

## DOĞRUSAL PROGRAMLAMA VE ÜRETİM TEORİSİ

William J. Baumol (\*)

Çev.: Ass. Adil Uğur TANRISEVER

### Alternatif Bir Doğrusal Programlama Şekli

Doğrusal programlamanın geometrik tanımlanmasında sadece bir tip şekil kullanılır. Bahsi geçen şeklin eksenleri girdi miktarını değil, çıktı miktarlarını ölçmekte kullanılır. Daha genel söylersek, şekil araçlardan çok sonuçlarla ilgilidir. Şekillerdeki herhangi bir nokta probleme muhtemel bir çözüm olan çıktılar (veya yöntemler) kombinasyonunu temsil eder. Girdiler, sadece sınır hatları biçiminde görünür. Bu sınır çizgileri eldeki kısıtlı girdilerin çıktı miktarını belirleyen ölçüleri verir.

Standart üretim teorisinin şekilleriyle kolay bir karşılaştırma yapabilmek için, doğrusal programlama problemini farklı bir şekilde aktarmak gerekecektir. Bu şekilde girdi miktarları eksenlerle, çıktılar ise eşürün eğrileriyle gösterilir. Bu yeni şekillerde de, girdi gereksinimleri tanımlamanın odak noktasını oluşturacaktır.

Örnek :

Şeklin eksenleri girdi miktarlarını gösterdiğinden, iki boyutlu şeklin basitliğinden faydalanmak için örneğimizde iki kısıtlayıcı şartı olan bir doğrusal program kullanmak zorundayız. Bu yazının tümünde, örnek olarak aşağıdaki olayı inceleyeceğiz.

Bir deri işleme firması, diğer işlemler içinde, beyaz siyet derinin boyamasıyla da uğraşır. Ürün miktarı, boya tanklarının kapasitesi ve üretim süreci denetimi için gerekli olan, eldeki kalifiye işgücü miktarıyla sınırlıdır. Bu işlem için firma açısından dört üretim süreci söz konusudur.

1. süreçte, deriler boya tanklarının içine konmadan önce, her yığından alınarak bir örnekteki kusurlar kontrol edilir. 2. süreç her derinin tek tek kontrolünü içerir. 3. süreç, 1. süreçte olduğu gibi, alınan bir örneğin kontrolünü gerektirir. Fakat, hayvan postlarının oldukça küçük bir oranı incelenir. 4. süreç ise, daha önceki güç kontrol işlemlerinden kaçırır. Bütün deriler boyanır ve optimal şekilde boyanıp boyanmadıkları kontrol edilir.

$Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  ve  $Q_4$ 'ü, sırasıyla, 1., 2., 3., ve 4. süreçlerde boyanan, yani üretilen deri miktarları olarak kabul edelim. Sonra da, elimizde yeterli veri olduğunu varsayarak problemimizi aşağıdaki biçimde belirleyelim.

(\*) William J. Baumol, Economic Theory and Operation Analysis, pp. 272-91, Edited by Kristian S. Palda, Readings in Managerial Economics pp.98-107.

$$\text{Maksimum kâr} = 0.9 Q_1 + 0.75 Q_2 + 1.0 Q_3 + 1.1 Q_4$$

$$\text{Sınırlayıcılar} = 2 Q_1 + 1.5 Q_2 + 3.5 Q_3 + 7 Q_4 \leq 4000$$

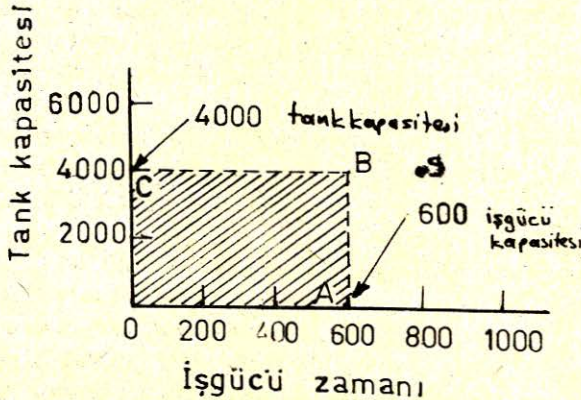
$$0.4 Q_1 + 0.45 Q_2 + 0.35 Q_3 + 0.3 Q_4 \leq 600$$

$$\text{Pozitiflik şartı ; } Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0, Q_3 \geq 0, Q_4 \geq 0$$

4000 (bir haftalık gallon<sup>1</sup> - saat) eldeki boya tankı kapasitesi, 600 (haftalık işgücü saati) ise firmanın üretimde kullanabileceği kalifiye işgücü miktarıdır. Yani, bizim sınırlı iki girdimiz tank kapasitesi ile işgücüdür. Kâr fonksiyonumuzdaki birinci katsayı 0,9 (dolar) 1. süreçte işlenen bir foot<sup>2</sup> - karelik derinin sağlayacağı gelirdir ve amaç (kâr) fonksiyonunun diğer katsayıları için de aynı yorum getirilir. Üstteki sınırlayıcının ilk rakamı 2, bir postun 1. süreçte işlenmesi için gerekli gallon-saat miktarıdır. Diğer katsayılar da aynı şekilde açıklanır.

### Verimli Bölgenin Belirlenmesi

Şimdi, şekilde açıklamalarımızı geliştirebiliriz. Verimli bölge 1 no.lu şekilde görülmektedir. Burada, iki eksenin OA ve OC parçalarıyla sınırlanmış OABC dikdörtgeni, 600 işgücü-saatini gösteren noktanın üzerinde AB dikey çizgisi ve 4000 gallonluk tank kapasitesini gösteren noktanın sağında paralel uzanan CB doğru parçası görülmektedir. Elde en çok 600 işgücü-saati ve 4000 galonluk tank kapasitesi bulunduğundan sadece bu taranmış bölge uygulanabilir girdi kombinasyonlarını temsil eder. Bu bölge girdi dışındaki S noktası ise 4000 galonluk tank kapasitesinin ve 800 işgücü-saatinin kullanımını temsil eder. Firmanın elinde bu ölçüde bir işgücü olmadığı için de S noktasının gösterdiği kombinasyonun uygulanması mümkün değildir.



Şekil : 1

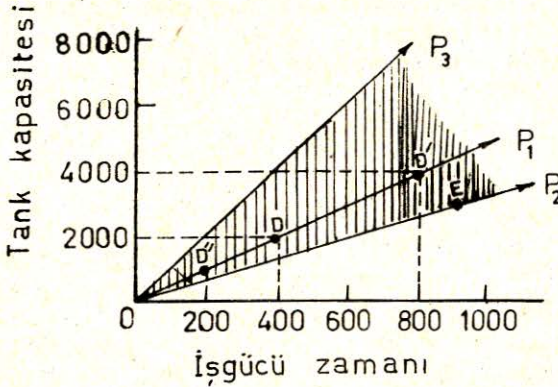
1 1 Gallon : İng. 4,55 litre ; A.B.D. 3,78 litre

2 Foot = Ayak : 30,479 cm.

## Bir Süreçin Şekil Üzerinde Gösterilmesi

Üretim sürecini geometrik olarak tanımlarken tanımlar konusunda çok dikkatli davranmalıyız. Amacımıza göre üretim sürecindeki girdi oranlarının sabit olması gerekmektedir. Meselâ, bu örneğimizde 1. süreç 1 foot-karelik çıktı için 2 galon-saatlik tank kapasitesinin ve 0,4 işgücü saatinin kullanımını gerektirmektedir. Yani, 10 feet karelik deri için 20 galon-saat ve 4 işgücü saati, 100 feet karelik deri için ise 200 galon-saat ve 40 işgücü saati gerekmektedir. Diğer bir deyişle 1. süreçte işlenen deri miktarı ne olursa olsun 1 birim işgücü saatine karşılık  $2/0,4 = 5$  birimlik tank saate gereksinim vardır. Gerçekte bu sabit girdi oranı üretim sürecinin tanımlanmasında yardımcı bir özelliktir. Yani A ve B gibi iki üretim süreci ele alındığında, eğer A süreci 1 birimlik işgücü saatine karşılık 6 boya tankı saati, B süreci ise 1 birim işgücü saatine karşılık 4 birim tank-saati kullanıyorsa, A ve B'nin iki ayrı süreç olduğu ortadadır.

Şimdi, bu tanım yardımıyla şekil üzerinde bir süreci tanımlayabiliriz. Şekli-  
miz yalnız girdileri gösterdiği için, üretim sürecinin de yalnızca girdi gereksinimine dayanarak tanımlanması gerekir. Daha önce de belirttiğimiz gibi, herhangi bir üretim sürecinde girdiler arasındaki oran sabit olmalıdır. Bu sabit girdi oranlarını içeren tüm noktaların oluşturduğu yer merkezden geçen bir doğrudur. Şekil 2'deki  $OP_1$  doğrusu 1 no.lu süreci gösterir. Bu doğru üzerindeki D noktası 400 işgücü saati



Şekil : 2

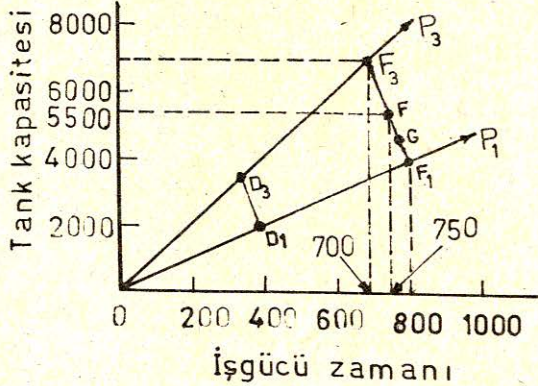
ve 2000 tank-galon saatin kullanımını temsil eder. Yani, 1. süreçte girdi oranı uygulanmıştır: 0,4 işgücü-saatine karşılık 2 saatlik boya tankı kapasitesi, bu nokta için olduğu gibi,  $OP_1$  hattı üzerindeki diğer bütün noktalar için de geçerlidir. Ayrıca D noktası haftada 1000 feet-karelik deri üretimine karşı gelir (1 no.lu süreç, 1 foot-karelik üretim için 0,4 işgücü saati ve 2 tank-saati gerektirdiğinden). Benzer şekilde D' noktası 2000 feet-karelik deri üretimini gösterir. Böylece, üzerindeki bütün noktalar her işgücü saatine karşılık boya tankında 5 birimlik galon-saatini kullanımını gösterdiğinden, 1. süreçte mümkün olan tüm çıktılar  $OP_1$  doğrusu üzerindeki bir noktayla belirlenir. Diğer bir deyişle, eğer yeterli kaynak varsa,  $OP_1$  üzerindeki her nokta 1. süreçte üretilebilecek bir çıktıyı temsil eder.

OP<sub>1</sub> doğrusunda olduğu gibi, aynı yolla OP<sub>2</sub> doğrusunun da 2. süreci temsil ettiğini görüyoruz. Bu, OP<sub>2</sub> doğrusunun üzerindeki herhangi bir noktanın 2. süreç için doğru olan girdi oranlarını içerdiğini gözleyerek kontrol edilebilir: Örneğin; OP<sub>2</sub> üzerindeki E noktası 3000 tank-saat ve 900 işgücü saatin kullanımını temsil eder ve böylece 2. sürecin 1,5 tank-saat ve 0,45 işgücü-saati gereksinimine uygun düşer.

Böyle süreçleri gösteren doğruların toplamının koni biçimindeki P<sub>2</sub>OP<sub>3</sub> (taranmış bölge) şekli oluşturduğunu söyleyerek bu bölüme son verelim. Bundan sonraki bölümde görüleceği gibi, koni içindeki noktalar bu süreçlerin birkaçının bir arada, birbirine yardımcı olarak kullanımını gösterir. Diğer bir deyişle bu koni 1, 2 ve 3 no.lu süreçleri içeren, mümkün olan tüm üretim şekillerinin bir saatini oluşturur.

### Eşürün Eğrilerinin Elde Edilmesi

Klâsik üretim teorisinin diyagramlarına bir adım daha yaklaşarak, şimdi doğrusal program modelimizin eşürün eğrilerini oluşturabiliriz. Bir sonraki bölümde de, kâr maksimizasyon amaçlı bir firmada karar verme için gerekli olan kâr kayıtsızlık eğrilerini (İso-profit curves) oluşturmakta bu eşürün eğrilerini kullanacağız. Bir an için dikkatimizi 1 ve 3 no.lu süreçler üzerinde toplayalım. Şekil 3'te D<sub>1</sub> noktası 1. süreçte 1000 birimlik çıktıyı, D<sub>3</sub> noktası ise 3. süreçte aynı miktarda çıktıyı temsil eder. Bu nedenle 1000 feet-karelik deri üretimini içeren eşürün eğrisi bu iki noktadan da geçmelidir. Benzer şekilde F<sub>1</sub> ve F<sub>3</sub> noktaları 2000 feet-karelik üretimi gösteren eşürün eğrisi üzerinde bulunmalıdır. Ancak 2000 birimlik üretimi temsil eden eşürün eğrisinin F<sub>1</sub> ve F<sub>3</sub>'ü birleştiren bir doğru parçası olmalıdır.



Sekil: 3

Cümlelerin anlaşılması ilk bakışta görüldüğü kadar kolay değildir. Biliyoruz ki F<sub>1</sub> noktası 1. süreçteki çalışmanın bir düzeyini, F<sub>3</sub> noktası da aynı şekilde 3. süreçteki çalışmanın bir düzeyini temsil ediyor. Fakat F<sub>1</sub>F<sub>3</sub> doğrusunun F orta noktası gibi, herhangi bir ara noktayı nasıl tanımlayabiliriz? F noktasından geçen herhangi bir üretim doğrusu yoktur, bu nedenle de herhangi bir süreçteki faaliyet düzeyini açıkladığımız gibi bunu açıklayamayız.

Gerçekte, F ve G gibi 2 ara noktayı 1 ve 3 no.lu süreçlerin her ikisinin de birlikte, birbirini izleyen kullanımlarını temsil etmek için almalıyız. Bir kısmı 1. süreçte, bir kısmı da 3. süreçte olmak üzere 2000 feet-karelik deri üretimini temsil eder.

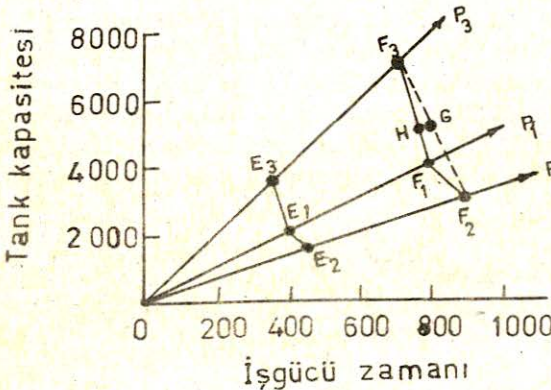
Daha belirgin şekilde,  $F_1F_3$  doğrusunun orta noktası F, yarısı bir süreçte, 2. yarısı da diğer süreçte üretilen 2000 birimi temsil eder. Benzer şekilde,  $F_1$  noktasına uzaklığı,  $F_1F_3$ 'ün  $1/4$ 'ü olan G noktası  $3/4$ 'ü 1. süreçte,  $1/4$ 'ü de 3. süreçte üretilen çıktıyı gösterir, yani 1500 feet-kare 1. süreçte, 500 feet-kare de 3. süreçte üretilmiştir. Okuyucu bu yorumu  $F_1F_3$  üzerindeki bütün noktalar için yapabilir. Ancak akıldan çıkarılmaması gereken şudur; nokta üretim süreci doğrularından birine ne kadar yakın olursa bu sürecin üretimdeki payı o kadar çoktur.

Bu yorumun doğrulanması gerekmektedir. F noktasına yakından bakalım. 750 işgücü saatine ve 5500 galon-saate gereksinim olduğu görülebilir. F noktasının, 1. süreçte 1000 birimlik bir çıktıyı ( $D_1$  noktası) ve ek olarak da 3. süreçte aynı çıktının girdi gereksinimlerini kontrol edelim. Şekilden okunabilecek veya sınırlayıcılardan hesaplanabilecek olan sayılar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Kullanılan girdiler	İşgücü	Tank Kapasitesi
$D_1$ noktası	400	2000
$D_3$ noktası	350	3500
<b>Toplam</b>	<b>750</b>	<b>5500</b>

$D_1$  ve  $D_3$ 'ün girdi gereksinimlerinin toplamı F noktasının koordinatlarına eşittir. Yani F noktası 1000 feet-karelik ürün düzeyinde, her iki sürecin de beraberce çalışmaları için gerekli olan toplam girdi gereksinimini temsil eder. Ve aynı şekilde, G noktasının da, 1. süreçte 1500 birimlik ve 3. süreçte 500 birimlik çıktıların üretim için gerekli olan girdileri temsil ettiği görülebilir.  $F_1F_3$  doğru parçası üzerindeki her nokta için aynı oran kanıtlanabileceğinden,  $F_1F_3$  hakkındaki yorumumuz doğrulanır ve özellikle de  $F_1F_3$ 'ün eşürün eğrimizin bir parçası olduğu görülür.

$F_1F_3$ 'ün eşürün eğrimizin bir parçası olduğu belirlendikten sonra, şimdi hiçbir güçlük karşılansadan örneğimizdeki eşürün eğrimizin kalan kısmını ve diğer eşürün eğrilerini de kurabiliriz. Şekil 4'te 1, 2 ve 3 no.lu süreçleri gösteren doğruları ele aldık.  $OP_2$  üzerindeki  $F_2$  noktası 2. süreçte üretilen 2000 feet-karelik ürünü gösterir. Bu nedenle  $F_1F_2$ 'de 2000 birimlik eşürün eğrisinin parçasıdır. Aynı şekilde  $E_2E_1E_3$ 'ün de 1000 feet-karelik ürünü gösteren eşürün eğrisinin bir parçası olduğu görülebilir. Şekilde diğer eşürün eğrilerini benzer biçimde kurmak mümkündür.



Şekil: 4

### Eşürin Eğrilerinin Bazı Özellikleri

2 ve 3 no.lu evrelerdeki 2000 birimlik çıktı kombinasyonlarını temsil eden  $F_2F_3$  kırık çizgisinin doğru olarak çizilmemesinin ve bu doğru üzerindeki noktaların eşürin eğrisine (veya bölgesine) ait olduğunun düşünülmemesinin nedeni sorulabilir. Cevabımız şudur:  $F_2F_3$  üzerindeki herhangi bir nokta savurgan bir kombinasyondur ve optimal bir çözüm olamaz.  $F_2F_3$  üzerinden herhangi bir G noktası alalım.  $F_2F_1F_3$  üzerinde, böyle bir G noktasına tekabül eden H gibi noktalar bulunur. Bu noktalar G noktasının altında ve solundadır. Yani, H noktasında kullanılan her iki girdi miktarı, G noktasındakinden daha azdır. Fakat H ve G noktaları aynı miktarda ürün verirler. Bundan dolayı, açıktır ki G, kaynakların verimsiz kullanımını temsil eder, optimal bir çözüm için uygun değildir. Bu yüzden 2000 birimi temsil eden eşürin eğrisi  $F_2F_1F_3$ 'ün yanında  $F_2F_3$  doğrusuna önem verilmeyebilir.

Şimdi, doğrusal programlamada eşürin eğrisinin karakteristik şeklini gözlemleyebiliriz. Eşürin eğrileri bükülmüş doğru parçalarından oluşur. Eğimleri daima negatiftir (en azından pozitif değildir). Bu eğrinin ilgili bölümleri merkeze doğru konvektir, yani azalan (veya en azından artmayan) marjinal ikame oranını gerekli kılarlar.

Böylece, doğrusal programlamada eşürin eğrileri, neoklasik üretim teorisinde bu eğrilere karşılık düşen eğrilerle aynı temel şekle sahiptir. Ancak bir fark vardır; neoklasik üretim teorisindeki eğriler düzgün ve pürüzsüzdür, yani kırık olmayan, köşesiz bir eğri olarak kabul edilirler. Bu önerme, diferansiyel hesaba daha kolay uygulamak için neoklasik teoride genellikle kullanılır. Ki, diferansiyel hesap, şekil 4'te  $F_1$  gibi bir noktada eğrinin eğimi tanımlanamayacağı için böyle bir köşe noktasında işlemez hale gelir.

Sonra, doğrusal programlama, iki girdi arasında azalan marjinal ikame oranı biçiminde beliren azalan verimler olgusuna da uygundur. Eğer işgücü, boya tankı zamanından kazanmak için kullanılabilirse (örneğin, boya tankında boşuna yer kaplayacak olan kusurlu deri parçalarının seçilip ayrılmasıyla), bu amaçla artan işgücü kullanımı (output miktarının değişmeden kalmasıyla) azalan oranda verim getirebilir, yani bu tankın çalışma zamanında azalan oranda marjinal bir tasarruf sağlar.

Şimdi, azalan verimler "kanunu" nun doğrusal program içinde geçerli olduğunu göreceğiz; yani diğer girdiler sabit kalmak şartıyla, artan miktarda kullanılan bir girdinin verimi azalabilir. Bununla birlikte doğrusallık, ölçüğe göre azalan verimi (getiriye) geçersiz kılar. Yani, daha önce belirtildiği gibi üretim fonksiyonu doğrusal ve homojendir. Bunu görmek için böyle bir üretim fonksiyonunun, orijinden gelen herhangi bir doğru çizgi boyunca aynı eğime sahip, birbirine paralel tarafsızlık eğrileriyle karakterize olduğunu unutmayalım. Örneğimizde olan tamamen budur. Şekil 4'te de  $F_1F_3$  ve  $E_1E_3$ 'ün eğimlerinin birbirine eşit olduğu kolayca doğrulanıyor :

$$F_1F_3 \text{ 'ün eğimi} = \frac{7000 - 4000}{700 - 800} = -30 \text{ ve}$$

$$E_1E_3 \text{ 'ün eğimi} = \frac{3500 - 2000}{350 - 400} = -30$$

$F_2F_1$  ve  $E_2E_1$  de aynı eğime sahiptirler. Bu da eşürün eğrilerinin, doğrusal homojen üretim fonksiyonuyla paralel bir özelliğe sahip olduğunu gösterir: Okuyucu şunu gözlemeli ki, bu özellik, doğrusal programlamadaki eşürün eğrilerinin hiçbir zaman çakışmadığını garanti eder.

### Kâr Kayıtsızlık Eğrileri

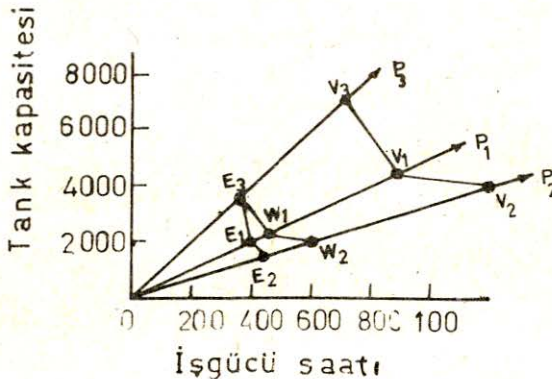
Şekil 4'teki eşürün eğrileri kolaylıkla kâr kayıtsızlık eğrilerine dönüştürülebilir. Dört sürecin eşit ölçüde kârlı olmadıkları hatırlanmalı.  $Kâr = 0,9 Q_1 + 0,75 Q_2 + 1,0 Q_3 + 1,1 Q_4$  biçimindeki amaç fonksiyonundan 1, 2, 3 ve 4. çıktıların kârlarının sırasıyla 90 cent, 75 cent, 1 dolar ve 1,10 dolar olduğunu söyleriz.

Şekil 4'teki  $E_2E_1E_3$  eşürün eğrisini şekil 5'te tekrar gösterelim.  $E_1$ ,  $E_2$  ve  $E_3$  noktalarının herbiri 1000 feet-karelik deri üretimini gösterir. Şimdi 1000 dolarlık kâr getiren çıktıyı hangi noktanın temsil ettiğini görelim.

3. süreç her foot-karelik ürün için 1 dolarlık kâr sağladığından,  $E_3$  noktası hem 1000 birimlik ürünü, hem de 1000 birimlik kârı gösterir, yani bu noktada 1000 dolarlık kâr kayıtsızlık eğrisi ve 1000 birimlik eşürün eğrisi çakışır.

Fakat  $E_1$  noktası 1000 dolardan önemli ölçüde az bir kâra karşılık gelir. Açıkça söylenirse, 1. süreçteki ürünün birim maliyeti 90 cent olduğundan,  $E_1$  noktası sadece 900 dolarlık bir kârı gösterir. Böylece 1. süreçte 1000 dolar kazanmak için %11,1 oranında daha fazla üretilmelidir, açıkcası  $1,111 \times 90 = 1000$  (yaklaşık olarak) olduğundan 1,111 birim üretilmeli. Bu nedenle de 1000 dolarlık kâr kayıtsızlık eğrisi ve  $OP_1$  üzerindeki  $W_1$  noktası,  $E_1$ 'e göre orijinden  $1/9$  oranında daha uzaktır. Sonucu olarak  $OP_2$  ile bu kâr kayıtsızlık eğrisinin kesiştikleri noktayı bulalım. İkinci süreçte üretilen her birim 75 cent kazandırdığından, bu süreçte 1000 dolarlık kâr için  $1.333,331/3$  birim üretilmelidir. Bu  $W_2$  noktası tarafından temsil edilir.  $OW_2$  ise  $OE_2$  den  $1,331/3$  kere daha uzundur. Bunun nedeni programımızın doğrusal oluşudur. 2. süreçte  $1.333,331/3$  birim üretmek için gerekli olan girdiler (600 işgücü saati ve 2000 galon), yine bu süreçte 1000 birim üretmek için gerekli olan girdilerden (450 işgücü saati ve 1500 galon — sınırlayıcılardaki  $Q_2$ 'nin katsayılarına bakınız)  $1/3$  oranında daha fazladır.

Eşürün eğrilerinde açıkladığımız gerekçelerle  $W_2W_1W_3$  noktalarını doğru parçalarıyla birleştirebiliriz ve ortaya çıkan grafik 1000 dolarlık kâr kayıtsızlık eğrisinin ilgili bölümünü oluşturur. Diğer kâr kayıtsızlık eğrileri de aynı şekilde oluşturulabilir.



Şekil: 5

Eşürin eğrilerinde olduğu gibi, kâr kayıtsızlık eğrileri de doğrusal, homojen üretim fonksiyonuyla paralel özelliklere sahiptir. Doğrusal programda kâr oranı sabittir, örneğin; firmanın çalışmalarını üç katına çıkarmak, kârı da üç katına çıkarır. Diğer bir deyişle, şekil 5'te, parçalarının eğimi,  $W_3 W_1 E_3$  kayıtsızlık eğrisinin teka-bül eden parçalarının eğimine eşit olan  $V_2 V_1 V_3$  gibi herhangi bir "eğri" çizerek ek bir kâr kayıtsızlık eğrisi elde edebiliriz.

En son olarak şuna dikkat edelim: Bir sürecin sağladığı kâr daha az ise verilen bir eşürün eğrisini kâr kayıtsızlık eğrisine transfer etmek için, bu üretim doğrusu üzerindeki bir noktayı daha uzağa kaydırmamız gerekir. Böylece şekil 5'te  $E_2$ 'den  $W_2$ 'ye olan kayma,  $E_1$ 'den  $W_1$ 'e olan kaymaya göre daha çoktur. Çünkü 1. süreç bir birim için 90 cent'lik kâr sağlarken 2. süreçte 1 birimin sağladığı kâr 75 cent'tir. Bir an için 1. sürenin çok kârsız olduğunu farzedelim. O zaman  $W_2 W_1 E_3$  eğrisi merkeze doğru konkav olabilirdi. Bununla anlama 1. sürecin kâr açısından verimsiz olduğudur. Bu nedenle 1. süreci daha az girdi kullanımıyla aynı kârı getiren 2. ve 3. süreçlerin bir kombinasyonu ile karşılaştırmaya gerek yoktur. Aynı şekilde, bir kâr kayıtsızlık eğrisi pozitif eğimli bir parçaya sahip olabilir (Şekil 7 b'de  $WW'$  veya  $SS'$  doğrularına bakınız). Bu parça dikkate alınmayabilir, çünkü parçanın üst ucunda (7 b'de P süreci) süreç nisbeten kârsız olmalıdır. Bu süreçte, P' sürecinin sağladığı kârı elde etmek için her iki girdiden de daha fazla kullanılır.

#### Programlama Probleminin Grafikle Çözümü :

Şimdi elimizde hem kâr olanaklarının şekilsel açıklaması (şekil 5), hem de iş gücü ve boya tankı olanaklarıyla belirlenen verimli bölge (şekil 1) bulunmaktadır. Bu durumda her iki şekli üstüste koyarak birleştirmek ve programlama problemine optimal bir çözüm bulmak basit bir sorundur. İki şekil, şekil 6'da görüldüğü gibi birleştirilir.

Hatırlayacağımız gibi, sadece taranmış bölge firmanın olanakları içindeki girdi miktarlarını kapsar. Hesaplamalarımızın amacı eldeki kaynaklarla en büyük kârın nasıl elde edileceğini belirtmektir. Bu nedenle, verimli bölgeyle herhangi bir ortak noktası olan en yüksek kâr kayıtsızlık eğrisini elde etmek isteriz.

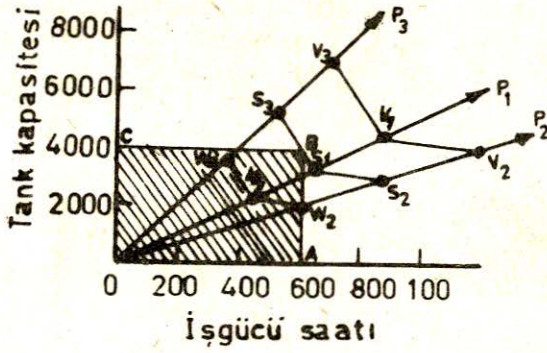
Herhangi iki üretim süreci doğrusu (OP'ler) arasında, kayıtsızlık eğrilerinin parçaları aynı eğime sahip olduğundan, bu eğrilerden biri verildiğinde, istediğimiz kadar başka kayıtsızlık eğrileri oluşturabiliriz. Özellikle, verimli bölgenin sağ üst köşesi B'den geçen  $S_2 S_1 S_3$  eğrisini çizebiliriz. Bu, klasik üretim teorisindeki optimal teğet noktasının, doğrusal programlamadaki benzeridir. O zaman, B noktası optimal çözümümüzü oluşturur.

B noktasını inceliyerek şu sonuçlara varabiliriz :

1. B,  $S_1 S_3$  doğru parçası üzerinde bulunduğu için, 1 ve 3. süreçlerin bir kombinasyonunun kullanımını gösterir. Bu da, doğrusal programlamanın ana teoremini açıklar —yani, çözüm genellikle problemdeki sınırlayıcılar kadar sıfır olmayan unsur içerir. Bizim doğrusal programımızda olduğu gibi iki sınırlayıcının bulunduğu yerde optimal bir uygulama için genellikle ikiden çok üretim süreci bulunmaz.

2. Optimal çıktımız tam olarak 600 işgücü saatini ve 4000 tank-galon saatinin kullanımını içerir, yani bu durumda firmanın her iki sınırlı kaynağı da tam olarak kullanılıyor demektir.





Sekil : 6

3.  $S_2S_1S_3$  eğrisi  $W_2W_1W_3$ 'e (1000 dolarlık eğri),  $V_2V_1V_3$ 'e (2000 dolarlık eğri) olduğundan daha yakındır. Bu nedenle  $S_2S_1S_3$  eğrisi 1500 dolar'dan daha az bir kârı gösterir. Daha açık söylersek  $S_2S_1S_3$  üzerindeki  $S_1$  noktası 1. sürecin hesapsız kullanımını içerir ve tank zamanında yaklaşık olarak 3200 birimini (ve yaklaşık olarak 640 işgücü saatini) kullanır. Aşağı yukarı 1600 feet-karelik deri üretmesi gerekir (1. süreç her foot-karelik deri için 2 birimlik tank kapasitesi kullandığından, 3200 tank-galon 1600 feet-kare üretmek için yeterli gelecektir). Bu, her foot-karelik ürün için 90 cent'ten yaklaşık olarak 1440 dolarlık kâr anlamına gelir. Gerçekte, problemimizin optimal çözümünün standart simplex çözümü de, toplam kârın 1471,43 dolar olduğunu gösterecektir.

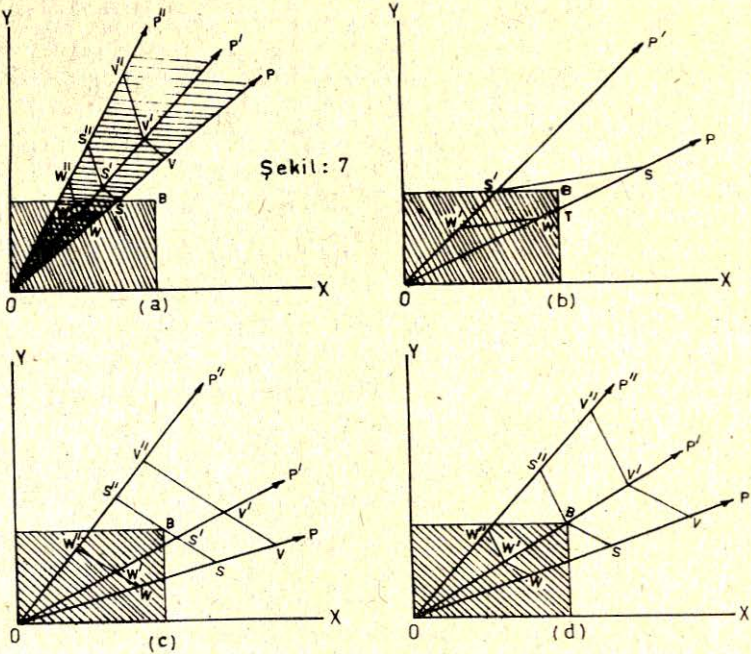
4. B ile  $S_1$  arasındaki uzaklık  $S_1S_3$ 'ün  $2/5$ 'i olduğundan, optimal çözüm 1. süreçteki üretimden yaklaşık olarak  $3/5 \times 1140$  dolar = 864 dolarlık kâr ve 3. süreçte de  $2/5 \times 1440$  dolar = 576 dolarlık kâr ortaya koyar. Simplex çözümde elde edilen kesin kârlar ise, 1. süreçteki üretimde 900 dolar, 2. süreçteki üretimde ise 571,43 dolardır.

#### Alternatif Çözümler

Doğrusal programlamada bazen görülen farklı çözüm şekilleri 7 no.lu şekilde görülmektedir.

Şekil 7 a daha yaygın görülen bir durumdur. Burada, verimli bölgenin sağ üst köşesi B, koyu taranmış üretim olanaklarının (POP'') dışına düşer. Bu durumda optimal nokta B değil S dir. O zaman firmanın elindeki kaynaklar tamamen kullanılmayacaktır. Özellikle, büyüklüğü SB tarafından belirlenen X kadar kullanılmamış bir miktar kalacaktır. Dahası, bu durumda sadece bir süreç, yani P, hesapsız olarak kullanılmış olacaktır. Böylece bir süreç değişkeni, Q, ve bir aylık değişken (kullanılmamış X) sifıra eşit olmayacaktır ve gene, doğrusal programlama teoreminin gerektirdiği gibi bize bu iki sınırlayıcı olan durumda, iki adet sıfır olmayan değişken verecektir.

Bir dereceye kadar benzer bir durum şekil 7 b'de görülmektedir. Burada B noktası üretim olanaklarının sınırları içine düşmüşse de  $SS'$  ve  $WW'$  kâr kayıtsızlık eğrilerinin pozitif olan eğimlerinden anlaşılacağı üzere P üretim süreci oldukça kârsızdır. Yani S noktası S' noktasıyla aynı kârı getirir, fakat S, S' nün üstünde ve



Şekil : 7

sağında bulunduğundan, aynı kârı elde etmek için  $S'$  ye göre, her iki girdiden de daha çok miktar gereklidir. Bu nedenle daha kârlı olan  $P'$  üretim süreci, firmanın kaynakları elverdiği ölçüde tam kapasiteyle uygulanır. Optimal nokta da, taranmış verimli alandaki en yüksek kayıtsızlık eğrisi üzerindeki  $S'$  noktasıdır. Şekil 7 a'daki  $S$  noktası gibi, optimal noktamız  $S'$  de, üretim sürecinin sıfır olmayan bir çalışma düzeyini ve yine sıfır olmayan bir aylak değişken (kullanılmamış  $X$ ) içeren bir çözümdür.

Oldukça değişik iki durum 7 c ve 7 d'de görülmektedir. 7 c'de kayıtsızlık eğrisinin  $VV'$  ve  $V'V''$  parçaları doğru bir çizgi parçası oluştururlar.  $SS'$  ve  $S'S''$  beraberce  $SS''$  ile çakıştığından, üç sürecin tümünün bir kombinasyonunu kullanmanın hiçbir sakıncası yoktur, yani  $Q > 0$ ,  $Q' > 0$  ve  $Q'' > 0$  şartlarını birlikte sağlayan optimal bir çözüm bulunabilir. Bununla birlikte üç süreçli herhangi bir çözüm, iki süreçli çözümle aynı olduğundan, üç sürecin birlikte, birbirine yardımcı olarak kullanımının sağlayacağı hiçbir şey yoktur. Örneğin,  $B$  noktası hem  $SS''$  hem de  $S'S''$  üzerindedir; bu nedenle de üç metodu kullanarak yapabileceğimizi, sadece  $P'$  ve  $P''$  nü kullanarak da yapabiliriz.

Değişik bir durum olan 7 d'de ise, süreç doğrularından biri olan  $OP'$  verimli alanın sağ üst köşesi  $B$ 'den geçer. Burada sadece  $P'$  sürecinin kullanılmasının gerekliliği gözükmektedir.  $Q = 0$ ,  $Q' > 0$ ,  $Q'' = 0$  olduğundan ve  $X$ ,  $Y$  kapasiteleri tam olarak kullanıldığından, yani her iki aylak değişken de sıfır değerini aldığından, 7 d'deki durumda doğrusal programlamanın ana teoremi ihlâl edilmektedir. Böylece, problemimizde iki sınırlayıcı olmakla birlikte, çözüm sadece bir tek sıfır olmayan değişken içermektedir.

Şekil 7 d "bozulma hali" diye adlandırılan durumu gösterir. Bu, bir süreç tesadüfen, eldeki kaynakları tam olarak ve doğru oranda kullanıyor demektir (veya genelde, girdi sayısından daha küçük sayıda süreçlerce üretim yapıyor). Uygulamalarda bu durumla umulandan daha sık karşılaşıldığı görülmektedir. Bozulma hali, hesaplamalarda bazı güçlükler yaratır, fakat bunlar genellikle ciddi sorunlar değildir.

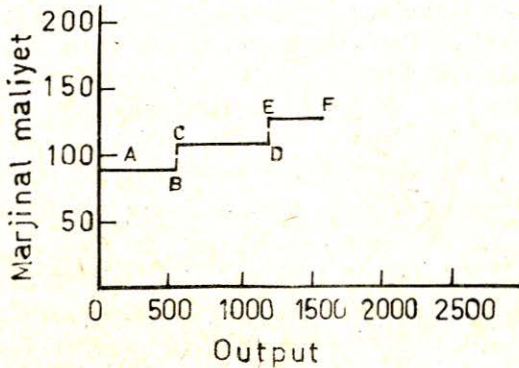
### Doğrusal Programlama Maliyet Eğrileri

Doğrusal programlamanın neoklasik şematik yorumunu bir dereceye kadar genişletmek mümkün. Örneğimizdeki firma için marjinal maliyet eğrisinin nasıl kurulabileceğini şimdi göreceğiz. Bu eğrinin kuruluşu, doğrusal programlama probleminin çözümünün yapısı hakkında aydınlatıcı olacaktır.

Amaç fonksiyonumuzun  $0,9 Q_1 + 0,75 Q_2 + Q_3 + 1,1 Q_4$  dört sürecin kârlarının da 90 cent, 75 cent, 1 dolar ve 1,10 dolar olduğunu hatırlayalım. Dört süreç de aynı ürünü (beyaz süet deri) ürettiğinden, kullanılan sürecin hangisi olduğuna bakılmaksızın, aynı fiyata, yani 1 foot-kareyi 2 dolara satmaları gerekir. Bu durumda satış fiyatından kârı çıkararak, 1. sürecin birim maliyetinin 2 dolar— $0,90 = 1,10$  dolar olduğunu görürüz. Benzer şekilde 2., 3., ve 4. süreçlerin ortalama maliyetleri de sırasıyla 1,25 dolar, 1 dolar ve 90 cent'tir.

Eğer firma, çok küçük ölçüde üretim yapacak olsaydı, elindeki kaynakların sınırları içinde, ortalama ve marjinal maliyetleri 90 cent olan en düşük maliyetli süreci, yani 4. süreci kullanırdı (Şekil 8'de AB doğrusu). Fakat yaklaşık olarak 571 birim üretilince, firmanın elinde olan tank kapasitesinin tümü, yani 4000 galon-saat kullanılmış olacaktır. Çünkü 4. süreçte 1 foot-karelik üretim için 7 galon (1. sınırlayıcıdaki  $Q_4$ 'ün katsayısı) gereklidir ve  $5713/7$  feet-karelik üretim, eldeki 4000 birimlik tank kapasitesinin tümünün kullanımını gerektirir. Bu noktanın ötesinde üretim ise, diğer süreçlerin, belki de 4. süreçle birlikte, kullanımını gerektirecektir.

En az masraflı ikinci süreç olan süreç 3'ün birim üretim maliyeti daha önce de belirtildiği gibi 1 dolardır. 4000 birimlik tank kapasitesi nedeniyle de, 3. süreç 1143 birimden fazla üretemez. Çünkü bu süreçte 1 birimlik ürün için 3,5 birim tank kapasitesi gereklidir, bu nedenle 1143 feet-karelik deri üretimi yaklaşık olarak  $3,5 \times 1143 = 4000$  galon-saati gerekli kılar.



Sekil : 8

Fakat, 3. süreçte üretilen ilave her birim için, 4. süreçte kullanılan tank kapasitesinden bir miktar kısıtlama gerekir. 3. süreç için de boya tankı kapasitesine gereksinim olduğundan, 4000 birimlik tank kapasitesi sadece 4. süreçte tüketilemez. Üründe 1 birimlik net artış sağlamak için, 3. süreç çalışma düzeyini, 4. sürecin çalışma düzeyindeki azalmanın etkisini giderecek şekilde arttırmalıdır. 4. süreçteki bir birimlik azalma, 7 galonluk tank kapasitesinin 3. süreçte kullanımını sağlayacağından, 3. süreçteki üretime 2 birimlik ilave sağlar (çünkü 3. süreçte her birim 3,5 galonu gerektirir). Böylece bu değişiklikle (4. süreçteki üretimde bir birimlik azalma ve 3. süreçte 2 birimlik artış) toplam üretimde 1 birimlik artış sağlanır.

Bu 1 birimlik artışın bize maliyeti nedir? Yani bu üretim düzeyinde firmamızın çalışmalarının marjinal maliyeti nedir? 3. süreçte, herbiri 1 dolara malolan 2 birim elde ettik, fakat 4. süreçte de maliyeti 90 cent olan 1 birim azalttık, ki bu da 2 dolar - 90 cent = 1,10 dolarlık bir maliyet artışına yol açar. 1,10 dolar, 571 birimin üzerindeki üretimin marjinal maliyetidir. Firma üçüncü süreçte mümkün olan maximum üretim seviyesi 11436/7 birime kadar 1,10 dolarlık marjinal maliyetle çalışır (Şekil 8'deki CD doğru parçası).

Daha fazla üretim yapılabilir. Fakat bu, tank kapasitesinin kullanımı bakımından, 3. süreçten daha ekonomik olan bir diğer sürecin kullanımını gerektirir. Burada birim maliyeti 1,10 dolar olan üçüncü en az masraflı süreci getiririz. Bir öncekine benzer şekilde hesaplamayla marjinal maliyet yaklaşık olarak 1,23 dolara yükselir (Şekil 8'de EF). Bu marjinal maliyet maximum ürün olan 1571,43 feet-kareye kadar devam eder. Bu düzeyde üretim 1 ve 3. süreçlerin bir kombinasyonunu içerir ve firmanın her iki girdisini de tam olarak kullanır. 2. sürecin dahil edilmesiyle, artık herhangi birşey kazanılamaz, çünkü firma şimdi maximum üretim düzeyine ulaşmıştır.

Bütün bunlardan sonra belirtilmesi gereken ana nokta, doğrusal programlamalı bir üretim problemindeki marjinal maliyet eğrisinin karakteristik şeklidir. Bu şekil, yükselen marjinal maliyetleri ve üretim miktarının artmasıyla yükselebilecek maliyetleri kapsamaktadır (DE, BC'yi geçebilir). Ancak bu maliyetler, şekil 8'de görüldüğü gibi sürekli olmayan sıçrayışlarla artar. Bu nedenle, ölçüğe göre sabit getiri, marjinal maliyetlerin de sabit olacağını garanti etmez.

Analizimiz, aynı zamanda, 4. süreç en yüksek birim kârını sağladığı halde, niçin 1. ve 3. süreçlerin programlama problemimize bir çözüm olarak seçildiği noktasında bir görüş vermelidir. Temel nokta şudur: 4. süreç kaynakları çok verimsiz, etkisiz kullanır. Öyle ki, bu sürecin sağladığı birim kârı büyük olmakla birlikte üretim düzeyi yüksek değildir. Firmanın kârlarını daha verimli kullanan daha düşük birim kârlı süreçlerle, daha çok üretebilir ve kazanabiliriz.