MARKOV ZİNCİRLERİ

Ass. *İsmail İLHAN*

Bağımlı olasılık problemlerinin büyük bir bölümünün çözümü ve aydınlatılmasında başarı ile uygulanan «Markov zincirleri teorisi» matematik temellere dayanan bir teoridir. Bu teoriden yararlanılarak geliştirilmiş olan «Markov zincirleri metodu» Biyoloji, Tıb, İktisat ve İşletme gibi bir çok bilim dalında geniş uygulama alanları elde etmiştir.

Geçmiş zamanlarda ve şimdiki zamanda gerçekleşmiş olasılıklardan yararlanarak aynı olay veya olayların gelecekteki olasılıklarını bulmak Markov zincirleri metodunun esasını oluşturmaktadır. Markov zincirleri teorisinde bir deneyimin sonucunun olasılığı ondan önceki deneyim'in sonucuna bağlı olduğu kabul edilir.

Markov Zincirleri Teorisi

I — *Tanım*

(n) durumlu bir olayın çeşitli durumlar içindeki olasılıkları bir (P) matrisi ile belirlenebilirse, özellikleri aşağıda belirtilecek olan böyle bir matrise Markov zincirlerinin «Başlangıç Olasılıkları Matrisi» ya da «Bağlama Matrisi» adı verilir.

$$
P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \\ \\ \\ a_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & a_n \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots\cdots & p_{1n} \\
p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots\cdots & p_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots\cdots & p_{nn}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

(P) matrisinde (a_i) ler çeşitli durumları tanımlamaktadır.

Matrisin herbir elemanı (p_{ij}) bulunulan durum içinde olayın o andaki gerçekleşme olasılığını vermektedir. Örneğin (p_{34}) elemanı (a_3) durumu ile başlayan bir olayın (a_4) durumunda bulunma olasılığını tanımlamaktadır. P matrisinin bütün p_{ij} elemanları sıfır ya da pozitif sayılar olmak durumundadır. Bunun nedeni, 'bir olayın gerçekleşme ya da gerçekleşmeme olasılıklarının negatif olmasının sözkonusu olamıyacağı' dır.

(p_{ij}) ≥ 0 ve (p_{ij}) ≤ 1 (i, j = 1, 2, 3, ..., n). Ayrıca bir olayın gerçekleşme ve gerçekleşmeme olasılıkları toplamı (1) olduğundan (P) matrisinde her satırın toplamı (1) e eşittir.

$$p_{11} + p_{12} + p_{13} + \ldots + p_{1n} = 1$$

$$p_{21} + p_{22} + p_{23} + \ldots + p_{2n} = 1$$

$$p_{n1} + p_{n2} + p_{n3} + \ldots + p_{nn} = 1 \qquad (2)$$

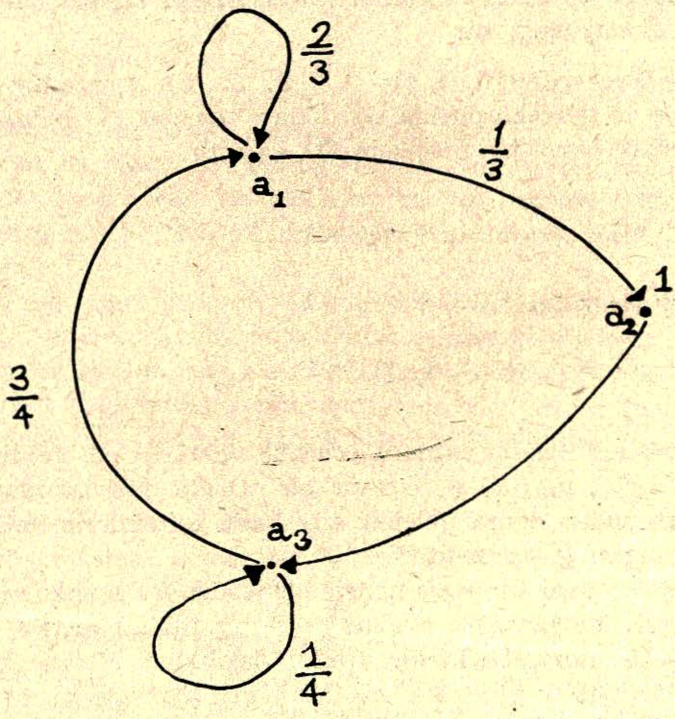
P matrisinin her bir satırına «olasılık vektörü» adı verilir. Örneğin, (p_{11}, p_{12}, p_{13}, ... p_{1n}) satırı bir olasılık vektörü olup başlangıç durumundan sonra gelecek adımlarda durumların herbirine erişme olasılığını göstermektedir. P matrisinin son bir özelliği (n$\times$n) boyutlu, yani bir kare matris olmasıdır. Bu özellikleri taşıyan bir matris Markov zincirlerinin geçiş olasılıkları matrisi (Ara Matris) olarak alınabilmektedir. Geçiş Olasılıkları Matrisi kavramına daha bir açıklık getirmek için bir örnek üzerinde bu matrisin teşkili aşağıda gösterilmiştir.

I.1 *Örnek.*

Üç durumlu bir Markov Zincirinin durumları a_1, a_2, a_3 olsun.

a_1 den a_2 ye geçiş olasılığı $\frac{1}{3}$ ve yeniden a_1 e dönüş olasılığı $\frac{2}{3}$, a_2

den a_3 e geçiş olasılığı 1 ve a_3 ten a_1 e geçiş olasılığı $\frac{3}{4}$, yine a_3 e dönüş olasılığı $\frac{1}{4}$ olsun. Geçişme durumları aşağıdaki diyağram üzerinde de gösterilmeğe çalışılmıştır (1).



Böyle bir olayda geçiş olasılıkları matrisinin elemanları şöyle olacaktır:

$$p_{11} = \frac{2}{3} \qquad p_{12} = \frac{1}{3} \qquad p_{13} = 0$$

$$p_{21} = 0 \qquad p_{22} = 0 \qquad p_{23} = 1$$

(1) BRUNEL, D. Les Mathématiques Modernes, Technique de Décision, Dunod, 1969, Paris. s. 94

$$p_{31} = \frac{3}{4} \qquad p_{32} = 0 \qquad p_{33} = \frac{1}{4}$$

P geçiş olasılıkları matrisi ise :

$$P = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (3)$$

olacaktır.

Bu matris, bir başlangıç durumundan hareket eden herhangi bir olayın çeşitli devrelerde (adımlar sonunda) çeşitli durumlara ulaşma olasılıklarını izleme olanağı sağlamaktadır.

Geçiş olasılıkları matrisi (3) ile belirlenmiş olan olayın, üç devre (adım) sonra hangi olasılıklarla a_1, a_2 ve a_3 durumlarında bulunacağı,

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(3)} & p_{12}^{(3)} & p_{13}^{(3)} \\ p_{21}^{(3)} & p_{22}^{(3)} & p_{23}^{(3)} \\ p_{31}^{(3)} & p_{32}^{(3)} & p_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

matrisi ile tanımlanmaktadır. Şöyle ki: a_1 durumundan başlayan bir olay ya da hareketin, üç adım sonunda yine a_1 de bulunma olasılığı $p_{11}^{(3)}$ olup,

$$p_{11}^{(3)} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{33}{108} \quad \text{dir.}$$

Yine a_1 den başlayan bir hareketin üç adım sonra a_2 ve a_3 durumlarında bulunma olasılıkları,

$$p^{(3)}_{12} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{4}{27}$$

$$p^{(3)}_{13} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{36}$$ olmaktadır.

Aynı olayın a_2 durumundan yani $(0, 0, 1)$ olasılıkları ile başlaması halinde üç adımın sonunda diğer durumların her birinde bulunma olasılıkları aynı bir düşünüşle,

$$p^{(3)}_{21} = 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{33}{48}$$

$$p^{(3)}_{22} = 1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

$$p^{(3)}_{23} = 1 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

olayın a_3 durumundan başlaması halinde üç adım sonra her bir durumda bulunma olasılıkları ise,

$$p^{(3)}_{31} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{291}{576}$$

$$p^{(3)}_{32} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{33}{144}$$

$$p^{(3)}_{33} = (\frac{1}{4})^3 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{49}{144}$$ bulunur. Buna göre P^3

matrisi (ki üç adım sonunda durumlardan her birinde bulunma olasılıklarını içermektedir) aşağıda gösterildiği gibi olacaktır.

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 33/_{108} & 4/_{27} & 11/_{36} \\ 33/_{48} & 3/_{12} & 1/_{16} \\ 291/_{576} & 33/_{144} & 49/_{192} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Bir Markov zincirinde $A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ ile tanımlanan sonlu bir durumlar cümlesi, yukarıda tanımlamağa çalışılmış olan $(n \times n)$ boyutlu bir geçiş olasılıkları matrisi ve başlangıç olasılık vektörü denilen bir $p^{(0)} = \left(p_1^{(0)}, \; p_2^{(0)} \; \ldots \; p_n^{(0)} \right)$ vektörünün tanımlanmış olması gerekmektedir. Bunlar bilindiği takdirde a_i durumu içinde $p_i^{(0)}$ olasılığı ile başlayan bir sistem durumların adımlarını izleyerek devam eder. Eğer herhangi bir zamanda (adımda) a_i durumunda bulunuluyorsa ondan sonraki adımda p_{ij} olasılığı ile yine a_i durumuna varılır. p_{ij}, geçiş olasılıkları matrisinin i ninci satır ve j ninci sütunundaki elemanıdır (2). Aşağıdaki örnek ile duruma açıklık getirilmeğe çalışılmıştır.

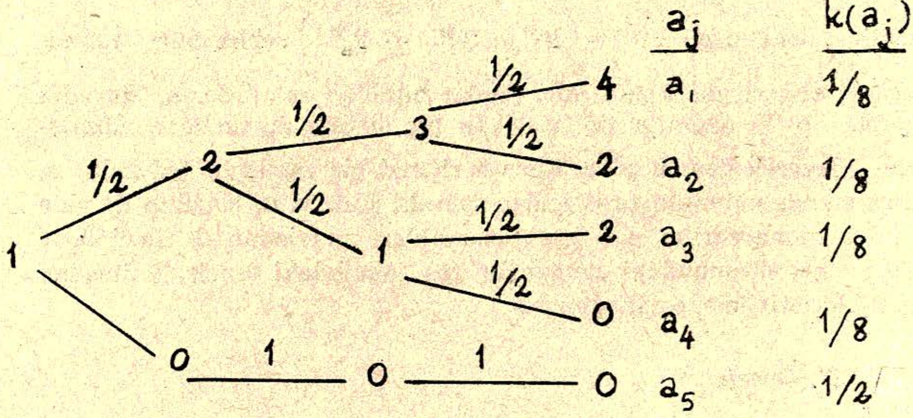
I.2 *Örnek.*

Hareketli bir parçacığın bir dizi adım yaptığı varsayılıyor. Şöyleki; Sağa ya da sola bir birimlik her adım olasılığı 1/2 dir. Eğer bu parçacık bir sıfır (0) noktasına ya da sıfırın sağında dört birim uzaklıktaki bir noktaya gelirse orada emilmiş olarak süresiz kalmaktadır. Buna göre durumlar A = (0, 1, 2, 3, 4) tür. Geçiş olasılıkları matrisi ise aşağıda gösterildiği gibidir.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{I.2.1}$$

(2) COGAN, E.J; NORMAN, R.Z; KEMENY, J.G; THOMPSON, G.L; SNELL, J.L; Modern Matematik Metodları ve Modelleri, II. Millî Eqitim Basımevi, İstanbul, s. 126-128, (çeviri) Prof. Dr. *Nakibe UZGÖREN*

İşlemin özel bir durumdan başladığı varsayılarak üç adım sonra bu parçacığın emilmemiş olması olasılığı araştırılacaktır. Soru'nun yanıtı için önce şekil 2. de gösterilen ölçü ağacı çizilmiştir.



Parçacığın emilmemiş olduğu yolundaki bir yargı a_2 ve a_3 yolları için doğrudur. Ölçü ağacında bu yolların her birine verilen ölçü 1/8, 1/8 dir. Buna göre parçacığın emilmemiş olması olasılığı $1/8 + 1/8 = 1/4$ olmaktadır.

Markov zincirleri teorisinde başlıca amaç ve iş sistem ile ilgili her türlü olasılıkları her zaman bir ölçü ağacına baş vurmadan bulma yollarını genişletmektir. Örnek 2. deki gibi bir olayda adımların sayısının daha da artması ile bir ölçü ağacının pratik olmayacağı açıktır (3).

Bu kısımda daha önce olayın tek bir adımı içindeki durumunu belirtmek üzere kullanılmış olan bir ifade genel durumu açıklayacak bir teorem olarak sunulacak, sonra yeniden Örnek I.2 ye dönülecektir.

---

(3) Bkz: KEMENİ, J.G; and SNELL, J.L; Fınıte markov chaıns, van nostrand reinghold company, New York, 1960

I.3 *Teorem.*

Bir Markov zincirinin geçiş olasılıkları matrisi P olsun. Sistem a_i durumundan başladığına göre n adım sonra a_j durumuna gelme olasılığı $p_{ij}^{(n)}$ dir. Burada $p_{ij}^{(n)}$ P^n matrisinin i nci satır ve j, nci sütunundaki elemanı olmaktadır. (3)

İspat : a_i den a_j ye iki adımda gidebilmek için bu iki durum arasındaki bir a_k durumundan geçmek gereklidir. Şu halde: $p_{ij}^{(2)}$ olasılığı,

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik} \cdot p_{kj}$$

olarak yazılabilir. Bu ise matrislerde çarpım özelliği gereğince P^2 matrisinin i, nci satır ve j, nci sütundaki elemanıdır. Şu halde teorem $n = 2$ için doğrudur.

Aynı şekilde a_i den a_j ye üç adımda gidebilmek için yine bir a_k druumundan geçmek gerekmektedir. Buradan,

$p_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{m} p_{ik}^{(2)} \cdot p_{kj}$ yazılabilir. Fakat $P^3 = P^2 \cdot P$ yazılabileceğinden $p_{ij}^{(3)}$ olasılığı'nın P^3 matrisinin i, nci satır ve j, nci sütundaki elemanı olduğu anlaşılır. Böylece $n = 4, 5, \cdot, n$ olarak alınıp devam edilirse matematik tümevarım ile $p_{ij}^{(n)}$ olasılığının P^n matrisinin i, nci satır ve j, nci sütundaki elemanı olduğu bulunmuş olur. (4)

Teoremin bir uygulaması şekil 2. de bir ölçü ağacı ile gösterilmiş örnek için şöyle olacaktır; Ölçü ağacında (1) durumundan başlayarak üç adımda diğer durumlardan her birine varma olasılıkları,

$$\pi^{(3)} = (p_{11}^{(3)}, p_{12}^{(3)}, p_{13}^{(3)}, p_{14}^{(3)} \; p_{15}^{(3)})$$

vektörü ile bilinmektedir. Bu vektörün elemanları,

$p_{11}^{(3)} = 1/8 + 1/2 = 5/8$

$p_{12}^{(3)} = 0$ (Çünkü, üç adımın sonunda yollardan hiç biri başladığının aynı olan bir duruma gelmemektedir.)

(4) COGAN, E.J. ve Diğerleri, Agk, s. 127-128

$p_{13}^{(3)} = 1/8 + 1/8 = 1/4$

$p_{14}^{(3)} = 0$

$p_{15}^{(3)} = 1/8$ olup,

$p^{(3)} = (5/8,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 1/8)$ dir. Şu halde bu vektör yardımı ile 1 durumundan başlayan bir olayın üç adım sonra 5/8 olasılığı ile sıfır durumunda, sıfır olasılığı ile 1 durumunda, 1/4 olasılığı ile 2 durumunda, sıfır olasılığı ile 3 durumunda ve 1/8 olasılığı ile 4 durumunda bulunacağı anlaşılmaktadır. Aynı olaya ait daha önce yazılmış olan geçiş olasılıkları matrisi yeniden gözönüne alınıp bu matrisin üçüncü kuvveti alınırsa,

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 0 & 1/4 & 0 & 1/8 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/8 & 0 & 1/4 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{I.2.2}$$

bulunur. Bu matrisin 1 durumuna karşılık gelen ikinci satırının da aynı vektör olduğu görülmektedir.

$$p^{(3)} = (5/8,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 1/8)$$

Şu halde herhangi bir durumdan başlayan bir olayın (n) adım sonra diğer durumlara erişebilme olasılıkları, P (Geçiş olasılıkları) matrisinin n, nci kuvveti içinde o duruma karşılık gelen $p^{(n)}$ satır vektörünün elemanları ile belirlenmektedir. Bunun gibi Örnek 2. deki parçacığın 6 adım sonra durumların her birinde bulunma olasılıkları P^6 matrisinin satır vektörleri ile belirleneceği açıktır.

$$P^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{7}{16} & 0 & \frac{2}{16} & 0 & \frac{7}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{11}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{I.2.3}$$

Örneğin verilişi esnasında yanıt istenen soru hatırlanırsa, burada şunlar söylenebilir; 1, 2 ve 3 durumlarından hangisi başlangıç durumu olursa olsun 6 adım sonunda parçacığın sıfır ya da dört durumlarında emilmemiş olması olasılığı 1/8 dir. Emilmiş olması olasılığı ise 14/16 = 7/8 olmaktadır.

II. Durumları, bir olasılık vektörü ile belirlenecek olasılıklarla başlayan Markov Zincirlerinin davranışı :

Durumların, bir olasılık vektörü ile belirlenecek olasılıklarla başlaması halinde Markov Zincirlerinin davranışlarını tanımlayan önemli bir teorem bu bölümde verilecektir. Teoremin tanım ve ispatını vermeden (Olasılık Vektörü) hakkında kısa bir açıklama yararlı olacaktır.

II.1 Başlangıç Olasılık Vektörü : Olasılıkları içeren elemanları $p_i^{(0)}$ gösterim'i ile genel olarak belirlenen Başlangıç Olasılık Vektörleri,

$$p^{(0)} = p_1^{(0)},\ p_2^{(0)},\ p_3^{(0)},\ \ldots\ldots\ p_n^{(0)} \qquad (5)$$

$$p_1^{(1)} = p_2^{(1)},\ p_3^{(1)},\ p^{(1)}\ \ldots\ldots\ p_n^{(1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (\text{II.1.1})$$

$$p^{(n)} = p_1^{(n)},\ p_2^{(n)}\ \ p_3^{(n)},\ldots\ldots,p_n^{(n)}$$

eşitlikleri ile tanımlanıp $p^{(0)}$, bu durumda başlangıç olasılığını,

(5) Bkz: LEE, T.C.; JUDEE, G.G. and ZELLNER, A: Enstimating the parameters of the markov probality model from aggregate Time series data - North - Holland puplishing campany. Amsterdam 1970

$p_i^{(0)}$, $p^{(0)}$ başlangıç olasılık vektörü içinde i nci duruma uygulanan (veya ait olan) olasılığı, $p^{(n)}$ ise (n) adım sonraki olasılık vektörünü ve $p_i^{(n)}$ de (n) adım sonra (veya n sıçrayıştan sonra) a_i durumu içinde kalma olasılığını belirtmektedir. Bu vektörün elemanları için de:

$$1 \geq p_j^{(i)} \geq 0 \quad \text{ve} \quad p_1^{(i)} + p_2^{(i)} + p_3^{(i)} + \dots + p_n^{(i)} = 1$$

$$(i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

olacağı açıktır.

II.2 *Teorem :*

$p^{(0)}$, bir başlangıç olasılık vektörü olsun. $p_i^{(n)}$ sistemin (n) adım sonra a_i durumunda bulunma olasılığı olup $p^{(n)}$ olasılık vektörünün i, nci elemanı ise;

a — $p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n$

b — $p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P$ eşitlikleri gerçeklenir. (6)

İspat :

$p_i^{(n)}$ olasılığı; $p_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} p_i^{(0)} \cdot p_{ij}^{(n)}$ olarak yazılabilir.

Teorem I.3 ten dolayı $p_{ij}^{(n)}$, P^n matrisinin i nci satır ve j, nci sütundaki elemanıdır. Buna göre:

$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n$ bağıntısı elde edilir.

b — Elde edilen son eşitlikten,

$p^{(n-1)} = p^{(0)} \cdot P^{n-1}$ eşitliğinin yazılabileceğe açıktır. Eşitliğin iki yanı P ile çarpılırsa,

$p^{(n-1)} \cdot P = p^{(0)} \cdot P^n = p^{(n)}$ bulunur. Aşağıda verilmiş olan örnek, Teoremin bir uygulaması niteliğindedir.

---

(6) COGAW, E.J; ve Diğerleri: Agk, s. 129

II.2.1 *Örnek :*

Bir pazarda satılan farklı nitelikteki deterjanların alış toplamı E olsun. Bu deterjanlardan (a) markalı olanının alış toplamı A , diğer bütün marka deterjanların alış toplamı $\bar{A}$ olsun. $(A , \bar{A})$, E toplam arzının parçalarıdır. Diğer markaları belirleyen durum ($\bar{a}$) olsun. Bir pazar araştırması göstermektedirki, araştırma anına kadar geçen belli bir dönem içinde (a) markasını almış olanların yeniden (a) yı alma olasılıkları % 70 tir. Ancak % 30 alıcının tercihi diğer markalara kaymıştır. Eğer belirtilen dönem içinde bir tüketici alış sırasında (a) yı seçmemişse % 80 olasılıkla yine ($\bar{a}$) yı seçmeyecektir. Ancak % 20 olasılıkla Tercihini (a) markasına yöneltecektir. Buna göre olayın Geçiş Olasılıkları Matrisi,

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & \bar{a} \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ \bar{a} \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 0.70 & 0.30 \\ 0.20 & 0.80 \end{array} \right] \end{array} \qquad (II.2.1)$$

Belirtilen dönemde adı geçen mamul için pazarın % 60 ını (a) markası, % 40 ını da ($\bar{a}$) diğer markalar kendine çekmiş olsun. Aynı zaman birimi ile ölçülen daha sonraki zaman birimlerinde alıcıların ne şekilde davranacakları bilinmek istenmektedir. (7)

$E_1 = (A_1 , \bar{A}_1)$ $A_1 = \% \, 60$, $\bar{A}_1 = \% \, 40$

Yukardaki teoremde belirtilen $p^{(0)}$ başlangıç olasılık vektörü,

$p^{(0)} = (0{,}6 \; , \; 0{,}4)$ tür.

Buna göre, Örneğin; üç devre sonra alıcıların davranışı,

$$p^{(3)} = (0{,}6 \; , \; 0{,}4) \cdot \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}^3 \qquad (II.2.2)$$

(7) BRUNEL, D; Agk, s. 96

ifadesi ile ya da,

$$p^{(3)} = (0{,}6 \ , \ 0{,}4)^3 \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.2.3)}$$

ifadesi ile belirlenir. Bu da,

$$p^{(3)} = (0{,}6 \ , \ 0{,}4) \begin{bmatrix} 0{,}475 & 0{,}525 \\ 0{,}35 & 0{,}65 \end{bmatrix} = (42{,}5 \ , \ 57{,}5)$$

olmaktadır. Elde edilen bu vektörün anlamı, üç devre sonra alıcıların % 42,5 inin tercihlerini (a) markası yönünde, % 57,5 inin de diğer markalar yönünde kullanmakta olacağıdır.

III. Emen Markov Zincirleri :

III.1 Emen Markov Zinciri tanımı;

Bir a_i durumu $p_{ij} = 1$ ise a_i bir emen durumdur. Başka bir söyleyişle, bu durumu terketmek olanaksızdır. Örnek I.2 nin geçiş olasılıkları matrisi olan (I.2.1) P matrisinde (0) ve 4 durumlarına karşılık gelen satırların birer «Emen Durum» olduğu kolayca söylenebilir.

Eğer bir Markov zinciri en az bir Emen Durum içeriyorsa ve emen durum olmayan herhangi bir durumdan en az bir emen duruma gitmek olasılığı varsa böyle bir Markov Zincirine (Emen Markov Zinciri) denir. Yukarda verilmiş örnekteki matriste emen durumların dışındaki 1, 2, 3 durumlarından her birine «Ara Durum» bu durumlarla belli satırların hepsine birden «Ara Cümle» denilmektedir. Ara Cümlede durumların herhangi birinden diğerine gitme olasılığı vardır.

III.2 *Düzgün Ara Matrisler :*

Markov Zincirlerinde ara durum olmayan bir durumdan başlayan bir Markov Zincirinin davranışı, bir ara durumdan başlayan Markov Zincirinin davranışından farklı olmaktadır. Bir P matrisinin P^n kuvvetinde hiç sıfır elemanı yoksa P matrisine «Düzgün

(Reguler) matris» denir (8). Olasılık teorisinde, ara matrisi düzgün bir matris olan Markov Zinciri için öyle bir n sayısı bulunabilirki, bir a_j durumundan başka bir a_k durumuna n adımda gitmek mümkündür, ve a_i den a_k ya gidip dönmek 2n adımda mümkün olur. Böyle bir zincirin ara durumu yoktur. Ancak bir Ergodik Sınıf'ı olur. Bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani, yalnız bir Ergodik sınıfı bulunan Markov zinciri bir Ara Durum olmayabilir. Fakat Düzgün Ara Matris değildir. Durumu bir örnekle açıklamadan önce Ergodik Cümle hakkında kısa bir açıklama yararlı olacaktır.

III.2.1 *Ergodik Cümle :*

Bir Durumlar evreninde U, bütün durumların cümlesi olsun. Eğer a_i durumundan a_j durumuna gitmek mümkünse U içindeki T bağlantısı (9) $a_i T a_j$ ile tanımlanır. T ile ilgili olan tercih bağlantısı S, de $a_i S a_j$ olur. S tercih bağlantısı, a_i den a_j ye gitmenin mümkün ancak geri dönmenin mümkün olmadığını belirtmektedir. R Denklik Bağlantısı da $a_i R a_j$ ile tarif edilmşi olup, 'a_i den a_j ye gitmek ve geri dönmek mümkündür' durumunu tanımlamaktadır.

R bağlantısı, R nin Denklik Sınıfları Cümlesi,

$U^* = (u^*_1, u^*_2, u^*_3, \ldots u^*_n)$ içinde T^* ile belirtilen kadar kısmını tanımlar. Yani T kısmi sıralamasını belirtir. Çünki her zayıf sıralama Denklik Sınıfları cümlesi içinde bir kısmi sıralama belirtir.

Bu bağlantı, ancak ve yalnız u^*_j içindeki herhangi bir durumdan u^*_k içindeki diğer bir duruma gitmek mümkünse $u^*_j T^* u^*_k$ ile belirtilir. İşte bu u^*_j sınıfı 'Kısmi Zayıf Sıralama Bağlantısı' olan

---

(8) COGAN E.J ve Diğerleri: Agk, s. 141

(9) T, U genel durumlar cümlesinde her bir durumdan bir diğerine gidilip gıdilemiyeceği esasına göre durumları sıralayan bir Zayıf Sıralama Bağlantısı'dır. Her bir a_i den yine a_i (kendisine) ye ve a_i den bir a_i durumuna gtimek mümkündür.

T^* nın bir minimal elemanı (10) ise, u_j^* bir Ergodik Cümle'dir denir. Her Markov Zincirinde en az bir ergodik cümle vardır.

Herhangi bir olasılık matrisinin bütün elemanları pozitif ise bunun bir düzgün ara matrisi olacağı açıktır.

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{(III.2.1)}$$

matrisi düzgün olmayan bir matristir. Çünkü a_2 durumu bir ara durum olmaktadır.

Düzgün ara matrisleri olan bir Markov Zincirinin tipik bir özelliği aşağıda belirtilmeğe çalışılmıştır.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.2.2.)}$$

matrisi bir düzgün ara matristir. Bu matrisin karesi, dördüncü ve sekizinci kuvvetleri alındığında,

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.2.3)}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.2.4)}$$

(10) T nin bir Zayıf Sıralama ve S nin onunla belirlenen bir tercih bağlantısı olması durumunda çeşitli elemanlar (özel tipte) tanımlanabilir. U nun bir q elemanına U da, q Sy olacak tarzda hiçbir y bulunmaması halinde q ya 'Minimal' denir.

$$P^8 = \begin{bmatrix} 4/16 & 6/16 & 6/16 \\ 3/16 & 7/16 & 6/16 \\ 3/16 & 6/16 & 7/16 \end{bmatrix} \quad \text{(III.2.5)}$$

$$P^{16} = \begin{bmatrix} 52/256 & 102/256 & 102/256 \\ 51/256 & 103/256 & 102/256 \\ 51/256 & 102/256 & 103/256 \end{bmatrix} \quad \text{(III.2.6.)}$$

P^8 matrisinde satırların birbirine çok yakın değerler taşıdıkları görülmektedir. Nihayet P^8 matrisinin de karesi alındığında hemen hemen bütün satırlar aynı olmaktadır. P^n matrisinin i, nci satırının a_i durumundan başlayıp (n) adımda diğer durumların her birine varma olasılıklarını tanımlamakta olduğu daha önce belirtilmişti. Buna göre, Bağlama (geçiş olasılıkları) matrisi «Düzgün Ara Matrisi» olan bir Markov Zincirinde yeteri kadar adımdan sonra değişik durumlara varma olasılığı aynı olup başlangıç durumuna bağlı olmamaktadır.

Eğer bir Q matrisinin her q_{ij} elemanı için $\lim_{n \to \infty} \cdot p_{ij}^{(n)} = q_{ij}$ eşitliği sağlanıyorsa P^n matrisi Q matrisine yaklaşıyor denir. Yani, P düzgün bir ara matris ise P^n matrisi $n \to \infty$ için her satırında aynı q vektörü olan bir Q matrisine yaklaşır. q vektörü,

$$qp = q$$

şartını sağlayan tek olasılık vektörüdür. q nün bütün bileşenleri pozitif ve toplamları bir'e eşittir. Q limit matrisini bulmak için $qp = q$ bağıntısını gerçekliyen (q) olasılık vektörünü bulmak gereklidir. Bu da; aşağıda verilen örnekteki düzgün ara matris için şöyle hesaplanmaktadır (11).

$$P = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} \quad \text{(III.2.7)}$$

(11) HOWARD, A. Ronald: Dynamic Probabilistic Systems, Volume I. Markov Models, John Wiley-Sons, inc., New York, 1971, s. 26, 27

$$
\begin{aligned}
0{,}3 \cdot q_1 + 0{,}1 \cdot q_2 + 0{,}4 \cdot q_3 &= q_1 \\
0{,}2 \cdot q_1 + 0{,}8 \cdot q_2 + 0{,}4 \cdot q_3 &= q_2 \\
0{,}5 \cdot q_1 + 0{,}1 \cdot q_2 + 0{,}2 \cdot q_3 &= q_3 \\
q_1 + \quad q_2 + \quad q_3 &= 1
\end{aligned}
\tag{III.2.8}
$$

eşitliklerinin çözümü ile,

$$q_1 = 0{,}2 \qquad q_2 = 0{,}6 \quad \text{ve} \quad q_3 = 0{,}2$$

yahut,

$$q = (0{,}2 \quad 0{,}6 \quad 0{,}2)$$

bulunur. Buna göre limit matris,

$$
Q = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{bmatrix}
\tag{III.2.9}
$$

matrisi olmaktadır.

Markov Zincirleri ile ilgili daha birçok özellikleri bu çalışmanın kapsamı içinde verebilmek olanağı bulunmamaktadır. Bu nedenle Markov Zincirleri ile ilgili bu genel açıklama ile yetinilmiştir.

IV. Markov Zincirleri metodunun İşletme problemlerine uygulanışı;

Markov Zincirleri Metodu, bağımlı olasılıklar içeren her konudaki problemlerin çözümüne uygulanabilmektedir. Özellikle Biyoloji'de, İktisat'ta, (İmput - Autput, Hızlandıran modeli gibi modellerin çözümünde) İşletme'de (Karar Problemlerinde) yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Bu bölümde Markov Zincirleri Metodunun Pazar Bölünmeleri ile ilgili bir İşletme probleminin çözümünde nasıl kullanılacağı gösterilecektir.

IV.1 *Örnek Uygulama :*

Bir bölgede aynı bir malı üreten ve pazarlayan üç işletme olduğu varsayılsın. Pazarda, reklâm, servis şartları ve diğer bazı nedenlerle alıcıların zaman içinde bir işletmeden diğerine geçtikleri bilinmektedir. Eğer işletmeler kazandığı ve kaybettiği müşterilerinin sayısını kaydediyorsa uygulama yapmak kolay olmaktadır. Haziran ve Temmuz aylarında işletmelerin sahip oldukları müşteri sayısı aşağıda tabloda gösterildiği gibi olsun.

Tablo IV.1.1

	Müşteri sayısı	
İşletmenin adı	Haziran başında	Temmuz başında
A	200	220
B	500	490
C	300	290

Yukardaki veriler çözüm için gerekli ve önemli olan ayrıntılı bir durumu yansıtmamaktadırlar. Çünkü, Örneğin, temmuz ayında 10 müşterisini kaybetmiş görünen B işletmesi için bu sonuç nihai bir sonuçtur. Yani, B işletmesi diğer işletmelerden müşteri kazanmış, ancak sonuç olarak 10 adet müşterisini kaybetmiştir. Bu ayrıntıları da içeren bir tablo aşağıda verilmiştir.

Tablo IV.1.2

İşletme adı	1 Haziranda durum	Haziran ayı içindeki		1 Temmuz son durum
		Kazanç	Kayıp	
A	200	60	40	220
B	500	40	50	490
C	300	35	45	290

Yukardaki verilerden yararlanarak hesaplanan geçiş olasılıkları adı verilen oranların yardımı ile ileri dönemlerde pazar bölünmesinin ne şekilde olacağını ve pazarda nasıl bir denge kurulacağını saptamak mümkün olmaktadır. Geçiş olasılıkları, yani eski müşterileri bir sonraki devrede ellerinde tutabilme olasılıkları;

$$\begin{array}{lll} \text{A için} & \dfrac{200-40}{200} = 0{,}80 & \\ \text{B} \quad » & \dfrac{500-50}{500} = 0{,}90 & \text{(IV.1.3)} \\ \text{C} \quad » & \dfrac{300-45}{300} = 0{,}85 & \text{olacaktır (12).} \end{array}$$

Belli miktardaki bu müşterilerin işletmeler arasındaki kayışı aşağıdaki tabloda ayrıntıları ile belirtilmiştir.

Tablo IV.1.4

İşletmeler	1 Haziran	Kazanç			Kayıp			1 Temmuz
		A	B	C	A	B	C	
A	200	0	35	25	0	20	20	220
B	500	20	0	20	35	0	15	490
C	300	20	15	0	25	20	0	290

Bu tablodaki kazanç ve kayıplar yüzde (%) itibariyle hesapla-
Markov zincirinin Geçiş Olasılıkları Matrisi elde edilmiş olmaktadır.
nıp bulunan değerler bir (P) matrisinin sıra ve sütunlarına yazılırsa,

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad A \quad & \quad B \quad & \quad C \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{160}{200} = 0{,}80 , & \dfrac{20}{200} = 0{,}10 & \dfrac{20}{200} = 0{,}10 \\ \dfrac{35}{500} = 0{,}07 , & \dfrac{450}{500} = 0{,}90 , & \dfrac{15}{500} = 0{,}03 \\ \dfrac{25}{300} = 0{,}08 , & \dfrac{20}{300} = 0{,}07 & \dfrac{225}{300} = 0{,}85 \end{array} \right] \end{array} \qquad \text{IV.1.5}$$

(12) ŞENEL, Musa; Genel Matematik III. Ders Notları, B.İ.T.A. 1973-1974

Bu matriste sıralar her bir işletmenin kaybettiği müşterilerin, sütunlarda bu işletmelerin kazandığı müşterilerin yüzde itibariyle miktarlarını göstermektedir. Ayların her biri bir devre olarak alınacak olusa Eylül 1'deki müşteri geçiş olasılıkları yani, iki devre sonra her işletmede bulunacak olan müşterilerin % itibariyle dağılma olasılıkları;

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 0,9 & 0,03 \\ 0,08 & 0,07 & 0,85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,655 & 0,225 & 0,168 \\ 0,121 & 0,819 & 0,060 \\ 0,137 & 0,131 & 0,733 \end{bmatrix}$$

IV.1.6

olarak elde edilir.

Ayrıca 1 Temmuz tarihinde yapılan bir araştırmanın toplam müşterinin % 22 sinin A işletmesi mamulünü, % 49 unun B nin mamulünü, % 29 unun da C nin mamulünü tercih ettiğini saptadığı varsayılsın. Bu durum bir (Q) satır vektörü ile, Q = (0,22, 0,49, 0,29) olarak gösterilebilir. Buna göre pazarın 1 Eylülde işletmeler arasındaki bölünme olasılıkları, $P^2 \cdot Q$ ifadesi ile belirlenmektedir. Bu da,

$$P^2 \cdot Q = \begin{bmatrix} 0,655 & 0,225 & 0,168 \\ 0,121 & 0,819 & 0,060 \\ 0,137 & 0,131 & 0,733 \end{bmatrix} \quad (0,22 \quad 0,49 \quad 0,29)$$

(IV.1.7)

yani,

$$P^2 \cdot Q = (0,270 \ , \ 0,485 \ , \ 0,245) \text{ olmaktadır.}$$

Son elde edilen satır vektörünün açıklanması gerekirse, 1 eylül tarihinde mevcut müşterilerin % 0270 inin A işletmesi ile, % 0485 inin B işletmesi ile, % 0245 inin de C işletmesi ile alışveriş yapacağı anlaşılmaktadır. Bunun gibi örneğin 5 devre sonraki pazar bölünmesi olasılıklarını da,

$P^5 \cdot Q$ ifadesi ile tespit etmek mümkün olmaktadır. Yukardaki işlemlerden de anlaşıldığı üzere Geçiş Olasılıkları Matrisi'nin

(P) ve başlangıç olasılıkları vektörünün (Q) bilinmesi ile daha sonra gelen zamanlardaki herhangi bir devrede pazarın işletmeler arasında nasıl paylaşılacağının olasılıkları kolayca hesaplanabilmektedir. Burada aynı sonuçların,

$P^5 \cdot Q = P \cdot Q^5$ eşitliği nedeni ile başka şekilde de bulunabileceği açıktır.

Sonuç

Markov Zincirleri Teorisinin işletme ve iktisat problemlerinin bir kısmının çözümüne katkısı gelişmiş batı ekonomilerinde oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Bu durumu konu ile ilgili batı literatürü belirgin bir biçimde kanıtlamaktadır. Bağımlı olasılığa dayanan her türlü belirsizlik durumlarında geniş bir uygulama olanağı bulan bu teorinin Türkiye'de henüz tanınmamış ve tanıtılmamış olduğu tereddütsüz söylenebilir.

Bu çalışma içinde Markov zincirleri teorisinin tanımı, bir kaç temel teoremi ve çok geniş uygulama alanlarından yalnızca pazar bölünmesine ilişkin bir uygulama ile yetinilmiştir. Markov zincirleri teorisi ile ilgili Türkçe bir literatürün yokluğu, ya da yok denecek kadar azlığı dikkat çekmektedir. Bu durum, yurdumuzda ilgili konudaki bilimsel araştırmaların ve geniş uygulama alanlarının çok büyük yararları olabileceğini umduğumuz bu teori'den gerektiği gibi yararlanamadıkları sonucunu birlikte taşıyor.