STATİK LEONTIEF MODELİ İÇİN ÜRETİM FONKSİYONU

Doç. Dr. Ahmet ÖZTÜRK

I. GİRİŞ

Gelişmiş ülkelerde yönetim ve iktisat gibi sosyal bilimlerle mühendislik bilimleri model çalışmalarına dayandırılmaktadır. Çünkü model çalışmaları bilimsel yöntemin, teknolojik gelişmenin ve ekonomik kalkınmanın özünü teşkil eder. Bu nedenden, yöneticiler faaliyetlerini düzenli ve etkin bir şekilde yürütebilmeleri ancak firmaları için bir model geliştirilmekle sağlanır. Üretim faaliyeti herhangi bir imalât firması faaliyetlerinin esasını teşkil ettiğinden, yöneticinin ana amacıda söz konusu firma için bir üretim modelini geliştirmek olmalıdır.

Herhangi bir üretim modelini geliştirmek için önce üretim fonksiyonu ele alınır ve sonra da uygun yapısal matrisi araştırılır. Yönetici firması için bir model geliştirmek istediğinde, ürünlerine olan talep bilgisi yanında, firması için elverişli olan üretim teknolojisi bilgisine de tam olarak sahip olmalıdır. Çünkü, bu bilgiler firmanın üretim fonksiyonunu belirlemede yardımcı olur. Üretim teknolojisi bilgileri, genellikle aşağıda sıralanan bilgilerden oluşur:

— Üretim sürecine girecek olan üretim faktörleri yani girdiler.
— Sürecin ürünleri yani çıktılar
— Girdiler ve çıktılar arasındaki ilişkilerdir.

İktisatçılar piyasa ekonomisinde çalışan firmaların davranışı hakkındaki bilgileri elde etmek ve teknolojik olarak uygun ürün imkânlarını belirlemek için üretim fonksiyonlarından yararlanırlar. Aslında herhangi bir girdi-çıktı dönüşüm süreci, üretim fonksiyonu tarafından betimlenir. Bir bakıma üretim fonksiyonu, firmanın ürün çıktıları ile faktör girdileri arasındaki ilişkileri ifade etmektedir. Aynı zamanda Leontief modelini firma düzeyinde ele aldığımızda söz konusu model, firmanın üretim bölümleri ve satış bölümleri arasındaki karşılıklı mal ve hizmet akışını sayısal olarak analiz ettiğini göreceğiz. Buna göre herhangi bir üretim fonksiyonu, Leontief üretim modelinde olduğu gibi firma için geliştirilecek herhangi bir üretim modelinin esasını teşkil edecektir.

Çalışmamızın ana amacı, Leontief'in makro ekonomik analizler için geliştirdiği modeli, firma düzeyinde bir üretim modeli olarak ele alındığında, onun üretim fonksiyonunun nasıl olması gerektiği ortaya konulmaya çalışılacaktır (1). Çalışmamız iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde üretim fonksiyonunun genel bir tanımı yapıldıktan sonra, statik Leontief modelinin yapısına uyacak üretim fonksiyonu hangi özelliklere sahip olması gerektiği anlatılacak, sonra da söz konusu özelliklerden bazılarını içeren literatürdeki doğrusal homojen üretim fonksiyonları ele alınarak, onların hangi özellikleri Leontief üretim fonksiyonunun özelliklerine uyduğu tartışılacaktır.

İkinci bölümde de, statik Leontief modelinin esasını teşkil eden üretim fonksiyonu üç üretim bölümüne sahip bir imalât firması için geliştirilmeye çalışılacaktır.

II. ÜRETİM FONKSİYONU

Üretim fonksiyonu kavramı ilk defa Von Thunen tarafından ele alınmasına rağmen, 1894 yılına kadar üretim fonksiyonu açık bir şekilde ifade edilmemiştir. Wicksteed 1894 yılında tüm fak-

---

(1) Burada ele alınacak model statik Leontief modeli olup, söz konusu model literatürde girdi-çıktı modeli olarak bilinmektedir. Leontief modelinin değişkenleri yani üretim teknik katsayıları, ele alınan dönemde değişmez ve zaman unsuru bir değişken olarak ele alınmaz ise model statiktir. Ayrıca zaman unsuru ile yakından ilişkili olan stoklar veya sermaye birikimi statik Leontief modelinde söz konusu değildir.

törler arasında devamlı ikameyi kılan üretim fonksiyonunu kullanmıştır. Üretim fonksiyonunu açık bir şekilde 1901 yılında inceleyen ilk iktisatçı Vicksell'dir (1).

Bir ekonomide tüketici tarafından istenen mal ve hizmetler firmalar tarafından üretilir. Firma birimlerinin davranışını betimlemek için, istihdam, haftalık veya aylık çalışma programlarını, makina ve techizat satın alımını, faktör girdilerinin seviyesini ve çıktı kararlarını yürüten karar denklemleri gereklidir. Böyle karar denklemlerinin gelişimi için ilk yaklaşım girdiler ile çıktılar arasındaki ilişkileri belirlemektir. Herhangi bir firmanın çıktısı, o firmada kullanılan girdilerin miktar ve bileşimine bağlıdır. Çıktılar ile girdiler arasındaki bir bağıntının matematik olarak üretim fonksiyonu adı altında gösterildiğini daha önce de söylemiştik.

Bu bölümde önce genel üretim fonksiyonunun tanımı, çalışmamızda konu olarak aldığımız modelin üretim fonksiyonunun belirgin özellikleri ve sonra bu özelliklerin bir kısmını içeren homojen üretim fonksiyonları anlatılacaktır. Ayrıca homojen üretim fonksiyonlarının hangi özelliklerinin, statik Leontief modeli fonksiyonuna ilişkin olduğu ortaya konulacaktır.

II.1. Üretim Fonksiyonunun Tanımı

Üretim, ihtiyaç duyulan mal ve hizmetin, emek, makina ve teçhizat, materyal girdiler ve yönetim gibi faktörler kullanılarak yaratılmasıdır. Üretim fonksiyonu da verilen teknoloji ile bu sayılan girdilerden üretilebilen maksimum çıktı miktarını gösteren bir tablo veya matematik denklemdir (1). Her üretim fonksiyonu pazarı belirlenen ürünlerin üretim miktarı ile bu üretim için gerekli olan üretim faktörleri arasındaki ilişkileri gösterir.

Bir firmanın n tane girdi kullanarak m tane çıktı ürettiğini varsaydığımızda, bu firmanın genel üretim fonksiyonu aşağıdaki şekli alır.

$$F\,(X_1, X_2 \ldots X_m, Y_1, Y_2 \ldots, Y_n, L_1, L_2 \ldots L_r, K_1, K_2 \ldots K_s) = 0 \qquad (2.1)$$

---

(1) T.H. Naylor — J.M. Vernon, Microeconomics and Decision Models of the Firm, Harcourt Brace - World Inc., New York, 1969. s. 70.

(1) C.E. Ferquson, Microeconomic Theory, Richard D. Irwin Inc., Home wood, 1966, s. 110.

Burada,

X_i : i malı çıktısı

Y_j : j malı girdisi

L_k : k tipi emek (işgücü) hizmeti girdisi

K_l : l tipi sermaye girdisi

Bu üretim fonksiyonunda genellikle sabit olan toprak hariç tutulmuştur (1).

Belirli bir zamanda teknolojik olarak mümkün olan tüm girdi ve çıktı bileşimlerini içeren bir üretim takımı, o zamanda geçerli olan teknoloji tarafından belirlenir. Üretim fonksiyonu en etkin birleşimler tarafından kurulur.

Yukarda ifade edilen denklem (2.1) çok genel biçimde ve çok sayıda değişkeni içerdiğinden hesaplanması zordur. Bu denklemin standart basitleştirilmesi, X_i ve Y_j nin fiyatlarına göre katma değer değişkenini elde etmek için birleştirir.

$$V = f\,(L_1, L_2 \ldots L_r, K_1, K_2 \ldots K_s) \qquad (2.2)$$

Burada,

$$V = \sum_{i=1}^{m} P_{io}X_i - \sum_{j=1}^{n} P_{jo}Y_j$$

ve

P_{io}, P_{jo} temel dönemdeki sabit fiyatlardır. V gerçekte firmada yaratılan gerçek geliri temsil eder. Üretim fonksiyonu hâlâ çok sayıda değişkeni ihtiva etmektedir. Bu nedenle denklem (2.2) yi bir gruplaştırmaya tabi tutmak gerekir.

Eğer birleştirilmiş fonksiyonu K ($K_1 K_2 \ldots K_s$) ve L ($L_1 L_2 \ldots L_r$) birinci dereceden homojen ise birleşik K ve L gerçek bireysel girdiler gibi dağıtılır. Böyle bir birleştirmenin mümkün olduğunu,

(1) J.L. Bridge, Applied Econometrics, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1971, s. 232.

Green ilgili yapıtında göstermiştir (1). Bu birleştirmeden sonra üretim fonksiyonu

$$V = F\,(K, L) \qquad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu üretim fonksiyonuna neo klâsik üretim fonksiyonu da denir (2).

Öte yandan iktisat kuramı üretim fonksiyonunun genel şekli (F) üzerine bir takım sınırlama getirir. Bunları şu şekilde sıralıyabiliriz:

1 — Fonksiyonun birinci derecede kısmi türevleri (yani her faktörün marjinal ürünü) artı değerli ve belirlidir.

Yani,

$$\frac{\partial V}{\partial K} = F_K \qquad \frac{\partial V}{\partial L} = F_L$$

ve $F_K > 0, \qquad F_L > 0$

2 — Fonksiyonun ikinci derecede kısmi türevleri sıfırdan küçüktür. Bu da faktör miktarları arttıkça faktörün marjinal ürünlerinin azaldığını gösterir.

Yani,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial K^2} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial K^2}$$

$= F_{KK} < 0, \qquad F_{LL} < 0$ dır.

3 — Girdilerden biri arttırıldığında, çıktı belirli bir limite yaklaşmalıdır.

Yani,

$1 \rightarrow \infty$ iken $\qquad V \rightarrow M_1$

ve $K \rightarrow \infty$ iken $\qquad V \rightarrow M_2$

---

(1) H.A.J. Green, Aggregation in Economic Analysis; An Introductory Survey, Princeton University Press Princeton New Jersey, 1964, s. 25

(2) Denklem (2.3) de, V yerine Q yani çıktı şeklinde ifade edilirse, Q=f(K, L) dir. Diğer üretim fonksiyonu tipleri içinde bakınız: James T. Kneafsey, The Economies of the Transportation Firm, D.C. Heath and Company, Leqington, 1974, s. 77-78.

Burada M_1 ve M_2 belirli pozitif sabitlerdir (1).

Sermaye ve işgücü girdilerinin (λ) oranında arttırıldığını düşünelim. Bu (λ) arasındaki girdi artışı daha fazla veya daha az oranda (V) nin artışına neden olabilir. Bunu,

$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n F(K,L) = \lambda^n V$ fonksiyonu şeklinde gösterebiliriz (2). Burada (n) fonksiyonun homojenlik derecesini veren parametredir.

Ele aldığımız üretim fonksiyonları biçimlerinden başka üretim fonksiyonları türleri de vardır. Önce biz Leontief modelinin yapısına uyan üretim fonksiyonun özelliklerini ele alalım ve sonra bu özelliklere yakından ilişkin olan üretim fonksiyonlarından söz edelim.

II.2. Statik Leontief Modelinin Yapısına Uyacak Üretim Fonksiyonunun Özellikleri

Leontief modeli, statik denge şartları altında, herhangi bir üretim fonksiyonunun formüle edilmesi için bir çatı sağlayabilir. Leontief modeli gözönüne alındığında, firmanın üretim fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri içermesi gerekmektedir:

1. Üretilen ürünlerin, üretim fonksiyonu birinci dereceden homojen ve fonksiyonun kısmi türevi sıfır dereceden homojen olmalıdır (1).
2. Firmanın üretim faaliyetlerini belirleyen girdi-çıktı (veya üretim teknik) katsayıları ele alınan dönem içinde değişmez. Aynı zamanda girdi ve çıktıların fiyatlarıda bu dönemde değişmez.
3. Fonksiyonun girdileri arasında ikame söz konusu değildir. Burada fonksiyonun ikame elastikiyeti sıfırdır. İkame elastikiyetinin sıfır olması, girdiler arasında ikamenin mümkün olmadığını gösterir (2). Yani girdiler sabit bir oranda birleşirler.
4. Her bir çıktı için gerekli girdiler, çıktının doğrusal homojen fonksiyonu şeklindedir (3). Yani $X_{ij} = a_{ij} X_j$ dir.

---

(1) J.L. Bridge, a.g.e., s. 325

(2) Kenneth F. Wallais, Topics in Applied Econometrics, Gray-Mills Publishing Ltd., London, 1973, s. 27

Burada;

X_{ij} : j malı üretimi için alınan i malı girdi miktarı

a_{ij} : Bir birim (j) malı üretimi için alınan (i) malı girdi miktarı

X_j : j malının çıktı miktarıdır.

5. Firmanın üretim süreci basit veya karmaşık olarak birbirine bağlı olup firmanın her üretim bölümü sadere tek bir ürün üretmelidir. Örneğin, üretim bölümü (i) sadece (i) ürünü üretmekte olup yan ürün söz konusu değildir.

6. Üretim sürecinde kullanılan teknoloji ele alınan zaman içinde sabit olduğundan, firmanın üretim fonksiyonu, üretim faktörleri bileşimleri üzerinde ve çıktı seviyelerinde gelişmeleri sağlıyacak (t) parametresini içermez. Burada t: teknolojik değişmeyi gösteren bir parametredir.

7. Firmanın üretim fonksiyonunda ölçeğe göre sabit getiriler söz konusudur. Yani tüm marjinal verimlilikler sadece girdi oranlarına bağlıdır. Aynı zamanda üretim bölümü (i) nin girdi kullanımı λ oranında artarsa, bu bölümün çıktısı da aynı λ oranında artacaktır (1).

Şimdi yukarda saydığımız varsayımların tümünü veya bir kısmını içeren, literatürdeki, üretim fonksiyonlarını ele alalım.

II.3. Homojen Üretim Fonksiyonu

Homojen üretim fonksiyonu aşağıdaki şekilde açıklanabilir. Verilen $V = f(K,L)$ fonksiyonu, eğer $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda^n f(K, L) = \lambda^n V$ ise bu fonksiyon (n) dereceden homojendir.

---

(1) Paul A. Samuelson, «Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leantief Models», Activity Analysis of Production and Allocation, (der. Tjalling C. Koopmans), Yale University Press, New Haven, 1971, 7. Baskı, s. 144

(2) Kenneth F. Wallis, a.g.e., s. 29

(3) Floyd K. Harmston-Richard E. Lund, Application of An Input-Output Framework to a Community Economic System, University of Missouri Press, Columbia, 1967, s. 36

(1) Jonas Kornai, Methematical Planning of Structural Decisions, North-Holland Pub, Comp., Amsterdam, 2 nd. Ed., 1975, s.223

Burada;

λ = pozitif reel bir kat sayıyı
n = sabiti gösterir.

Eğer $n = 1$ ise, fonksiyon birinci dereceden homojen olup, bu fonksiyona «doğrusal homojen üretim fonksiyonu» adı verilir (1). Bu şunu ifade etmektedir: Eğer emek ve kapital girdileri iki kat arttırılırsa yani $\lambda=2$, çıktı da iki kat arttırılmış olacaktır. Daha açık bir ifadeyle, her iki girdi ne oranda artarsa, çıktı da aynı oranda artacaktır. Örneğin burada ele alınan, emek ve sermaye girdileri λ faktörü kadar artarsa, çıktı veya katma değer (V) de λ^n faktörü kadar artacaktır. $n=1$ olduğuna göre girdiler ne oranda artarsa, çıktı da aynı oranda artacağından, bu durum ölçeğe göre sabit getirileri verecektir. Fonksiyonun bu özelliğinin Leontief modelinin yapısına uyan üretim fonksiyonunun bazı özelliklerini içerdiği açıkça görülmektedir.

Ölçeğe göre getiriler tüm girdi artış oranlarına karşılık çıktıların durumunu gösterir (1). Yukarda görüldüğü gibi ölçeğe göre getiriler, homojen üretim fonksiyonları için kolayca belirlenebilir. Eğer $n > 1$ ise, fonksiyon ölçeğe göre artan getirilere sahiptir. Örneğin girdiler iki kat yani $\lambda = 2$ arttığında, çıktılar iki kattan daha fazla artacaktır. Bunun yanında $0 < n < 1$ ise, ölçeğe göre azalan getiriler söz konusudur. Eğer girdiler iki kat artırılırsa çıktılar iki kattan daha az artacaktır (2). Bunun yanında herhangi bir üretim fonksiyonu birinci dereceden homojen ise, L ve K'nın marjinal verimliliği sıfır dereceden homojendir.

Bütün bu anlatılanlardan sonra, doğrusal homojen üretim fonksiyonunun ölçeğe göre sabit getirileri verdiği ortadadır. Diğer taraftan homojen fonksiyonun önemli bir özelliği Euler kuramı tarafından verilir. Euler kuramı, aşağıdaki şartın homojen fonksiyon tarafından sağlanmasını ifade eder:

---

(1) James M. Henderson-Richard E. Quant, Microeconomic Theory; A Mathematical Approach, Mc-Graw-Hill Book Comp., 1958, s. 63

(2) Doğrusal homojen üretim fonksiyonun grafik halinde incelenmesi için bakınız; Richard A. Bilas, a.g.e., s. 111.
Ayrıca doğrusal homojen üretim fonksiyonları için daha geniş bilgi için bakınız; R.G. Allen, Mathematical Analysis for Economists, Mc. Millan St. Martin's Press, London, 1969, s. 315-325

$$\frac{\partial Q}{\partial K} K + \frac{\partial Q}{\partial L} = nf(K, L)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} K + \frac{\partial Q}{\partial L} L = nQ$$

Yani, girdiler tarafından ağırlıklandırılmış birinci kısmi türevlerin toplamı, homojenlik derecesi ile çıktının çarpımına eşittir.

Üretim fonksiyonu doğrusal homojen üretim fonksiyonu, yani $n = 1$ olduğunda,

$$\frac{\partial Q}{\partial K} K + \frac{\partial Q}{\partial L} L = Q\text{'dır.}$$

Bütün bu anlatılanlardan sonra, sanırız ki, doğrusal homojen üretim fonksiyonu hakkında ayrıntılı bilgi sahibi olduk. Şimdi yine homojen üretim fonksiyonu sayılabilen, Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun hangi özelliği yönünden Leontief modelinin yapısına uyacağını göstermeye çalışalım.

II.3.1. Cobb-Douglas Üretim Fonksiyonu

En çok kullanılan homojen üretim fonksiyonlarından birisi Cobb-Douglas fonksiyonudur. Firma için bu fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazaibliriz (1):

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta} \qquad \text{veya} \qquad V = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Burada ;

Q : Firmanın toplam çıktısını

V : Firmanın toplam katma değerini

α : Kapitale göre çıktı (veya katma değer) elastikiyetini

β : Emeğe göre çıktı (veya katma değer) elastikiyetin

A : Sistemin verimlilik parametresini (yani verimlilik indeksini)

gösterir.

Üretim faktörleri arasındaki bağınlaşmaları ve sınırlı ikameyi mümkün kılan Cobb-Douglas üretim fonksiyonu aynı zamanda «Logaritmik doğrusal üretim fonksiyonu» olarak da adlandırılır. Logaritmik doğrusal üretim fonksiyonu, daha önce ifade ettiğimiz Cobb-Douglas fonksiyonunun her iki tarafının logaritması alınarak elde edilir. Yani;

$$Q = AK^{\alpha} L^{\beta} \quad \text{ise,}$$

$$\text{Log} = \log A + \alpha \log K + \beta \log L \qquad \text{dir.}$$

Diğer taraftan, eğer Cobb-Douglas üretim fonksiyonun türevi alınırsa, fonksiyonun marjinal ürünleri bulunur. Yani;

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1} L^{\beta} = \alpha \left(\frac{Q}{K} \right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \beta AK^{\alpha} L^{\beta-1} = \beta \left(\frac{Q}{L} \right)$$

Bu denklemler bize, emek ve kapital girdi miktarlarının artması veya azalması ile emek ve kapitalin marjinal ürünlerinin ne olacağını göstermede yardımcı olmaktadır. Örneğin; emeğin marjinal ürünü, emek girdi miktarı artarken azalmakta ve kapital girdi miktarı artarken de artmaktadır. Bunun yanında, kapitalin marjinal ürünü de, kapital girdisi artarken azalmakta ve emek girdisi artarken artmaktadır. Aynı zamanda bu marjinal ürün denklemlerinden, bir birim emeğin ne kadar birimlik kapitale eşit olduğu bulunur. Kapital ve emek fiyatlarının piyasadaki durumuna göre üretici, maliyetini azaltmak için emek yerine kapital veya kapital yerine emeği ikame etme yoluna gidecektir. Bununla beraber şunu unutmamak gerekir ki, Cobb-Douglas üretim fonksiyonu girdiler arasındaki ikameyi sınırlamaktadır.

---

(1) Cobb-Douglas üretim fonksiyonu daha fazla girdiler için aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

$$Q = f\ (x_1, x_2, x_3, \ldots x_m)\ A\, x_1^{\alpha 1}, \ x_2^{\alpha 2}, \ x_3^{\alpha 3}, \ldots x_m^{\alpha m}$$

Burada;

A : Sabit gerçek bir sayı yani verimlilik indeksini gösterir.
x_1 : İşgücü (veya emek) girdisini
x_2 : Kapital girdisini

Cobb-Douglas üretim fonksiyonunda içerilen girdiler arasındaki ikame derecesi aşağıda tanımlanan ikame elastikiyeti (σ) tarafından ölçülür (1).

$$-\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{\beta K}{\alpha L}$$

$$\log\left(\frac{-\partial K}{\partial L}\right) = \log\frac{\beta}{\alpha} + \log\left(\frac{K}{L}\right)$$

$$d\log\left(\frac{-\partial K}{\partial L}\right) = d\log\frac{K}{L}$$

$$\sigma = \frac{d\log\left(\frac{K}{L}\right)}{d\log\left(\frac{-\partial K}{\partial L}\right)}$$

$\sigma = 1$ dir.

Cobb-Douglas üretim fonksiyonun ikame elastikiyeti her zaman 1 olduğundan, biraz önce ifade ettiğimiz gibi girdiler arasında ki ikameyi sınırlamaktadır. Fakat biz biliyoruz ki Leontief modelinin yapısına uyan fonksiyon, girdiler arasında ikameyi mümkün kılmamaktadır. Yani fonksiyonun ikame elastikiyeti sıfıra eşit olmalıdır. Bu noktada Cobb-Douglas'ın sınırlı ikame özelliği Leontief modelinin yapısına uymamaktadır.

$\alpha + \beta$, fonksiyonun homojenlik derecesini ve aynı zamanda ekonomik ölçeğin ölçüsünü verir. Buna göre,

---

x_3 : Enerji girdisi, x_m: Taşıma girdisi vs.yi gösterir.
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_m$ = Bağlı olduğu girdilere göre çıktı elastikiyetini göstermektedir.

Bunun yanında, $Q = AK^{\alpha} L^{\beta}$, üretim fonksiyonuna sabit elastikiyetli üretim fonksiyonu da denir. Bkz. Z. Griliches — V. Ringsted, Economies of Scale and the Form of the Production Functions, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1971, s. 8

(1) J.L. Bridge, a.g.e., s. 326

$$f(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^{\alpha} \; (\lambda L)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} AK^{\alpha} L^{\beta}$$

$$= \lambda^{\alpha+\beta} Q \quad \text{veya}$$

$$= \lambda^{\alpha+\beta} V \quad \text{dir.}$$

Biliyoruz ki, $\alpha + \beta = 1$ şartı, fonksiyonun doğrusal homojenliğini sağlar ve fonksiyon ölçeğe göre sabit getirilere sahip olur. $\alpha + \beta = 1$ olduğunda, bütün girdiler örneğin (n) kere arttığında, çıktıda (n) kere artacaktır (1).

Yani;

$$Q_0 = AK_0^{\alpha} \; L_0^{\beta}$$

$$Q_1 = A\,(nK_0)^{\alpha} \quad (nL_0)$$

$$Q_1 = n^{\alpha+\beta} AK_0^{\alpha} \; L_0^{\beta}$$

$$Q_1 = n\,AK_0^{\alpha} \; L_0^{\beta}$$

$$Q_1 = n\,Q_0 \quad \text{dır.}$$

Cobb-Douglas'ın ölçeğe göre sabit getiriler özel durumu, bizim Leontief modelinin yapısına uymaktadır. Çünkü, girdiler (n) kere artarken, çıktıyı da aynı (n) oranında artırmaktadır.

Sonuç olarak diyebiliriz ki, sabit girdi-çıktı katsayıları ölçeğe göre sabit getirileri ifade eder. Yani birim üretim maliyeti bütün çıktı seviyesinde aynıdır. Buna göre, Cobb-Douglas üretim fonksiyonu üretim faktörleri arasındaki bağınlaşmaları ve sabit girdi-çıktı katsayı varsayımının özelliklerini sunmaktadır.

II.3.2. Sabit Oranlı Üretim Fonksiyonu

Sabit oranlı üretim fonksiyonu, girdiler arasında herhangi bir ikameyi mümkün kılmamaktadır. Yani, girdiler arasındaki ikame elastikiyeti ($\sigma = 0$) sıfıra eşittir. Bu nedenle, firma yöneticisi girdi

---

(1) Chiou - Shuang Yan, Introduction to Input - Output Economics, Holt, Rinehart - Winston, New York, 1969, s. 29.

bileşimini veri olarak almak zorundadır. Bununla beraber yönetici, üreteceği ürünün miktarlarını seçebilmekte ve çıktı miktarında yapacağı belli bir oransal değişmenin aynısını girdilerde de yapması gerekmektedir. Bu durum bize «ölçeğe göre sabit getiriler» halini anımsatır. Yani girdiler (λ) oranında artarsa, çıktı da aynı (λ) oranında artacaktır.

Sabit oranlı üretim fonksiyonunda, firmanın fiziksel girdi-çıktı ilişkileri aşağıdaki denklem tarafından gösterilebilir (1).

$$Q = A \min \left(\frac{K}{\alpha}, \frac{L}{\beta} \right)$$

Burada;

A : Sistemin verim parametresini

α : Birim birim çıktı elde etmede kullanılan kapital girdi miktarını

β : Bir birim çıktı elde etmede kullanılan işgücü veya emek girdi miktarını

Q : Firmanın çıktı miktarını göstermektedir.

Aynı zamanda üretim sürecinde kullanılan işgücü ve kapital girdileri, çıktı seviyesine bağlı olarak

$L = \beta Q$ ve $K = \alpha Q$ denklemleri halinde ifade edilebilir. Burada, $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ şartı gerçekleşmesi gerekir. Öte yandan

$$Q = \frac{K}{\alpha} = \frac{L}{\beta}$$

ve

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{L}{K}$$ denklemi elde edilir (1).

$\frac{\alpha}{\beta}$, oranı üretilecek ürünün üretimi için gerekli olan kapital-işgücü faktör bileşimini verir. Böyle olunca, mevcut işgücü ve kapital girdilerinin toplam miktarlarının birbirine oranı, bu $\frac{\alpha}{\beta}$

(1) Chio-Shuang Yan, a.g.e., s. 29

bileşiminin gerektirdiği orandan farklı ise işgücü veya kapital girdilerinden birisi, tam olarak kullanılmayacak demektir. Bu durumda, firmanın çıktı miktarını, miktarı bol olan girdi değil, miktarı az olan girdi belirleyecektir.

Diğer taraftan, sabit ikame elastikiyetli üretim fonksiyonun, ikame elastikiyeti sıfır olduğunda, sözü edilen sabit oranlı üretim fonksiyonuna ulaşılabilir.

Sabit ikame elastikiyetli üretim fonksiyonu genel anlamda

$$Q = V = A\,[\delta K^{-p} + (1 - \delta) L^{-p}]^{\frac{-v}{p}}$$

şeklinde ifade edilebilir (2).

Burada;

A : Verimlilik parametresini

δ : Üretim sürecinin kapital yoğunluğunu veya çıktının işgücü ve kapital arasındaki dağılım parametresini

p : İkame parametresini, (ikame elastikiyeti

$$\delta = \frac{1}{1 + p} \text{ dır)}$$

v : Fonksiyonun homojenlik derecesini veya firma ölçeğini (Ölçeğe göre sabit getirilerde V = 1) gösterir.

Yukarıda ifade edilen CES fonksiyonunda p sıfıra yaklaşırken limiti alınır ve sonra gerekli işlemler yapılırsa

$$\lim Q = A \min \left(\frac{K}{\delta}, \frac{L}{1 - \delta}\right)$$

denklemine ulaşılır (1).

$\frac{1}{\delta}$ yerine $\frac{1}{\alpha}$ ve $\frac{1}{1 - \delta}$ yerine de $\frac{1}{\beta}$ konulursa bu fonksiyon daha önce ifade ettiğimiz, sabit oranlı üretim fonksiyonu ha-

(1) Özhan Uluatam, Makro İktisat, Ankara Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayını No: 363, Ankara, 1973, s. 78.

(2) Sabit ikame elastikiyetli üretim fonksiyonu, literatürde genellikle CES fonksiyonu olarak geçer.

line dönüşür. Aynı zamanda bu üretim fonksiyonuna çoğu kez Leontief fonksiyonu da denir. Sabit oranlı üretim fonksiyonu, statik Leontief üretim modelinin yapısına uyan bir fonksiyon olmakta ve modelin çıktı ve girdileri arasındaki ilişkiyi açıklayabilmektedir. Fakat modelin uygulanışını analiz etmede gerektiği şekilde yeterli olamamaktadır. Bu nedenle çalışmamızın asıl amacı olan statik Leontief modelinin tüm özelliklerini gösterebilen üretim fonksiyonunu sonraki bölümde geliştirmeye çalışalım.

III. STATİK LEONTİEF MODELİNİN YAPISINA UYAN ÜRETİM FONKSİYONU

Her bir üretim yerinin yalnız tek bir çıktı türünü üretmesi ve üretimde kullanılan girdilerin sabit ve çıktı seviyesi tarafından tayin edilmesi varsayımları bize, Leontief modeli için yalnız doğrusal homojen üretim fonksiyonları ile ilgilenmemizi önermektedir. Doğrusallık denince, modeldeki değişkenlerin birinci dereceden olması, yani üretim bölümleri çıktı değişkeni birinci dereceden ve üretim katsayılarının sabit olması gerektiği anlaşılır. Homojen üretim fonksiyonunda ele aldığımız gibi girdiler hangi oranda artarsa bölüm çıktısı da aynı oranda artacaktır. Bu bir bakıma bölüm çıktı fonksiyonlarının ölçeğe göre sabit getirilere haiz olduğunu gösterir. Ele alınan bu özellikler doğrusal homojen üretim fonksiyonunun özellikleridir.

Herhangi bir imalat firmasının ürettiği ürünler iki ana amaç doğrultusunda işlem görür.

1. Firma bir kısım ürününü kendi üretim sürecinde kullanabilir. Örneğin, kumaş üreten bir firma, kendi ürettiği, iplik ve ham dokumayı tükettiği gibi, bu tür tüketime firma üretim bölümlerarası tüketim diyeceğiz.

2. Firmanın diğer firmaların üretim süreçlerine giren ve tüketici kuruluşlara nihai ürün olarak sattığı ürünlerdir. Bu tür ürünlere biz, firma dışı tüketim veya talep diyeceğiz.

---

(1) Sabit ikame elastikiyetli üretim fonksiyonunun, ikame elastikiyetinin sıfır olduğunda elde edilen sabit oranlı üretim fonksiyonunun nasıl elde edildiği burada kanunun amacı olmadığı için ele alınmamıştır. İlgilenen okuyucular için Bkz: Hasan Aşkan, Doğrusal Homojen Üretim Fonksiyonları, B.İ.T.İ.A. Dergisi, Cilt V, Temmuz - Kasım 1976, s. 223-225.

Bunun yanında, firma üretimlerinde iki tip girdi kullandığını görürüz. Birinci tip girdiler firmanın kendi üretim bölümlerinin ürettiği ürünler olup ikinci girdi ise asıl girdi olarak adlandıracağımız firmaya dışardan gelen her türlü girdilerdir.

Çıktılara bağlı herhangi bir firmanın P_j üretim bölümünün fonksiyonu,

$$X_j = f_j (X_{1j}, X_{2j}, \ldots, X_{mj}) \ldots\ldots\ldots (1)$$

ile ifade edilir. Fonksiyona, a_{ij} ve k_{ij} gibi iki sabit gerçek sayıları da ilave ettiğimizi düşünelim.

a_{ij} : Verilen teknoloji altında, bir birim j malı üretmek için kullanılan minimum (i) malı girdi miktarıdır.

k_{ij} : (j) üretim bölümünün üretim sürecinde, çıktı seviyesine bağlı olmadan kullandığı (i) malı girdi miktarıdır.

Aynı zamanda, $a_{ij} \geq 0$ ve $a_{ij} = \dfrac{X_{ij}}{X_j}$ dir.

Bütün bunlardan sonra P_j üretim bölümünün fonksiyonu,

$$X_j = f_j (a_{1j}X_j + k_{1j}, a_{2j} X_j + k_{2j}, \ldots a_{mj}X_j + k_{mj}) \ldots. \quad (2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Doğrusal homojen üretim fonksiyonlarında bütün i ve j ler için $k_{ij} = 0$ olduğu düşünüldüğünde, P_j üretim bölümünün fonksiyonu,

$$X_j = f_j (a_{1j}X_j, a_{2j}X_j \ldots, a_{mj}X_j) \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

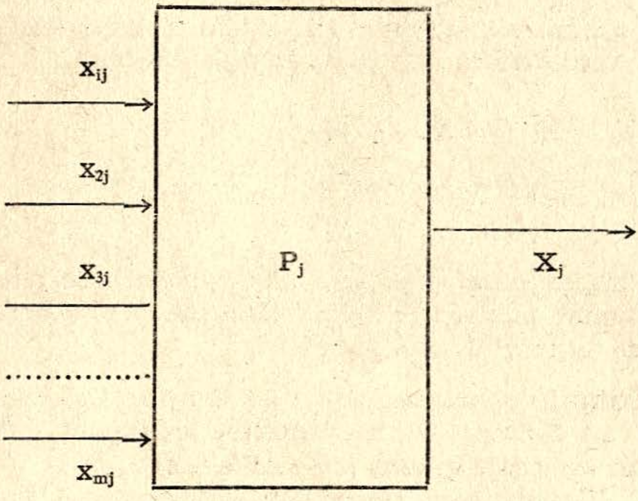
şeklini alır (1).

---

(1) Doğrusal homojenlik için matematik kuralı, Allen aşağıdaki şekilde ele almıştır.

$$f (kx_1, kx_2 \ldots . kx_n) = kf (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Örneğin, fonksiyon $Y = a_1x_1 + a_2x_2$ şartını gerçekleştirdiğinden $a_1kx_1 + a_2kx_2 = k (a_1x_1 + a_2x_2)$ denklemi yazılabilir. Bu fonksiyonun doğrusal homojenliğini ifade eder. Eğer, fonksiyon $Y = c+a_1x_1+a_2x_2$ ise, bu fonksiyon doğrusal homojenliği karşılamaz. Çünkü $c+a_1x_1+a_2x_2 \neq k (c+a_1x_1+a_2x_2)$ dir. Bizim (2) nolu P_j üretim bölümünün fonksiyonunda bu açıklamadan sonra doğrusal homojenlik şartını sağlamadığı görülmektedir. Çünkü, (2) nolu üretim fonksiyonunda, k_{ij} ler de c, katsayı gibi düşünülebilir. Daha fazla bilgi için bak; R.G. Allen, Mathematical Economics, Mc Millan Comp., London, 1963, s. 335.



Leontief, her bir çıktının tek bir üretim yolu olduğunu (yani her bir üretim yeri tek bir makina techizatı kullanır) söyliyerek üretim katsayılarının (a_{ij}) sabit olduğunu vurgulamıştır. Aynı zamanda Leontief, her bir malın çıktısı için firma, çıktı birimi başına en az veya minimum gerekli olan girdiyi aldığını öne sürer (1). Bu savın doğruluğuna hiç kimse itiraz etmiyecektir. Çünkü, 1 metre kumaş yapımı için 2 kg. yün gerekli ise, ve de yün bir değere sahipse hiç kimse iki kg.'dan fazla yün kullanmıyacaktır.

Şimdi, P_1, P_2, P_3 gibi üç üretim bölümüne sahip bir firmayı ele alalım. Firmanın her bir üretim bölümünün üretim sürecinde kullandığı girdiler aşağıda verilmiştir.

		GİRDİLER	
ÇIKTILAR	*ÜRÜN (I)*	*ÜRÜN (II)*	*ÜRÜN (III)*
ÜRÜN I	x_{11}	x_{12}	x_{13}
ÜRÜN II	x_{21}	x_{22}	x_{23}
ÜRÜN III	x_{31}	x_{32}	x_{33}
İşgücü	x_{01}	x_{02}	x_{03}

---

(1) R. Dorfman, P. Samuelson, R. Solow, Linear Programming and Economic Analysis, Mc Graw-Hill Book Comp., Inc., New York, 1958, s. 209.

P_1, P_2, P_3, üretim bölümlerinin, fonksiyonunu, daha önce ifade ettiğimiz (1) nolu denklemden yararlanarak yazabiliriz.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= f_1\,(x_{11},\ x_{21},\ x_{31},\ x_{01}) \\
X_2 &= f_2\,(x_{12},\ x_{22},\ x_{32},\ x_{02}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4) \\
X_3 &= f_3\,(x_{31},\ x_{32},\ x_{33},\ x_{03})
\end{aligned}
$$

Leontief üretim fonksiyonu, X_1, X_2, X_3, lerin herbirinin üretimi için, sabit minimum miktarda gerekli olan x_{ij} leri isteyeceğinden, fonksiyonda a_{ij} terimini de dahil etmeliyiz.

Bir birim j malı çıktısı başına gerekli olan minimum (i) malı miktarı, (a_{ij}) dir. Özel Leontief üretim fonksiyonu, firmanın üç ürünü için aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \min\left(\frac{x_{11}}{a_{11}},\ \frac{x_{21}}{a_{21}},\ \frac{x_{31}}{a_{31}},\ \frac{x_{01}}{a_{01}}\right) \\
X_2 &= \min\left(\frac{x_{12}}{a_{12}},\ \frac{x_{22}}{a_{22}},\ \frac{x_{32}}{a_{32}},\ \frac{x_{02}}{a_{02}}\right) \quad \ldots \quad (5) \\
X_3 &= \min\left(\frac{x_{13}}{a_{13}},\ \frac{x_{23}}{a_{23}},\ \frac{x_{33}}{a_{33}},\ \frac{x_{03}}{a_{03}}\right)
\end{aligned}
$$

Dikkat edilirse, (5) nolu üretim fonksiyonları, daha önceki kısımda ele aldığımız sabit oranlı üretim fonksiyonlarına benzemektedir. Doğrusal homojen üretim fonksiyonlarında olduğu gibi, yukardaki (5) nolu fonksiyonda yer alan x_{ij}, nin her biri belirli bir sabit (örneğin λ) ile çarpılırsa, buna tekabül eden X_j, de aynı sabit (λ) ile çarpılacaktır. Bu bize ölçeğe göre sabit getirilere sahip olduğumuzu gösterir. Diğer taraftan kapital katsayıları yer almadığı için, bu statik bir sistemi ifade eden bir üretim fonksiyonudur. Eğer herhangi bir a_{ij} sıfır ise, ($x_{ij}/a_{ij} = +\infty$), bu değer, (5) nolu denklemdeki, en küçük sayıyı asla sınırlamıyacaktır. Bu nedenden, sıfır değerli a_{ij}, ye tekabül eden terim denklemden atılır.

Aynı zamanda firma mallarını üretebilmesi için Hawkins-Simon şartının gerçekleşmesi lâzımdır. Hawkins-Simon şartı, şu şekilde ifade edilebilir. Bir birim mal üretimi için, hiç bir üretim bölümü kendisinden dolaysız ve dolaylı olarak bir birimden fazla girdi istemez (1). Hawkins-Simon şartını, ele alınan firma için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$1 - a_{11} > 0, \quad 1 - a_{22} > 0 \quad \text{ve} \quad 1 - a_{33} > 0 \text{ dır.}$$

Leontief modeli, firmanın üretim sürecinde kullandığı ürünleri ile firma dışına satışı belirlenen ürünleri arasındaki ilişkilerde analiz etmektedir. Durum böyle olunca, bizim asıl ilgileneceğimiz üretim fonksiyonu girdi sağlayan üretim bölümleri ile satış bölümleri arasındaki ilişkiyi göstermelidir. Her bir üretim bölümü, bir birim mal üretimi için diğer bölümlerden alacağı dolaysız girdi gereksinimi (a_{ij}) ile göstermiştik. Fakat firma, satış bölümü için üreteceği bir birim mal için ihtiyaç duyduğu dolaysız ve dolaylı girdi (toplam) miktarını bilememektedir. Bu nedenle ilk önce, satış bölümü için üretilecek bir birim mal için gerekli olan dolaylı ve dolaysız girdileri belirleyecek formülle ilgilenmeliyiz.

Bazı imalat firmalarında üretim sistemi basit olarak birbirine bağlı yani ardaşık olabilir veya karışık olabilir. Bu iki sistemin üretim sürecini gösteren, üretim teknik katsayıları matrisi farklı olabilmektedir. Şöyle ki, matristeki her bir sütun, temsil ettiği bölümün, üretim sürecinde bir birim mal üretiminde kullandığı üretim girdilerini gösterir. Üç üretim bölümüne haiz bir firmanın, üretim teknik katsayısı matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Ardaşık üretim sisteminde, bir sonraki bölümün çıktısı, bir önceki bölümün çıktısına bağlı olduğundan, asıl köşegenin altında kalan elemanların değerleri sıfıra eşit olan ($a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$ ve $a_{33} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$) bir üçgen matris şeklindedir. Karmaşık üretim sisteminde ise bu üretim katsayılarından bazıları sıfır olabilir fakat hiç bir zaman üçgen matris halinde değildir.

---

(1) Daha fazla bilgi için, bak; H. Hawkins - H.A. Simon, «Note: Some Conditions of Macroeconomic Stability», Econometrica, 17: 245-248, July-October, 1949.

Satış bölümü için üretim bölümlerinin üreteceği bir birim mal için gereksedikleri dolaysız ve dolaylı girdilerinde belirlenmesi gerekir. Bu [I — F (A, X)] matrisinin tersi ile belirlenebilmektedir. Aynı zamanda, [I — F (A, X)] yerine [I — A] matrisi de yazılabilir.

Yani,

$$[I-F(A,X)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1-f_{11} & -f_{12} & -f_{13} \\ -f_{21} & 1-f_{22} & -f_{23} \\ -f_{31} & 1-f_{32} & -f_{33} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1-a_{33} \end{bmatrix}^{-1}$$

Bu karmaşık bir üretim sistemini temsil etmektedir. Ardaşık üretim sistemi için,

$$[I-f(A,X)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & 1 & g_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada, g_{ij}; satış bölümü için üretilecek bir birim j malı için, j bölümünün i bölümünden aldığı dolaylı ve dolaysız girdi miktarıdır.

Pazarı belirlenen (W_1, W_2, W_3) mallarının çıktı miktarı bir birimden farklı ise, o zaman bu (W_1, W_2, W_3) satış bölümün istediği malların üretilmesini gerçekleştirecek üretim fonksiyonu,

$X_m = [I-F(A,X)]_m^{-1} . W$ (n = 1,2,3) şeklinde ifade edilir.

Karmaşık bir üretim sistemine sahip, bir firmanın, satış bölümü ile üretim bölümleri arasındaki ilişkileri gösteren üretim fonksiyonu.

$$X_m = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = [(1-A)]_m^{-1} . W = \begin{bmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{23} & 1-a_{33} \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} W_3 \\ W_2 \\ W_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyonun geçerli olması, $(I-A)^{-1}$ elemanlarının sıfıra eşit veya sıfırdan büyük olmasına bağlıdır. $(I-A)^{-1}$, ters matrisinin elemanlarının negatif olmaması şartını, satış bölümüne olan istemlerinin $(W_1, W_2, W_3 \geq 0)$, olması sağlar. Böylece, her dönemde P_i, üretim bölümlerinin toplam X_i çıktısı ile ve o dönemde P_i ürününe olan firma dışı istemlerin miktarları (W_i) arasındaki girdi-çıktı ilişikleri

$X_i = (I-A)_m^{-1} W_i$ $(i = 1,2,3)$ üretim fonksiyonu ile belirlenir.

Sonuç olarak diyebiliriz ki, geliştirdiğimiz $X_i = (I-A)_m^{-1} W_i$ fonksiyonu, statik Leontief modelinin esasını teşkil etmekte ve söz konusu modelin uygulanışını açık bir şekilde analiz edebilmektedir.