# DİNAMİK PROGRAMLAMA (*)

Daniel TEICHROEW
Çeviren : İnş. Müh. Erdal AKAN

Dinamik programlama n değişkenli bir fonksiyonun optimizasyonunu sağlayan bir tekniktir. Bu n değişkenli fonksiyon birbirini takip eden safhalar içinde optimize edilir ve her safha sadece bir değişkenli fonksiyonun optimizasyonunu ihtiva eder.

## GERİYE DOĞRU ÇÖZÜM METODU

### i) Analitik Çözüm

Bu çözüm yolunun temel kavramlarını en iyi şekilde bir örnek üzerinde gösterebiliriz.

**Örnek 1.**

Bir firma aynı kalem malı birbirini takip eden üç devre içinde üretmektedir. Gereken üretim miktarları birinci devrenin sonunda 5 birim, ikinci devrenin sonunda 10, ve üçüncü devre sonunda da 15 birimdir. Her hangi bir devre içinde üretilen x birim malın maliyeti;

$C(x) = x^2$ olarak hesaplanmaktadır.

Bir devre içinde üretilen mal miktarı takip eden devreye taşınmakta ve bunun için her birim mala 2 birimlik bekletme maliyeti binmektedir. Başlangıçta elde hiç mal olmadığı varsayıldığında bekletme ve üretim maliyetleri toplamını minimize edecek ve yukarıda istenen üretim miktarlarına uyacak şekilde her devre içinde üretilen birim miktarları ne olacaktır?

---

(*) «Dynamic Programming», An Introduction to Management Science, Deterministic Models. John Wiley & Sons. Inc., New York, 1964, s. 610-634.

$x_1, x_2, x_3$ sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü devrelerdeki üretimi gösterirse;

Toplam maliyet = üretim maliyeti + bekletme maliyeti

$$C(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 - 5) + 2(x_1 + x_2 - 15)$$

uygun çözüm bölgesi ise;

$x_1 \geqslant 5$

$x_1 + x_2 \geqslant 15 \; ; \; x_2 \geqslant 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 30 \; ; \; x_3 \geqslant 0$ ile belirlenecektir.

Bunlara göre minimize edilecek gaye fonksiyonu :

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 - 5) + 2(x_1 + x_2 - 5) - \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 30)$$

şeklinde kurulabilir. Çözüme geçtiğimizde;

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \; ; \; 2x_1 + 2 - 2 - \lambda = 0 \qquad 2x_1 = -4 - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \; ; \; 2x_2 + 2 - \lambda = 0 \qquad 2x_2 = -2 + \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \; ; \; 2x_3 - \lambda = 0 \qquad 2x_3 = + \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \; ; \; x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

$$-4 + \lambda - 2 + \lambda + \lambda = 60 \; ; \; \lambda = 22$$

$x_1 = 9 \; ; \; x_2 = 10 \; ; \; x_3 = 11$ gibi bir optimal çözüme

varırız.

Üçüncü devre içinde ne miktarda üretim yapılacaktır gibi bir kararın aslında üçüncü devre başına kadar verilmesi şart değildir. Üçüncü devre başında elde bulunan birim miktarına $z_3$ diyelim. Bu devrede gereken üretim miktarı 15 birim olduğu için, üçüncü devrede optimal karar, kalanı üretmektir; yani :

$$x_3^* = 15 - z_3 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Üçüncü devreye ait maliyet $f_3 (z_3, x_3)$ ile verilir ve üretim artı bekletme maliyetlerini ifade eder.

$$f_3 (z_3, x_3) = 2z_3 + x_3^2$$

Şayet optimal karar üçüncü devrede veriliyor ise, maliyet;

$f_3 (z_3;x_3^*)$ ile gösterilir ve şöyledir :

$$f_3 (z_3;x_3^*) = 2z_3 + (15 - z_3)^2 \quad x_3^*, z_3 \geqslant 0. \ldots\ldots\ldots (2)$$

Burada $f_3 (z_3, x_3^*)$ ün sadece $z_3$ ün fonksiyonu olduğuna dikkatimizin çekilmesi gerekir. Bu $z_3$ ten sonra noktalı virgül ve $x_3$ ün üstüne konan yıldız işareti ile belirtilmiştir.

Şimdi ikinci devrenin başındaki durumu ele alalım. $z_2$ yi devre başındaki envanter olarak alırsak herhangi $x_2$ kararı için ikinci devredeki maliyet $f_2 (z_2, x_2)$ bekletme ve üretim maliyetlerinin toplamıdır, veya

$$f_2 (z_2, x_2) = 2z_2 + x_2^2 \ldots\ldots\ldots (3)$$

$x_2$ kararı üçüncü devre başındaki envanteri etkiler;

$$z_3 = z_2 + x_2 - 10 \qquad z_2 \geqslant 0 \ldots\ldots\ldots (4)$$

İkinci devrede yapılan miktar üçüncü devrenin maliyetini etkiliyecektir ve $x_2$ nin optimal değeri, ikinci ve üçüncü devreler maliyetlerinin toplamını minimize eden değer olacaktır. $F_2 (z_2, x_2; x_3^*)$ ikinci ve üçüncü devreler maliyetlerinin toplamını verir ise, $x_2$ kararı ikinci devrede verilir ve optimal karara üçüncü devrede varılır. (1) kullanarak;

$$F_2\,(z_2, x_2; x_3^* = f_2\,(z_2, x_2) + F_3\,(z_3; x_3^*) \;\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

$$= f_2\,(z_2, x_2) + F_3\,(z_2 + x_2 - 10; x_3^*) \qquad (4) \text{ den}$$

$$= 2z_2 + x_2^2 + 2z_3 + (15 - z_3)^2$$

$$= 2z_2 + x_2^2 + 2\,(z_2 + x_2 - 10) + (25 - z_2 - x_2)^2 \;..\; (6)$$

(1), (2), (3) ve (4) den

**Burada** $F_3\,(z_3; x_3^*) = f_3\,(z_3; x_3^*)$ dir, çünkü üçüncü devre son devredir. $x_2$ nin optimal değeri $\dfrac{dF_2}{dx_2} = 0$ denkleminin çözümüdür.

$$\frac{dF_2}{dx_2} = 0 \;;\; 2x_2 + 2 - 2\,(25 - z_2 - x_2) = 0$$

Burada $z_2$ verilen bir sabit gibi muamele görmüştür.

$$x_2^* = 12 - \frac{z_2}{2} \;\ldots\ldots\ldots\; (7)$$

Buna göre $F_2$ nin minimum değeri;

$$F_2\,(z_2; x_2^*, x_3^*) = 2z_2 + (12 - \frac{z_2}{2})^2 + 2\,(z_2 + 12 - \frac{z_2}{2} - 10)$$

$$+ \,(25 - z_2 - 12 + \frac{z_2}{2})^2$$

$$= 3z_2 + 4 + (12 - \frac{z_2}{2})^2 + (13 - \frac{z_2}{2})^2 \;\ldots\ldots\; (8)$$

Birinci devre içinde aynı safhalar sırasıyla takip edilir. Birinci periyodun başındaki envantere $z_1$ dersek ve bekletme maliyetinin bu devre içinde varit olduğunu düşünürsek;

$$f_1 (z_1, x_1) = 2z_1 + x_1^2 \ldots\ldots\ldots (9)$$

$z_1$ birinci devre başındaki envanter, $x_1$ birinci devre içinde yapılan üretim olduğuna göre ikinci devre başındaki envanter;

$$z_2 = z_1 + x_1 - 5 \qquad z_1 \geqslant 0;\ x_1 \geqslant 0 \ldots\ldots\ldots (10)$$

olacaktır. Buna göre birinci, ikinci ve üçüncü devreler maliyetlerinin toplamı şöyle gösterilir :

$$F_1 (z_1, x_1; x_2^*, x_3^*) = f_1 (z_1, x_1) + F_2 (z_2; x_2^*, x_3^*)$$

$$= 2z_1 + x_1^2 + 3z_2 + 4 + \left(12 - \frac{z_2}{2}\right)^2 + \left(13 - \frac{z_2}{2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots (11)$$

$x_1$ e göre türevi alınır, $z_2$ (10) da gösterildiği gibi $z_1$ ve $x_1$ cinsinden yazılır ve $z_1$ de baştan verilen bir sabit olarak kabul edilirse türev ifadesi sıfıra eşitlendiğinde;

$$2x_1 + 3 - \left(12 - \frac{z_1 + x_1 - 5}{2}\right) - \left(13 - \frac{z_1 + x_1 - 5}{2}\right) = 0$$

$$x_1^* = 9 - \frac{z_1}{3} \ldots\ldots\ldots (12)$$

elde edilecektir. $z_1$ gibi bir başlangıç envanteri ile başlanıp ve her devrede optimal karar verildiği hale göre bütün devreler için toplam minimum maliyet;

$$F_1 (z_1; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 4z_1 + 16 + \left(9 - \frac{z_1}{3}\right)^2 + \left(10 - \frac{z_1}{3}\right)^2 + \left(11 - \frac{z_1}{3}\right)^2$$

olacaktır.

Başlangıç envanteri sıfır olduğunda yani $z_1 = 0$ olarak alındığında (12) den $x_1^* = 9$, (10) dan $z_2 = 4$, (7) den $x_2^* = 10$, (4) den $z_3 = 4$ ve (1) den $x_3^* = 11$ bulunacaktır.

Bu sonuç daha evvel elde ettiğimizin aynıdır. Ancak, burada bir değişkenli üç fonksiyonu optimize ederek sonuca vardık, daha evvel ise üç değişkenli bir fonksiyonun optimizasyonu yoluyla sonuca gitmiştik. (12), (10), (7) ve (4) numaralı formüller başlangıç envantere tâbi optimal üretimin tayininde de kullanılabilir. Bu çözümün uygun çözüm olması ortaya çıkan z ler ve x lerin bütün ve sınırlanmaları sağlaması şartına bağlıdır. Dinamik programlama tekniği takip eden örnekte gösterildiği gibi optimal çözümün uygun çözüm bölgesinin sınırı üzerine düştüğü durumlarda da kullanılabilir.

**Örnek 2.**

Önceki örnekte verilen gerekli üretim miktarlarını her üç devrede de 5 birim olarak alalım. Önceki örnekte aynı çözüme vardığımız ilk çözüm tekniği bu örnek için yeterli değildir. Buna rağmen dinamik programlama ile optimal çözüm elde edilebilir.

İlk yaklaşımımız önceki örnekte gösterilen analitik metod olacaktır. $x_3$ ün optimal değeri gene gerekli üretim miktarı ile devre başındaki envanterin farkı olacaktır. Dördüncü devrenin başındaki optimal envanterin sıfır olduğu açık olduğu için;

$$x_3^* = 5 - z_3$$

üçüncü devrede toplam maliyet şöyle verilir;

$$F_3(z_3; x_3^*) = f_3(z_3, x_3^*) = 2z_3 + (5 - z_3)^2$$

ikinci devre için :

$$z_3 = z_2 + x_2 - 5$$

$$F_2(z_2, x_2; x_3^*) = f_2(z_2, x_2) + F_3(z_3; x_3^*)$$

$$= 2z_2 + x_2^2 + 2(z_2 + x_2 - 5) + (10 - z_2 - x_2)^2$$

$$\frac{dF_2}{dx_2} = 0; \; 2x_2 + 2 - 2(10 - z_2 - x_2) = 0$$

$$\text{veya } x_2^* = \frac{9}{2} - \frac{z_2}{2}$$

Birinci devre için :

$$z_2 = z_1 + x_1 - 5 \qquad z_1 \geqslant 0; \quad x_1 \geqslant 0$$

$$f_1(z_1, x_1) = 2z_1 + x_1^2$$

$$F_1(z_1, x_1; x_2^*, x_2^*, x_3^*) = f_1(z_1, x_1) + F_2(z_1 + x_1 - 5; x_2^*, x_3^*)$$

$$= 2z_1 + x_1^2 + 3z_2 + 1/4\,(9 - z_2)^2 - 1 + (11/2 - \frac{z_2}{2})^2$$

$$= 2z_1 + x_1^2 + 3\,(z_1 + x_1 - 5) + 1/4\,(14 - z_1 - x_1)^2 - 1 + (8 - \frac{z_1}{2} - \frac{x_1}{2})^2$$

$$\frac{dF_1}{dx_1} = 0;\ 2x_1 + 3 - 1/2\,(14 - z_1 - x_1) - (8 - \frac{z_1}{2} - \frac{x_1}{2}) = 0$$

$$x_1^* = 4 - \frac{z_1}{3}$$

$$F_1(z_1; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 2z_1 + (4 - \frac{z_1}{3})^2 + 3\,(z_1 + 4 - \frac{z_1}{3} - 5)$$

$$+ 1/4\,(14 - z_1 - 4 + \frac{z_1}{3})^2 - 1$$

$$+ (8 - \frac{z_1}{2} - 2 + \frac{z_1}{6})^2$$

$$= 4\,(z_1 - 1) + (4 - \frac{z_1}{3})^2 + 1/4\,(10 - \frac{2z_1}{3})^2 + (6 - \frac{z_1}{3})^2$$

Bu analitik metod ile optimal çözüm ($z_1 = 0$ için) $x_1^* = 4$, $z_2 = -1$ dir. Baştan yaptığımız tarif ile $z_2$ negatif olamıyacağından bu çözüm uygun değildir. Aşağıda anlatacağımız tablosal metod dinamik programlamanın sadece uygun alternatifleri gözönüne alacak şekilde nasıl geliştirilebileceğini gösterecektir.

### ii) Tablosal Metot

Direkt olarak uygulanan analitik metot, kayıtlanmamış optimal uygun değil ise, uygun bir optimal çözüm sağlamamaktadır. Bir önceki örnekte elde edilen çözüm şart olduğu gibi bir tam sayı ve pozitif değildir. Ancak dinamik programlamanın kullanılabildiği bir yol vardır. Bazı alternatiflerin sıralandırılmasından ibaret olan metot aynı örnek üzerinde yani gerekli üretim miktarlarının her üç devrede de 5 birim olduğu örnekte gösterilecektir.

**Örnek 3.**

İlk safha, son devrede, o devrenin başlangıç envanterinin fonksiyonu olmak üzere, bütün uygun alternatiflerin listelenmesinden ibarettir.

$$x_3^* = 5 - z_3 \quad \ldots\ldots. \quad (13)$$

Bu alternatiflere göre devre içindeki maliyetler şöyle hesaplanır;

$$f_3\,(z_3, x_3^*) = 2z_3 + (5 - z_3)^2 \quad \ldots\ldots. \quad (14)$$

ve tablo üzerinde gösterilir.

TABLO 1.

| $z_3$ | $x_3^*$ | $F_3\,(z_3; x_3^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 5 | $0 + 25 = 25$ |
| 1 | 4 | $2 + 16 = 18$ |
| 2 | 3 | $4 + 9 = 13$ |
| 3 | 2 | $6 + 4 = 10$ |
| 4 | 1 | $8 + 1 = 9$ |
| 5 | 0 | $10 + 0 = 10$ |

Bundan sonraki safhada ikinci devredeki maliyetler hesaplanır, bu daha evvel de verildiği gibi şöyledir :

$$F_2 (z_2, x_2; x_3^*) = 2z_2 + x_2^2 + F_3 (z_3; x_3^*) \quad \ldots\ldots\ldots (15$$

Her $z_2$ başlangıç envanteri için bir dizi uygun $x_2$ değerleri vardır ve böyle her uygun çift $(z_2, x_2)$ için üçüncü period ile ilgili başlangıç envanteri şöyle belirlenir :

$$z_3 = z_2 + x_2 - 5 \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Tablo 2. uygun çiftler için $z_3$ değerlerini gösteriyor. Sağ alt taraftaki $(z_2, x_2)$ ikilileri uygundur fakat dördüncü devre başındaki envanter sıfırdan büyük olacağı için bunların optimal olmadığı açıktır.

**TABLO 2**

$z_3 (z_2, x_2, 5) = z_2 + x_2 + 5$

| $z_2$ \ $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Uygun olmayan bölge | | | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | | | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 2 | | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | |
| 3 | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| 4 | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | $z_4 > 0$ | | |
| 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | Optimal | | |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | olmayan | | |
| 7 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | bölge | | |
| 8 | 3 | 4 | 5 | | | | | | | | |
| 9 | 4 | 5 | | | | | | | | | |
| 10 | 5 | | | | | | | | | | |

(19) un hesaplanışı ve mümkün olan $z_2$ değerleri için $x_2$ in optimal değerinin tayini Tablo 3. de gösterilmiştir. Tablonun ilk kısmı (A) maliyetleri göstermektedir. Üretim maliyeti sadece $x_2$ ye bağlıdır, ve $x_2$ nin altında gösterilmiştir. Bekletme maliyeti sadece $z_2$ ye bağlıdır ve $z_2$ nin yanında gösterilmiştir. Tablonun bünyesindeki maliyet, ikinci devrenin başlangıç envanterinin $z_2$ olması ve bu devre içinde $x_2$ kadar üretim yapılmış olması şartıyla, üçüncü devrenin maliyetini teşkil eder. Bu maliyet $(z_2, x_2)$ için Tablo 2. den doğ-

Tablo 3

(A) $2z_2;\ x_2^2;\ F_1(z_2 - x_2 - 5;\ x_3^*)$

| $z_2$ | $x_2$ → | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $2z_2$ \ $x_2^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| 0 | 0 | | | | | | 25 | 18 | 13 | 10 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | | | | | 25 | 18 | 13 | 10 | 9 | 10 | |
| 2 | 4 | | | | 25 | 18 | 13 | 10 | 9 | 10 | | |
| 3 | 6 | | | 25 | 18 | 13 | 10 | 9 | 10 | | | |
| 4 | 8 | | 25 | 18 | 13 | 10 | 9 | 10 | | | | |
| 5 | 10 | 25 | 18 | 13 | 10 | 9 | 10 | | | | | |
| 6 | 12 | 18 | 13 | 10 | 9 | 10 | | | | | | |
| 7 | 14 | 13 | 10 | 9 | 10 | | | | | | | |
| 8 | 16 | 10 | 9 | 10 | | | | | | | | |
| 9 | 19 | 9 | 10 | | | | | | | | | |
| 10 | 20 | 10 | | | | | | | | | | |

(B) $F_2(z_2,\ x_2;\ x_3^*)$

| $z_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | 50 | 54 | 62 | 74 | 90 | 110 |
| 1 | | | | | 43 | 45 | 51 | 61 | 75 | 93 | |
| 2 | | | | 39 | 38 | 42 | 50 | 63 | 78 | | |
| 3 | | | 35 | 33 | 35 | 41 | 51 | 63 | | | |
| 4 | | 34 | 30 | 30 | 34 | 42 | 54 | | | | |
| 5 | 35 | 29 | 27 | 29 | 35 | 45 | | | | | |
| 6 | 30 | 26 | 26 | 30 | 38 | | | | | | |
| 7 | 27 | 25 | 27 | 33 | | | | | | | |
| 8 | 26 | 26 | 30 | | | | | | | | |
| 9 | 27 | 29 | | | | | | | | | |
| 10 | 30 | | | | | | | | | | |

(C)

| $z_2$ | $x_2^*$ | $F_2(z_2;\ x_2^*,\ x_3^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 5 | 50 |
| 1 | 4 | 43 |
| 2 | 4 3 | 38 |
| 3 | 3 | 33 |
| 4 | 3,2 | 30 |
| 5 | 2 | 27 |
| 6 | 2,1 | 26 |
| 7 | 1 | 25 |
| 8 | 1 | 26 |
| 9 | 0 | 27 |
| 10 | 0 | 30 |

ru $z_3$ ü elde etmek ve bunun karşılığı olan $F_3$ ü Tablo 1 den bulmakla, hesaplanır.

Örnek olarak;

Şayet $z_2 = 4$; $x_2 = 3$ ise

$z_3 = 2$; $F\,(2; x_3^*) = 13$ bulunur.

Üç ayrı maliyet tablonun ikinci kısmında (B) toplanır ve bu $F_2\,(z_2, x_2; x_3^*)$ yi verir. Meselâ :

Şayet $z_2 = 4$ bekletme maliyeti $= 8$

$x_2 = 3$ production (üretim) maliyeti $= 9$

$z_3 = 2$ $x_2^* = 2$ ve $F_3\,(2; x_3^*) = 13$ ise

$F_2\,(4, 3; x_3^*) = 8 + 9 + 13 = 30$ olur.

Herhangi bir $z_2$ için $x_2$ nin optimal değeri sadece Tablo 3 (B) nin bir sırasındaki bütün değerleri incelemek ve en küçüğünü seçmekle bulunabilir. Tekabül eden $x_2$ tablonun üçüncü kısmında $x_2^*$ olarak gösterilir. Minimum maliyet $F_2\,(z_2; x_2^*, x_3^*)$ nin altında gösterilir.

Birinci devre için benzer safhalar sadece tablo 3 (C) yi kullanmakla yürütülür. Teorik olarak $x_1$, 15 e kadar değerler alabilir. An-

Tablo 4

$$z_2(z_1, x_1, 5) = z_1 + x_1 - 5$$

| $z_1$ \ $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | Uygun olmıyan bölge | | | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | | | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

cak bunlar optimal olmadıkları için hesaplamalar $x_1 = 8$ e kadar devam ettirilmiştir.

Tablo 5 (C) den şayet $z_1 = 0$ ise $x_1^* = 5$ olacağı ve bunun $z_2 = 0$ olarak sonuçlanacağı, Tablo 3 (C) den $x_2$ nin optimal değerinin 5 olduğu ve gene $z_3 = 0$ ve Tablo 1 den $x_3^* = 5$ olduğu neticesine varılır. Bu problemin optimal çözümü ($z_1 = 0$ için) :

$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 5$ dir.

Örnek, dinamik programlama tekniğinin, belirli sayıda bağımsız uygun alternatiflerin bulunduğu problemlerde optimal bir çözüm elde etmek için, kullanılabileceğini göstermektedir.

Dikkat edilmelidir ki, metod bekletme ve üretim maliyetlerinin devreden devreye aynı olmasına bağlı değildir. Şayet bunlar değişseydi hesaplama miktarı ve çözüm yolu aynı kalacaktı. Parametreler için nümerik değerler ve talep sarih olarak verilmemiş olsaydı örnekte gösterilen tablosal metod kullanılamazdı. Buna rağmen analitik metod nümerik değerler belirtilmeden de kullanılabilir. Bu önümüzdeki kısımda gösterilecektir.

**Örnek 4.**

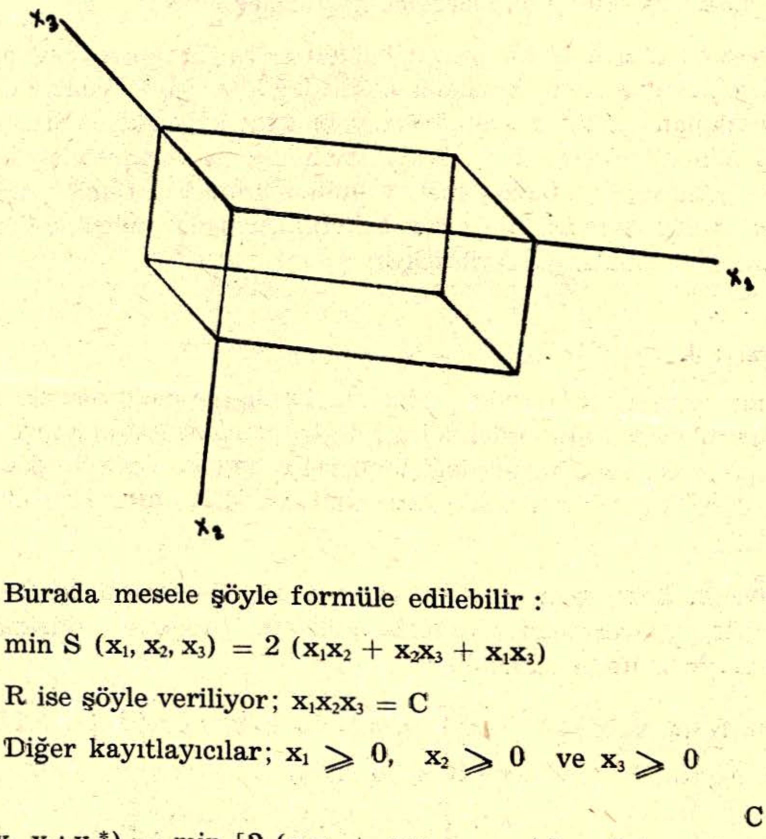
Daha önceki örneklerde problemin özelliğine bağlı olarak kararın belirli bir sıra takip ederek verildiği durumlar ele alınmıştı. Dinamik programlama karar değişkenlerinin zaman veya başka kriterlere göre doğal bir sıralamaların bulunmadığı durumlara da uygulanabilir.

Gayenin $S(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonunun bir R cümlesi içinde bulunan $x_1, x_2, x_3$ üzerinden minimize edilmesi olduğunu düşünelim. Minimum şöyle ifade edilebilir :

$$\begin{aligned}
\min_{(x_1, x_2, x_3)\,\varepsilon R} [S(x_1, x_2, x_3)] &= \min_{x_1 \varepsilon R_1} \Big[ \min_{x_2 \varepsilon R_2} [\min_{x_3 \varepsilon R_3} S(x_1, x_2, x_3)] \Big] \\
&= \min_{x_1 \varepsilon R_1} \Big[ \min_{x_2 \varepsilon R_2} [S_2(x_1, x_2; x_3^*)] \Big] \\
&= \min_{x_1 \varepsilon R_1} S_1(x_1; x_2^*, x_3^*) \\
&= S_0
\end{aligned}$$

İç içe verilen parantezler bütün kabul edilebilir değerler için S in minimumunun ilk önce elde edilmesi gerektiğini belirtmektedir. $x_1$ ve $x_2$ ye bağlı olarak ortaya çıkan fonksiyonun minimumu bundan sonra elde edilir. Netice olarak en sonda $x_1$ e bağlı olan fonksiyonun minimumu elde edilir. Genel olarak kabul edilebilir değer cümlesi $R_2$, $x_1$ e bağlı ve kabul edilebilir değer cümlesi $R_3$, $x_1$ ve $x_2$ ye bağlı olacaktır.

Sabit bir hacimi olan bütün dikdörtgen prizmalar içinde en küçük yüzey alana sahip olanını bulma problemini ele alalım




Burada mesele şöyle formüle edilebilir :

$$\min S\ (x_1, x_2, x_3) = 2\ (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$$

R ise şöyle veriliyor; $x_1x_2x_3 = C$

Diğer kayıtlayıcılar; $x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$ ve $x_3 \geqslant 0$

$$S_2\ (x_1, x_2; x_3^*) = \min\ [2\ (x_1x_2 + x_2x_3 - x_1x_3)] = 2\ (x_1x_2 + \frac{C}{x_1} + \frac{C}{x_2})$$

$$x^3 = \frac{C}{x_1x_2}$$

Tablo 5.

(A) $2z_1, x_1^2, F_1(z_1 + x_1 - 5; x_2^*, x_3^*)$

(B) $F_1(z_1, x_1; x_2^*, x_3^*)$

(C)

| | $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $z_1$ | $x_1^*$ | $F_1(z_1; x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_1$ | $2z_1$ \ $x_1^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | | | | | | 50 | 43 | 38 | 33 | 30 | | | | | | 75 | 79 | 87 | 97 | 111 | 0 | 5 | 75 |
| 1 | 2 | | | | | 50 | 43 | 38 | 33 | 30 | 27 | | | | | 68 | 70 | 76 | [illegible] | 96 | 110 | 1 | 4 | 68 |
| 2 | 4 | | | | 50 | 43 | 38 | 33 | 30 | 27 | 26 | | | | 63 | 63 | 67 | 73 | 83 | 95 | 111 | 2 | 3,4 | 63 |
| 3 | 6 | | | 50 | 43 | 38 | 33 | 30 | 27 | 26 | 25 | | | 60 | 58 | 60 | 64 | 72 | 82 | 96 | 112 | 3 | 3 | 58 |
| 4 | 8 | | 50 | 43 | 38 | 33 | 30 | 27 | 26 | 25 | 26 | | 60 | 55 | 55 | 57 | 63 | 81 | 63 | 97 | 115 | 4 | 2,3 | 55 |
| 5 | 10 | 50 | 43 | 38 | 33 | 30 | 27 | 26 | 25 | 26 | 27 | 60 | 55 | 52 | 52 | 51 | 62 | 72 | 84 | 100 | 118 | 5 | 2,3 | 52 |
| 6 | 12 | 43 | 38 | 33 | 30 | 27 | 26 | 25 | 26 | 27 | 30 | 55 | 52 | 49 | 51 | | | | | | | 6 | 2 | 49 |
| 7 | 14 | 38 | 33 | 30 | 27 | 26 | | | | | | 52 | 49 | 48 | 50 | | | | | | | 7 | 2 | 48 |
| 8 | 16 | 33 | 30 | 27 | 26 | | | | | | | 49 | 48 | 47 | 51 | | | | | | | 8 | 2 | 47 |

Burada $x_3^* = \frac{C}{x_1 x_2}$ dir. Çünkü bu mümkün olan tek değerdir.

$$S_1 (x_1; x_2^*, x_3^*) = \min_{0 < x_2 < \infty} [S_2 (x_1, x_2; x_3^*)] = \min_{0 < x_2 < \infty} [2 (x_1 x_2 + \frac{C}{x_1} + \frac{C}{x_2})]$$

Bu safhada $x_2$ nin herhangi pozitif değeri kabul edilebilir. Minimum değer $S_2$ nin $x_2$ ye göre türevinin sıfıra eşitlenmesi ve $x_2$ için çözülmesi ile elde edilir.

$$2 (x_1 - \frac{C}{x_2^2}) = 0; \quad x_2^* = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x_1}}; \quad S_1 (x_1; x_2^*, x_3^*)$$

$$= 2 (2 \sqrt{C} \sqrt{x_1} + \frac{C}{x_1})$$

Sonuç olarak;

$$S_0 = \min_{0 < x_1 < \infty} [S_1 (x_1; x_2^*, x_3^*)] = \min_{0 < x_1 < \infty} 2 (2 \sqrt{Cx_1} + \frac{C}{x_1}) = 6\, C^{2/3}$$

diyebiliriz çünkü;

$$\frac{dS_1}{dx_1} = 2 (\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{x_1}} - \frac{C}{x_1^2}) = 0 \qquad x_1^* = C^{1/3} \text{ ü verir.}$$

Gene herhangi bir pozitif değer kabul edilebilir. Optimal çözüm şöyle verilir :

$$x_1^* = C^{1/3} \quad ; \; x_2^* = (\frac{C}{x_1^*})^{1/2} = C^{1/3} \text{ ve } x_3^* = \frac{C}{x_1^* x_2^*} = C^{1/3}$$

Bu örnek metodda değişkenlerin simetrisini gösteriyor. Teorik olarak değişkenleri herhangi bir sırayla kullanabiliriz. Pratikte dinamik programlama yaklaşımının değeri, bunun gibi problemlerde $R_3$, $R_2$ ve $R_1$ bölgelerinin ve $S_2$, $S_1$ ve $S_0$ fonksiyonlarının elde edilebilme kolaylığına bağlıdır. Başka metodlarla çözülebilen problemlerde dinamik programlama yaklaşımı hesaplama yönünden daha az cazip görülür; ancak bazı durumlarda bölgeler ve gerekli fonksiyonlar doğal olarak ortaya çıkar ve dinamik programlama diğer metodlardan daha etkin olabilir.

## İLERİYE-DOĞRU ÇÖZÜM METODU

Dinamik programlama ileriye doğru yani birinci devreden başlayıp ileriye doğru son devreye kadar giderek de uygulanabilir.

### i) Analitik Çözüm

Gene örnek 1 ve örnek 2 de verilen envanter durumunu ele alalım. Üretim için gerekli miktarları 1, 2 ve 3 üncü devrelerde sırasıyla $y_1$, $y_2$ ve $y_3$ ile gösterelim. Önceki kısımda verdiğimiz tarifin aksine burada $z_i$ değişkeni i devresinin nihai envanterini temsil ediyor; $z_0$ sıfırıncı periodun sonundaki envanter ve birinci periodun (devrenin) başlangıç envanteridir. Bu örnekte envanter taşıma maliyeti devrenin sonunda elde bulunan envantere takdir edilir. Birinci devrede toplam maliyet, $z_0$ verilir ve optimal karar birinci devrede alınırsa ki bu $z_1$ e ulaşır, şöyledir :

$$F_1(z_1; x_1^*) = f_1(z_1; x_1^*) = x_1^* + 2z_1 = (y_1 + z_1 - z_0)^2 + 2z_1 \qquad x_1^* z_1 \geqslant 0$$

ve $x_1^* = y_1 + z_1 - z_0$

(Çünkü $z_1$ ve $y_1$ verilen miktarlardır ve $x_1$ nin sadece bir tek değeri olabilir).

İkinci devrede $x_2^*$ herhangi bir $z_2$ için, verilen bir $z_1$ değerine göre birinci ve ikinci devrelerdeki toplam maliyeti minimize edecek şekilde seçilecektir. $z_1$ ve $z_2$ arasındaki alâka;

$z_1 = z_2 - x_2 + y_2$ dir.

$$\begin{aligned} F_2 (z_2, x_2; x_1^*) &= f_2 (z_2, x_2) + F_1 (z_1; x_1^*) \\ &= f_2 (z_2, x_2) + F_1 (z_2 - x_2 + y_2; x_1^*) \\ &= x_2^2 + 2z_2 + (y_1 + y_2 + z_2 - x_2 - z_0)^2 \\ &\qquad + 2 (z_2 - x_2 + y_2) \end{aligned}$$

$$\frac{dF_2}{dx_2} = 0; \quad 2x_2 - 2(y_1 + y_2 + z_2 - x_2 - z_0) - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x_2^* &= 1/2 \, [y_1 + y_2 + z_2 - z_0 + 1] \\ &= 1/2 \, [Y_2 + z_2 - z_0 + 1] \end{aligned}$$

burada,

$Y_2 = y_1 + y_2$ dir.

$$\begin{aligned} F_2 (z_2; x_2^*, x_1^*) &= 1/4 \, [Y_2 + z_2 - z_0 + 1)^2 + (Y_2 + z_2 - z_0 - 1)^2] \\ &\qquad + 3z_2 + (y_2 - y_1 + z_0 - 1) \end{aligned}$$

Üçüncü periodda gaye $x_3^*$ ü, birinci, ikinci ve üçüncü periodlarda (devrelerde) toplam maliyeti minimize edecek şekilde seçmektir. $z_2$ ile $z_3$ arasındaki alâka :

$z_2 = z_3 - x_3 + y_3$ dür.

$$\begin{aligned} F_3 (z_3, x_3; x_2^*, x_1^* &= f_3 (z_3, x_3) + F_2 (z_2; x_2^*, x_1^*) \\ &= x_3^2 + 2z_3 + F_2 (z_3 - x_3 + y_3; x_2^*, x^*_1) \\ &= x_3^2 + 2z_3 + 1/4 \, (Y_3 + 1 + z_3 - x_3 - z_0)^2 \\ &\quad + 3 (z_3 - x_3 + y_3) + 1/4 \, (Y_3 - 1 + z_3 - x_3 - z_0)^2 \\ &\quad + ,y_2 - y_1 + z_0 - 1) \end{aligned}$$

burada,

$$Y_3 = y_1 + y_2 + y_3 \quad \text{dür.}$$

$$\frac{dF_3}{dx_3} = 0;\ 2x_3 - 1/2\,(Y_3 + 1 \quad + z_3 - x_3 - z_0) - 3$$

$$- 1/2\ (Y_3 - 1 + z_3 - x_3 - z_0)$$

$$x_3^* = 1/3\ [Y_3 + z_3 + 3 - z_0]$$

$F_3$ ün minimum değeri;

$$F_3\ (z_3;\ x_3^*, x^*_2, x_1^*) = x^{*2}_3 + \left[ x^*_2 - \frac{z_3 - z_0}{2} \right]^2$$

$$+ \left[ x_1^* + \frac{z_3}{2} \right]^2 + 5z_3 + 2\ (y_3 - y_1)\ z_0 - 4$$

ile verilir. Varsayımlara göre $z_3 = 0$ ve $z_0 = 0$ ise;

$$x_3^* = \frac{Y_3}{3} + 1 = 1/3\ (y_1 + y_2 + y_3) + 1$$

$$z_2 = y_3 - \frac{Y_3}{3} - 1 = 1/3\ (2y_3 - y_1 - y_2) - 1$$

$$x_2^* = 1/2\ (y_1 + y_2 + 1) + 1/6\ (2y_3 - y_1 - y_2) - 1/2$$

$$= 1/3\ (y_1 + y_2 + y_3)$$

$$z_1 = 1/3\ (2y_3 - y_1 - y_2) - 1 - 1/3\ (y_1 + y_2 + y_3) + y_2$$

$$= 1/3\ [-2y_1 + y_2 + y_3] - 1$$

$$x_1^* = y_1 + 1/3\ [-2y_1 + y_2 + y_3] - 1 = 1/3\ (y_1 + y_2 + y_3) - 1$$

Özellikle, şayet $y_1 = 5$, $y_2 = 10$, $y_3 = 15$ ise;

$x_3 = 11$; $x_2 = 10$; $x_1 = 9$; $z_2 = 4$; $z_1 = 4$ olur.

**ii) Tablosal Metod**

Bu metodu göstermek gayesiyle gene bir envanter örneğini ele alalım. Gerekli üretim miktarları her üç devre için de 5 birimdir. Burada da, $z_i$ devre sonundaki envanteri gösterecek ve envanter taşıma maliyeti devre sonunda tayin edilecektir.

Problemin başında başlangıç envanteri biliniyor varsayılmaktadır. O halde :

$$z_1 = z_0 + x_1 - 5$$

İleriye - doğru çözüm tekniği şu sorunun cevaplandırılmasına dayanır: eğer birinci devre sonunda $z_1$ durumunda ise, optimal kararların bir önceki devirlerde verildiği varsayıldığına göre birinci devre için optimal karar nedir? Tablo 6 A çeşitli $(z_1, x_1)$ ikilileri için $z_0$ durumunu vermektedir.

Bu noktada $z_0$ ve $z_0$ ile ilgili maliyet biliniyor kabul edilmelidir; burada $z_0 = 0$ ve $F_0 (z_0) = 0$. O halde herhangi $z_1$ için optimal $x_1$ aşağıdaki denklemler ile belirlenir.

$$x_1^* = z_1 + 5$$

$$f (z_1; x_1^*) = 2z_1 + (z_1 + 5)^2$$

$$F_1 (z_1; x_1^*) = f_1 (z_1; x_1)$$

Örnek olarak :

$$f_1 (5, 10) = 10 - 100 = 110 \qquad F_1 (5, 10) = 110.$$

Bu değerler Tablo 6B ve Tablo 6C de gösterilmiştir.

Şayet $z_0$ sıfırdan başka bir değer olsa idi;

$$x_1^* = z_1 - z_0 + 5$$

olacaktı ve tablo 6B deki değerler ilgili olacaktı.

Aynı süreç şimdi ikinci devre için tekrarlanabilir. Herhangi bir $z_2$ için optimal $x_2$, ikinci devrede, $z_2$ envanteri ile sonuçlanan maliyeti

Tablo 6A

$$z_0 = z_1 - x_1 + 5$$

| $z_1$ \ $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | | | | | |
| 1 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | | | | |
| 2 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | | | |
| 3 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | | |
| 4 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
| 5 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 6 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 7 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
| 8 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| 9 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |

Uygun olmayan bölge

Tablo 6B$_2$

$$f_1(z_1, x_1) = 2z_1 + x_1^2 + F_0(z_0) \qquad \text{-16-}$$

| $z_1$ | $2z_1$ | $x_1$: 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 |
| 0 | 0 | | | | | | 25 | | | | | | | | | | |
| 1 | 2 | | | | | | | 38 | | | | | | | | | |
| 2 | 4 | | | | | | | | 53 | | | | | | | | |
| 3 | 6 | | | | | | | | | 70 | | | | | | | |
| 4 | 8 | | | | | | | | | | 89 | | | | | | |
| 5 | 10 | | | | | | | | | | | 110 | | | | | |
| 6 | 12 | | | | | | | | | | | | 133 | | | | |
| 7 | 14 | | | | | | | | | | | | | 158 | | | |
| 8 | 16 | | | | | | | | | | | | | | 185 | | |
| 9 | 18 | | | | | | | | | | | | | | | 214 | |
| 10 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | | 225 |

Uygun olmayan bölge

Eğer $z_o = 0$ ise ilgili değildir.

minimize eder; burada optimal kararın birinci devrede verildiği varsayılmaktadır.

$$z_1 = z_2 - x_2 + 5 \text{ ve } F_2(z_2, x_2; x_1^*) = f_2(z_2, x_2) + F_1(z_1; x_1^*)$$

$$= 2z_2 - x_2^2 + F_1(z_2 - x_2 + 5; x_1^*)$$

örnek olarak;

$$F_2(4, 6; x_1^*) = 2(4) + 6^2 + 70 = 114 \text{ çünkü } F_1(3; x_1^*) = 70$$

TABLO 6C

| $z_1$ | $x_1^*$ | $F_1(z_1; x_1^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 5 | 25 |
| 1 | 6 | 38 |
| 2 | 7 | 53 |
| 3 | 8 | 70 |
| 4 | 9 | 89 |
| 5 | 10 | 110 |
| 6 | 11 | 133 |
| 7 | 12 | 158 |
| 8 | 13 | 185 |
| 9 | 14 | 214 |
| 10 | 15 | 245 |

$F_2(z_2, x_2; x_1^*)$ değerleri Tablo 7A da, $x_2^*$ ve $F_2(z_2; x_2^*, x_1^*)$ değerleri de Tablo 7B de verilmiştir.

Tablo 7A

$$F_2(z_2, x_2; x_1^*) = f_2(z_2, x_2) + F(z_1; x_1^*)$$

| $z_2$ \ $x_2$ | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $2z_2$ \ $x_2^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 110 |
| 0 | 0 | 110 | 90 | 74 | 62 | 54 | 50 | uygun olmıyan bölge | | | | |
| 1 | 2 | 135 | 113 | 95 | 81 | 71 | 65 | 63 | | | | |
| 2 | 4 | 162 | 138 | 118 | 102 | 90 | 82 | 78 | 78 | | | |
| 3 | 6 | 191 | 165 | 143 | 125 | 111 | 101 | 95 | 93 | 95 | | |
| 4 | 8 | 222 | 194 | 170 | 150 | 134 | 122 | 114 | 110 | 110 | 114 | |
| 5 | 10 | 255 | 225 | 199 | 177 | 159 | 145 | 135 | 129 | 127 | 129 | 135 |

TABLO 7B

| $z_2$ | $x_2^*$ | $F_2\ (z_2;\ x_2^*,\ x_1^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 5 | 50 |
| 1 | 6 | 63 |
| 2 | 6,7 | 78 |
| 3 | 7 | 93 |
| 4 | 7,8 | 110 |
| 5 | 8 | 127 |

Üçüncü devrede,

$$z_2 = z_3 - x_3 + 5$$

ve

$$F_3\ (z_3, x_3;\ x_2^*, x_1^*) = f_3\ (z_3, x_3)\ + F_2\ (z_2;\ x_2^*, x_1^*)$$

$$= 2z_3 + x_3^2\ F_2\ (z_3 - x_3 + 5)$$

örnek olarak,

$$F_3\ (3, 5;\ x_2^*, x_1^*)\ = 6 + 25 + 93 = 124$$

Bu değerler Tablo 8A da ve $x_3^*$ ile $F_3\ (z_3;\ x_3^*,\ x_2^*,\ x_1^*)$ değerleri de Tablo 8B de verilmiştir.

Tablo 8A

$$F_3(z_3, x_2; x_2^*, x_1^*) = f_3(z_3, x_3) + F_2(z_2; x_2^*, x_1^*)$$

| $z_3$ | $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_2^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| | $2z_3$ | | | | | | | Uygun olmayan bölge | | | | |
| 0 | 0 | 127 | 111 | 97 | 87 | 79 | 75 | | | | | |
| 1 | 2 | | 130 | 116 | 104 | 96 | 90 | 88 | | | | |
| 2 | 4 | | | 135 | 123 | 113 | 107 | 103 | 103 | | | |
| 3 | 6 | | | | 142 | 132 | 124 | 120 | 118 | 120 | | |
| 4 | 8 | | | | | [illegible] | 143 | 137 | 135 | 135 | 139 | |
| 5 | 10 | Optimal değil | | | | | 162 | 156 | 152 | 152 | 154 | 160 |

TABLO 8B

| $z_3$ | $x_3^*$ | $F_3(z_3; x_3^*, x_2^*, x_1^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 5 | 75 |
| 1 | 6 | 88 |
| 2 | 6,7 | 103 |
| 3 | 7 | 118 |
| 4 | 7,8 | 135 |
| 5 | 7,8 | 152 |

## C. GENEL TEORİ

Önceki bölümlerdeki örnekler geriye - doğru ve ileriye doğru dinamik programlama metodlarının birbirini takip eden olaylar şeklinde formüle edilen problemlere nasıl tatbik edildiğini göstermiştir. Bu bölümde daha genel bir teori verilecektir. Bir münfasıl (discrete) problemin elemanları şunlardır :

**Safha veya Devreler.** Göz önüne alınacak sistem belirli sayıda durum veya devrelerden müteşekkil olacaktır. Bu safhalar biribirini takip eden sayılar ile numaralanacaktır; 1, 2, 3, . . . . . . ., n.

**Sistemin Durumu.** Her devre veya safhada sistem, «durum» diye adlandırılacak tek bir sayı ile tanımlanacaktır. Sistemin i devresindeki durumuna $z_i$ denecektir; $z_i$ devre içinde sistemin varolabildiği mümkün olan durumlar cümlesinin $[z_i]$ her hangi biri olabilir. Problem münfasıldır zira, $z_i$ sadece münfasıl değerler alabilir.

**Kontrolsuz Değişken.** Bir devrenin sonunda sistemin durumu bir kontrolsuz değişkenin tesiriyle değiştirilebilir. i devresi sonunda değişkenin değeri $y_i$ ile gösterilecektir.

**Karar Değişkeni.** Bir x değişkeni üzerinde karar vericinin kontrolü mevcuttur; karar verici tarafından i devresi için seçilen değer $x_i$ ile gösterilir. Yapılan bu seçim bir sonraki devrenin durumunu etkiler.

**Durum Değişmesi.** Her devrenin başında sistem bir durumdan diğer duruma değişir. Yeni durum sistemin bir önceki devredeki durumunun bir fonksiyonudur; i devresi içindeki kontrolsüz değişken ve i devresinin karar değişkeni, örnek olarak şunu yazabiliriz :

$$z_{i+1} = z_{i+1} \ (x_i, y_i, z_i)$$

Bu formulasyon devreden devreye değişecek şekilde yeni durumu belirleyen fonksiyonu meydana getirmektedir.

| Devre | 1 | 2 | 3 | | n |
|---|---|---|---|---|---|
| Durum | $Z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | . . . . . . . . | $z_n$ |
| Kontrolsüz değişken | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | . . . . . . . . | $y_n$ |
| Karar değişkeni | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | . . . . . . . . | $x_n$ |

Belirli bir problemde bazen $z_i$, $x_i$ ve $y_i$ leri devre içinde yukarda verilenlerden başka noktalarda olur şeklinde tanımlamak arzu edilir. Bu mümkündür. Ancak, $x_i$ ve $y_i$ nin meydana geldiği sıra açık bir şekilde belirtilmelidir.

**Gaye.** Maliyetler (kârlar), belirli bir devre içinde belirli durumda olan sistem ve kararın belli bir değeri ile alâkalıdır. Genel maliyet fonksiyonu bütün değişkenlerin fonksiyonudur :

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n;\ z_0, z_1, \ldots\ldots, z_n;\ y_1, \ldots\ldots, y_n$$

Maliyet fonksiyonu bir fonksiyonlar serisi olarak ifade edilir.

$f_i\ (z_i, x_i)$ = sistemin i devresinin başında $z_i$ durumunda ve $x_i$ kararının i devresi içinde verilmiş olduğu şartlardaki maliyet;

olarak kabul edelim.

Aslında $f_i$ kontrolsuz fakat bilinen değişkenin de bir fonksiyonudur; $y_i$ sembolü genellikle gerektiği zaman anlaşılır ve ilâve edilir.

$F_i\ (z_i, x_i; X^*_{i+1})$ = $i, i+1, \ldots\ldots, n$ devreleri içindeki toplam maliyet. Burada sistemin i devresi başında $z_i$ durumunda olması $x_i$ kararının i devresi içinde verilmesi ve optimal kararın $i+1, i+2, \ldots\ldots, n$ devrelerinde verilmesi şartı vardır.

Geriye - doğru çözüm metodu 1957 de Bellman tarafından ortaya atılan Optimalite Prensibine dayanmaktadır. Bellman şöyle demiştir : «Bir optimal politikanın öyle bir özelliği vardır ki, başlangıç durumu ve başlangıç kararları ne olursa olsun geriye kalan kararların ilk kararın neticesi olan duruma göre bir optimal politika oluşturması gerekir.» Bu $i = n, n-1, n-2 \ldots\ldots, 1$ için fonksiyonlar sırasının optimizasyonuna yol açar.

$$F_i (z_i; X_i^*] = \underset{x_i}{\text{opt}} [F_i (z_i, x_i; X_{i+1}^* ] = \underset{x_i}{\text{opt}} ([f_i (z_i, x_i) + F_{i+1} (z_{i+1}; X_{i+1}^* ]$$

Optimizasyon $x_i$ nin bütün uygun değerleri üzerinden olmalıdır ve kullanılan metod analitik veya tablosal olabilir.

İleriye - doğru çözüm metodu 1962 de Bhavnani ve Chen tarafından ortaya atılan Optimalite Prensibinin Dual'ine dayandırılmıştır. Bhavnani ve Chen şöyle demektedirler : «Bir optimal politikanın öyle bir özelliği vardır ki, takip eden durum ve kararlar ne olursa olsun, önce gelen kararlar son kararı takip eden duruma göre bir optimal politika oluşturmalıdır.» Bu aşağıdaki sıranın optimizasyonuna yol açar :

$$F_i (z_i; X_i^*) = \underset{x_i}{\text{opt}} [F_i (z_i, x_i; X_{i-1}^* ] = \underset{x_i}{\text{opt}} [f_i (z_i, x_i) + F_{i-1} (z_{i-1} ; X_{i-1}^* )]$$

burada $i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$ için $z_{i-1} = z_{i-1} (x_i, y_i, z_i)$ dir. $X_i^*$ ise $1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, i$ devrelerindeki optimal kararları, $F_i$ de $1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, i$ devreleri için toplam maliyeti gösterir.

Örnek 1 : Bir firma A birim büyüklüğünde bir kauçuk plantasyonu işletmektedir. Ancak bu plantasyonun bulunduğu ülkede, bir kanun çıkartılmış ve bu kanunun hükümlerine göre yabancılara ait bütün topraklar, bulunulan zamandan itibaren n yıl içinde herhangi bir bedel veya tazminat verilmemek üzere devletleştirilecektir. Bulunulan zamanda hükümet, teklif edilen herhangi miktar toprağı y verilen birim miktarı olmak üzere g (y) toplam fiyatı üzerinden satın alacaktır. Fonksiyon konkavdır. Çünkü, hükümet verilmek istenen bütün toprakları hemen almak istememektedir. Normal kullanımda birim başına gelir miktarı a dır.

$z_i$ = i yılı başındaki elde kalan toprak, ve $x_i$ de i devresi başında satılan toprak miktarıdır. O halde $z_i - x_i$ = i devresi içinde plantasyon için kullanılan toprak miktarı, olmaktadır. i devresi içindeki gelir satıştan gelen gelir ve normal kullanımdan gelen gelirdir :

$$f_i\,(z_i;\, x_i) = g\,(x_i) + (z_i - x_i)\,a$$

ve

$$z_i = z_{i-1} - x_{i-1}$$

Şimdi $A=4$, $a=1$, $n=3$ ve satış fiyatının $g\,(y)=1/2\,[9y-y^2]$ ile verildiği belirli bir hâli ele alalım. Ayrıca satılan birim miktarının tam sayı olması gerektiğini düşünelim :

$$F_3\,(z_3, x_3) = g\,(x_3) + (z_3 - x_3) = 1/2\,[9x_3 - x_3^2] + (z_3 - x_3)$$

$f_3\,(z_3, x_3)$ ve $x_3^*$ değerleri Tablo 9A, $F_3\,(z_3, x_3^*)$ değerleri ise Tablo 9B de verilmiştir. Örnek olarak $f_3\,(3, 1) = g\,(1) + (3-1) = 1/2\,[9\,(1) - (1)^2] + 2 = 6$ dır.

$$F_3\,(z_3;\, x_3^*) = \max_{x_3} f_3\,(z_3, x_3)$$

$$= \max_{x_3}\,[1/2\,(9x_3 - x_3^2) + (z_3 - x_3)]$$

Örnek olarak,

$$F_3\,(3;\, x_3^*) = \max_{x_3}\,[f_3\,(z_3;\, x_3)] = \max_{0,1,2,3}\,[3, 6, 8, 9] = 9;\; x_3^* = 3$$

Tablo 9A

$f_3\,(z_3,\, x_3)$

| $z_3$ \ $x_3$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | |
| 1 | 1 | 4 | Uygun olmayan bölge | | |
| 2 | 2 | 5 | 7 | | |
| 3 | 3 | 6 | 8 | 9 | |
| 4 | 4 | 7 | 9 | 10 | 10 |

Tablo 9B

| $z_3$ | $x_3^*$ | $F_3\,(z_3,\, x_3^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 4 |
| 2 | 2 | 7 |
| 3 | 3 | 9 |
| 4 | 3,4 | 10 |

2 nci ve 3 üncü yıllar için toplam gelir şöyle verilebilir;

$$F_2(z_2, x_2; x_3^*) = f_2(z_2, x_2) + F_3(z_3; x_3^*)$$
$$= f_2(z_2, x_2)\ F_3(z_2 - x_2; x_3^*)$$
$$= g(x_2) + (z_2 - x_3) + F_3(z_2 - x_2; x_3^*)$$

Örnek olarak;

$$F_2(3, 2; x_3^*) = f_2(3, 2) + F_3(z_2 - x_2; x_3^*)$$
$$= 1/2\,[18 - 4] + 3 - 2 + 4 = 7 + 1 + 4 = 12.$$

$F_2(z_2, x_2; x_3^*)$ ve $x_2^*$ değerleri Tablo 10A, $F_2(z_2; x_2^*, x_3^*)$ değerleri ise Tablo 10B de verilmiştir. $F_2(z_2; x_2^*, x_3^*)$ değerleri şöyle hesaplanmıştır :

$$F_2(z_2; x_2^*, x_3^*) = \max_{x_2} \{ f_2(z_2, x_2) + F_3(z_3; x_3^*) \}$$

$$= \max_{x_2} \{ f_2(z_2, x_2) + F_3(z_2 - x_2; x_3^*) \}$$

Tablo 10 A

$F_2(z_2, x_2; x_3^*)$

| $z_2$ \ $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | Uygun Olmayan | | | |
| 1 | 5 | 4 | | | |
| 2 | 9 | 9 | 7 | | |
| 3 | 12 | 13 | 12 | 9 | |
| 4 | 14 | 16 | 16 | 14 | 10 |

Tablo 10 B

| $z_2$ | $x_2^*$ | $F_2(z_2; x_2^*, x_3^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 5 |
| 2 | 0,1 | 9 |
| 3 | 1 | 13 |
| 4 | 1,2 | 16 |

Birinci, ikinci ve üçüncü yıllar için toplam gelir şöyle verilir :

$$F_1(z_1, x_1; x_2^*, x_3^*) = f_1(z_1, x_1) + F_2(z_2; x_2^*, x_3^*)$$

$F_1(z_1, x_1; x_2^*, x_3^*)$ ve $x_1^*$ değerleri Tablo 11A da, $F_1(z_1; x_1^*, x_2^*$ $x_3^*)$ değerleri de Tablo 11B de verilmiştir.

**Tablo 11 A**

| $z_1 \setminus x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | *uygun olmayan bölge* | | | |
| 1 | 6 | 4 | | | |
| 2 | 11 | 10 | 7 | | |
| 3 | 16 | 15 | 13 | 9 | |
| 4 | 20 | 20 | 18 | 15 | 10 |

**Tablo 11 B**

| $z_1$ | $x_1^*$ | $F(z_1; x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 6 |
| 2 | 0 | 11 |
| 3 | 0 | 16 |
| 4 | 0,1 | 20 |

$z_1 = 4$ olduğu için başlangıç durumları ve kararları şöyledir :

$$\begin{tikzcd}
 & & 1;\ z_3 = 3;\ x_3^* = 3; & \\
 & 0;\ z_2 = 4;\ x_2^* = \arrow[ur] \arrow[r] & 2;\ z_3 = 2;\ x_3^* = 2; & z_4 = 0 \\
z_1 = 4;\ x_1^* = \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & 1;\ z_2 = 3;\ x_2^* = 1; \arrow[uur] & &
\end{tikzcd}$$

Örnek 2 : Aynı örnek ileriye - doğru çözüm metodu ile de çözülebilir. $z_i$, i yılı sonunda elde kalan toprak miktarını ve $x_i$, i yılı başında satılan toprak miktarını gösteriyor kabul edersek;

$$z_i = z_{i-1} \quad — x_i \text{ veya } x_i = — z_i + z_{i-i}$$

olacaktır. Bu alâka Tablo 12A da gösterilmiştir.

Birinci yılda gelir miktarını, $z_0 = 4$ olduğunu göz önüne alarak, şöyle hesaplıyabiliriz;

$$F_1(z_1, x_1) = g(x_1) + z_1 + F(z_0)$$

$$= 1/2\,[9x_1 — x_1^2] + 3$$

örnek olarak,

$$F_1(3, 1) = 1/2\,[9 — 1] + 3 = 7$$

$F_1(z_1, x_1)$ değerleri Tablo 12B de verilmiştir. Herhangi bir $z_1$ değeri için optimal $x_1$ değeri; $z_0 = 4$ verildiği zaman geliri maksimize eden $x_1$ değeridir. Maksimum gelir sıra içindeki en büyük değerdir. Bu sebepten dolayı $F_1$ $(z_1; x_1^*)$ her sıranın en büyük değeridir. $x^*_1$ ise $F_1$ $(z_1; x^*_1)$ in göründüğü sütunun başındaki x değeridir. Bunlar Tablo 12C de görülmektedir.

Tablo 12

(A)

$z_0 = z_1 + x_1$

| $z_1$ \ $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 2 | 2 | 3 | 4 | | |
| 3 | 3 | 4 | uygun olmı- | | |
| 4 | 4 | | yan bölge | | |

(B)

$F_1(z_1, x_1)$

| $z_1$ \ $x_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4 | 7 | 9 | 10 |
| 1 | 1 | 5 | 8 | 10 | |
| 2 | 2 | 6 | 9 | | |
| 3 | 3 | 7 | | | |
| 4 | 4 | | | | |

(C)

| $z_1$ | $x_1^*$ | $F_1(z_1; x_1^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 4 | 10 |
| 3 | 3 | 10 |
| 2 | 2 | 9 |
| 3 | 1 | 7 |
| 4 | 0 | 4 |

İkinci devrede,

$z_2 = z_1 - x_2$ ve $F_2$ $(z_2, x_2; x_1^*)$ $= g$ $(x_2)$ $+ z_2 + F_1$ $(z_1; x_1^*)$

$= 1/2$ $[9x_2 - x_2^2]$ $+ z_2 + F_1$ $(z_2 + x_2; x_1^*)$

Örnek olarak,

$F$ $(2, 2)$ $= 1/2$ $[18 - 4]$ $+ 2 + 4 = 13$

Bu değerler Tablo 13A da optimal değer ise Tablo 13B de gösterilmiştir.

TABLO 13

(A)

$F_2(z_2, x_2; x_1^*)$

| $z_2$ \ $x_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 14 | 16 | 16 | 14 |
| 1 | 11 | 14 | 15 | 14 | |
| 2 | 11 | 13 | 13 | | |
| 3 | 10 | 11 | uygun olmıyan bölge | | |
| 4 | 8 | | | | |

(B)

| $z_2$ | $x_2^*$ | $F_2(z_2; x_2^*, x_1^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 2,3 | 16 |
| 1 | 2 | 15 |
| 2 | 1,2 | 13 |
| 3 | 1 | 11 |
| 4 | 0 | 8 |

Üçüncü devrede,

$z_3 = z_2 - x_3$ ve $F_3$ $(z_3, x_3; x_2^*, x_1^*)$ $= g$ $(x_3)$ $+ z_3 + F_2$ $(z_2; x_2^*, x_1^*)$

$= 1/2$ $[9x_3 - x_3^2]$ $+ z_3 + F_2$ $(z_3 + x_3; x_2^*, x_1^*)$

Örnek olarak,

$F_3\,(1, 3; x_2^*, x_1^*) = 1/2\,[27 - 9] + 1 + 8 = 18$

Bu değerler ve optimal sonuç Tablo 14A ve Tablo 14B de gösterilmiştir.

TABLO 14

(A)

$F_3(z_3, x_3; x_2^*, x_1^*)$

| $z_3 \backslash x_3$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 16 | 19 | 20 | 20 | 18 |
| 1 | 16 | 18 | 19 | 18 | |
| 2 | 15 | 17 | 17 | | |
| 3 | 14 | 15 | | | |
| 4 | 12 | | | | |

uygun olmıyan bölge

(B)

| $z_3$ | $x_3$ | $F_3(z_3; x_3^*, x_2^*, x_1^*)$ |
|---|---|---|
| 0 | 2,3 | 20 |
| 1 | 2 | 19 |
| 2 | 1,2 | 17 |
| 3 | 1 | 15 |
| 4 | 0 | 12 |

Optimal politika şöyledir :

| Tablo 14B | Tablo 13B | Tablo 12C |
|---|---|---|
| $z_2 = z_3 + x_3^*$ | $z_1 = z_2 + x_2^*$ | $z_0 = z_1 + x_1^2$ |

$z_3 = 0;\ x_3^* =$ ↗ $2;\ z_2 = 2;\ x_2^* =$ ↗ $1;\ z_1 = 3;\ x_1^* = 1;$

$2;\ z_2 = 2;\ x_2^* =$ ↘ $2;\ z_1 = 4$

$z_3 = 0;\ x_3^* =$ ↘ $3;\ z_2 = 3;\ x_2^* = 1;\ z_1 = 4$

$\left.\begin{matrix} 2;\ z_1 = 4 \\ 3;\ z_2 = 3;\ x_2^* = 1;\ z_1 = 4 \end{matrix}\right\}\ x_1^* = 0;$

$\left.\begin{matrix} 1;\ z_1 = 3;\ x_1^* = 1; \\ x_1^* = 0; \end{matrix}\right\}\ z_3 = 4$

Bu optimal kararlar sırası örnek 1 de elde edilen sıra ile aynıdır.