) &= h\left(\frac{x_s}{\|x_s\|}, \frac{x_s}{\|x_s\|}\right) = \frac{L_{11}}{\varphi^2} \vec{e}_4 \\ h(\vec{e}_2, \vec{e}_2) &= h\left(\frac{x_u}{\|x_u\|}, \frac{x_u}{\|x_u\|}\right) = \frac{h(x_u, x_u)}{g^2} = \frac{L_{22}}{g^2} \vec{e}_4 \\ h(\vec{e}_3, \vec{e}_3) &= h\left(\frac{x_v}{\|x_v\|}, \frac{x_v}{\|x_v\|}\right) = \frac{h(x_v, x_v)}{g^2 \cos^2 u} = \frac{L_{33}}{g^2 \cos^2 u} \vec{e}_4 \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir. Böylece M nin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{L_{11}}{\varphi^2} = \frac{k}{\varphi^3} \\ h_{22} &= \frac{L_{22}}{g^2} = \frac{f'}{\varphi g} \\ h_{33} &= \frac{L_{33}}{g^2 \cos^2 u} = \frac{f'}{\varphi g} \end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir. Burada $i \neq j$ için $h_{ij} = 0$ dır. M nin şekil operatörü matrisi, (4.28) yardımıyla

$$A_{\vec{e}_4} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\varphi^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f'}{\varphi g} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f'}{\varphi g} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

olarak bulunur. Buradan (4.29) kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.19. $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzeyi (4.23) pozisyon vektörü ile verilsin. M nin ortama eğriliği

$$H = \frac{kg + 2\varphi^2 f'}{3g\varphi^3} \quad (4.30)$$

dır. Burada φ ve k fonksiyonları (4.3) ve (4.5) eşitliklerinde verilmiştir.

Bununla birlikte

$$\langle x, \vec{e}_4 \rangle = \frac{\delta}{\varphi} \quad (4.31)$$

bulunur. Burada δ fonksiyonu (4.14) de tanımlanmıştır.

Teorem 4.20. $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzeyi (4.23) parametrizasyonu ile verilsin. M nin homotetik soliton olması için gerek ve yeter şart

$$c(kg + 2f'\varphi^2)\delta + 3g\varphi^4 = 0 \quad (4.32)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.21. $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzeyi r -yarıçaplı hiperküre olsun. Bu takdirde M yüzeyi $c = 1$ için bir homotetik solitondur.

Örnek 4.22. Meridyen eğrisi $\gamma(u) = (au + b, d)$ doğrusu olsun. Bu yüzey bir hipersilindir belirtir. Bu durumda $\varphi = a$, $\delta = -ad$, $k = 0$ bulunur. Böylece bu değerler (4.32) denkleminde yerine yazılırsa $c = \frac{3}{2}$ elde edilir. Diğer bir deyişle bu yüzey bir homotetik solitondur.

Teorem 4.23. $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel yüzeyi (4.23) parametrizasyonu ile verilsin. M nin λ -hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart;

$$kg + 3g\varphi^2\delta + 2\varphi^2 f' - 3\lambda g\varphi^3 = 0 \quad (4.33)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 4.24. $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.23) parametrizasyonu ile verilsin. M nin kendisi-büzüşen olması için gerek ve yeter şart

$$3g\varphi^2\delta + kg + 2\varphi^2f' = 0 \quad (4.34)$$

olmasıdır.

Örnek 4.25. $f(s) = \cos s$ ve $g(s) = \sin s$ olsun. Bu takdirde (4.33) denkleminde $\lambda = 0$ bulunur. Bu durumda hiperyüzey kendisi-büzüşen olup

$$x(s, u, v) = (\cos s, \sin s \sin u, \sin s \cos u \sin v, \sin s \cos u \cos v)$$

parametrizasyona sahip olan $S^3(1)$ hiperküresidir.

Örnek 4.26. $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyi $f(s) = as + b$ ve $g(s) = r_0$ ve $r_0 \neq 0$ parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde (4.33) denkleminde $\lambda = \frac{2-3r_0^2}{3r_0}$ bulunur.

Böylece elde edilen λ -hiperyüzeyi

$$x(s, u, v) = (as + b, r_0 \sin u, r_0 \cos u \sin v, r_0 \cos u \cos v)$$

parametrizasyona sahip olacaktır. Bu hiperyüzey $S^2(r_0) \times \mathbb{R}$ dairesel hipersilindridir.

Bununla birlikte bu hiperyüzeyin kendisi-büzüşen (yani $\lambda = 0$) olması için gerek ve yeter koşul $r_0^2 = \frac{2}{3}$ olmasıdır.

Örnek 4.27. $f(s) = b$ ve $g(s) = cs + d$ olsun. Bu takdirde (4.33) denkleminde $\lambda = b$ elde edilir. Bu durumda hiperyüzey bir λ -hiperyüzeydir. Böylece elde edilen λ -hiperyüzeyi

$$x(s, u, v) = (b, (cs + d)\sin u, (cs + d)\cos u \sin v, (cs + d)\cos u \cos v)$$

parametrizasyona sahip bir *hiperdüzlemdir*.

Örnek 4.28. $f(s) = as + b$ ve $g(s) = cs + d$ olsun. Böylece (4.33) denkleminde

$$\lambda = \frac{2a + 3(bc - ad)(cs + d)}{3\sqrt{a^2 + c^2}(cs + d)}$$

olur. Böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur:

- 1) $c = 0$ ise Örnek 4.26 deki yüzey elde edilir.
- 2) $a = 0$ ise Örnek 4.27 deki yüzey elde edilir.
- 3) $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ ise M bir konik hiperyüzey olup bu yüzey bir λ -hiperyüzeyi değildir.

4.1.3. \mathbb{R}^4 de Bi-Rotasyonel λ -Hiperyüzeyleri

\mathbb{R}^4 de

$$M: x(s, u, v) = (f(s)\cos u, f(s)\sin u, g(s)\cos v, g(s)\sin v) \quad (4.35)$$

parametrizasyonu ile verilen hiperyüzeye *bi-rotasyonel hiperyüzey* adı verilir (Drugan ve ark. 2018). M nin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{x_s}{\|x_s\|} = \frac{x_s}{\varphi} \\ e_2 &= \frac{x_u}{\|x_u\|} = \frac{x_u}{f} \\ e_3 &= \frac{x_v}{\|x_v\|} = \frac{x_v}{g} \end{aligned} \quad (4.36)$$

ortonormal vektörleri tarafından gerilir. Böylece M nin birim normali

$$\vec{e}_4 = \frac{1}{\varphi} (g'(s)\cos u, g'(s)\sin u, -f'(s)\cos v, -f'(s)\sin v) \quad (4.37)$$

olarak hesaplanır. Burada φ fonksiyonu (4.3) de tanımlanmıştır. İkinci kısmı türevler yardımıyla

$$\begin{aligned} L_{11} &= \langle x_{ss}, \vec{e}_4 \rangle = \frac{k}{\varphi} \\ L_{22} &= \langle x_{uu}, \vec{e}_4 \rangle = \frac{-fg'}{\varphi} \\ L_{33} &= \langle x_{vv}, \vec{e}_4 \rangle = \frac{gf'}{\varphi} \end{aligned} \quad (4.38)$$

elde edilir. Ayrıca $i \neq j$ için $L_{ij} = 0$ dır. Burada k fonksiyonu (4.5) da verilmiştir.

Böylece (4.36) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} h(e_1, e_1) &= h\left(\frac{x_s}{\|x_s\|}, \frac{x_s}{\|x_s\|}\right) = \frac{L_{11}}{\varphi^2} \vec{e}_4 \\ h(e_2, e_2) &= h\left(\frac{x_u}{\|x_u\|}, \frac{x_u}{\|x_u\|}\right) = \frac{h(x_u, x_u)}{f^2} = \frac{L_{22}}{f^2} \vec{e}_4 \\ h(e_3, e_3) &= h\left(\frac{x_v}{\|x_v\|}, \frac{x_v}{\|x_v\|}\right) = \frac{h(x_v, x_v)}{g^2} = \frac{L_{33}}{g^2} \vec{e}_4 \end{aligned} \quad (4.39)$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{L_{11}}{\varphi^2} = \frac{k}{\varphi^3} \\ h_{22} &= \frac{L_{22}}{g^2} = \frac{-g'}{f\varphi} \\ h_{33} &= \frac{L_{33}}{g^2} = \frac{f'}{g\varphi} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$i \neq j$ için $h_{ij} = 0$ dır. Böylece (4.40) yardımıyla M nin şekil operatörü matrisi

$$A_{\vec{e}_4} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\varphi^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-g'}{f\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f'}{g\varphi} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

olarak bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.29. $M \subset \mathbb{R}^4$ bi-rotasyonel hiperyüzeyi (4.35) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M nin ortalama eğriliği

$$H = \frac{kfg + \varphi^2 \mu}{3fg\varphi^3} \quad (4.42)$$

dır. Burada μ reel değerli türevlenebilir fonksiyon olup

$$\mu = ff' - gg' \quad (4.43)$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 4.30. Meridyen eğrisi r yarıçaplı bir çember olsun. Bu takdirde M bi-rotasyonel hiperyüzeyi

$$x(s, u, v) = (rcosscosu, rcosssinu, rsinscosv, rsinssinv) \quad (4.44)$$

parametrizasyona sahip $H = -\frac{1}{3r}$ sabit eğrilikli hiperküredir (Drugan ve ark. 2018).

Bununla birlikte

$$\langle x, \vec{e}_4 \rangle = \frac{\delta}{\varphi} \quad (4.45)$$

dir. Burada δ reel değerli fonksiyon olup (4.14) eşitliği ile verilmiştir.

Teorem 4.31. $M \subset \mathbb{R}^4$ bi-rotasyonel yüzeyi (4.35) parametrizasyonu ile verilsin. M nin homotetik soliton olması için gerek ve yeter şart

$$c(kfg + \mu\varphi^2)\delta + 3fg\varphi^4 = 0 \quad (4.46)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

(4.42) ve (4.45) eşitlikleri (3.10) da yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.32. $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.35) parametrizasyonu ile verilsin. M nin λ -hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$kfg + \varphi^2(\mu + 3fg\delta - 3\lambda fg\varphi) = 0 \quad (4.47)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada, k, φ, δ , ve μ reel değerli fonksiyonlar olup sırasıyla (4.5), (4.3), (4.14) ve (4.43) de tanımlanmıştır.

Bu teoremin bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.33. $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.35) parametrizasyonu ile verilsin. M nin kendisi-büzüşen olması için gerek ve yeter şart

$$kfg + \varphi^2(\mu + 3fg\delta) = 0 \quad (4.48)$$

olmasıdır.

Örnek 4.34. \mathbb{R}^4 de

$$M: x(s, u, v) = (acosu, asinu, g(s)cosv, g(s)sinv) \quad (4.49)$$

parametrizasyonu ile verilen bi-rotasyonel hiperyüzeyi için

$$k = 0, \varphi = g', \mu = -gg', \delta = ag' \quad (4.50)$$

dir. Böylece (4.42) ve (4.50) eşitlikleri yardımıyla M nin ortalama eğriliği

$$H = -\frac{1}{3a}$$

olarak bulunur, bu da bize M hiperyüzeyinin sabit ortalama eğriliği olduğunu gösterir.

Bununla birlikte (4.50) eşitlikleri (4.46) de yerine yazılırsa $c = 3$ elde edilir. Böylece M hiperyüzeyi bir homotetik solitondur. Benzer şekilde (4.50) eşitlikleri (4.47) de yerine yazılırsa

$$\lambda = -\frac{3a^2 - 1}{3a}$$

reel sabiti elde edilir. Böylece, M bir λ -hiperyüzey olup $a = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$ değeri için kendisi-büzüşendir.

Örnek 4.35. Meridyen eğrisi $f(s) = g(s)$ şeklinde orijinden geçen bir doğru olsun. Bu takdirde bi-rotasyonel hiperyüzeyi M

$$x(s, u, v) = f(s)(cosu, sinu, cosv, sinv) \quad (4.51)$$

parametrizasyona sahip bir minimal yüzeydir. Özel olarak $\gamma(s) = (s, s)$ alındığında

$$M: x(s, u, v) = (scosu, ssinu, scosv, ssinv)$$

hiperyüzeyi elde edilir. Bu hiperyüzey kendisi-büzüşen olup minimal Clifford konisidir (Drugan ve ark. 2018).

4.1.4. \mathbb{R}^{n+1} de Rotasyonel λ -Hiperyüzeyleri

$\gamma(s) = (f(s), g(s))$, $s \in (a, b)$ birim hızlı bir eğri ve $S^{n-1}(1)$ birim küresi

$$\rho = \rho(t_1, \dots, t_{n-1}) = (\rho_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \rho_2(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \rho_n(t_1, \dots, t_{n-1})) \quad (4.52)$$

parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde $\gamma(s)$ eğrisinin ρ etrafında döndürülmesiyle elde edilen \mathbb{R}^{n+1} deki rotasyonel hiperyüzeyi M ,

$$x : (a, b) \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}; x(s, \rho) = (f(s), g(s)\rho) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (4.53)$$

parametrizasyonu ile tanımlanır (do Carmo ve Dajczer 1993). γ eğrisi

$$\mathcal{H} = \{ (f, g) \in \mathbb{R}^2 : g > 0 \}$$

yarı düzleminde yatan bir egridir. Böylece M nin ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{\varphi} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \vec{e}_j &= \frac{1}{g} \frac{\partial x}{\partial t_j}, \quad 2 \leq j \leq n \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\vec{e}_{n+1} = \frac{1}{\varphi} (g', -f' \rho_1, -f' \rho_2, \dots, -f' \rho_n)$$

vektörleri tarafından gerilir. Burada φ fonksiyonu (4.4) de tanımlanmıştır. Böylece (4.53) ün s ve t_j ye göre ikinci mertebeden kısmi türevlerinden

$$x_{ss} = (f''(s), g''(s)\rho), x_{ii} = (0, g(s)\rho_{ii}), \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad (4.55)$$

elde edilir. Burada $x_{ss} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$, $x_{ii} = \frac{\partial^2 x}{\partial t_i^2}$ ve $\rho_{ii} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t_i^2}$ dir. Böylece M nin ikinci temel form

katsayıları

$$h_{11} = \frac{k}{\varphi^3}, h_{ii} = \frac{f'}{\varphi g}, \quad 2 \leq i \leq n-1 \quad (4.56)$$

dır. Bununla birlikte $i \neq j$ için $h_{ij} = 0$ dir. Böylece M nin şekil operatörü matrisi (4.56) yardımıyla

$$A_{\vec{e}_{n+1}} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\varphi^3} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{f'}{\varphi g} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{f'}{\varphi g} \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

olarak bulunur. Bu durumda (4.57) de elde edilen şekil operatörü bize (4.52) parametrizasyonu ile verilen rotasyonel hiperyüzeyin en çok iki farklı asli eğriliklere sahip olduğu sonucunu verir.

Buradan (4.57) kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.36. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rotasyonel yüzeyi (4.53) pozisyon vektörü ile verilsin. M nin ortama eğriliği

$$H = \frac{kg + (n-1)\varphi^2 f'}{ng\varphi^3} \quad (4.58)$$

dır. Burada φ ve k fonksiyonları (4.3) ve (4.5) eşitliklerinde verilmiştir.

Bununla birlikte

$$\langle x, \vec{e}_{n+1} \rangle = \frac{\delta}{\varphi} \quad (4.59)$$

bulunur. Burada δ fonksiyonu (4.14) de tanımlanmıştır.

Teorem 4.37. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rotasyonel yüzeyi (4.53) parametrizasyonu ile verilsin. M nin homotetik soliton olması için gerek ve yeter şart

$$c(kg + (n-1)f'\varphi^2)\delta + ng\varphi^4 = 0 \quad (4.60)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.38. $\gamma(s)$ meridyen eğrisi r-yarıçaplı çember olsun. Bu durumda $c = 1$ için bir homotetik solitondur.

Örnek 4.39. Meridyen eğrisi $\gamma(u) = (au + b, d)$ doğrusu olsun. Bu yüzey bir hipersilindir belirtir. Bu durumda $\varphi = a$, $\delta = -ad$, $k = 0$ bulunur. Böylece bu değerler (4.60) denkleminde yerine yazılırsa $c = \frac{n-1}{n}$ elde edilir. Diğer bir deyişle bu yüzey bir homotetik solitondur.

Böylece (4.58) ve (4.59) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.40. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rotasyonel yüzeyi (4.53) parametrizasyonu ile verilsin. M nin λ -hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$kg + ng\varphi^2\delta + (n-1)\varphi^2 f' - n\lambda g\varphi^3 = 0 \quad (4.61)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 4.41. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.53) parametrizasyonu ile verilsin. M nin kendisi-büzüşen olması için gerek ve yeter şart

$$kg + ng\varphi^2\delta + (n-1)\varphi^2 f' = 0 \quad (4.62)$$

olmasıdır.

Örnek 4.42. $f(s) = \cos s$ ve $g(s) = \sin s$ olsun. Bu takdirde (4.61) denkleminde $\lambda = 0$ bulunur. Bu durumda

$$x(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = (\cos s, \sin s \rho_1, \sin s \rho_2, \dots, \sin s \rho_n) \quad (4.63)$$

hiperyüzeyi $S^n(1)$ hiperküresi kendisi-büzüşedir.

Örnek 4.43. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rotasyonel hiperyüzeyi $f(s) = as + b$ ve $g(s) = r_0$ ve $r_0 \neq 0$ parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde (4.61) denkleminde

$$\lambda = \frac{n - 1 - nr_0^2}{nr_0}$$

bulunur. Böylece elde edilen λ -hiperyüzeyi

$$x(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = (as + b, r_0 \rho_1, r_0 \rho_2, \dots, r_0 \rho_n)$$

parametrizasyona sahip olacaktır. Bu hiperyüzey $S^{n-1}(r_0) \times \mathbb{R}$ dairesel hipersilindridir. Bununla birlikte bu hiperyüzeyin kendisi-büzüşen (yani, $\lambda = 0$) olması için gerek ve yeter şart

$$r_0^2 = \frac{n - 1}{n}$$

olmasıdır.

Örnek 4.44. $f(s) = b$ ve $g(s) = cs + d$ olsun. Bu takdirde (4.56) denkleminde $\lambda = b$ elde edilir. Bu durumda hiperyüzey bir λ -hiperyüzeydir. Böylece elde edilen λ -hiperyüzeyi

$$x(s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = (b, (cs + d)\rho_1, (cs + d)\rho_2, \dots, (cs + d)\rho_n)$$

parametrizasyona sahip bir *hiperdüzlemdir*.

Örnek 4.45. $f(s) = as + b$ ve $g(s) = cs + d$ olsun. Böylece (4.61) denkleminde

$$\lambda = \frac{(n - 1)a + n(bc - ad)(cs + d)}{n\sqrt{a^2 + c^2}(cs + d)}$$

olur. Böylece aşağıdaki durumlar söz konusudur:

- 1) $c = 0$ ise Örnek 4.43 deki yüzey elde edilir.
- 2) $a = 0$ ise Örnek 4.44 deki yüzey elde edilir.
- 3) $a \neq 0$ ve $c \neq 0$ ise M bir konik hiperyüzey olup bu yüzey bir λ -hiperyüzeyi değildir.

4.2. \mathbb{R}^{n+1} de Monge Yamasıyla Verilen λ –Hiperyüzeyleri

Bu alt bölümde Monge yaması ile verilen hiperyüzeylerin λ -hiperyüzey olması durumları incelenmiştir. Sırasıyla \mathbb{R}^3 ve \mathbb{R}^4 deki Monge yaması ile verilen hiperyüzeylerin λ -hiperyüzey olması durumları ile ilgili orijinal sonuçlar elde edilmiş ve bu sonuçları destekleyici örnekler verilmiştir.

4.2.1. \mathbb{R}^3 de Monge Yamasıyla Verilen λ -Yüzeyleri

\mathbb{R}^3 de

$$x(u, v) = (u, v, h(u, v)) \quad (4.64)$$

parametrelendirilmesiyle verilen yüzey *Monge yüzeyi* olarak adlandırılır (Gray 1993).

M nin tanjant uzayı

$$x_u = (1, 0, h_u(u, v))$$

$$x_v = (0, 1, h_v(u, v))$$

vektörleri tarafından gerilir. M nin birim normali

$$\vec{e}_3 = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \frac{1}{w} (-h_u, -h_v, 1) \quad (4.65)$$

vektörleri tarafından gerilir. Burada

$$w = \sqrt{1 + (h_u)^2 + (h_v)^2} \quad (4.66)$$

M üzerinde reel değerli türevlenebilir bir fonksiyondur. Bununla birlikte x in ikinci kısmi türevleri yardımıyla M nin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} L_{11} &= \langle x_{uu}, \vec{N} \rangle = \frac{h_{uu}}{w} \\ L_{22} &= \langle x_{vv}, \vec{N} \rangle = \frac{h_{vv}}{w} \\ L_{33} &= \langle x_{uv}, \vec{N} \rangle = \frac{h_{uv}}{w} \end{aligned} \quad (4.67)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{L_{11}}{g_{11}} \\ h_{12} &= \frac{1}{w} \left(L_{12} - \frac{g_{12}}{g_{11}} L_{11} \right) \\ h_{22} &= \frac{1}{w^2} \left(g_{11} L_{22} - 2g_{12} L_{12} + \frac{g_{12}^2}{g_{11}} L_{11} \right) \end{aligned} \quad (4.68)$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{h_{uu}}{w(1+(h_u)^2)} \\
h_{12} &= \frac{h_{uv}}{w^2} - \frac{h_u h_v h_{uu}}{w^2(1+(h_u)^2)} \\
h_{22} &= \frac{(1+(h_u)^2)}{w^3} h_{vv} - 2 \frac{h_u h_v h_{uv}}{w^3} + \frac{(h_u h_v)^2 h_{uu}}{w^3(1+(h_u)^2)}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

bulunur. Böylece (4.69) yardımıyla şekil operatörü matrisi

$$A_{\vec{e}_3} = \begin{pmatrix} \frac{h_{uu}}{w(1+(h_u)^2)} & \frac{h_{uv}}{w^2} - \frac{h_u h_v h_{uu}}{w^2(1+(h_u)^2)} \\ \frac{h_{uv}}{w^2} - \frac{h_u h_v h_{uu}}{w^2(1+(h_u)^2)} & \frac{(1+(h_u)^2)}{w^3} h_{vv} - 2 \frac{h_u h_v h_{uv}}{w^3} + \frac{(h_u h_v)^2 h_{uu}}{w^3(1+(h_u)^2)} \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

dir. Buradan (4.70) kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.46. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.64) pozisyon vektörü ile verilsin. M nin ortama eğriliği

$$H = \frac{h_{uu}(1+(h_v)^2) + (1+(h_u)^2)h_{vv} - 2h_u h_v h_{uv}}{2(1+(h_u)^2 + (h_v)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.71}$$

dir.

Bununla birlikte (4.64) ve (4.65) yardımıyla

$$\langle x, \vec{e}_3 \rangle = \frac{-uh_u - vh_v + h}{(1+(h_u)^2 + (h_v)^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{4.72}$$

elde edilir.

Böylece (4.71), (4.72) ve (3.10) eşitliklerinden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.47. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.64) parametrizasyonu ile verilsin. M nin λ -yüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{2(-uh_u - vh_v + h)(1+(h_u)^2 + (h_v)^2) + h_{uu}(1+(h_v)^2) + (1+(h_u)^2)h_{vv} - 2h_u h_v h_{uv}}{2(1+(h_u)^2 + (h_v)^2)^{\frac{3}{2}}} = \lambda \tag{4.73}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Sonuç 4.48. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.64) parametrizasyonu ile verilsin. M nin kendisi-büzüşen olması için gerek ve yeter şart

$$2(-uh_u - vh_v + h)(1 + (h_u)^2 + (h_v)^2) + h_{uu}(1 + (h_v)^2) + (1 + (h_u)^2)h_{vv} - 2h_u h_v h_{uv} = 0, \tag{4.74}$$

olmasıdır.

Tanım 4.49. Eğer

$$h(u, v) = f(u) + g(v) \tag{4.75}$$

alınırsa $M \subset \mathbb{R}^3$ öteleme yüzeyi olarak bilinir (Gray 1993).

Böylece (4.75) eşitliği (4.73) de yerine yazılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.50. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.74) parametrizasyonu ile verilen bir öteleme yüzeyi olsun. M nin λ -yüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{2(-uf_u - vg_v + f + g)(1 + (f_u)^2 + (f_v)^2) + f_{uu}(1 + (g_v)^2) + (1 + (f_u)^2)f_{vv}}{2(1 + (f_u)^2 + (g_v)^2)^{\frac{3}{2}}} = \lambda \quad (4.76)$$

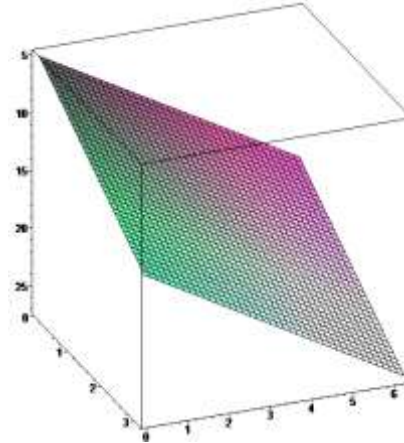
olmasıdır.

Sonuç 4.51. $M \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi (4.75) parametrizasyonu ile verilsin. M nin kendisi-büzüşen olması için gerek ve yeter şart

$$2(-uf_u - vg_v + f + g)(1 + (f_u)^2 + (f_v)^2) + f_{uu}(1 + (g_v)^2) + (1 + (f_u)^2)f_{vv} = 0 \quad (4.77)$$

halini alır.

Örnek 4.52. $f(u) = au + b$ ve $g(v) = cv + d$ olsun. (4.76) denkleminde yerine yazarsak $\frac{b+d}{\sqrt{1+a^2+c^2}} = \lambda$ elde edilir. Bu yüzey düzlemin bir parçası olup bir λ - hiperyüzeüdür (Bkz. Şekil 4.6.).



Şekil 4.6. $f(u) = 3u + 1$ ve $g(v) = 3v + 4$ parametrizasyonlu düzlem

Eğer $b = -d$ seçilirse yüzey kendisi-büzüşendir. Bu durumda yüzey, $x(u, v) = (u, v, au + cv)$ şeklindedir. Bu ise orijinden geçen düzlem belirtir.

4.2.2. \mathbb{R}^4 de Monge Yamasıyla Verilen λ –Hiperyüzeyleri

$M \subset \mathbb{R}^4$ hiperyüzeyi

$$x(s, u, v) = (s, u, r(s)\cos v, r(s)\sin v) \quad (4.78)$$

parametrelendirilmesiyle verilsin. Bu yüzey *Aminov tipinde hiperyüzeyi* olarak adlandırılacaktır. M nin ortonormal çatı alanı

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{x_s}{\|x_s\|} = \frac{1}{1+(r')^2} (1, 0, r'\cos v, r'\sin v) \\ e_2 &= \frac{x_u}{\|x_u\|} = (0, 1, 0, 0) \\ e_3 &= \frac{x_v}{\|x_v\|} = (0, 0, -\sin v, \cos v) \end{aligned} \quad (4.79)$$

ortonormal vektörleri tarafından gerilir. Böylece M nin birim normalı

$$\vec{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{1+(r')^2}} (-r', 0, \cos v, \sin v) \quad (4.80)$$

olarak hesaplanır. İkinci kısmı türevler yardımıyla

$$\begin{aligned} L_{11} &= \langle x_{ss}, \vec{e}_4 \rangle = rr'' \\ L_{22} &= \langle x_{uu}, \vec{e}_4 \rangle = 0 \\ L_{33} &= \langle x_{vv}, \vec{e}_4 \rangle = -r \end{aligned} \quad (4.81)$$

elde edilir. Ayrıca $i \neq j$ için $L_{ij} = 0$ dir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned} h(e_1, e_1) &= h\left(\frac{x_s}{\|x_s\|}, \frac{x_s}{\|x_s\|}\right) = \frac{1}{1+(r')^2} h(x_s, x_s) = \frac{L_{11}}{1+(r')^2} \vec{e}_4 \\ h(e_2, e_2) &= h\left(\frac{x_u}{\|x_u\|}, \frac{x_u}{\|x_u\|}\right) = h(x_u, x_u) = L_{22} \vec{e}_4 \\ h(e_3, e_3) &= h\left(\frac{x_v}{r}, \frac{x_v}{r}\right) = \frac{h(x_v, x_v)}{r^2} = \frac{L_{33}}{r^2} \vec{e}_4 \end{aligned} \quad (4.82)$$

dir. Böylece (4.81) ve (4.82) eşitlikleri kıyaslanırsa

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{rr''}{1+(r')^2} \\ h_{22} &= 0 \\ h_{33} &= \frac{-1}{r} \end{aligned} \quad (4.83)$$

bulunur. $i \neq j$ için $h_{ij} = 0$ dir. Buradan (4.83) yardımıyla şekil operatörü matrisi

$$A_{\vec{e}_4} = \begin{pmatrix} \frac{rr''}{1+(r')^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{r} \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.53. $M \subset \mathbb{R}^4$ hiperyüzeyi (4.78) parametrizasyonu ile verilsin. Bu taktirde M nin ortalama eğriliği

$$H = \frac{r^2 r'' - 1 - (r')^2}{3r(1+(r')^2)} \quad (4.85)$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.54. $M \subset \mathbb{R}^4$ hiperyüzeyi (4.78) parametrizasyonu ile verilsin. M nin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$r'(s) = \tan\left(\frac{as-1}{s}\right) \quad (4.86)$$

olmasıdır.

İspat. Maple komutunda

> $ode := diff(y(x), x, x) * x^2 - diff(y(x), x)^2 = 1;$

$$ode := \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x)\right) x^2 - \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 = 1$$

ile verilen diferansiyel denklemin aşikar olmayan bir çözümü

> $dsolve(ode);$

$$y(x) = \int \tan\left(\frac{-1 + c_1 x}{x}\right) dx + c_2$$

olarak hesaplanır. Bu da bize istenilen sonucu verir. \square

Bununla birlikte

$$\langle x, \vec{N} \rangle = \frac{-sr' + r}{\sqrt{1+(r')^2}} \quad (4.87)$$

dır. Böylece (4.85), (4.87) ve (3.10) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.55. $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ hiperyüzeyi (4.74) parametrizasyonu ile verilsin. M nin λ -hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$r^2 r'' - 1 - (r')^2 + 3r\sqrt{1+(r')^2}(r - sr') - 3\lambda r(1+(r')^2) = 0 \quad (4.88)$$

olmasıdır.

$\lambda = 0$ olması halinde Teorem 4.55 in bir sonucu aşağıdaki verilmiştir.

Sonuç 4.56. $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.78) parametrizasyonu ile verilsin. M nin kendisi-büzüşen olması için gerek ve yeter şart

$$r^2 r'' - 1 - (r')^2 + 3r\sqrt{1 + (r')^2}(r - sr') = 0 \quad (4.89)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.57. $r(s) = r_0$ sıfırdan farklı reel sabit olsun. Bu takdirde hiperyüzey $S^1(r_0) \times \mathbb{R}^2$ biçiminde küresel hipersilindir belirtir ((Chen ve Deshmukh 2014), Örnek 5.1).

Bununla birlikte (4.88) denkleminde $\lambda = \frac{3r_0^2 - 1}{3r_0}$ bulunur. Bu nedenle λ -hiperyüzezdır.

Eğer $r_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ise yüzey kendisi-büzüşendir. Aslında bu hiperyüzey

$H = \frac{-1}{3r_0}$ sabit ortalama eğriliklidir.

4.2.3. \mathbb{R}^4 de Riemann Çarpımıyla Verilen λ –Hiperyüzeyleri

$M \subset \mathbb{R}^4$ yüzeyi

$$x(s, u, v) = (s, u, r(v)\cos v, r(v)\sin v) \quad (4.90)$$

parametrelendirilmesiyle verilsin. M nin ortonormal çatı alanı

$$\vec{e}_1 = \frac{x_s}{\|x_s\|} = (1, 0, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{x_u}{\|x_u\|} = (0, 1, 0, 0) \quad (4.91)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{x_v}{\|x_v\|} = \frac{1}{\mu(v)} (0, 0, r' \cos v - r \sin v, r' \sin v + r \cos v)$$

ortonormal vektörleri tarafından gerilir. Böylece M nin birim normali

$$\vec{e}_4 = \frac{1}{\mu(v)} (0, 0, r' \sin v + r \cos v, r \sin v - r' \cos v) \quad (4.92)$$

olarak hesaplanır (Ek 3). Burada

$$\mu(v) = \sqrt{r^2 + (r')^2} \quad (4.93)$$

dır. Böylece ikinci mertebeden kısmi türevler yardımıyla

$$L_{11} = \langle x_{ss}, \vec{e}_4 \rangle = 0$$

$$L_{22} = \langle x_{uu}, \vec{e}_4 \rangle = 0 \quad (4.94)$$

$$L_{33} = \langle x_{vv}, \vec{e}_4 \rangle = \frac{rr'' - 2(r')^2 - r^2}{\mu(v)}$$

dır. Ayrıca $i \neq j$ için $L_{ij} = 0$ dır. Böylece

$$h(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = h\left(\frac{x_s}{\|x_s\|}, \frac{x_s}{\|x_s\|}\right) = h(x_s, x_s) = L_{11}\vec{e}_4$$

$$h(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = h\left(\frac{x_u}{\|x_u\|}, \frac{x_u}{\|x_u\|}\right) = h(x_u, x_u) = L_{22}\vec{e}_4 \quad (4.95)$$

$$h(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = h\left(\frac{x_v}{\|x_v\|}, \frac{x_v}{\|x_v\|}\right) = \frac{h(x_v, x_v)}{\mu^2(v)} = \frac{L_{33}}{\mu^2(v)} \vec{e}_4$$

elde edilir. Buradan (4.94) ve (4.95) eşitlikleri kıyaslanırsa

$$h_{11} = 0$$

$$h_{22} = 0 \tag{4.96}$$

$$h_{33} = \frac{rr'' - 2(r')^2 - r^2}{\mu^3(v)}$$

bulunur. $i \neq j$ için $h_{ij} = 0$ dır.

Buradan (4.96) yardımıyla şekil operatörü matrisi

$$A_{\vec{e}_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{rr'' - 2(r')^2 - r^2}{\mu^3(v)} \end{pmatrix} \tag{4.97}$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.58. $M \subset \mathbb{R}^4$ hiperyüzeyi (4.90) parametrizasyonu ile verilsin. Bu taktirde M nin ortalama eğriliği

$$H = \frac{rr'' - 2(r')^2 - r^2}{3\mu^3} \tag{4.98}$$

dir.

Bununla birlikte

$$\langle x, \vec{e}_4 \rangle = \frac{r^2}{\mu} \tag{4.99}$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.59. $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ hiperyüzeyi (4.90) parametrizasyonu ile verilsin. M nin λ -hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$rr'' - 2(r')^2 - r^2 + 3r^2\mu^2 - 3\lambda\mu^3 = 0 \tag{4.100}$$

olmasıdır.

$\lambda = 0$ olması halinde Teorem 4.59 un bir sonucu aşağıdaki verilmiştir.

Sonuç 4.60. $M \subset \mathbb{R}^4$ rotasyonel hiperyüzeyi (4.90) parametrizasyonu ile verilsin. M nin kendisi-büzüşen olması için gerek ve yeter şart

$$rr'' - 2(r')^2 - r^2 + 3r^2\mu^2 = 0 \tag{4.101}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örnek 4.61. $r(s) = r_0$ sıfırdan farklı reel sabit olsun. Bu taktirde (4.100) denkleminde

$$\lambda = \frac{3r_0^2 - 1}{3r_0}$$

bulunur. Bu durumda yüzey bir λ -hiperyüzezdür. Eğer $r_0 = \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}$ ise yüzey kendisi-büzüşendir. Bu hiperyüzey $H = \frac{-1}{3r_0}$ sabit ortalama eğriliklidir.

4.2.4. \mathbb{R}^{n+1} de Monge Yamasıyla Verilen λ –Hiperyüzeyleri

$M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hiperyüzeyi

$$x(t_1, t_2, \dots, t_n) = (t_1, t_2, \dots, t_n, f(t_1, t_2, \dots, t_n)) \quad (4.102)$$

parametrelendirilmesiyle verilen hiperyüzey graf olarak bilinir (Cheng ve Wei 2014).

\mathbb{R}^{n+1} nin ortonormal bazı $\{\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_{n+1}\}$ olmak üzere M nin tanjant vektörleri

$$\vec{e}_i = \vec{E}_i + f_i \quad (4.103)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial t_i}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.104)$$

dır. Böylece M nin \mathbb{R}^{n+1} den indirgenmiş metriği

$$g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} + f_i f_j \quad (4.105)$$

dir. Burada \langle, \rangle \mathbb{R}^{n+1} nin kanonik iç çarpımıdır. Bununla birlikte (g_{ij}) matrisinin tersi

(g^{ij}) olmak üzere

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{1 + \|\nabla f\|^2} \quad (4.106)$$

Böylece (4.103) yardımıyla M nin birim normal vektör alanı

$$\vec{e}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} (-\sum_i f_i \vec{E}_i + \vec{E}_{n+1}) \quad (4.107)$$

olarak bulunur (Cheng ve Wei 2014). Burada

$$\nabla f = (f_1, \dots, f_n)$$

dir. Bu durumda M nin ikinci temel form katsayıları

$$L_{ij} = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, \vec{e}_{n+1} \rangle = \langle f_{ij} \vec{E}_{n+1}, \vec{e}_{n+1} \rangle = \frac{f_{ij}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \quad (4.108)$$

dir. Burada

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}$$

dir.

Cheng ve Wei nin 2014 de hasapladıkları aşağıdaki sonuç ile yorumlanabilir.

Teorem 4.62. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hiperyüzeyi (4.102) parametrizasyonu ile verilsin. Bu takdirde M nin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i,j} g^{ij} \frac{f_{ij}}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \quad (4.109)$$

dir.

Bununla birlikte

$$\langle x, \vec{e}_{n+1} \rangle = \frac{f - \sum_i t_i f_i}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} \quad (4.110)$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.63. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hiperyüzeyi (4.102) parametrizasyonu ile verilsin. M nin λ -hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{n} \sum_{i,j} g^{ij} \frac{f_{ij}}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} + \frac{(f - \sum_i t_i f_i)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} = \lambda \quad (4.111)$$

olmasıdır.

Cheng ve Wei 2014 yılında (4.96) parametrizasyonu ile verilen hiperyüzeylerin λ -hiperyüzey olma durumunu aşağıdaki sonuçla vermişlerdir.

Teorem 4.64. $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hiperyüzeyi (4.102) parametrizasyonu ile verilsin. Eğer M bir λ -hiperyüzeyi ise bu takdirde M hiperyüzeyi \mathbb{R}^n nin bir parçasıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Ortalama eğrilik akısı ve solitonlar fiziğın önemli çalışma alanlarını oluşturur. Bu çalışmada hiperyüzeylerin ortalama eğrilik akısı ile ilgili daha önceden çalışmalar incelenerek bu tür hiperyüzeylerin kendine-benzer ve λ -hiperyüzeyi olması ile ilgili özellikler ele alınmıştır. Özel olarak uygulama alanları geniş olan rotasyonel hiperyüzeyler ile Monge yaması ile verilen hiperyüzleri ele alınmıştır. Bu tür hiperyüzeylerin soliton olma özellikleri ile kendine-benzer ve λ -hiperyüzeyi olması ile ilgili gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçları destekleyici örnekler verilmiştir. Yapılan çalışmayı hiperyüzeylerin bir genellemesi olan altmanifoldlara da uygulamak ileriki tarihlerde mümkün olacağı kanısını taşımaktayız.

KAYNAKLAR

- Arslan, K., Sütveren, A., Bulca, B. 2020.** Rotational λ -hypersurfaces in Euclidean Spaces, Preprint.
- Abresch, U., Langer, J. 1986.** The normalized curve shortening flow and homothetic solutions, *J. Differential Geom.*, 23: 175-196.
- Brakke, K. A. 1978.** *The Motion of a Surface by Its Mean Curvature*, Princeton University Press, Princeton, 239 pp.
- Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B.K., Öztürk, G., Ugail, H. 2009.** Spherical product surfaces in E^3 , International Conference on CyberWorlds, Bradford, UK.
- Chen, B. Y. 1973.** *Geometry of Submanifolds*. Dekker, New York, 184 pp.
- Chen, B.Y. 2017.** Topics in Differential Geometry Associated with Position Vector Fields on Euclidean Submanifolds, *Arab J. Math. Sci.*, 23: 1-17.
- Chen, B.Y. Deshmukd, S., 2014.** Classification of Ricci solitons on Euclidean hypersurfaces, *Int. J. Math.* 25(11): 1-22.
- Cheng, Q.M. 2016.** *Geometry of λ -hypersurfaces of the weighted volume-preserving mean curvature flow*, Fukuoka University.
- Cheng, Q.M., Ogata, S., Wei, G. 2014.** Rigidity Theorems of λ hypersurfaces, arXiv:1403.4123v3.
- Cheng, Q.M., Wei, G. 2014.** The Gauss Image of Hypersurfaces and a Bernstein Type Problem, arXiv:1410.5302v1.
- Cheng, Q.M., Wei, G. 2015.** Compact Embedded λ -Torus in Euclidean Spaces arXiv:1512.04752v1.
- Cooper, A.A. 2011.** *Mean Curvature Flow in Higher Codimension*, Ph.D. Thesis, Michigan State University, Graduate Program in Mathematics, USA.
- Do Carmo, M. 1976.** *Riemannian Geometry*, Boston, Basel Berlin, 300 pp.
- Do Carmo M., Dajczer, M. 1993.** Rotational hypersurfaces in spaces of constant curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277 (1983), 685-709.
- Drugan, G., Lee, H., Nguyen, X.H. 2018.** A Survey of Closed Self-Shrinkers with Symmetry, *Results in Math.* 32: 73-82.
- Ecker K., Huisken, G. 1989.** Mean Curvature Evolution of Entire Graphs, *Annals of Mathematics*, 130(3): 453-471.
- Etemoğlu, E., Arslan, K. Bulca, B. 2013.** Self Similar Surfaces in Euclidean Spaces, *Selçuk J. Appl. Math.* 14(1) 71-81.

- Gray, A. 1993.** Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRS Press, Inc. 664 pp.
- Guo, S. H. 2017.** Self Shrinkers and Singularity Models of the Main Curvature Flow. Ph.D. Thesis, The State University of New Jersey, Graduate Program in Mathematics, USA.
- Güler, E, Hacısalihoğlu, H. H., Kim, Y.H. 2018.** The Gauss Map and the Third Laplace-Beltrami Operator of the Rotational Hypersurface in 4-Space, *Symmetry*, 10: 1-11.
- Halldorsson, P.H. 2013.** Self-Similar Solutions to the Mean Curvature Flow in Euclidean and Minkowski Space, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mathematics, USA.
- Hussey, C. 2012.** Classification and Analysis of Low index Mean Curvature Flow Self-shrinkers, Ph.D. Thesis, The Johns Hopkins University, Department of Mathematics, USA.
- Huisken, G. 1990.** Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J. Differential Geom.* 31: 285-299.
- Kenmotsu, K. 2003,** Surfaces with constant mean Curvature, American Mathematical Society, 142 pp.
- Kim, D., Pyo, J. 2019.** Translating Solitons for the Inverse Mean Curvature Flow, *Results Math.* 64: 1-28.
- Lejdfors, C. J. 2003.** Surfaces of Constant Mean Curvature, *Msc Thesis*, Lund University, Centre for Mathematical Sciences, Sweden.
- Li, X., Chang, X. 2015.** Rigidity Theorems of the Space-like λ -hypersurfaces in the Lorentzian Space \mathbb{R}^{n+1} arXiv:1511.02984v1.
- Montegazza, C. 2011.** Lecture Notes on Mean Curvature Flow, Birkhauser, 179 pp.
- Peng, Y. 2013.** Complete self-shrinkers of mean curvature flow, Ph.D. Thesis, Saga University, Graduate School of Science and Engineering, Department of Science and Advanced Technology, Japan.
- Ross, J. 2015.** Rigidity Results of Lambda-Hypersurfaces, Ph.D. Thesis, The Johns Hopkins University, Department of Mathematics, USA.
- Schulze, F. 2017.** Introduction to Mean Curvature Flow, Lecture Notes, University College London. 79 pp.
- Shiho, O. 2015.** A Global Pinching Theorem of Complete λ -hypersurfaces, arXiv:1504.00789v2.
- Sigal, I. M. 2014.** Lectures on Mean Curvature Flow and Stability, Lecture Notes, Dept of Mathematics, Univ of Toronto, 81 pp.

Smoczyk, K. 2012. Mean Curvature Flow in Higher Codimension: Introduction and Survey, Global Differential Geometry, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 520 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Alim SÜTVEREN
Doğum Yeri ve Tarihi : İSTANBUL / 07.08.1995
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Osmangazi Lisesi / Bursa
Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi
Yüksek Lisans : Bursa Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Özel Sayısal Modül Özel Eğitim Kursu (2015-2016)
Özel Sayısal Modül Özel Eğitim Kursu (2018-2019)

İletişim (e-posta) : 501811002@ogr.uludag.edu.tr
alimsutveren1@gmail.com

Akademik Çalışmalar :