



**KONVEKS HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİN
KONVOLÜSYONLARI**

Özge ÖZDEMİR



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİN KONVOLÜSYONLARI

Özge ÖZDEMİR

Dr. Öğr. Üyesi Elif YAŞAR
(Danışman)

YÜKSEK LİSANSTEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA– 2019

TEZ ONAYI

Özge ÖZDEMİR tarafından hazırlanan “KONVEKS HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİN KONVOLÜSYONLARI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Elif YAŞAR

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Elif YAŞAR
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı



Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hakan BOSTANCI
Karabük Üniversitesi,
Fen Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü

04/08/2019

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

06.10.2019.



Özge ÖZDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKS HARMONİK DÖNÜŞÜMLERİN KONVOLÜSYONLARI

ÖZGE ÖZDEMİR

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Elif YAŞAR

Bu çalışma temel olarak harmonik bir yönde (reel eksen yönünde) konveks fonksiyonların konvolüsyonlarını incelemektedir ve dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin amacı, kapsamı ve mevcut çalışmalar içindeki yeri belirtilmiştir.

İkinci bölümde, analitik ve harmonik fonksiyonlarla ilgili çalışmada kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ele alınan konu ile ilgili bazı çalışmalar incelenmiş ve orijinal bir problemin çözümü araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, çalışmada elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve araştırılacak bir problem verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Harmonik fonksiyon, yalınkat fonksiyon, konvolüsyon.

2019, vi+90 sayfa.

ABSTRACT

Master's Thesis

CONVOLUTIONS OF THE CONVEX HARMONIC MAPPINGS

Özge ÖZDEMİR

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Elif YAŞAR

This study investigates basically the convolution of harmonic convex functions in one direction (direction of the real axis) and consists of four chapters.

In the first chapter, the aim, scope and the placement in the literature are given.

In the second chapter, basic definitions and theorems related to analytic and harmonic functions which are used in the study are stated.

In the third chapter, some studies are given due to the considered problem and solution of an original problem is investigated.

In the fourth chapter, the obtained results are summarized and a problem is given for further investigation.

Key Words: Harmonic function, univalent function, convolution.

2019, vi+90 pages.

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın gerekleőtirilmesinde, dört yıl boyunca değerli bilgilerini benimle paylaőan, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemini asla unutmayacağım, her zaman bir hocadan ok daha fazlası olan saygı değer danışman hocam; Sayın Dr. Öğr. Üyesi Elif Yaşar'a, yüksek lisansım sürecinde yardımını hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Sibel Yalın'a, lisans öğretimim boyunca ve sonrasında akademik ve kiőisel gelişimimde iz bırakan değerli üniversite hocalarıma ve hayatımın her evresinde bana destek olan aileme sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Özge ÖZDEMİR

.././.....



İÇİNDEKİLER

| | Sayfa |
|--|-------|
| ÖZET..... | i |
| ABSTRACT..... | ii |
| TEŞEKKÜR..... | iii |
| SİMGELER DİZİNİ..... | v |
| ŞEKİLLER DİZİNİ..... | vi |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. ÖN BİLGİLER..... | 2 |
| 2.1. Analitik Yalınkat Fonksiyonlar..... | 2 |
| 2.2. Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar..... | 6 |
| 2.3. Kesme Yöntemi..... | 13 |
| 2.4. Konvolüsyon | 22 |
| 3. HARMONİK KONVEKS FONKSİYONLARIN KONVOLÜSYONU..... | 26 |
| 3.1. Konvolüsyon Çalışmaları İçin Ön Bilgiler | 26 |
| 3.2. Düzlemsel Harmonik Konveks Dönüşümlerin Konvolüsyonu..... | 31 |
| 3.3. Harmonik Konveks Dönüşümlerin Konvolüsyonu..... | 39 |
| 3.4. Genelleştirilmiş Harmonik Konveks Dönüşümlerin Konvolüsyonu | 55 |
| 3.5. Genelleştirilmiş Harmonik Sağ Yarı Düzlem Dönüşümlerin Konvolüsyonu..... | 68 |
| 3.6. Genelleştirilmiş Dönüşümler ile Harmonik Bir Dönüşümün Konvolüsyonu | 77 |
| 4. SONUÇ | 85 |
| KAYNAKLAR | 88 |
| ÖZGEÇMİŞ | 90 |

SİMGELER DİZİNİ

| Simgeler | Açıklama |
|----------------------------|---|
| D | Açık ve bağlantılı küme |
| \mathbb{U} | $\{z: z < 1\}$ (açık) birim disk |
| S | \mathbb{U} diskinde analitik, yalınkat ve normalizasyonu sağlayan fonksiyonların kümesi |
| S^* | S sınıfındaki yıldızlı fonksiyonların kümesi |
| K | S sınıfındaki konveks fonksiyonların kümesi |
| C | S sınıfındaki konvekse yakın fonksiyonların kümesi |
| S_H | \mathbb{U} diskinde harmonik, yalınkat, kompleks değerli ve normalizasyonlu fonksiyonların sınıfı |
| S_H^0 | $b_1 = 0$ ile normalize edilmiş $f \in S_H$ fonksiyonlarının sınıfı |
| S_H^* | Harmonik yıldızlı fonksiyonların sınıfı |
| K_H | Harmonik konveks fonksiyonların sınıfı |
| K_H^0 | $b_1 = 0$ özelliğindeki harmonik konveks fonksiyonların sınıfı |
| C_H | Konvekse yakın harmonik fonksiyonların sınıfı |
| C_H^0 | $b_1 = 0$ özelliğindeki konvekse yakın harmonik fonksiyonların sınıfı |
| f_z | f nin z ye göre kısmi türevi |
| $f_{\bar{z}}$ | f nin \bar{z} e göre kısmi türevi |
| $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ | Koebe fonksiyonu |
| $f_1 * f_2$ | f_1 ile f_2 fonksiyonlarının konvolüsyonu |
| $w = \frac{g'}{h'}$ | $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonunun genişlemesi (genleşmesi, dilatasyonu) |
| $P_c[I]$ | Genelleştirilmiş harmonik dönüşüm ailesi |
| L_c | Genelleştirilmiş harmonik sağ yarı düzlem dönüşümü ailesi |
| \mathbb{N} | Doğal sayılar kümesi |
| \mathbb{R} | Reel sayılar kümesi |
| \mathbb{C} | Kompleks sayılar kümesi |
| \mathbb{Z}^+ | Pozitif tam sayılar kümesi |

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

| | |
|---|----|
| Şekil 2.1. Reel eksen yönünde konveks ve reel eksen yönünde konveks olmayan bölge | 6 |
| Şekil 2.2. Sağ taraflı ve sol taraflı bölge | 12 |
| Şekil 2.3. \mathbb{U} nun harmonik polinom dönüşümü altındaki görüntüsü | 15 |
| Şekil 2.4. Teorem 2.3.2'nin yeter şartının ispatı | 18 |
| Şekil 2.5. Teorem 2.3.2'nin gerek şartının ispatı | 18 |
| Şekil 2.6. \mathbb{U} nun harmonik Koebe dönüşümü altındaki görüntüsü | 21 |
| Şekil 3.1. \mathbb{U} nun F_1 altındaki resmi | 47 |
| Şekil 3.2. $P(z) * P(z)(\mathbb{U})$ resmi | 67 |
| Şekil 3.3. $a = 0,5$ ve $c = 5$ alındığında, $L_c * f_a(\mathbb{U})$ resmi (yalıncat) | 77 |
| Şekil 3.4. $a = 0,5$ ve $c = 6,2$ alındığında, $L_c * f_a(\mathbb{U})$ resmi (yalıncat değil) | 77 |
| Şekil 3.5. $a = 0,7$ için, $f_a(\mathbb{U})$ resmi | 78 |
| Şekil 3.6. $f_{0,5}(\mathbb{U})$ ve $P_{0,2}(\mathbb{U})$ resmi | 83 |
| Şekil 3.7. $P_{0,2} * f_{0,5}(\mathbb{U})$ resmi | 84 |
| Şekil 3.8. $P_{1,5} * f_{0,5}(\mathbb{U})$ resmi | 84 |

1. GİRİŞ

Düzlemsel harmonik dönüşümler; Branges'in, (1985) 69 yıllık problem olan Bieberbach Tahmini'nin ispatını yapmasının ardından kompleks analizciler tarafından çalışılmaya başlamıştır. Bu tarihten sonra analitik yalınkat fonksiyon sınıfında çalışılmış olan problemler harmonik dönüşümler için de sorgulanmaya başlamıştır. Bu alanda çığır açan makale Clunie ve Sheil-Small (1984) tarafından yazılmıştır.

Clunie ve Sheil-Small'un 1984 yılında harmonik dönüşümler üzerine yaptığı çalışmada bir çok açık problem mevcuttur. Bu açık problemlerden biri, konveks harmonik bir fonksiyonun hangi özellikteki bir fonksiyonla konvolüsyonunun yine konveks harmonik bir fonksiyon olabileceğidir. Analitik fonksiyonlar teorisinde konveks olan iki fonksiyonun konvolüsyonlarının yine konveks bir fonksiyon olduğu biliniyor. Harmonik dönüşümlerde ise harmonik konveks iki fonksiyonun konvolüsyonu harmonik konveks değildir. Hatta, konvolüsyon fonksiyonu yalınkat bile değildir. 2001 yılında Michael Dorff'un bu alanda yaptığı çalışma ilgi çekicidir. Dorff (2001), özel tipte konveks harmonik fonksiyonlar olarak konvolüsyon fonksiyonunun özelliklerini araştırmıştır. Son yıllarda hem Dorff hem de diğer birçok yazar (Boyd ve ark. 2014, Wang ve ark. 2016 gibi) bu alanda çok sayıda makale yayınlamışlardır. Bu tezde bu problem ele alınacak, farklı yazarlar tarafından (Dorff 2001, Dorff ve ark. 2012, Liu ve Li 2013, Li ve Liu 2016) elde edilmiş olan sonuçlar incelenecek ve orijinal bir çalışma ile problemin çözümüne katkı sağlanacaktır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bölüm (Pommerenke 1975, Goodman 1983, Clunie ve Sheil-Small 1984, Duren 2004, Dorff 2012a,b) kaynaklarından derlenmiştir.

2.1. Analitik Yalınkat Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1. Bir $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde (açık ve bağlantılı küme) analitik olan f fonksiyonu için $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ (veya $f(z_1) = f(z_2)$ iken $z_1 = z_2$) ise f fonksiyonuna D bölgesinde yalınkattır denir. Örneğin, $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ (açık) birim diskinde $f(z) = (1+z)^2$ fonksiyonu yalınkat iken $f(z) = (1+z)^4$ fonksiyonu yalınkat değildir.

Bir D bölgesinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu bir $z_0 \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda yalınkat ise f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında yerel (lokal) yalınkat fonksiyon adı verilir. Analitik bir f fonksiyonu için bir $z_0 \in D$ noktasında yerel (lokal) yalınkat olması $f'(z_0) \neq 0$ koşuluyla sağlanır. Bir bölgede yerel yalınkat olan bir analitik fonksiyon, bölgenin tamamında yalınkat olmayabilir. Yalınkat analitik fonksiyonlar tersi de analitik olan fonksiyonlardır.

Birim diskte analitik olan $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu ile $g(z) = 2z - z^2$ fonksiyonları ele alınsın. Böylece, $g(z) = 2f(z)$ olduğundan $f(z)$ ve $g(z)$ birim diski aynı bölgeye resmederler. Dolayısıyla bu tarz tekrarlardan kaçınmak için birim diskte analitik ve yalınkat olan fonksiyonlar ailesi normalize edilir. Bu normalizasyon için Riemann Dönüşüm Teoreminden faydalanılır. Bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve yalınkat olan f fonksiyonu için, Riemann Dönüşüm Teoremi şu şekilde ifade edilebilir:

Teorem 2.1.2 Riemann Dönüşüm Teoremi. Basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde bir z_0 noktası ve D bölgesinde tanımlı bir f analitik yalınkat fonksiyonu ele alınsın. Bu takdirde, $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliğinde D yi \mathbb{U} birim diskinde yalınkat olarak resmeden tek bir f analitik fonksiyonu vardır (Riemann 1851).

Riemann Dönüşüm Teoremi gereği basit bağlantılı bölgelerde tanımlanan dönüşümler çalışılırken birim disk, verilen basit bağlantılı bölge yerine alınabilir.

Analitik ve yalınkat bir fonksiyon $f_1: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ele alınsın. f_1 analitik olduğundan orjin etrafında $f_1(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ seri açılımına sahiptir ve bu seri birim diskte yakınsaktır. f_1 fonksiyonundan bir a_0 sabiti çıkarıldığında görüntü bölgesi sadece a_0 birim ötelendiği için yalınkatlık özelliği değişmez. Böylece,

$$f_2(z) = f_1(z) - a_0 = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$$

fonksiyonu da \mathbb{U} da analitik ve yalınkattır. f_2 yalınkat olduğundan her $z \in \mathbb{U}$ için $f_2'(z) \neq 0$ dir. Buradan, $f_2'(0) = a_1$ olduğundan $a_1 \neq 0$ elde edilir. O halde

$$f_3(z) = \frac{1}{a_1} f_2(z) = z + \frac{a_2}{a_1} z^2 + \frac{a_3}{a_1} z^3 + \dots$$

fonksiyonu ele alınsın. f_2 fonksiyonunu $\frac{1}{a_1}$ ile çarpmak görüntü bölgesini döndürmek ve/veya genişletmek (daraltmak)tir. Dolayısıyla f_3 fonksiyonu halen birim diskte analitik ve yalınkattır. Bu yapılan adımlar f_1 fonksiyonunu $f_1'(0) = 1$ ve $f_1(0) = 0$ olacak şekilde normalize eder.

Tanım 2.1.3. \mathbb{U} birim diskinde analitik, normalize edilmiş ve yalınkat olan fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Yani,

$$S = \{f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ ve } f \text{ analitik, yalınkat}\}$$

dir. Böylece S sınıfına ait olan f fonksiyonlar $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilir.

Tahmin 2.1.4 (Bieberbach Tahmini). S sınıfındaki her f fonksiyonu ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq n$ dir. Özel olarak $|a_2| \leq 2$ dir (Bieberbach 1916).

Bir eşitliği geliştirmek (üst sınırı azaltmak veya alt sınırı artırmak) mümkün değilse bu durumdaki eşitsizliğe kesin eşitsizlik denir. Eşitsizliğin kesin olduğunu göstermek, istenen özelliklere sahip olan ve eşitsizliği eşit hale getiren bir fonksiyonu bularak mümkün olur. Bu şekilde elde edilen fonksiyonlara ekstremal fonksiyon denir. Bieberbach tahminini sağlayan ekstremal fonksiyon

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

ile verilen Koebe fonksiyonudur. Bieberbach tahminini 1985 yılında Branges ispatlamıştır.

Koebe fonksiyonunun ekstremal olduğu başka bir durum da söz konusudur. Bir $f \in S$ fonksiyonu için $f(\mathbb{U})$ tüm kompleks düzlem olamaz. Yani $f(\mathbb{U})$ da bulunmayan bir $a \in$

\mathbb{C} noktası mutlaka vardır. Bu durum $a \in f(\mathbb{U})$ için $|a|$ nın ne kadar küçük olabileceği sorusunu akla getirir. Örneğin $f(z) = z$ iken $|a| = 1$ dir. $f(z) = \frac{z}{1-z}$ (sağ yarı düzlem dönüşümü) iken $|a| = 1/2$ dir. Bu sorunun tüm $f \in f(S)$ için $|a| \geq 1/4$ olduğu gösterilmiştir. Bu sonuç Koebe 1/4 Teoremi olarak bilinir. Koebe fonksiyonu bu durum için de ekstremaldir. Çünkü Koebe fonksiyonu için $|a| = 1/4$ dür. Bu ve başka sebeplerden dolayı analitik ve yalınkat fonksiyonlarda Koebe fonksiyonu çok önemlidir.

Teorem 2.1.5 (Koebe Dörtte Bir Teoremi). $f \in S$ ve f fonksiyonu γ değerini almasın. Yani $f(z) = \gamma$ denkleminin \mathbb{U} da çözümü bulunmasın. Bu takdirde $|\gamma| \geq \frac{1}{4}$ dür. Eşitlik, Koebe fonksiyonu ve rotasyonları tarafından sağlanır (Koebe 1907).

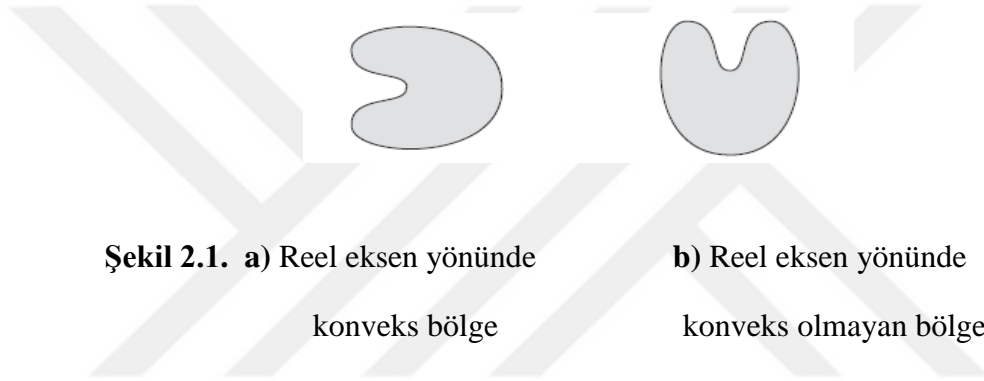
Tanım 2.1.6. Bir D bölgesi ve bir $w_0 \in D$ noktası verilsin. Eğer w_0 noktasını diğer her bir $w \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, D bölgesine w_0 noktasına göre yıldızlıdır, denir. Özel olarak, $w_0 = 0$ alındığında, D bölgesine yıldızlıdır, denir. Eğer $f(\mathbb{U})$ yıldızlı bir bölge ise \mathbb{U} da analitik ve yalınkat f fonksiyonuna yıldızlıdır denir. S sınıfındaki yıldızlı fonksiyonların kümesi S^* ile gösterilir. Koebe fonksiyonu $w_0 > -1/4$ olmak üzere w_0 noktasına göre yıldızlıdır.

Tanım 2.1.7. Düzlemde bir D bölgesi verilsin. Herhangi farklı $z, w \in D$ noktaları ve $0 \leq t \leq 1$ için $tz + (1-t)w$ doğru parçası D de kalıyorsa D ye konveks bölge denir. Eğer $f(\mathbb{U})$ konveks bir bölge ise \mathbb{U} da analitik ve yalınkat f fonksiyonuna konvektir denir. S sınıfındaki konveks fonksiyonların kümesi K ile gösterilir.

Tanım 2.1.8. Bir D bölgesinin tümleyeni kesişmeyen yarı doğruların (bir yarı doğrunun başlangıç noktası diğer yarı doğrulardan birinin üzerinde olabilir) birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa D ye konvekse yakın bölge denir ve S sınıfındaki konvekse yakın fonksiyonların kümesi C ile gösterilir.

Tanım 2.1.9. Bir Ω bölgesi ve her $a \in \mathbb{C}$ için $\Omega \cap \{a + te^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\}$ kümesi bağlantılı veya boş ise Ω bölgesine $e^{i\varphi}$ yönünde konvektir denir. Eğer $f(\mathbb{U})$ $e^{i\varphi}$ yönünde konveks bir bölge ise \mathbb{U} da analitik ve yalınkat f fonksiyonuna $e^{i\varphi}$ yönünde konvektir denir.

Özel olarak reel eksene paralel her doğrunun Ω bölgesiyle kesişimi bağlantılı ise Ω bölgesine reel eksen yönünde (yatay yönde) konveks bölge denir.



Şekil 2.1. a) Reel eksen yönünde konveks bölge

b) Reel eksen yönünde konveks olmayan bölge

2.2. Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1. D bir bölge ve $u: D \rightarrow \mathbb{R}$, D de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Her $z \in D$ için $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ise, u ya D de reel harmoniktir denir. Sürekli bir $f = u + iv$ fonksiyonu, u ve v D de reel harmonik olduğunda, D de kompleks değerli harmonik fonksiyon adını alır.

Harmonik fonksiyonlar analitik olmak zorunda olmadığından analitik fonksiyonlar için sağlanan bir takım özellikler harmonik fonksiyonlar için sağlanmayabilir. Örneğin analitik fonksiyonlar bileşke işlemi altında korunmasına rağmen harmonik fonksiyonlar korunmaz. Yani, f harmonik g analitik fonksiyon olmak üzere $f \circ g$ harmonik

olmasına rağmen, $g \circ f$ fonksiyonunun harmonik olması gerekmez. Analitik fonksiyonların sınıfı bir cebir oluşturmasına rağmen, harmonik fonksiyonların sınıfı oluşturmaz. Ayrıca bir harmonik yalınkat fonksiyonun tersi de harmonik olmak zorunda değildir.

Diğer taraftan, harmonik fonksiyonlar analitik fonksiyonlardan daha genel olduğundan analitik fonksiyonların bilinen teoremlerinin harmonik fonksiyonlar için uyarlamaları mevcuttur. Bunlar Ortalama Değer Teoremi, Maksimum Modül Teoremi, Liouville Teoremi, Argüment Prensipli vb. dir. Bir $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun analitik olduğunu düşünmenin bir yolu $\bar{z} = x - iy$ terimlerinden ziyade $z = x + iy$ terimlerinden oluştuğunu düşünmektir. Dolayısıyla $f(z) = z^2$ analitik iken $f(z) = z \cdot \bar{z}$ analitik değildir. Bu iddiayı araştırmak için $\zeta := z = x + iy$ ve $\bar{\zeta} := \bar{z} = x - iy$ olsun. Buradan $x = \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta})$ ve $y = \frac{1}{2i}(\zeta - \bar{\zeta})$ bulunur. $f(x(\zeta, \bar{\zeta}), y(\zeta, \bar{\zeta}))$ fonksiyonuna zincir kuralı uygulanırsa ayrıca $\zeta = z$ ve $\bar{\zeta} = \bar{z}$ olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (f_x - if_y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (f_x + if_y)$$

dır.

Teorem 2.2.2. Bir D basit bağlantılı bölgesinde harmonik $f = u + iv$ fonksiyonu h ve g analitik olmak üzere $f = h + \bar{g}$ ile yazılabilir.

İspat. u ve v basit bağlantılı bir bölgede reel harmonik ise $u = \operatorname{Re}K$ ve $v = \operatorname{Im}L$ olacak şekilde K ve L analitik fonksiyonları mevcuttur. (Bir analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımları harmoniktir.) Böylece

$$f = u + iv = \operatorname{Re}K + i\operatorname{Im}L$$

$$= \frac{K + \bar{K}}{2} + i \frac{L - \bar{L}}{2i}$$

$$= \frac{K + L}{2} + \frac{\overline{K - L}}{2} = h + \bar{g}$$

dır. \square

Bir $f(z) = h(z) + \bar{g}(z)$ harmonik fonksiyonu $f(z) = \operatorname{Re}\{h(z) + g(z)\} + i\operatorname{Im}\{h(z) - g(z)\}$ formunda da yazılabilir. Örneğin; $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ fonksiyonu \mathcal{D} de harmoniktir.

Bu fonksiyon

$$f(z) = \operatorname{Re}\left\{z + \frac{1}{2}z^2\right\} + i\operatorname{Im}\left\{z - \frac{1}{2}z^2\right\}$$

olarak da yazılabilir. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu h ve g analitik olduğundan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \bar{z}^n$$

seri açılımına sahiptir. Analitik, yalınkat fonksiyonların normalizasyonları gibi harmonik yalınkat fonksiyonlar da normalize edilebilir.

Tanım 2.2.3. Birim diskte, harmonik, yalınkat, kompleks değerli ve normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı S_H olsun. Yani,

$$S_H = \{f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(0) = f_z(0) - 1 = 0, f \text{ harmonik ve yalınkat}\}$$

dır. Böylece, S_H sınıfındaki bir f fonksiyonu

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

fonksiyonları \mathbb{U} da analitik olmak üzere $f = h + \bar{g}$ şeklinde gösterilir. Diğer bir harmonik yalınkat fonksiyon sınıfı ise $S_H^0 = \{f \in S_H \mid f_z(0) = b_1 = 0\}$ tanımlanan S_H^0 sınıfıdır. Böylece $S \subset S_H^0 \subset S_H$ olduğu görülür.

Örnek 2.2.4. (Harmonik sağ yarı düzlem dönüşümü) Birim diski $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\{w\} \geq \frac{-1}{2}\}$ bölgesine resmeden harmonik sağ yarı düzlem dönüşümü

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} - \frac{\frac{1}{2}\bar{z}^2}{(1-\bar{z})^2}$$

veya

$$f(z) = \operatorname{Re}(h(z) + g(z)) + i\operatorname{Im}(h(z) - g(z)) = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right) + i\operatorname{Im}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right)$$

şeklinde ifade edilir.

Yalınkat fonksiyonların sonuçlarını elde etmek kolay değildir. Dolayısıyla bazen (global) yalınkatlık yerine lokal yalınkatlık kullanılır. Lokal yalınkat fonksiyonlar lokal olarak birebir olan fonksiyonlardır. Bu şu anlama gelir; \mathbb{U} da z_0 merkezli bir diskteki her z için fonksiyonun birebir olduğu komşuluğun bulunmasıdır. Lokal yalınkat bir fonksiyon birim diskte yalınkat olmayabilir.

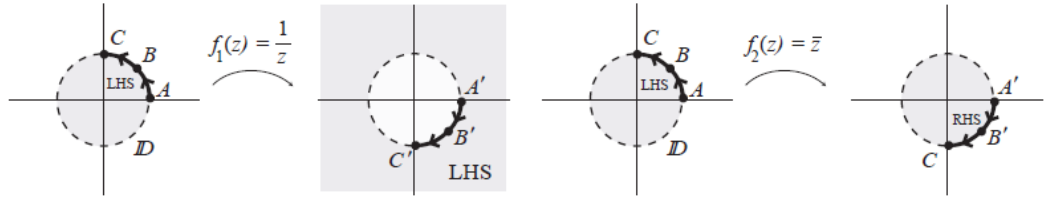
Tanım 2.2.5. Bir D bölgesinde $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun D de Jakobiyeni $J_f \neq 0$ ise $f = h + \bar{g}$ fonksiyonuna D de lokal yalınkattır denir. Bir $f = u + iv$ fonksiyonunun Jakobiyeni

$$\begin{aligned} J_f &= \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x \\ &= \begin{vmatrix} (\operatorname{Re}h)_x + (\operatorname{Re}g)_x & (\operatorname{Re}h)_y + (\operatorname{Re}g)_y \\ (\operatorname{Im}h)_x - (\operatorname{Im}g)_x & (\operatorname{Im}h)_y - (\operatorname{Im}g)_y \end{vmatrix} \\ &= [((\operatorname{Re}h)_x + (\operatorname{Re}g)_x)((\operatorname{Im}h)_y - (\operatorname{Im}g)_y)] \\ &\quad - [((\operatorname{Im}h)_x - (\operatorname{Im}g)_x)((\operatorname{Re}h)_y + (\operatorname{Re}g)_y)] \end{aligned}$$

dir. Bir F analitik fonksiyonu, Cauchy-Riemann denklemini sağladığından $(\operatorname{Re}F)_y = -(\operatorname{Im}F)_x$ ve $(\operatorname{Im}F)_y = (\operatorname{Re}F)_x$ dir. Böylece $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonu için h ve g analitik olduğundan

$$\begin{aligned} J_f &= [((\operatorname{Re}h)_x + (\operatorname{Re}g)_x)((\operatorname{Im}h)_y - (\operatorname{Im}g)_y)] \\ &\quad - [((\operatorname{Im}h)_x - (\operatorname{Im}g)_x)((\operatorname{Re}h)_y + (\operatorname{Re}g)_y)] \\ &= (\operatorname{Re}h)_x^2 - (\operatorname{Re}g)_x^2 + (\operatorname{Im}h)_x^2 - (\operatorname{Im}g)_x^2 = |h'|^2 - |g'|^2 \end{aligned}$$

olur. O halde f harmonik fonksiyonunun lokal yalınkat olması için $|h'|^2 - |g'|^2 \neq 0$ olmalıdır. Bir fonksiyonun lokal yalınkatlık dışında yön koruyanlık özelliği de önemlidir. $D \setminus \{0\}$ da tanımlı $f_1(z) = \frac{1}{z}$ ve $f_2(z) = \bar{z}$ fonksiyonları ele alınsın. Her iki fonksiyon da birim çemberi kendi üzerine resmeder. Ayrıca, her iki fonksiyon da $A = 1$, $B = e^{\frac{i\pi}{4}}$ ve $C = i$ noktalarını $A' = 1$, $B' = e^{-\frac{i\pi}{4}}$ ve $C' = -i$ noktalarına resmeder. Bölgede birim çember üzerinde saat yönünün tersinde hareket edildiğinde (A dan B ye, B den C ye) sol taraftaki bölge \mathbb{U} olur. Bu bölgeye sol taraflı bölge (LHS) ve izlenen yolun sağında kalan bölgeye de sağ taraflı bölge (RHS) denir. Böylece, $\mathbb{C} - \mathbb{U}$ sağ taraflı bölge olur. Tanım kümesi birim çemberi saat yönünün tersinde dolaşırken her iki fonksiyonun görüntü eğrisi de birim çemberi saat yönünde dolaşacaktır. Dolayısıyla görüntü eğrisinde \mathbb{U} sağ taraflı bölge iken $\mathbb{C} - \mathbb{U}$ sol taraflı bölge olacaktır. Örneğin f_1 fonksiyonu $\frac{1}{2} \in \mathbb{U}$ noktasını $2 \in \mathbb{C} - \mathbb{U}$ noktasına resmeder. Dolayısıyla f_1 fonksiyonu sol taraflı bölgeyi sol taraflı bölgeye resmetmiştir. Bu şekilde sol taraflı bölgeyi sol taraflı bölgeye resmeden fonksiyonlara yön koruyan denir. Diğer taraftan f_2 fonksiyonu $\frac{1}{2} \in \mathbb{U}$ noktasını $\frac{1}{2} \in \mathbb{U}$ noktasına resmettiğinden f_2 fonksiyonu sol taraflı bölgeyi sağ taraflı bölgeye resmetmiştir. Bu şekilde sol taraflı bölgeyi sağ taraflı bölgeye resmeden fonksiyona yönü ters çeviren denir.



Şekil 2.2. Sağ taraflı ve sol taraflı bölge

Bütün analitik fonksiyonlar yön koruyan iken kompleks değerli harmonik fonksiyonların bir kısmı yön koruyan, bir kısmı yönü ters çevirendir.

Tanım 2.2.6. Bir $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun genişlemesi (genleşmesi-dilatasyonu) $w(z)$ ile gösterilir ve $w(z) = g'(z)/h'(z)$ ile tanımlanır.

Teorem 2.2.7 (Lewy 1936). Bir $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun lokal yalınkat ve yön koruyan olması için gerek ve yeter şart her $z \in \mathbb{U}$ için $|w(z)| < 1$ olmasıdır.

Sonuç 2.2.8. Bir $f = h + \bar{g}$ harmonik-yön koruyan fonksiyonu $w = \frac{g'}{h'}$ genişlemesi ile verilsin. Birim çemberde bulunan bir γ yayındaki her z noktasının f altındaki görüntüsü bir konkav yaydır veya bir kritik noktadır.

Tanım 2.2.9. Bir $f \in S_H$ (veya S_H^0) fonksiyonunun \mathbb{U} birim diskini resmettiği bölge yıldızıl ise f fonksiyonuna harmonik yıldızıl fonksiyon denir. Harmonik yıldızıl fonksiyonların sınıfı S_H^* (veya $S_H^{*,0}$) ile gösterilir. Bir $f \in S_H$ (veya S_H^0) fonksiyonunun \mathbb{U} birim diskini resmettiği bölge konveks ise f fonksiyonuna harmonik konveks

fonksiyon denir. Harmonik konveks fonksiyonların sınıfı K_H (veya K_H^0) ile gösterilir. Bir $f \in S_H$ (veya S_H^0) fonksiyonunun \mathbb{U} birim diskini resmettiği bölge konvekse yakın ise f fonksiyonuna konvekse yakın harmonik fonksiyon denir. Konvekse yakın harmonik fonksiyonların sınıfı C_H (veya C_H^0) ile gösterilir. Benzer şekilde, bir $f \in S_H$ (veya S_H^0) fonksiyonunun \mathbb{U} birim diskini resmettiği bölge reel eksen yönünde konveks ise f fonksiyonuna reel eksen yönünde konveks harmonik fonksiyon denir ve bu sınıf konvekse yakın harmonik fonksiyon sınıfı olan C_H nın alt kümesidir.

2.3. Kesme Yöntemi

Analitik olmayan yalınkat harmonik dönüşüm örneklerini bulmak kolay değildir. Yalınkat harmonik dönüşümlerin örneklerini elde etmek üzere, Clunie ve Sheil-Small tarafından verilen çok kullanışlı bir yöntem vardır. Bu yöntem "kesme yöntemi" olarak bilinir. Temel olarak verilen bir F analitik fonksiyonu ve w genişlemesine dayanır. F yerine $F = h - g$ ve w yerine $w = \frac{g'}{h'}$ alınarak $f = h + \bar{g}$ yalınkat harmonik fonksiyonu bulunur.

Teorem 2.3.2. (Kesme Yöntemi) Bir $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonu \mathbb{U} da lokal yalınkat olsun ($\forall z \in \mathbb{U}$ için $|w(z)| < 1$ dir). Bu takdirde $F = h - g$ analitik yalınkat fonksiyonunun \mathbb{U} yu yatay yönde konveks bir bölge üzerine dönüştürmesi için gerek ve yeter şart $f = h + \bar{g}$ harmonik yalınkat fonksiyonunun \mathbb{U} yu yatay yönde konveks bölge üzerine resmetmesidir. (Clunie ve Sheil-Small 1984)

Teoremin ispatına geçmeden önce, ispat için gerekli bir lemma ifade edilmeli ve ispatlanmalıdır. İspata daha sonra yer verilecektir. Öncelikle, kesme yöntemiyle elde edilen bir harmonik dönüşüm örneği verilecektir.

Örnek 2.3.3. (Harmonik Polinom Dönüşümü) Bir $F(z) = h(z) - g(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ analitik yalınkat fonksiyonu ele alınsın. F fonksiyonu birim çemberi yatay yönde konveks olan bir köşeli eğrisel çokgene (episikloit) resmeder. Bir

$$w(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = z$$

(standart dönüşümü) ele alınsın. Buradan

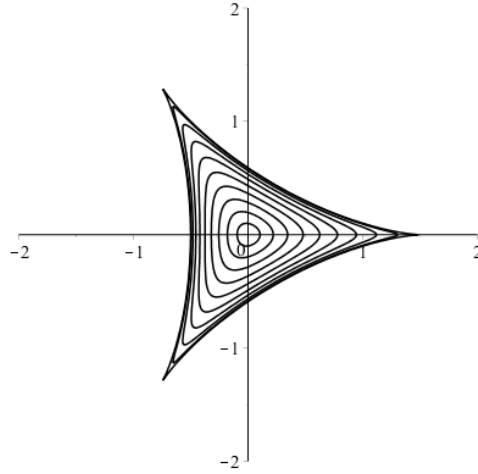
$$h'(z) - g'(z) = 1 - z$$

olduğundan

$$h'(z) - zh'(z) = 1 - z$$

$$h'(z)(1 - z) = 1 - z$$

$h'(z) = 1$ ise $h(z) = z$ dir ve $g'(z) = z$ ise $g(z) = \frac{z^2}{2}$ bulunur. h ve g normalizasyonu sağlar. Yani, $h(0) = 0$ ve $g(0) = 0$ dir. Böylece, $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2 \in S_H^0$ harmonik fonksiyonu elde edilir. Birim diskin bu fonksiyon altındaki görüntüsü Şekil 2.3 de verilmiştir.



Şekil 2.3. U nun harmonik polinom dönüşümü altındaki görüntüsü

Uyarı 2.3.4. Kesme yöntemi yatay yönde konveks olan $F = h - g$ analitik yalınkat fonksiyonu ile $w(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ genişlemesine dayanır. F analitik yalınkat fonksiyonuna karşılık gelen harmonik kesme (fonksiyon) $f = h + \bar{g} = h - g + g + \bar{g} = h - g + 2\text{Re}\{g\}$ dir. Dolayısıyla bu harmonik kesme (fonksiyon), analitik fonksiyona bir reel fonksiyonun eklenmesidir. Geometrik olarak bir yatay yönde konveks analitik yalınkat F fonksiyonunun görüntü bölgesi ince yatay şeritlerle kesilip ötelenerek ve/veya ölçeklenerek birim diskin harmonik kesme (fonksiyon) altındaki görüntüsü elde edilir. Bu yüzden bu yöntemin adı kesme yöntemidir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 f &= h + \bar{g} \\
 &= h + g - g + \bar{g} \\
 &= h + g - (g - \bar{g}) \\
 &= h + g - 2i\text{Im}\{g\}
 \end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden $F = h + g$ analitik fonksiyonu ile w genişlemesi ele alınarak $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonu da elde edilebilir.

Lemma 2.3.5. Yatay yönde konveks bir bölge $\Omega \subset \mathbb{C}$ ve Ω da reel değerli sürekli bir fonksiyon ρ olsun. Bu takdirde $\Psi(w) = w + \rho(w)$ dönüşümünün Ω da yalınkat olması için gerek ve yeter şart Ψ nin lokal yalınkat olmasıdır. Eğer Ψ birebir ise görüntüsü de yatay yönde konveks bir bölgedir.

İspat. Lemma'nın gerek şartının ispatı aşıkardır. O halde yeter şartın ispatının yapılması yeterlidir. $\Psi(w) = w + \rho(w)$ dönüşümünün yalınkat olmadığı kabul edilsin. Böylece $w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2 \in \Omega$ ayırık noktaları için $\Psi(w_1) = \Psi(w_2)$ dir. ρ reel değerli olduğundan

$$\text{Im}(\Psi(w_1)) = \text{Im}(w_1 + \rho(w_1)) = \text{Im}(w_1) = v_1$$

yazılabilir. Benzer şekilde $\text{Im}(\Psi(w_2)) = v_2$ dir. Hipotez gereği, $\Psi(w_1) = \Psi(w_2)$ olduğundan $v_1 = v_2$ 'dir. Bir $k \in \mathbb{R}$ için $k = v_1 = v_2$ olsun. Bir $\Phi: \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(u) = u + \rho(u + ik)$ dönüşümü ele alınsın. Ψ nin birebir olmadığı varsayımı gereği

$$\Phi(u_1) = u_1 + \rho(u_1 + ik) = \text{Re}\{\Psi(w_1)\} = \text{Re}\{\Psi(w_2)\} = u_2 + \rho(u_2 + ik) = \Phi(u_2)$$

yazılabilir. Böylece Φ kesin monoton olmayan bir fonksiyondur. Φ nin monotonluğunun değiştiği noktaya u_0 denilsin. $\Phi, \tilde{\Omega}$ yı \mathbb{R} ye resmettiğinden Φu_0 ın komşuluğunda lokal yalınkat olamaz. Dolayısıyla Φ lokal yalınkat değildir. Buradan da Ψ lokal yalınkat değildir. \square

İspat (Teorem 2.3.2 -Clunie ve Sheil-Small Kesme Yöntemi- nin İspatı). (\Leftarrow): Bir $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu yalınkat ve $f(\mathbb{U}) = \Omega$ yatay yönde konveks olsun. f fonksiyonu, $f = h - g + g + \bar{g} = h - g + 2\text{Re}\{g\}$ şeklinde yazılabilir. O halde Ω da tanımlanan

$$\begin{aligned}(h - g) \circ f^{-1}(w) &= (f - 2\text{Re}\{g\}) \circ f^{-1}(w) \\ &= w - 2\text{Re}\{g(f^{-1}(w))\} \\ &= w + p(w)\end{aligned}$$

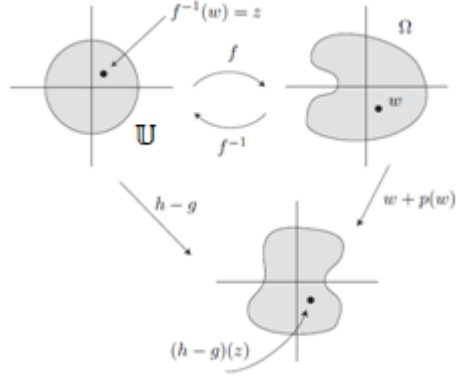
fonksiyonu elde edilir. Burada p reel değerli ve sürekli bir fonksiyondur. f lokal yalınkat olduğundan her $z \in \mathbb{U}$ için

$$|g'| < |h'| \Leftrightarrow g'(z) \neq h'(z)$$

dir. Böylece $h - g$, \mathbb{U} da lokal yalınkattır. O halde $w \rightarrow w + p(w)$ fonksiyonu lokal yalınkat fonksiyonların bileşkesi olduğundan Ω da lokal yalınkattır. Lemma 2.3.5 gereği $w \rightarrow w + p(w)$ yalınkattır ve yatay yönde konvektir. O halde

$$(h - g)(z) = [w + p(w)] \circ f(z)$$

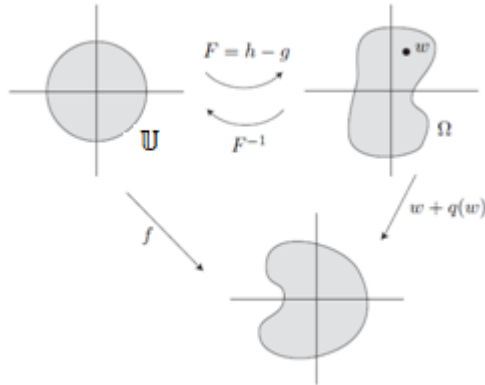
fonksiyonu yalınkat fonksiyonların bileşkesi olduğu için yalınkattır ve yatay yönde konvektir.



Şekil 2.4. Teorem 2.3.2'nin yeter şartının ispatı

(\Rightarrow): $F = h - g$ fonksiyonunun \mathbb{U} da yalınkat olduğu ve $\Omega = F(\mathbb{U})$ nun yatay yönde konveks olduğu varsayalım. Buradan $f = F + 2\text{Re}\{g\}$ ve

$$\begin{aligned} f(F^{-1}(w)) &= w + 2\text{Re}\{g(F^{-1}(w))\} \\ &= w + q(w) \end{aligned}$$



Şekil 2.5. Teorem 2.3.2 nin gerek şartının ispatı

yazılabilir. $f \circ F^{-1}$ fonksiyonu Ω da lokal yalınkattır (Ω da lokal yalınkat fonksiyonların bileşkesi olduğundan). Lemma 2.3.5 gereği $f \circ F^{-1}$ fonksiyonu Ω da yalınkattır ve yatay yönde konvekstir. \square

Örnek 2.3.6. (Harmonik Koebe Dönüşümü) Koebe fonksiyonu S ailesinde önemli olduğundan Koebe fonksiyonunu standart genişleme olan $w(z) = z$ ile keserek harmonik Koebe dönüşümü elde edilir. O halde

$$h(z) - g(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \text{ ve } w(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)} = z$$

olduğundan

$$h'(z) - g'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

yazılır. Buradan,

$$h'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^4} \text{ ve } h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

($h(0) = 0$ normalizasyonunun sağlanması için $h(z)$ den $\frac{(1-z)^2}{6(1-z)^2}$ çıkarıldı) elde edilir.

Diğer taraftan, $g(z) = h(z) - \frac{z}{(1-z)^2}$ olduğundan

$$g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} f(z) &= h(z) + \overline{g(z)} \\ &= \operatorname{Re}(h + g) + i\operatorname{Im}(h - g) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{z + \frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3}\right) + i\operatorname{Im}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right) \in S_H^0 \end{aligned}$$

elde edilir. Birim diskin f altındaki görüntüsünü araştırmak için, analitik Koebe fonksiyonunun birim diski resmettiği bölge araştırılırken kullanılan yöntem ele alınacaktır. Şöyle ki, $w = \frac{1+z}{1-z} = u + iv$ dönüşümü birim diski $\{w = u + iv \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w = u > 0, -\infty < v < \infty\}$ sağ yarı düzleme resmeder. Buradan $z = \frac{w-1}{w+1}$ alınır, $h(z)$ ve $g(z)$ de yerine yazılırsa

$$h\left(\frac{w-1}{w+1}\right) = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}w^3 + w^2 - \frac{5}{3}\right]$$

$$g\left(\frac{w-1}{w+1}\right) = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}w^3 - w^2 + \frac{1}{3}\right]$$

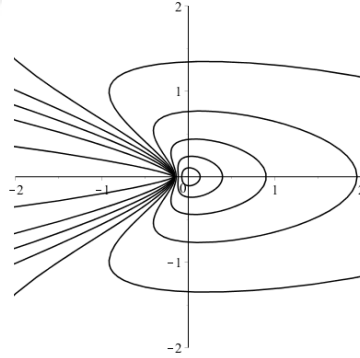
bulunur. Bir f fonksiyonu $f = \operatorname{Re}(h + g) + i\operatorname{Im}(h - g)$ şeklinde yazılabildiğinden

$$f\left(\frac{w-1}{w+1}\right) = \frac{1}{6}\operatorname{Re}\{w^3 - 1\} + \frac{1}{4}i\operatorname{Im}\{w^2 - 1\}$$

elde edilir. Bu ifadede $w = u + iv$ yazılır ve reel ve imajiner kısımlara ayrılırsa

$$\frac{1}{6}(u^3 - 3uv^2 - 1) + i\frac{1}{2}uv$$

bulunur. $u > 0$ olduğundan $uv = 0$ alınrsa $v = 0$ olacağından imajiner kısım sıfır olur ve reel kısım $\frac{-1}{6}$ ile ∞ arasında değerler alır. Böylece $uv = 0$ için $f(\mathbb{U})$ reel ekseninde $\frac{-1}{6}$ dan ∞ a kadar olan ışındır. Diğer taraftan $uv = c \neq 0$ alınrsa imajiner kısım bir sabittir ve reel kısım $-\infty$ dan ∞ a değişen $\frac{u^3}{6} - \frac{c^2}{2u}$ olur. Böylece herhangi $c \neq 0$ için $f(\mathbb{U})$, ic noktasından geçen reel eksene paralel doğrudur. Dolayısıyla $f(\mathbb{U})$ tüm kompleks düzlemde negatif reel eksen üzerindeki $\frac{-1}{6}$ dan $-\infty$ a olan ışının atılması ile elde edilen bölgedir.



Şekil 2.6. \mathbb{U} nun harmonik Koebe dönüşümü altındaki görüntüsü

2.4. Konvolüsyon

Tanım 2.4.1 (Analitik Konvolüsyon). Verilen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ analitik fonksiyonlarının konvolüsyonu (Hadamard çarpımı)

$$f(z) * F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A_n z^n$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.4.2. Sağ yarı düzlem dönüşümü olan $f(z) = \frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$ fonksiyonu ve $F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ Koebe fonksiyonu ele alınsın. Böylece

$$\begin{aligned} f(z) * F(z) &= \frac{z}{1-z} * \frac{z}{(1-z)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n * \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \\ &= (z + z^2 + z^3 + \dots)(z + 2z^2 + 3z^3 + \dots) \\ &= (z + 2z^2 + 3z^3 + \dots) \\ &= \frac{z}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

bulunur.

Analitik fonksiyonların konvolüsyonunda,

a) $f(z) = \frac{z}{1-z}$ sağ yarı düzlem dönüşümü konvolüsyonun birimi olarak davranır. Yani bir F analitik fonksiyonu için

$$\frac{z}{1-z} * F(z) = F(z)$$

dir.

b) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu türev operatörü olarak davranır. Yani bir $F(z)$ analitik fonksiyonu için

$$\frac{z}{(1-z)^2} * F(z) = zF'(z)$$

dir.

c) Konvolüsyon değişme özelliğine sahiptir. Yani f_1 ve f_2 analitik fonksiyonu için $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ dir.

d) f_1 ve f_2 analitik fonksiyonları için $z(f_1(z) * f_2(z))' = zf_1'(z) * f_2(z)$ dir.

İspat. $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$ ve $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n$ analitik fonksiyonları ele alınsın.

$$f_1(z) = A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots$$

ve

$$f_2(z) = B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots$$

olarak alınırsa,

$$(f_1 * f_2)(z) = A_1B_1z + A_2B_2z^2 + A_3B_3z^3 + \dots$$

ve böylece

$$(f_1 * f_2)'(z) = A_1B_1 + 2A_2B_2z + 3A_3B_3z^2 + \dots$$

bulunur. Ayrıca, $zf_1' * f_2 = A_1B_1z + 2A_2B_2z^2 + 3A_3B_3z^3 + \dots$ olduğundan,

$$z(f_1 * f_2)' = zf_1' * f_2$$

yazılır. \square

Diğer yandan, $f_1, f_2 \in S$ iken $f_1 * f_2$ S ye ait olmayabilir. Örneğin;

$$\frac{z}{(1-z)^2} * \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n * \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n \notin S$$

dir.

Tanım 2.4.4 (Harmonik konvolüsyon). Verilen

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n} \bar{z}^n$$

ve

$$F(z) = H(z) + \overline{G(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \bar{z}^n$$

harmonik yalınkat fonksiyonları için harmonik konvolüsyon

$$f(z) * F(z) = h(z) * H(z) + \overline{g(z) * G(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n B_n} \bar{z}^n$$

ile tanımlanır.

3. HARMONİK KONVEKS FONKSİYONLARIN KONVOLÜSYONU

Herhangi iki konveks fonksiyonun konvolüsyonu yine konvekstir. Harmonik fonksiyonlarda ise durum farklıdır. Bir harmonik sağ yarı düzlem dönüşümü ile bir $f \in K_H^0$ harmonik konveks dönüşümünün konvolüsyonu, f fonksiyonunun konvekslik veya yalınkatlık gibi özelliklerini korumayabilir. Bu şekilde çok sayıda sağ yarı düzlem dönüşümü mevcuttur. Böylece, Clunie ve Sheil-Small'un (1984) ortaya koyduğu aşağıdaki açık problem oluşur:

Açık Problem. Verilen bir $f \in K_H$ harmonik fonksiyonu için hangi özellikteki F harmonik fonksiyonları $f * F \in K_H$ özelliğini sağlar?

Bu problemin çözümü birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Bu bölümde harmonik fonksiyonların konvolüsyonu üzerine yapılan bazı temel çalışmalar (Dorff 2001 ve 2012a, Liu ve Li 2013, Li ve Liu 2016) incelenecektir. Ayrıca, harmonik fonksiyonların bir alt sınıfı ile genelleştirilmiş bir harmonik fonksiyon ailesinin konvolüsyonunun hangi şartlar altında yalınkat olduğu ve yatay yönde konveks olduğu araştırılacaktır.

Öncelikle, sıkça kullanılacak tanım ve teoremler verilecektir.

3.1. Konvolüsyon Çalışmaları İçin Ön Bilgiler

Teorem 3.1.1 (Ruscheweyh ve Sheil-Small 1973). $f, f_1 \in K$ olsun. Bu takdirde $f * f_1 \in K$ dır. Ayrıca f_2 ve $f_3 \in S$ fonksiyonları sırasıyla birim diski konvekse yakın ve

yıldızıl bir bölgeye resmetsin. Bu takdirde, $f * f_2$ ve $f * f_3$ S ye aittir ve sırasıyla konvekse yakın ve yıldızıl bölge dönüşümleridir.

Teorem 3.1.2 (Ruscheweyh ve Sheil-Small 1973). φ, G \mathbb{U} da analitik iki fonksiyon ve $\varphi(0) = G(0) = 0$ olsun. Eğer φ konveks ve G yıldızıl ise \mathbb{U} da analitik ve $\operatorname{Re}F(z) > 0$ özelliğindeki her F fonksiyonu için $\operatorname{Re} \frac{(\varphi * FG)(z)}{(\varphi * G)(z)} > 0$ ($\forall z \in \mathbb{U}$) dır.

Teorem 3.1.3 (Clunie ve Sheil-Small 1984). $f \in K_H$ ve $\varphi \in S$ için $f * (\alpha\bar{\varphi} + \varphi) \in S_H$ ($|\alpha| \leq 1$) dönüşümü \mathbb{U} yu bir yönde konveks bölge üzerine resmeder.

Teorem 3.1.4 (Ruscheweyh ve Salinas 1989). g birim diskte analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, her $f \in K_H$ için

$$f * g = \operatorname{Re}\{f\} * g + \overline{\operatorname{Im}\{f\} + g} \in K_H$$

dır ancak ve ancak her bir $\gamma \in \mathbb{R}$ için $g + i\gamma z g'$ imajiner eksen yönünde konvektir.

Teorem 3.1.5 (Goodloe 2002). $f_m, f_n \in K_H$ kanonik harmonik fonksiyonları birim diski sırasıyla m-gen ve n-gen çokgenlere resmetsinler. Bu takdirde $f_m * f_n \in K_H$ dır ve birim diski $p = \operatorname{ekok}(m, n)$ olmak üzere p-gen bölgeye resmeder.

Teorem 3.1.6 (Pommerenke 1963). \mathbb{U} da analitik bir f fonksiyonu $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ ile verilsin. Ayrıca $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\varphi(z) = \frac{z}{(1 + ze^{i\theta})(1 + ze^{-i\theta})}$$

olsun. Bu takdirde her $z \in U$ için $\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{\varphi(z)}\right\} > 0$ ise f reel eksen yönünde konvektir.

İleriki bölümlerde sıkça kullanılacak olan polinomların birim çemberin içindeki sıfır yerlerine dair çözümü ile ilgili Cohn kuralı şu şekildedir:

Teorem 3.1.7 (Cohn Kuralı). n . dereceden $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ polinomu verilsin ve $f^*(z) = z^n \overline{f\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{a_n} + \overline{a_{n-1}}z + \dots + \overline{a_0}z^n$ olsun. f polinomunun birim çemberin içinde p tane birim çemberin üzerinde stane kökü (sıfır yeri) olsun. Bu takdirde $|a_0| < |a_n|$ iken $(n - 1)$. dereceden

$$f_1(z) = \frac{\overline{a_n}f(z) - a_0f^*(z)}{z}$$

polinomunun birim çemberin içerisinde $p_1 = p - 1$ ve birim çember üzerinde $s_1 = s$ tane kökü vardır (Cohn 1922).

Tanım 3.1.8. \mathbb{U} birim diskini $R = \left\{\omega: \operatorname{Re}(\omega) > -\frac{1}{2}\right\}$ sağ yarı düzlemine resmeden $f = h + \bar{g} \in S_H^0$ fonksiyonları için

$$h(z) + g(z) = \frac{z}{1-z} \quad (3.1)$$

dir.

Ayrıca, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ olmak üzere \mathbb{U} birim diskini $\Omega_\alpha = \left\{ \omega: \frac{\alpha-\pi}{2 \sin \alpha} < \operatorname{Re}(\omega) < \frac{\alpha}{2 \sin \alpha} \right\}$ dikey şerit bölgesine resmeden $f = h + \bar{g} \in S_H^0$ fonksiyonları için,

$$h(z) + g(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1+ze^{i\alpha}}{1+ze^{-i\alpha}} \right) \quad (3.2)$$

formundadır. (3.2) şartını sağlayan $f = h + \bar{g} \in S_H^0$ fonksiyonu, birim diski Ω_α dikey şerit bölgesine veya Ω_α nın üç sınır noktasının konveks zarfına resmeder. Başka bir deyişle, \mathbb{U} birim diskinin görüntüsü bir dikey şerit, yarı şerit, bir yamuk veya üçgen olabilir.

Yarı düzlemler ve şerit bölge dönüşümlerin ayrıntılı tanımları (Muhanna ve Schober 1987, Dorff 1999, Hengartner ve Schober 1987) kaynaklarında bulunabilir.

Örnek 3.1.9 (Harmonik standart sağ yarı düzlem dönüşümü).

Analitik sağ yarı düzlem dönüşümü olan $\frac{z}{1-z}$ \mathbb{U} birim diskini konveks bir bölgeye resmeder. Harmonik sağ yarı düzlem dönüşümünü elde etmek için, $h_0(z) + g_0(z) = \frac{z}{1-z}$ ve $w_0(z) = -z$ olarak seçilip Clunie ve Sheil-Small'un (1984) kesme yöntemi uygulanırsa,

$$h'_0(z) + g'_0(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

yazılır. Buradan,

$$h'_0(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$$

ve

$$h_0(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}, \quad g_0(z) = -\frac{\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} f_0(z) &= h_0(z) + \overline{g_0(z)} \\ &= \operatorname{Re}(h_0 + g_0) + i\operatorname{Im}(h_0 - g_0) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{z}{1-z}\right) + i\operatorname{Im}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right) \in S_H^0 \end{aligned}$$

standart sağ yarı düzlem dönüşümü bulunur.

Tanım 3.1.10 (Schur-Cohn Algoritması). $f(z)$, n . dereceden polinomu

$$f(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$$

olarak verilsin. Ayrıca,

$$M_v = \begin{vmatrix} B_v^* & A_v \\ A_v^* & B_v \end{vmatrix} (v = 1, 2, \dots, n)$$

olsun. Burada $A^* = (\bar{A})^T$ şeklinde tanımlanır ve A_v ile B_v

$$A_v = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{v-1} \\ & a_0 & \dots & \vdots \\ & & \ddots & a_0 \end{pmatrix}, B_v = \begin{pmatrix} \bar{a}_n & \bar{a}_{n-1} & \dots & \bar{a}_{n-v+1} \\ & \bar{a}_n & \dots & \vdots \\ & & \ddots & \bar{a}_n \end{pmatrix}$$

şeklindeki üçgen matrislerdir. f nin tüm sıfırlarının birim diskin içinde kalması için gerek ve yeter şart M_1, M_2, \dots, M_n determinantlarının hepsinin sıfır olmasıdır (Rahman, Schmeisser 2002).

3.2. Düzlemsel Harmonik Konveks Dönüşümlerin Konvolüsyonu

Bu bölümde Dorff'un 2001 yılında yaptığı çalışma ayrıntılı olarak verilecektir.

Örnek 3.2.1. Bir $f_0 = h_0 + \bar{g}_0 \in K_H^0$ fonksiyonu $h_0(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n}{2} z^n$ ve

$g_0(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-n}{2} z^n$ olmak üzere (3.1) de verilen sağ yarı düzlem dönüşümü

ele alınsın. Ayrıca, (Duren 1992) de tanımlandığı gibi, \mathbb{U} yu 6-gen bölgeye resmeden

$h_1(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n+1} z^{6n+1}$ ve $g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{6n-1} z^{6n-1}$ özelliğindeki $f_1 = h_1 + \overline{g_1} \in K_H^0$ fonksiyonu ele alalım. Bu takdirde, $f_0 * f_1 \notin K_H^0$ dır. Çünkü her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{(g_0(z) * g_1(z))'}{(h_0(z) * h_1(z))'} \right| = \left| \frac{z^4(2 + z^6)}{(1 + 2z^6)} \right| \not\leq 1$$

olur.

Sıradaki teoremdede harmonik bir sağ yarı düzlem dönüşümü ile diğer bir harmonik sağ yarı düzlem dönüşümünün konvolüsyonu yön koruyan olduğunda, konvolüsyon fonksiyonunun reel eksen yönünde konveks olduğu görülecektir.

Teorem 3.2.2. Yukarıda verilen (3.1) şartını sağlayan iki sağ yarı düzlem dönüşümü $f_1 = h_1 + \overline{g_1}$ ve $f_2 = h_2 + \overline{g_2} \in K_H^0$ olsun. Bu takdirde $f_1 * f_2$ lokal yalınkat ve yön koruyan ise $f_1 * f_2 \in C_H^0$ dır ve reel eksen yönünde konvektir.

İspat. Herhangi bir $f = h + \overline{g} \in K_H^0$ sağ yarı düzlem dönüşümü için $h(z) + g(z) = \frac{z}{1-z}$ ve bir F analitik fonksiyonu için $F(z) * \frac{z}{1-z} = F(z)$ olduğundan

$$h_2 - g_2 = (h_1 + g_1) * (h_2 - g_2) = h_1 * h_2 - h_1 * g_2 + h_2 * g_1 - g_1 * g_2$$

ve

$$h_1 - g_1 = (h_1 - g_1) * (h_2 + g_2) = h_1 * h_2 + h_1 * g_2 - h_2 * g_1 - g_1 * g_2$$

yazılabilir. Böylece

$$h_1 * h_2 - g_1 * g_2 = \frac{1}{2} [(h_1 - g_1) + (h_2 - g_2)] \quad (3.3)$$

dir. O halde $(h_1 - g_1) + (h_2 - g_2)$ nin reel eksen yönünde konveks olduğu gösterildiğinde $h_1 * h_2 - g_1 * g_2$ nin de reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla da Teorem 2.3.2 gereği $f_1 * f_2$ reel eksen yönünde konvektir.

Eğer $f = h + \bar{g} \in K_H^0$ sağ yarı düzlem dönüşümünün genişlemesi $w = g'/h'$ ise,

$$\begin{aligned} h'(z) - g'(z) &= (h'(z) + g'(z)) \left(\frac{h'(z) - g'(z)}{h'(z) + g'(z)} \right) \\ &= (h'(z) + g'(z)) \left(\frac{1 - w(z)}{1 + w(z)} \right) \\ &= \frac{p(z)}{(1 - z)^2} \end{aligned}$$

dir. Burada, her $z \in \mathbb{U}$ için $\text{Re}\{p(z)\} > 0$ dir. Diğer taraftan,

$$\varphi(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} \in S^*$$

alınırsa

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \frac{z[h_1'(z) - g_1'(z) + h_2'(z) - g_2'(z)]}{\varphi(z)} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\frac{z}{(1-z)^2} [p_1(z) + p_2(z)]}{\frac{z}{(1-z)^2}} \right\} \\ &= \operatorname{Re}\{p_1(z) + p_2(z)\} > 0 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla Teorem 3.1.6 ($\theta = \pi$ alındı) ve (3.3) denklemi gereği $h_1 * h_2 - g_1 * g_2$ reel eksen yönünde konvektir. O halde Teorem 2.3.2 gereği $f_1 * f_2$ harmonik fonksiyonu da reel eksen yönünde konvektir. \square

Uyarı 3.2.3. Sağ yarı düzlem dönüşümü olan f_0 in \mathbb{U} üzerinde kendisiyle konvolüsyonu konveks değildir. Çünkü

$$h_0(z) * h_0(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+n)^2}{4} z^n \notin \mathcal{C}$$

dir. Dolayısıyla $f_0 * f_0 \notin K_H^0$ dir. Buradan varılan sonuç Teorem 3.2.2 deki gibi $f_1 * f_2 \in K_H^0$ olması gerekmez.

Sıradaki teoremdede sağ yarı düzlem dönüşümü ile dikey şerit dönüşümünün harmonik konvolüsyonunun yön koruyan olmak şartıyla reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.2.4. Sağ yarı düzlem dönüşümü $f_1 = h_1 + \overline{g_1} \in K_H^0$ ve dikey şerit dönüşümü $f_2 = h_2 + \overline{g_2} \in K_H^0$ fonksiyonları ele alınsın. Eğer $f_1 * f_2$ yön koruyan ise $f_1 * f_2 \in C_H^0$ dır ve reel eksen yönünde konvektir.

İspat. Öncelikle,

$$F_1 = (h_1 + g_1) * (h_2 - g_2) = h_1 * h_2 - h_1 * g_2 + h_2 * g_1 - g_1 * g_2$$

$$F_2 = (h_1 - g_1) * (h_2 + g_2) = h_1 * h_2 + h_1 * g_2 - h_2 * g_1 - g_1 * g_2$$

yazılabileceğinden

$$h_1 * h_2 - g_1 * g_2 = \frac{1}{2}[F_1 + F_2] \quad (3.4)$$

olur. Daha önce yapıldığı gibi bu fonksiyonların reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilecektir. İlk olarak $h_2 + g_2$ ifadesi (3.2) denklemindeki gibi alınsın. Böylece,

$$\begin{aligned} zF_1' &= z[(h_1 + g_1) * (h_2 - g_2)]' \\ &= (h_1 + g_1) * z(h_2' - g_2') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (h_1 + g_1) * \left[z(h_2' + g_2') \frac{(h_2' - g_2')}{(h_2' + g_2')} \right] \\
&= \frac{z}{1-z} * \frac{z}{(1+ze^{i\alpha})(1+ze^{-i\alpha})} \left(\frac{1-w}{1+w} \right) \\
&= \frac{zp_1(z)}{(1+ze^{i\alpha})(1+ze^{-i\alpha})}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re}\{p_1(z)\} > 0$ dır. Buradan,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\frac{zF_1'}{z}}{(1+ze^{i\alpha})(1+ze^{-i\alpha})} \right\} > 0 \tag{3.5}$$

olduğu elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
zF_2' &= z[(h_1 - g_1) * (h_2 + g_2)]' \\
&= z(h_1' - g_1') * (h_2 + g_2) \\
&= \left[z(h_1' + g_1') \frac{(h_1' - g_1')}{(h_1' + g_1')} \right] * (h_2 + g_2) \\
&= \left(z(h_1' + g_1') \left(\frac{1-w}{1+w} \right) \right) * (h_2 + g_2) \\
&= \left(\frac{z}{(1-z)^2} p_2(z) \right) * (h_2 + g_2)
\end{aligned}$$

olur. Burada her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re}\{p_2(z)\} > 0$ dır. Konvolüsyon özelliklerinden, herhangi bir $\varphi(z)$ fonksiyonu için $\varphi(z) * \frac{z}{(1-z)^2} = z\varphi'(z)$ olduğu ve (3.2) de verilen $h_2 + g_2$ fonksiyonu Teorem 3.1.2 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\frac{zF_2'}{z}}{(1+ze^{i\alpha})(1+ze^{-i\alpha})} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{(h_2+g_2)*p_2(z)\frac{z}{(1-z)^2}}{z(h_2'+g_2')} \right\} \\ &= \left\{ \frac{(h_2+g_2)*p_2(z)\frac{z}{(1-z)^2}}{(h_2+g_2)*\frac{z}{(1-z)^2}} \right\} > 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

yazılır. (3.5) ve (3.6) denklemlerinden dolayı

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z(F_1' + F_2')}{(1+ze^{i\alpha})(1+ze^{-i\alpha})} \right\} > 0$$

dır. Teorem 3.1.6 gereği $F_1 + F_2$ reel eksen yönünde konvektir. Sonuç olarak (3.4) denklemi Teorem 2.3.2'yi sağladığından istenilen sonuca ulaşılır. \square

Uyarı 3.2.5. Gerçekten de ispatta f_2 dönüşümü (3.2) denklemini sağlayan herhangi bir K_H^0 daki dönüşüm olarak ele alındığı için daha genel bir sonuç elde edildi. Dolayısıyla f_2 birim diski bir dikey şerit bölgeye, bir yarı şerite, bir dörtgene veya bir çokgene resmedebilir. Sıradaki teorem için de aynı ifade geçerlidir.

Teorem 3.2.6. Bir $f = h + \bar{g} \in K_H^0$ dikey şerit dönüşümü olsun. Eğer $f * f$ yön koruyansa ve her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re}\{(1-z)^2(h' - g')\} > 0$ ise $f * f \in C_H^0$ dır ve reel eksen yönünde konvektir.

İspat. Bir F analitik fonksiyonu

$$F = (h + g) * (h - g) = h * h - g * g$$

olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} zF' &= z[(h + g) * (h - g)]' \\ &= (h + g) * z(h' - g') \\ &= (h + g) * \frac{z[(1-z)^2(h' - g')]}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

dir. Hipotezde her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re}\{(1-z)^2(h' - g')\} > 0$ alındığından, Teorem 3.1.2 gereği

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'}{z(h' + g')}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{(h + g) * \frac{z}{(1-z)^2} [(1-z)^2(h' - g')]}{(h + g) * \frac{z}{(1-z)^2}}\right\} > 0$$

dır. Çünkü burada $h + g$ konveks, $\frac{z}{(1-z)^2}$ yıldızlı ve $\operatorname{Re}\{(1-z)^2(h' - g')\} > 0$ dir.

Dolayısıyla $\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'}{z(h'+g')}\right\} > 0$ dir ve Teorem 3.1.6 gereği F reel eksen yönünde

konvektir. Buradan da Teorem 3.1.2 gereği $F = h * h - g * g$ reel eksen yönünde konveks olduğundan $f * f \in C_H^0$ ve reel eksen yönünde konvektir. \square

3.3. Harmonik Konveks Dönüşümlerin Konvolüsyonu

Bu bölümde Dorff ve ark.'nın 2012 yılında yaptığı çalışma (2012a) ele alınacaktır. (Dorff 2001)'de iki sağ yarı düzlem dönüşümünün konvolüsyonu ancak lokal yalınkat ve yön koruyan şartı altında yine yalınkat ve reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilmişti. Bu çalışmada, konvolüsyon fonksiyonunun ne zaman bu şartı taşımasının gerekmediği yani lokal yalınkatlık ve yön koruyanlık şartı olmadan konvolüsyon fonksiyonunun yine yalınkat ve reel eksen yönünde konveks olabileceği durumlar araştırılmıştır.

Teorem 3.3.1. Bir $f = h + \bar{g} \in K_H^0$ fonksiyonu $h(z) + g(z) = \frac{z}{1-z}$ ve $w(z) = e^{i\theta} z^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\theta \in \mathbb{R}$) ile verilsin. Bu takdirde $n = 1, 2$ için $f_0 * f \in S_H^0$ dir ve reel eksen yönünde konvektir.

İspat. Öncelikle, $f_0 * f$ fonksiyonunun genişlemesi $\tilde{w} = (g_0 * g)' / (h_0 * h)'$ olsun. Teorem 3.2.2 ve Teorem 2.2.7 gereği her $z \in \mathbb{U}$ için $|\tilde{w}(z)| < 1$ olduğu gösterilmelidir. Birim diskte analitik ($F(0) = 0$) özelliğindeki F fonksiyonu için

$$h_0(z) * F(z) = \frac{1}{2} [F(z) + zF'(z)]$$

$$g_0(z) * F(z) = \frac{1}{2}[F(z) - zF'(z)]$$

dir. Ayrıca $g'(z) = w(z)h'(z)$ olduğundan $g''(z) = w(z)h''(z) + w'(z)h'(z)$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$\tilde{w}(z) = -\frac{zg''(z)}{2h'(z) + zh''(z)} = \frac{-zw'(z)h'(z) - zw(z)h''(z)}{2h'(z) + zh''(z)}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $h(z) + g(z) = \frac{z}{1-z}$ ve $g'(z) = w(z)h'(z)$ olduğu kullanılarak

$$h'(z) = \frac{1}{(1+w(z))(1-z)^2}$$

$$h''(z) = \frac{2(1+w(z)) - w'(z)(1-z)}{(1+w(z))^2(1-z)^3}$$

bulunur. $h'(z)$ ve $h''(z)$, \tilde{w} da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{w}(z) &= \frac{-zw'(z)h'(z) - zw(z)h''(z)}{2h'(z) + zh''(z)} \\ &= -z \frac{w^2(z) + \left[w(z) - \frac{1}{2}w'(z)z\right] + \frac{1}{2}w'(z)}{1 + \left[w(z) - \frac{1}{2}w'(z)z\right] + \frac{1}{2}w'(z)z^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Genişleme $w(z) = e^{i\theta} z$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}\tilde{w}(z) &= -ze^{2i\theta} \frac{(z^2 + \frac{1}{2}e^{-i\theta}z + \frac{1}{2}e^{-i\theta})}{(1 + \frac{1}{2}e^{i\theta}z + \frac{1}{2}e^{i\theta}z^2)} \\ &= -ze^{2i\theta} \frac{p(z)}{q(z)}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $q(z) = z^2 \overline{p(\frac{1}{z})}$ olduğu görülür. Bu durumda p nin bir kökü z_0 ise q nun bir kökü $\frac{1}{z_0}$ dir. Dolayısıyla,

$$\tilde{w}(z) = -ze^{2i\theta} \frac{(z+A)(z+B)}{(1+\bar{A}z)(1+\bar{B}z)}$$

elde edilir. p_1 in kökü $z_0 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}e^{-i\theta} \in \bar{U}$ dir. Böylece Teorem 3.1.7 (Cohn Kuralı) gereği p nin birim disk içerisinde iki tane A ve B gibi ($|A|, |B| \leq 1$) kökü vardır. Genişleme $w(z) = e^{i\theta} z^2$ olarak alındığında

$$|\tilde{w}(z)| = |z|^2 \left| \frac{z^3 + e^{-i\theta}}{1 + e^{i\theta}z^3} \right| = |z|^2 < 1$$

olduğu görülür. \square

Uyarı 3.3.2. Bir önceki teoremden $n \geq 3$ alınır, her bir n için $f_0 * f \notin S_H^0$ olacak şekilde özel bir $w(z) = e^{i\theta} z^n$ genişlemesi bulunabilir. Örneğin $w(z) = -z^n$ ve n tek olsun. Böylece,

$$\tilde{w}(z) = -z^n \frac{z^{n+1} + \left(\frac{n}{2} - 1\right)z - \frac{n}{2}}{1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)z^n - \frac{n}{2}z^{n+1}}$$

elde edilir. Bazı $z_0 \in \mathbb{U}$ için $|\tilde{w}(z)| > 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $z_0 = \frac{-n}{n+1} \in \mathbb{U}$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} \tilde{w}(z_0) &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} - \left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{n}{2}}{1 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} \\ &= 1 + \frac{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right] + \left[1 - \frac{n}{n+1}\right]}{\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right] + \left[1 - \frac{n}{n+1}\right] > 0$ olduğu dikkate alınmalıdır. Ayrıca $\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) + \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 0$ için $\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) > n - \frac{3}{2} > e$ dir ve $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ artan serisi e ye yakınsar. Böylelikle $n \geq 5$ için $|\tilde{w}(z_0)| > 1$ dir. Eğer $n = 3$ ise

$$|\tilde{w}(z_0)| = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left| \frac{3^4 - \frac{1}{2}(3)4^3 - \frac{3}{2}4^4}{4^4 - \frac{1}{2}3^3(4) - \frac{3}{2}3^4} \right| > 2$$

olduğu kolayca hesaplanabilir.

Eğer n çift ise, $w(z) = z^n$ ve $z_0 = \frac{-n}{n+1} \in \mathbb{U}$ için yukarıdaki adımlar yapıldığında $n \geq 5$ için $|\tilde{w}(z_0)| > 1$ olduğu görülür. Eğer $n = 4$ ise $|\tilde{w}(z_0)| > 15$ olur.

Teorem 3.3.3. Harmonik konveks $f = h + \bar{g} \in K_H^0$ fonksiyonu $h(z) + g(z) = \frac{z}{1-z}$ ve $w(z) = \frac{z+a}{1+az}$ $a \in (-1,1)$ özelliğinde alınsın. Bu takdirde, $f_0 * f \in S_H^0$ ve görüntüsü reel eksen yönünde konvektir.

İspat. Hipotezde verildiği gibi, $w(z) = \frac{z+a}{1+az}$, $-1 < a < 1$ olsun. Böylece,

$$\tilde{w}(z) = -z \frac{\left(z^2 + \frac{1+3a}{2}z + \frac{1+a}{2}\right)}{\left(1 + \frac{1+3a}{2}z + \frac{1+a}{2}z^2\right)} = -z \frac{f(z)}{f^*(z)} = -z \frac{(z+A)(z+B)}{(1+\bar{A}z)(1+\bar{B}z)}$$

dır. Teorem 3.1.7 (Cohn Kuralı) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\bar{a}_2 f(z) - a_0 f^*(z)}{z} \\ &= \frac{(a+3)(1-a)}{4} z + \frac{(1+3a)(1-a)}{4} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece f_1 in kökü $z_0 = -\frac{1+3a}{a+3} \in \mathbb{U}$ dur. Dolayısıyla, $|A|, |B| < 1$ dir. \square

Örnek 3.3.4. Bir $f_1 = h_1 + \overline{g_1}$ harmonik fonksiyonu, $h_1 + g_1 = \frac{z}{1-z}$ ve $w = z$ özelliğinde olsun. Buradan

$$h_1 = \frac{1}{4} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \frac{z}{1-z}$$

$$g_1 = -\frac{1}{4} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \frac{z}{1-z}$$

bulunur. $F_1 = f_0 * f_1 = H_1 + \overline{G_1}$ olsun. Böylece

$$H_1 = h_0 * h_1 = \frac{1}{2} [h_1(z) + zh_1'(z)]$$

$$= \frac{1}{8} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{\frac{3}{4}z - \frac{1}{4}z^3}{(1-z)^2(1+z)}$$

dır. Ayrıca,

$$G_1 = g_0 * g_1 = \frac{1}{2} [g_1(z) - zg_1'(z)]$$

$$= -\frac{1}{8} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}z^3}{(1-z)^2(1+z)}$$

ve

$$\tilde{w}(z) = -z \left(\frac{2z^2 + z + 1}{z^2 + z + 2} \right)$$

olduğu görülür. Şimdi, F_1 in \mathbb{U} yu $\left\{x \pm \frac{\pi}{8}i, x \leq -\frac{1}{4}\right\}$ ve $\left\{-\frac{1}{4} + iy, |y| \geq \frac{\pi}{8}\right\}$ yarı doğruları ile sınırlı bölgeye resmettiği gösterilecektir. Bunun için Clunie ve Sheil-Small'ın (1984) makalelerinde verdiği örnekteki (Örnek 5.4) yol izlenecektir. İlk olarak,

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \operatorname{Re}\{H_1 + G_1\} + i\operatorname{Im}\{H_1 - G_1\} \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{z - \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^3}{(1+z)(1-z)^2} \right) + i\operatorname{Im} \left(\frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \frac{z}{(1-z)^2} \right) \end{aligned}$$

olduğundan $\frac{1+z}{1-z} = w = u + iv, u > 0$ alınırsa,

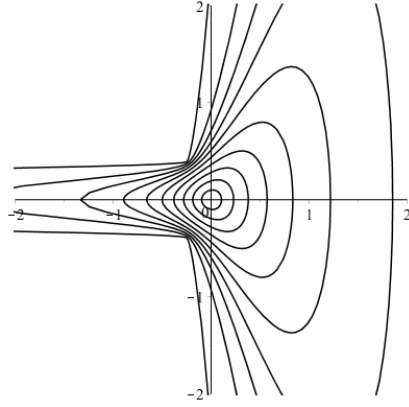
$$\begin{aligned} F_1(z) &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{8} \left(3w - 2 - \frac{1}{w} \right) \right] + i\operatorname{Im} \left[\frac{1}{4} \left(\ln w + \frac{1}{2} (w^2 - 1) \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left(3u - 2 - \frac{u}{u^2 + v^2} \right) + \frac{i}{4} \arctan \left(\frac{v}{u} + uv \right) \end{aligned}$$

bulunur. Öncelikle $\{w = u + iv: v = 0, u > 0\}$ pozitif reel ekseninin monoton olarak tüm pozitif reel eksene resmedildiği görülür. Sonrasında; $\arctan \left(\frac{v}{u} \right) + uv = c$ ve $u, v > 0$ seviye eğrilerinin görüntülerine bakılır. Bu seviye eğrileri $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$ ile kutupsal koordinatlara geçilirse $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\theta + r^2 \sin \theta \cos \theta = c$ olarak yazılabilir. Böylece $r^2 \cos \theta = \frac{c - \theta}{\sin \theta}$ olur. Buradan,

$r^2 \cos \theta \cos \theta = (c - \theta) \cot \theta$ yazıldığında ve $u = r \cos \theta$ değeri yerine konulduğunda $u^2 = (c - \theta) \cot \theta$ bulunur. Böylece $u = \sqrt{(c - \theta) \cot \theta}$ elde edilir. Benzer şekilde $0 < \theta < \min \left\{ c, \frac{\pi}{2} \right\}$ için $v = \sqrt{(c - \theta) \tan \theta}$ bulunur. $c > 0$ olsun. O halde seviye eğrisinin F_1 altındaki görüntüsü

$$F_1(z) = \frac{1}{8} \left(3\sqrt{(c - \theta) \cot \theta} - 2 - \sqrt{\frac{\sin \theta \cos^3 \theta}{c - \theta}} \right) + \frac{i}{4}c = \mu(c, \theta) + \frac{i}{4}c$$

olur. Eğer $0 < c < \frac{\pi}{2}$ ise $\theta \in (0, c)$ olur ve $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \mu(c, \theta) = \infty$ ve $\lim_{\theta \rightarrow c^-} \mu(c, \theta) = -\infty$ dur. Böylece seviye eğrisinin F_1 altındaki görüntüsü $\left\{ x + \frac{ic}{4} : -\infty < x < \infty \right\}$ yatay doğrusudur. Eğer $c \geq \frac{\pi}{2}$ ise $0 < \theta < \frac{\pi}{2} < c$ olduğundan $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \mu(c, \theta) = \infty$ ve $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \mu(c, \theta) = -\frac{1}{4}$ dür. Böylece seviye eğrisinin F_1 altındaki görüntüsü $\left\{ x + \frac{ic}{4} : -\frac{1}{4} < x < \infty \right\}$ yatay yarı doğrularıdır. Bu şu anlama gelir; seviye eğrilerinin F_1 altındaki görüntüsü sınırı reel eksen ve $\left\{ x + \frac{\pi}{8}i, x \leq -\frac{1}{4} \right\}$ ile $\left\{ -\frac{1}{4} + iy, y \geq \frac{\pi}{8} \right\}$ yarı doğruları olan bölgedir. Son olarak F_1 reel eksene göre simetrik olduğundan istenen elde edilir.



Şekil 3.1. U nun F_1 altındaki resmi

Sıradaki teorem, Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.3 deki sağ yarı düzlem dönüşümleri yerine dikey şerit dönüşümlerinin ele alınması üzerinedir.

Teorem 3.3.5. Bir $f = h + \bar{g} \in K_H^0$ fonksiyonu $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ olmak üzere

$$h(z) + g(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1 + ze^{i\alpha}}{1 + ze^{-i\alpha}} \right)$$

ve $w = e^{i\theta} z^n$ özelliğinde olsun. Eğer $n = 1, 2$ ise $f_0 * f \in S_H^0$ dır ve reel eksen yönünde konvektir.

İspat. Teorem 3.2.4 den $f_0 * f = H + \bar{G}$ nin lokal yalınkat olduğu tespit edilmelidir. Buradan,

$$h(z) + g(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1 + ze^{i\alpha}}{1 + ze^{-i\alpha}} \right)$$

ve $g'(z) = w(z)h'(z)$ dir. Böylece,

$$h'(z) = \frac{1}{(1 + w(z))(1 + ze^{i\alpha})(1 + ze^{-i\alpha})}$$

$$h''(z) = \frac{-[2(\cos \alpha + z)(1 + w(z)) + w'(z)(1 + 2 \cos \alpha z + z^2)]}{(1 + w(z))^2(1 + ze^{i\alpha})^2(1 + ze^{-i\alpha})^2}$$

olur. Bu değerler Teorem 3.3.1'de verilen \tilde{w} da yerine yazılırsa,

$$\tilde{w}(z) = -\frac{zg''(z)}{2h'(z) + zh''(z)} = \frac{-zw'(z)h'(z) - zw(z)h''(z)}{2h'(z) + zh''(z)}$$

$$= -z \left\{ \frac{w^2(z) + \left[w(z) - \frac{1}{2}w'(z)z \right] - \frac{1}{2}w'(z) \left(\frac{1+\cos \alpha z}{\cos \alpha + z} \right)}{-\left(\frac{1+\cos \alpha z}{\cos \alpha + z} \right) - \left[w(z) - \frac{1}{2}w'(z)z \right] \left(\frac{1+\cos \alpha z}{\cos \alpha + z} \right) + \frac{1}{2}w'(z)z^2} \right\}$$

bulunur. İlk olarak $w(z) = e^{i\theta}z$ olsun. Böylece,

$$\tilde{w}(z) = ze^{2i\theta} \frac{z^3 + \left(\cos \alpha + \frac{1}{2}e^{-i\theta} \right) z^2 - \frac{1}{2}e^{-i\theta}}{1 + \left(\cos \alpha + \frac{1}{2}e^{i\theta} \right) z - \frac{1}{2}e^{i\theta}z^3} = ze^{2i\theta} \frac{f(z)}{f^*(z)}$$

$$= ze^{2i\theta} \frac{(z + A)(z + B)(z + C)}{(1 + \bar{A}z)(1 + \bar{B}z)(1 + \bar{C}z)}$$

olur. Burada $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ve $\theta \in [-\pi, \pi]$ dir. Şimdi, $A, B, C \in \bar{U}$ olduğu gösterilecektir. İlk olarak,

$$f(z) = z^3 + \left(\cos \alpha + \frac{1}{2}e^{-i\theta}\right)z^2 - \frac{1}{2}e^{-i\theta}$$

fonksiyonuna Teorem 3.1.7 (Cohn Kuralı) uygulansın. Burada $\left|\frac{1}{2}e^{-i\theta}\right| = \frac{1}{2} < 1$ olduğu açıktır. Böylece,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\bar{a}_3 f(z) - a_0 f^*(z)}{z} \\ &= \frac{3}{4}z^2 + \left(\cos \alpha + \frac{1}{2}e^{-i\theta}\right)z + \frac{1}{2}e^{-i\theta} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$\left|\frac{1}{2}e^{-i\theta} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right)\right| \leq \frac{1}{2}|\cos \alpha| + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (\alpha \neq \pi \text{ dir})$$

olduğundan, Teorem 3.1.7 (Cohn Kuralı) tekrar f_1 e uygulandığında,

$$f_2(z) = \frac{\frac{3}{4}f_1(z) - \frac{1}{2}e^{-i\theta} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2}e^{i\theta}\right) f_1^*(z)}{z}$$

ve buradan

$$f_2(z) = \left(\frac{9}{16} - \frac{1}{4} \left| \cos \alpha + \frac{1}{2} e^{i\theta} \right|^2 \right) z + \frac{3}{4} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} e^{-i\theta} \right) - \frac{1}{2} e^{-i\theta} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} e^{i\theta} \right)^2$$

bulunur. Burada f_2 nin

$$\begin{aligned} z &= \frac{-\frac{3}{4} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} e^{-i\theta} \right) + \frac{1}{2} e^{-i\theta} \left(\cos \alpha + \frac{1}{2} e^{i\theta} \right)^2}{\frac{9}{16} - \frac{1}{4} \left| \cos \alpha + \frac{1}{2} e^{i\theta} \right|^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cos \alpha + \frac{1}{2} e^{-i\theta} \cos^2 \alpha - \frac{3}{8} e^{-i\theta} + \frac{1}{8} e^{i\theta}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha \cos \theta} \end{aligned}$$

şeklinde tek kökü vardır. Burada $|z| \leq 1$ olduğu yani

$$\left| -\frac{1}{4} \cos \alpha + \frac{1}{2} e^{-i\theta} \cos^2 \alpha - \frac{3}{8} e^{-i\theta} + \frac{1}{8} e^{i\theta} \right|^2 \leq \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha \cos \theta \right|^2$$

olduğu gösterilecektir. Yukarıdaki eşitsizliğe $x \in (-1,0]$ ve $y \in [-1,1]$ olmak üzere

$x = \cos \alpha$, $y = \cos \theta$ yazılırsa

$$-\frac{3}{16} x^4 + \frac{3}{16} x^2 + \frac{6}{16} x^3 y - \frac{6}{16} x y - \frac{3}{16} x^2 y^2 + \frac{3}{16} y^2 = \frac{3}{16} (1 - x^2)(x - y)^2 \geq 0$$

elde edilir. Cohn Kuralı gereği f nin \bar{U} da $A, B, C \in \bar{U}$ olmak üzere 3 kökü vardır. Böylece her $z \in U$ için $|\tilde{w}(z)| < 1$ dir. Daha sonra $w(z) = e^{i\theta} z^2$ genişlemesi kullanılırsa

$$\tilde{w}(z) = -z^2 e^{i\theta} \left\{ \frac{e^{i\theta} z^3 - \left(\frac{1+z \cos \alpha}{\cos \alpha + z} \right)}{-\left(\frac{1+z \cos \alpha}{\cos \alpha + z} \right) + e^{i\theta} z^3} \right\} = -z^2 e^{i\theta}$$

olur. Buradan da $|\tilde{w}(z)| < 1$ dir. \square

Teorem 3.3.6. Bir $f = h + \bar{g} \in K_H^0$ fonksiyonu $h(z) + g(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1+ze^{i\alpha}}{1+ze^{-i\alpha}} \right)$

ve $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ için $w(z) = \frac{z+a}{1+az}$ ($a \in [0,1)$) olarak verilsin. Bu takdirde $f_0 * f \in S_H^0$ dir ve görüntüsü reel eksen yönünde konvektir.

İspat. İlk olarak, Teorem 3.3.5'in ispatında elde edilen $\tilde{w}(z)$ değerinde $w(z) = \frac{z+a}{1+az}$ genişlemesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{w}(z) &= -z \left\{ \frac{w^2(z) + \left[w(z) - \frac{1}{2} w'(z) z \right] - \frac{1}{2} w'(z) \left(\frac{1+\cos \alpha z}{\cos \alpha + z} \right)}{-\left(\frac{1+\cos \alpha z}{\cos \alpha + z} \right) - \left[w(z) - \frac{1}{2} w'(z) z \right] \left(\frac{1+\cos \alpha z}{\cos \alpha + z} \right) + \frac{1}{2} w'(z) z^2} \right\} \\ &= z \frac{\left\{ z^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a + \cos \alpha \right) z^2 + (a + 2a \cos \alpha) z + \left(a \cos \alpha + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \right) \right\}}{\left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a + \cos \alpha \right) z + (a + 2a \cos \alpha) z^2 + \left(a \cos \alpha + \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \right) z^3 \right\}} \\ &= -z \frac{f(z)}{f^*(z)} = -z \frac{(z+A)(z+B)(z+C)}{(1+Az)(1+Bz)(1+Cz)} \end{aligned}$$

bulunur. Tanım 3.1.10 da verilen Schur-Cohn algoritmasında M_1, M_2 ve M_3 determinantlarının pozitif oldukları gösterilmelidir. Kısalığın hatırı için, $\cos \alpha = x$ olsun. Hipotezde verildiği gibi, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ olduğundan, $-1 < x \leq 0$ ve $-1 < a < 1$ dir. Öncelikle,

$$B_1 = \overline{a_3} \Rightarrow B_1^* = a_3$$

$$A_1 = a_0 \Rightarrow A_1^* = \overline{a_0}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{vmatrix} \frac{a_3}{a_0} & \frac{a_0}{a_3} \\ 1 & ax + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & ax + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \\ ax + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4}(2ax + a + 1)(3 - 2ax - a) > 0 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$B_2 = \begin{pmatrix} \overline{a_3} & \overline{a_2} \\ 0 & \overline{a_3} \end{pmatrix} \Rightarrow B_2^* = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^* = \begin{pmatrix} \overline{a_0} & \overline{a_0} \\ \overline{a_1} & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 & 0 & a_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & \bar{a}_3 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & \bar{a}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & ax + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} & a + 2ax \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a + x & 1 & 0 & ax + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \\ ax + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} + \frac{3}{2}a + x \\ a + 2ax & ax + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(1-x)(1-a)(1-2ax-a)(2+4ax+4a+x-2a^2x^2-5a^2x-2a^2-2ax^2)$$

bulunur. Eğer $P(a, x) = 2 + 4ax + 4a + x - 2a^2x^2 - 5a^2x - 2a^2 - 2a^2x^2 > 0$ ise $\frac{1}{4}(1-x)(1-a)(1-2ax-a)(2+4ax+4a+x-2a^2x^2-5a^2x-2a^2-2ax^2) > 0$ olduğundan, $M_2 > 0$ dir.

Şimdi $0 \leq a < 1$ ve $-1 < x \leq 0$ olmak üzere $P(a, x) > 0$ olduğu gösterilecektir (burada $\frac{-1}{3} < a < 1$ için sonucun doğruluğu açıktır). Ele alındığı gibi $0 \leq a < 1$ ve $-1 < x \leq 0$ olduğundan,

$$\frac{\partial}{\partial x} P(a, x) = 4a + 1 - 4a^2x - 5a^2 - 4ax$$

$$= [4a(1-x) - 4a^2(1+x)] + [1 - a^2] > 0$$

yazılır. Buradaki $a = a_0 > 0$ olarak sabitlensin. Böylece, $P(a_0, x)$ artandır ve $x = -1$ de minimum değerini alır. Böylece

$$P(a_0, x) > P(a_0, -1) = (a_0 - 1)^2 > 0$$

olur. Burada $P(0, x) = 2 + x > 0$ dır.

Aynı şekilde M_3 bulunabilir:

$$M_3 = \begin{vmatrix} a_3 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_0 \\ \frac{a_1}{a_0} & 0 & 0 & \frac{a_3}{a_0} & \frac{a_2}{a_0} & \frac{a_1}{a_0} \\ \frac{a_1}{a_2} & \frac{a_0}{a_1} & 0 & 0 & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{a_2}{a_2} & \frac{a_1}{a_1} & \frac{a_0}{a_0} & 0 & 0 & \frac{a_3}{a_3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}(x+1)(1-x)^3(1-a)^3(1-2ax-a)^2(1+3a) > 0$$

olur. O halde $A, B, C \in \mathbb{U}$ ve her $z \in \mathbb{U}$ için $|\tilde{w}(z)| < 1$ dir. \square

Uyarı: Yukarıdaki teoremde $-1 < a < \frac{-1}{3}$ olarak seçildiğinde $M_3 < 0$ olacağından, teorem sağlanmaz.

3.4. Genelleştirilmiş Harmonik Konveks Dönüşümlerin Konvolüsyonu

Bu bölümde Liu ve Li'nin (2013) yılında yaptıkları çalışma incelenecektir. Öncelikle, çalışmada ele alınan genelleştirilmiş harmonik dönüşümün tanımı verilecektir.

Bir $P = h_p + \overline{g_p}$ harmonik dönüşümü, $h_p - g_p = \frac{z}{1-z}$ ve $w = z$ özelliğinde olsun. Clunie ve Sheil-Small'un (1984) kesme metodu kullanıldığında,

$$h_p = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z} \right)$$
$$g_p = \frac{\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{z}{1-z} \right)$$

elde edilir. Buradan,

$$P(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z} \right) + \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{z}{1-z} \right)}$$

yazılır. Bir F fonksiyonu, \mathbb{U} da analitik ve $F(0) = 0$ ise, buradan

$$h_p(z) * F(z) = \frac{1}{2} [zF'(z) + F(z)]$$

$$g_p(z) * F(z) = \frac{1}{2} [zF'(z) - F(z)]$$

dir. Ayrıca, $P(z)$ nin \mathbb{U} birim diskini resmettiği bölge olan $P(\mathbb{U}) = \left\{u + iv: v^2 > -\left(u + \frac{1}{4}\right)\right\}$ Wang ve ark. (2016) tarafından ayrıntılı olarak gösterilmiştir.

Eğer, $I(z) = \frac{z}{1-z}$ yazılırsa $P(z)$

$$P(z) = \frac{zI'(z) + I(z)}{2} + \frac{\overline{zI'(z) - I(z)}}{2}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bir $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalizasyonunu sağlayan yalınkat analitik fonksiyonu için,

$$P_c[f](z) = \frac{czf'(z) + f(z)}{1+c} + \frac{\overline{czf'(z) - f(z)}}{1+c}, \quad (z \in \mathbb{U}, c > 0) \quad (3.7)$$

yazılır. Burada $P_1[I] = P$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} P_c[I](z) &= H_0(z) + \overline{G_0(z)} = \frac{czI'(z) + I(z)}{1+c} + \frac{\overline{czI'(z) - I(z)}}{1+c} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{2cz}{(1+c)(1-z)^2} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{2z}{(1+c)(1-z)} \right\} \\ &:= U + iV \end{aligned} \quad (3.8)$$

dir. Buradan,

$$V^2 = -\left(\frac{2c}{1+c}U + \frac{1}{(1+c)^2}\right)$$

bulunur. Böylece, $P_c[I](\mathbb{U}) = \left\{U + iV: V^2 > -\left(\frac{2c}{1+c}U + \frac{1}{(1+c)^2}\right), c > 0\right\}$ elde edilir.

Eğer F, \mathbb{U} da analitik ve $F(0) = 0$ ise,

$$H_0(z) * F(z) = \frac{1}{1+c} [czF'(z) + F(z)], G_0(z) * F(z) = \frac{1}{1+c} [czF'(z) - F(z)] \quad (3.9)$$

olur.

Lemma 3.4.1. Genelleştirilmiş harmonik dönüşüm ailesi olan $P_c[I]$ (3.8) de tanımlandığı gibi olsun. Bir $f = h + \bar{g} \in S_H$ fonksiyonu $h - g = \frac{z}{1-z}$ ve $w(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ ($h'(z) \neq 0, z \in \mathbb{U}$) özelliğinde olsun. Bu takdirde, $P_c[I] * f$ nin genişlemesi olan \tilde{w}_1

$$\tilde{w}_1 = \frac{[(c-1) + (c+1)z]w(1-w) + czw'(1-z)}{[(c+1) + (c-1)z](1-w) + czw'(1-z)} \quad (3.10)$$

şeklindedir.

İspat. Öncelikle, $h - g = \frac{z}{1-z}$ ve $g' = wh'$ olduğu için $g'' = w'h' + wh''$ dir. Buradan

$$h' = \frac{1}{(1-w)(1-z)^2} \quad h'' = \frac{2(1-w) + w'(1-z)}{(1-w)^2(1-z)^3}$$

olarak bulunur. Böylece, (3.8) den

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_1 &= \frac{(G_0 * g)'}{(H_0 * h)'} = \frac{(czg' - g)'}{(czh' - h)'} \\
&= \frac{(c-1)g' + czg''}{(c+1)h' + czh''} \\
&= \frac{(c-1)wh' + cz(w'h' + wh'')}{(c+1)h' + czh''} \\
&= \frac{[(c-1) + (c+1)z]w(1-w) + czw'(1-z)}{[(c+1) + (c-1)z](1-w) + czw'(1-z)}
\end{aligned}$$

yazılır. \square

Lemma 3.4.2. Bir $f_1 = h_1 + \overline{g_1} \in S_H^0$ fonksiyonu $h_1 - g_1 = \frac{z}{1-z}$ ile verilsin. Bu takdirde, $P_c[I] * f_1$ lokal yalınkat ve yön koruyan ise $P_c[I] * f_1 \in C_H^0$ dir ve reel eksen yönünde konvektir.

İspat. Öncelikle, $P_c[I] = H_0 + \overline{G_0}$ ve $H_0 - G_0 = \frac{2z}{(1+c)(1-z)}$ olduğu hatırlansın. Ayrıca, hipotezde verildiği gibi $h_1 - g_1 = \frac{z}{1-z}$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
h_1 + g_1 &= \frac{1+c}{2}(H_0 - G_0) * (h_1 + g_1) \\
&= \frac{1+c}{2}(H_0 * h_1 + H_0 * g_1 - G_0 * h_1 - G_0 * g_1), \\
H_0 + G_0 &= (H_0 + G_0) * (h_1 - g_1) \\
&= (H_0 * h_1 - H_0 * g_1 + G_0 * h_1 - G_0 * g_1)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$H_0 * h_1 - G_0 * g_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{1+c} (h_1 + g_1) + (H_0 + G_0) \right]$$

olur. Dolayısıyla, $\left(\frac{2}{1+c} (h_1 + g_1) + (H_0 + G_0) \right)$ ifadesinin yatay yönde konveks olduğu gösterilmelidir. Teorem 3.1.6 da $\varphi(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in S^*$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \frac{z \left[\frac{2}{1+c} (h_1' + g_1') + (H_0' + G_0') \right]}{\varphi} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{z \left[\frac{2}{1+c} (h_1' - g_1') \left(\frac{h_1' + g_1'}{h_1' - g_1'} \right) + (H_0' - G_0') \left(\frac{H_0' + G_0'}{H_0' - G_0'} \right) \right]}{\varphi} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{z \left[\frac{2}{1+c} (h_1' - g_1') \left(\frac{1+w_1}{1-w_1} \right) + (H_0' - G_0') \left(\frac{1+w_0}{1-w_0} \right) \right]}{\varphi} \right\} \\ &= \frac{2}{1+c} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\frac{z}{(1-z)^2} [p_1(z) + p_0(z)]}{\frac{z}{(1-z)^2}} \right\} = \frac{2}{1+c} \operatorname{Re}\{p_1(z) + p_0(z)\} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $w_1 = \frac{g_1'}{h_1'}$, $w_0 = \frac{G_0'}{H_0'}$ ve $p_1(z) = \frac{1+w_1}{1-w_1}$, $p_0(z) = \frac{1+w_0}{1-w_0}$ dir. Böylece,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z \left[\left(\frac{2}{1+c} \right) (h_1' + g_1') + (H_0' + G_0') \right]}{\varphi} \right\} = \frac{2}{1+c} \operatorname{Re}\{p_1(z) + p_0(z)\} > 0$$

olduğundan Teorem 3.1.6 gereği $\left(\frac{2}{1+c}(h_1 + g_1) + (H_0 + G_0)\right)$ yatay yönde konvektir ve buradan $H_0 * h_1 - G_0 * g_1$ yatay yönde konvektir. Sonuç olarak $P_c[I] * f_1$ lokal yalınkat olarak kabul edildiğinden Teorem 2.3.2 gereği istenen sonuç elde edilir. \square

Sıradaki lemma, bir polinomun birim disk içinde kalan köklerinin dağılımı üzerinedir.

Lemma 3.4.3. Verilen n . dereceden bir kompleks katsayılı

$$p(z) = p_0(z) = a_{n,0}z^n + a_{n-1,0}z^{n-1} + \dots + a_{1,0}z + a_{0,0} (a_{n,0} \neq 0) \quad (3.11)$$

polinomunun birim disk içinde kalan köklerini bulmak için,

$$p^*(z) = p^*_0(z) = z^n \overline{p\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{a_{n,0}} + \overline{a_{n-1,0}}z + \dots + \overline{a_{1,0}}z^{n-1} + \overline{a_{0,0}}z^n$$

olarak yazılsın. Eğer $p(z)$ nin bütün kökleri birim diskin içinde kalıyorsa $|a_{0,0}| < |a_{n,0}|$ olur (Cheng 1990).

Lemma 3.4.4. Eğer $|a_{0,0}| \geq |a_{n,0}|$ ise (3.11) denkleminde verilen $p(z)$ nin köklerinin hepsi birim diskin içinde kalmaz.

Bir fonksiyon dizisi $k = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ için, $\{p_k(z) \mid k = 0, 1, \dots, m, (m \leq n)\}$ olmak üzere tanımlansın. Burada,

$$\begin{aligned}
p_k(z) &= a_{n-k,k}z^{n-k} + a_{n-k-1,k}z^{n-k-1} + \dots + a_{1,k}z + a_{0,k}, \\
p_k^*(z) &= \overline{a_{n-k,k}} + \overline{a_{n-k-1,k}}z + \dots + \overline{a_{1,k}}z^{n-k-1} + \overline{a_{0,k}}z^{n-k}, \\
p_{k+1}(z) &= \begin{cases} \frac{p_k(z)}{z}, & a_{n-k,k} = 0, \\ \frac{\overline{a_{n-k,k}}p_k(z) - a_{0,k}p_k^*(z)}{z}, & a_{n-k,k} \neq 0, \end{cases} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

dir. Eğer $|a_{0,k}| \geq |a_{n-k,k}|$ ise Lemma 3.4.4 gereği, $p_k(z) = 0$ köklerinin hepsi birim diskin içinde kalmaz. Dolayısıyla $p_{k+1}(z)$ fonksiyonunu oluşturmaya gerek yoktur. Eğer $|a_{0,k}| < |a_{n-k,k}|$ ise $p_{k+1}(z)$ kullanılarak $\{p_k(z)\}$ oluşturulur.

Sıradaki lemmada, (3.11) ile verilen $p(z)$ nin bütün sıfırlarının birim disk içinde kalması için gerekli ve yeterli koşul verilecektir.

Lemma 3.4.5. Denklem (3.11) ile verilen $p(z)$ nin bütün sıfırlarının birim disk içinde kalması için gerekli ve yeterli koşul $|a_{0,k}| < |a_{n-k,k}|$ olmasıdır. Burada $a_{0,k}$ ve $a_{n-k,k}$ katsayıları $p_k(z)$ polinomundan elde edilir (Cheng 1990).

Teorem 3.4.6. $P_c[I]$ (3.8) denklemine tanımlanan bir dönüşüm, $f_n = h + \bar{g}$ fonksiyonu ise $h - g = \frac{z}{1-z}$ ve $w(z) = e^{i\theta}z^n$ ($\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$) özelliğinde olsun. Bu durumda $0 < c \leq \frac{2}{n}$ aralığında $P_c[I] * f_n \in S_H^0$ dir ve görüntüsü reel eksen yönünde konvektir.

İspat. Lemma 3.4.2 ye göre, $P_c[I] * f_n$ fonksiyonunun $\widetilde{w}_1(z)$ genişlemesinin her $z \in \mathbb{U}$ için $|\widetilde{w}_1(z)| < 1$ olduğunu göstermek yeterlidir. (3.10) denklemine $w(z) = e^{i\theta}z^n$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_1(z) &= \left([(c-1) + (c+1)z] e^{i\theta} z^n (1 - e^{i\theta} z^n) + c n e^{i\theta} z^n (1-z) \right) \\
&\quad \times \left([(c+1) + (c-1)z] (1 - e^{i\theta} z^n) + c n e^{i\theta} z^n (1-z) \right)^{-1} \\
&= -e^{2i\theta} z^n \frac{p(z)}{p^*(z)}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

olur. Burada

$$p(z) = z^{n+1} - \frac{1-c}{1+c} z^n - \frac{1-(n-1)c}{1+c} e^{-i\theta} z + \frac{1-(n+1)c}{1+c} e^{-i\theta} \tag{3.14}$$

ve $p^*(z) = z^{n+1} \overline{p\left(\frac{1}{z}\right)}$ dir.

Eğer z_0 , $p(z)$ nin bir sıfırı ise, $\frac{1}{z_0}$ de $p^*(z)$ nin bir sıfırındır. Bundan dolayı, A_1, A_2, \dots, A_{n+1} $p(z)$ nin sıfırları ise,

$$\widetilde{w}_1 = -e^{2i\theta} z^n \frac{(z-A_1)}{(1-\overline{A_1}z)} \frac{(z-A_2)}{(1-\overline{A_2}z)} \cdots \frac{(z-A_{n+1})}{(1-\overline{A_{n+1}}z)} \tag{3.15}$$

yazılabilir. $|A_i| \leq 1$ için, $\left(\frac{z-A_i}{1-\overline{A_i}z}\right)$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) \overline{U} dan \overline{U} na bir dönüşümdür.

Böylece, $0 < c < \frac{2}{n}$ olmak üzere $p(z)$ nin tüm A_1, A_2, \dots, A_{n+1} sıfırlarının \overline{U} nin içinde kaldığı gösterilmelidir. Teoremin ispatı iki durumda incelenecektir:

Durum 1. $c = \frac{2}{n}$ olsun. Bu durumda, (3.13) denkleminde $c = \frac{2}{n}$ olduğu yazılırsa,

$$\begin{aligned}
|\widetilde{w}_1| &= \left| -e^{2i\theta} z^n \left(\frac{z^{n+1} - \frac{n-2}{n+2} z^n + \frac{n-2}{n+2} e^{-i\theta} z - e^{-i\theta}}{1 - \frac{n-2}{n+2} z + \frac{n-2}{n+2} e^{i\theta} z^n - e^{i\theta} z^{n+1}} \right) \right| \\
&= \left| e^{i\theta} z^n \left(\frac{-e^{i\theta} z^{n+1} + \frac{n-2}{n+2} e^{i\theta} z^n - \frac{n-2}{n+2} z + 1}{1 - \frac{n-2}{n+2} z + \frac{n-2}{n+2} e^{i\theta} z^n - e^{i\theta} z^{n+1}} \right) \right| = |e^{i\theta} z^n| < 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2. $0 < c < \frac{2}{n}$ olsun. Elde edilen (3.15) denklemi gereği, (3.14) ün tüm sıfırlarının \bar{U} da kaldığını göstermek yeterlidir.

$$|a_{0,0}| = \left| \left(\frac{1 - (n+1)c}{1+c} \right) e^{-i\theta} \right| < 1 = |a_{n+1,0}|$$

olduğundan, $p(z)$ ye (3.12) denklemi uygulanabilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
p_1(z) &= \frac{\overline{a_{n+1,0}} p(z) - a_{0,0} p^*(z)}{z} \\
&= \frac{p(z) - \left(\frac{1-(n+1)c}{1+c} \right) e^{-i\theta} p^*(z)}{z} \\
&= \frac{(n+2)c(2-nc)}{(1+c)^2} z^n - \frac{nc(2-nc)}{(1+c)^2} z^{n-1} - \frac{2c(2-nc)}{(1+c)^2} e^{-i\theta} \\
&= \frac{(n+2)c(2-nc)}{(1+c)^2} \left(z^n - \frac{n}{n+2} z^{n-1} - \frac{2}{n+2} e^{-i\theta} \right) \\
&= \frac{(n+2)c(2-nc)}{(1+c)^2} q_1(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $q_1(z) = z^n - \binom{n}{n+2} z^{n-1} - \frac{2}{n+2} e^{-i\theta}$ ve $q_1^*(z) = 1 - \binom{n}{n+2} z - \left(\frac{2}{n+2}\right) e^{i\theta} z^n$ dir. $n \geq 1$ için, $|a_{0,1}| = \left| -\left(\frac{2}{n+2}\right) e^{-i\theta} \right| = \frac{2}{n+2} < 1 = |a_{n,1}|$ olur. Tekrar $q_1(z)$ üzerinde (3.12) denklemini kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
p_2(z) &= \frac{\overline{a_{n,1}} q_1(z) - a_{0,1} q_1^*(z)}{z} \\
&= \frac{q_1(z) + \left(\frac{2}{n+2}\right) e^{-i\theta} q_1^*(z)}{z} \\
&= \frac{n(n+4)}{(n+2)^2} \left(z^{n-1} - \frac{n+2}{n+4} z^{n-2} - \frac{2}{n+4} e^{-i\theta} \right) \\
&= \frac{n(n+4)}{(n+2)^2} q_2(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $q_2(z) = z^{n-1} - \binom{n+2}{n+4} z^{n-2} - \frac{2}{n+4} e^{-i\theta}$ ve $q_2^*(z) = 1 - \binom{n+2}{n+4} z - \left(\frac{2}{n+4}\right) e^{i\theta} z^{n-1}$ dir.

Benzer şekilde, $|a_{0,2}| = \left| -\left(\frac{2}{n+4}\right) e^{-i\theta} \right| = \frac{2}{n+4} < 1 = |a_{n-1,2}|$ olur ve

$$\begin{aligned}
p_3(z) &= \frac{\overline{a_{n-1,2}} q_2(z) - a_{0,2} q_2^*(z)}{z} \\
&= \frac{q_2(z) + \left(\frac{2}{n+4}\right) e^{-i\theta} q_2^*(z)}{z} \\
&= \frac{(n+2)(n+6)}{(n+4)^2} \left(z^{n-2} - \frac{n+4}{n+6} z^{n-3} - \frac{2}{n+6} e^{-i\theta} \right) \\
&= \frac{(n+2)(n+6)}{(n+4)^2} q_3(z)
\end{aligned}$$

dir. Bu şekilde devam edilirse,

$$\begin{aligned}
p_k(z) &= \frac{\overline{a_{n+1-k,k}}q_k(z) - a_{0,k}q_k^*(z)}{z} \\
&= \frac{[n+2(k-2)](n+2k)}{[n+2(k-1)]^2} \left(z^{n+1-k} - \frac{n+2(k-1)}{n+2k} z^{n-k} - \frac{2}{n+2k} e^{-i\theta} \right) \\
&= \frac{[n+2(k-2)](n+2k)}{[n+2(k-1)]^2} q_k(z) \quad (k = 2, 3, \dots, n)
\end{aligned}$$

olur ve burada $q_k(z) = z^{n+1-k} - \frac{n+2(k-1)}{n+2k} z^{n-k} - \frac{2}{n+2k} e^{-i\theta}$ ve $|a_{0,k}| = \left| -\left(\frac{2}{n+2k}\right) e^{-i\theta} \right| = \frac{2}{n+2k} < 1 = |a_{n+1-k,k}|$ dir. Bundan dolayı, $k = n$ için

$$p_n(z) = \frac{3n(3n-4)}{(3n-2)^2} \left(z - \frac{3n-2}{3n} - \frac{2}{3n} e^{-i\theta} \right)$$

elde edilir. Eğer $\theta \neq 2m\pi, m \in \mathbb{N}$ ise $|a_{0,n}| = \left| \left(\frac{3n-2+2e^{-i\theta}}{3n} \right) \right| < 1 = |a_{1,n}|$ olur ve Lemma 3.4.5 gereği A_1, A_2, \dots, A_{n+1} birim disk içinde kalır.

Eğer $\theta = 2m\pi, m \in \mathbb{N}$ ise $p(z) = z^{n+1} - \left(\frac{1-c}{1+c}\right) z^n - \left(\frac{1-(n-1)c}{1+c}\right) z + \left(\frac{1-(n+1)c}{1+c}\right)$ olur ve $z = 1, p(z)$ nin sıfırdır, bu nedenle

$$\begin{aligned}
p(z) &= (z-1) \left[z^n + \left(1 - \frac{1-c}{1+c}\right) z^{n-1} + \left(1 - \frac{1-c}{1+c}\right) z^{n-2} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{1-c}{1+c}\right) z - \left(\frac{1-(n+1)c}{1+c}\right) \right] = (z-1)Q(z)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda $Q(z)$ nin sıfırlarının birim disk içinde kaldığını göstermek yeterlidir. $0 < c < \frac{2}{n}$ için $\left| -\frac{1-(n+1)c}{1+c} \right| < 1$ olduğundan (3.12) denklemini $Q(z)$ ye uygulandığında benzer şekilde $Q(z)$ nin tüm sıfırlarının birim disk içinde kaldığı elde edilir.

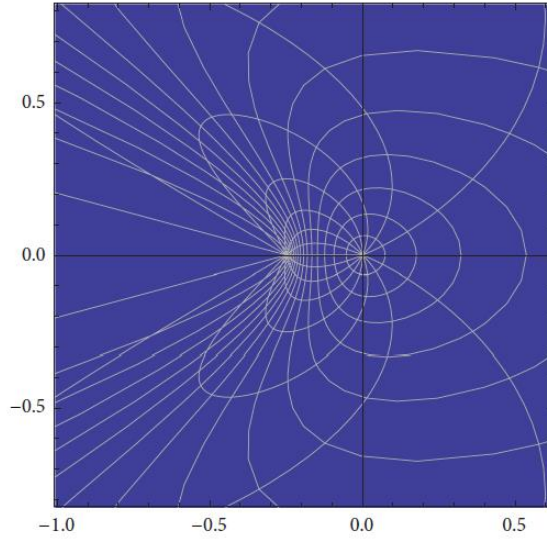
Özet olarak, $0 < c < \frac{2}{n}$ için $p(z)$ nin tüm sıfırlarının birim çember içinde veya üzerinde olduğu gösterilmiştir. \square

Örnek 3.4.7. Teorem 3.4.6 da $\theta = 0$ ve $n = 1$ alınırsa, $h_1 - g_1 = \frac{z}{1-z}$ ve $w = z$ olmak üzere $f_1 = h_1 + \overline{g_1} = P(z) = \frac{z - \frac{1}{z}z^2}{(1-z)^2} + \frac{\frac{1}{z}z^2}{(1-z)^2}$ elde edilir. Ayrıca, $c = 1$ için, $P_1[I] = P(z)$ ve $P_1[I] * f_1 = P(z) * P(z) = H_1 + \overline{G_1}$ dir. Buradan,

$$H_1 = h_1 * h_1 = \frac{1}{2} [zh_1' + h_1] = \frac{4z - 3z^2 + z^3}{4(1-z)^3}$$

$$G_1 = g_1 * g_1 = \frac{1}{2} [zg_1' - g_1] = \frac{z^2 + z^3}{4(1-z)^3}$$

elde edilir. Birim diskin $P(z) * P(z)$ altındaki görüntüsü aşağıdaki şekilde verildiği gibidir.



Şekil 3.2. $P(z) * P(z)(\mathbb{U})$ resmi

Lemma 3.4.8. Genelleştirilmiş harmonik dönüşüm olan $P_c[f]$ fonksiyonunun lokal yalınkat olması için gerek ve yeter şart konveks olmasıdır.

İspat. Genelleştirilmiş harmonik dönüşüm olan $P_c[f]$, $P_c[f] = F = H + \bar{G}$ olarak yazılsın. F nin lokal yalınkat olması için gerek ve yeter şart her $z \in \mathbb{U}$ için $|w(z)| = \left| \frac{(c-1)f'(z) + czf''(z)}{(c+1)f'(z) + czf''(z)} \right| < 1$ olmasıdır ya da buna denk olarak, $c > 0$ ve $f \in S$ olduğundan

$$\left| \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) - \frac{1}{c} \right| < \left| \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{1}{c} \right) \right|$$

olmalıdır. Yukarıdaki eşitsizlik $\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$ eşitizliğine denktir ve bu konvekslik için analitik koşuldur. Böylece $P_c[f]$ nin lokal yalınkat olması ancak ve ancak f nin konveks olmasıyla mümkündür. \square

Teorem 3.4.9. Genelleştirilmiş harmonik dönüşüm olan $P_c[f]$ fonksiyonunun S_H^0 sınıfına ait olması ve görüntüsünün reel eksen yönünde konveks olması için gerek ve yeter şart f nin konveks olmasıdır.

İspat. Genelleştirilmiş harmonik dönüşüm $P_c[f] = F = H + \bar{G}$ olarak yazılsın. Buradan, $H - G = \frac{2f}{1+c}$ konvektir. Özel olarak, $H - G$ yatay yönde konvektir, Lemma 3.4.8 ve Teorem 2.3.2 den dolayı ispat tamamlanır. \square

3.5. Genelleştirilmiş Harmonik Sağ Yarı Düzlem Dönüşümlerinin Konvolüsyonu

Bu bölümde Li ve Liu'nun 2016'da yaptıkları çalışma incelenecektir. Çalışmada Kumar ve ark. (2016) tarafından tanımlanan sağ yarı düzlem dönüşümünü ele almışlardır. Bu dönüşüm şu şekilde tanımlanmıştır:

Bir $f_a = h_a + \bar{g}_a$ fonksiyonu $-1 < a < 1$ olmak üzere

$$h_a + g_a = \frac{z}{1-z}, \quad w_a(z) = \frac{a-z}{1-az}$$

ile verilsin. Clunie ve Sheil-Small (1984) kesme yöntemi kullanıldığında,

$$h_a(z) = \frac{\frac{1}{1+a}z}{(1-z)^2} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{(1-z)^2}, \quad g_a(z) = \frac{\frac{a}{1+a}z}{(1-z)^2} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{(1-z)^2} \quad (3.16)$$

bulunur. Yukarıda $a = 0$ alındığında, $f_0 = h_0 + \overline{g_0} \in K_H^0$ sağ yarı düzlem dönüşümü elde edilir. Yani $h_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{(1-z)^2}$ ve $g_0(z) = -\frac{1}{2} \frac{z^2}{(1-z)^2}$ olmak üzere Örnek 3.1.9. da verilen standart sağ yarı düzlem dönüşümü bulunur. Bu dönüşüm \mathbb{U} birim diskini $\left\{w = u + iv: \operatorname{Re}(w) > -\frac{1}{2}\right\}$ bölgesine resmeder.

Aşağıdaki genelleştirilmiş sağ yarı düzlem harmonik yalınkat dönüşümleri Muir (2008) tarafından tanımlanmıştır. Her $z \in \mathbb{U}$ ve $c > 0$ için

$$\begin{aligned} L_c(z) &= H_c(z) + \overline{G_c(z)} \\ &= \frac{1}{1+c} \left[\frac{z}{1-z} + \frac{cz}{(1-z)^2} \right] + \frac{1}{1+c} \overline{\left[\frac{z}{1-z} - \frac{cz}{(1-z)^2} \right]} \end{aligned} \quad (3.17)$$

dir.

Burada, $L_1(z) = f_0(z)$ dir ve $c > 0$ için $L_c(\mathbb{U}) = \left\{ \operatorname{Re}(w) > -\frac{1}{1+c} \right\}$ olduğu (Muir 2008)'de gösterilmiştir. Ayrıca, eğer $f = h + \overline{g} \in S_H$ için

$$L_c * f = \frac{h + czh'}{1+c} + \frac{\overline{g - czg'}}{1+c} \quad (3.18)$$

olur.

Lemma 3.5.1. Genelleştirilmiş harmonik sağ yarı düzlem dönüşümü olan $L_c(z) = H_c(z) + \overline{G_c(z)}$ (3.17)'de verildiği gibi ve $h + g = \frac{z}{1-z}$ ile $w(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ ($h'(z) \neq 0, z \in \mathbb{U}$) özelliğindeki $f = h + \bar{g} \in S_H^0$ sağ yarı düzlem dönüşümü ele alınsın. Bu takdirde, $L_c * f$ nin genişlemesi olan \tilde{w}_2

$$\tilde{w}_2(z) = \frac{[(1-c) - (1+c)z]w(1+w) - cw'z(1-z)}{[(1+c) - (1-c)z](1+w) - cw'z(1-z)} \quad (3.19)$$

dir.

İspat. Öncelikle (3.18)'de verildiği gibi $L_c * f = \frac{h+czh'}{1+c} + \frac{\overline{g-czg'}}{1+c}$ olduğundan

$$\tilde{w}_2(z) = \frac{(g - czg')'}{(h + czh')'} = \frac{(1-c)g' - czg''}{(1+c)h' + czh''}$$

yazılır. Ayrıca, $h + g = \frac{z}{1-z}$ ve $w(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ olduğundan

$$g' = wh', \quad g'' = w'h' + wh''$$

$$h' + g' = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad h' + wh' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$h' = \frac{1}{(1+w)(1-z)^2}, \quad h'' = \frac{2(1+w) - w'(1-z)}{(1+w)^2(1-z)^3}$$

yazılır. Böylece

$$\tilde{w}_2(z) = \frac{[(1-c) - (1+c)z]w(1+w) - cw'z(1-z)}{[(1+c) - (1-c)z](1+w) - cw'z(1-z)}$$

bulunur.

Lemma 3.5.2. Genelleştirilmiş harmonik sağ yarı düzlem dönüşümü olan $L_c(z) = H_c(z) + \overline{G_c(z)}$ (3.17)'de verildiği gibi ve $f = h + \bar{g}$ sağ yarı düzlem dönüşümü $h + g = \frac{z}{1-z}$ özelliğinde alınsın. Eğer $L_c * f$ lokal yalınkat ise bu takdirde, $L_c * f \in \mathcal{S}_H^0$ dır ve yatay yönde konvektir.

İspat. Öncelikle, $L_c = H_c + \overline{G_c}$ ve $H_c + G_c = \frac{2z}{(1+c)(1-z)}$ olduğu hatırlansın. Ayrıca, hipotezde verildiği gibi $h + g = \frac{z}{1-z}$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} h - g &= \frac{1+c}{2} (H_c + G_c) * (h - g) \\ &= \frac{1+c}{2} (H_c * h - H_c * g + G_c * h - G_c * g), \\ H_c - G_c &= (H_c - G_c) * (h + g) \\ &= (H_c * h + H_c * g - G_c * h - G_c * g) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$H_c * h - G_c * g = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{1+c} (h - g) + (H_c - G_c) \right] \quad (3.20)$$

olur. Dolayısıyla, $\frac{2}{1+c}(h - g) + (H_c - G_c)$ ifadesinin yatay yönde konveks olduğu gösterilecektir. Teorem 3.1.6' da $\varphi(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in S^*$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \left\{ \frac{z \left[\left(\frac{z}{1+c} \right) (h' - g') + (H_c' - G_c') \right]}{\varphi} \right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \frac{z \left[\frac{2}{1+c} (h' + g') \left(\frac{h' - g'}{h' + g'} \right) + (H_c' + G_c') \left(\frac{H_c' - G_c'}{H_c' + G_c'} \right) \right]}{\varphi} \right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \frac{z \left[\frac{2}{1+c} (h' + g') \left(\frac{1-w}{1+w} \right) + (H_c' + G_c') \left(\frac{1-w_c}{1+w_c} \right) \right]}{\varphi} \right\} \\
&= \frac{2}{1+c} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\left(\frac{z}{(1-z)^2} \right) [r(z) + r_c(z)]}{\frac{z}{(1-z)^2}} \right\} \\
&= \frac{2}{1+c} \operatorname{Re}\{r(z) + r_c(z)\} > 0
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $r(z) = \frac{1-w}{1+w}$ ve $r_c(z) = \frac{1-w_c}{1+w_c}$ dir. Böylece, (3.20) ve Lemma 3.5.1 gereği $H_c * h - G_c * g$ yatay yönde konvektir. Son olarak $L_c * f$ lokal yalınkat olarak kabul edildiğinden ve $H_c * h - G_c * g$ yatay yönde konvektir ve Teorem 2.3.2 gereği istenen sonuç elde edilir. \square

Teorem 3.5.3. Genelleştirilmiş harmonik sağ yarı düzlem dönüşümü olan $L_c(z) = H_c(z) + \overline{G_c(z)}$ (3.17)'de verildiği gibi alınsın. Ayrıca (3.16)'da verilen $f_a = h_a + \overline{g_a}$ sağ yarı düzlem dönüşümü ele alınsın. Bu takdirde, $0 < c \leq \frac{2(1+a)}{1-a}$ için $L_c * f_a$ yalınkattır ve reel eksen yönünde konvektir.

İspat. Lemma 3.5.2 gereği, $L_c * f_a$ nın lokal yalınkat ve yön koruyan olduğunu göstermek yeterlidir. Elde edilen (3.19) denkleminde $w(z)$ yerine $w_a(z) = \frac{a-z}{1-az}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_2(z) &= \frac{[(1-c) - (1+c)z] \left(\frac{a-z}{1-az} \right) \left(1 + \frac{a-z}{1-az} \right) - c \frac{a^2-1}{(1-az)^2} z(1-z)}{[(1+c) - (1-c)z] \left(1 + \frac{a-z}{1-az} \right) - c \frac{a^2-1}{(1-az)^2} z(1-z)} \\
&= \frac{[(1-c) - (1+c)z][(a-z)(1-az) + (a-z)^2] - (a^2-1)cz(1-z)}{[(1+c) - (1-c)z][(1-az)^2 + (a-z)(1-az)] - (a^2-1)cz(1-z)} \\
&= -\frac{z^3 - \frac{2+a-c+2ac}{1+c}z^2 + \frac{1+2a-2c+ac}{1+c}z - \frac{a(1-c)}{1+c}}{1 - \frac{2+a-c+2ac}{1+c}z + \frac{1+2a-2c+ac}{1+c}z^2 - \frac{a(1-c)}{1+c}z^3} \tag{3.21}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonrasında, $0 < c \leq \frac{2(1+a)}{1-a}$ ($-1 < a < 1$) için $|\tilde{w}_2(z)| < 1$ olduğu gösterilmelidir. İki durum altında incelenecektir.

Durum 1. $a = 0$ olsun. (3.21) denkleminde $a = 0$ yazılırsa

$$\tilde{w}_2(z) = -z \frac{z^2 - \frac{2-c}{1+c}z + \frac{1-2c}{1+c}}{1 - \frac{2-c}{1+c}z + \frac{1-2c}{1+c}z^2} = -z \frac{(z-1) \left(z - \frac{1-2c}{1+c} \right)}{(1-z) \left(1 - \frac{1-2c}{1+c}z \right)}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin iki kökü, $0 < c \leq 2$ için birim çemberin içinde ya da üzerinde bulunan $z_1 = 1$ ve $z_2 = \frac{1-2c}{1+c}$ kökleridir. Böylece, $|\tilde{w}_2(z)| < 1$ olur.

Durum 2. $a \neq 0$ olsun. Yine (3.21) denkleminde

$$\tilde{w}_2(z) = -\frac{z^3 - \frac{2+a-c+2ac}{1+c}z^2 + \frac{1+2a-2c+ac}{1+c}z - \frac{a(1-c)}{1+c}}{1 - \frac{2+a-c+2ac}{1+c}z + \frac{1+2a-2c+ac}{1+c}z^2 - \frac{a(1-c)}{1+c}z^3}$$

bulunur. Böylece,

$$\tilde{w}_2(z) = -\frac{p(z)}{p^*(z)} = -\frac{(z-A)(z-B)(z-C)}{(1-\bar{A}z)(1-\bar{B}z)(1-\bar{C}z)}$$

elde edilir. Şimdi $A, B, C \in \bar{\mathbb{U}}$ için $0 < c \leq \frac{2(1+a)}{1-a}$ olduğu gösterilecektir. Cohn Kuralı'ndan

$$p(z) = z^3 - \frac{2+a-c+2ac}{1+c}z^2 + \frac{1+2a-2c+ac}{1+c}z - \frac{a(1-c)}{1+c}$$

bulunur. Ayrıca, $c > 0$ ve $-1 < a < 1$ için $\left|\frac{a(c-1)}{1+c}\right| < 1$ dir. O halde,

$$\begin{aligned} p_1(z) &= \frac{\bar{a}_3 p(z) - a_0 p^*(z)}{z} = \frac{p(z) + \frac{a(1-c)}{1+c} p^*(z)}{z} \\ &= \frac{(1+c+a-ac)(1+c-a+ac)}{(1+c)^2} z^2 \\ &\quad + \frac{-2-c-6ac+c^2+2a^2-a^2c-a^2c^2}{(1+c)^2} z \\ &\quad + \frac{1-c+6ac-2c^2-a^2-a^2c+2a^2c^2}{(1+c)^2} \\ &= \frac{(1+c+a-ac)(1+c-a+ac)}{(1+c)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(z^2 + \frac{-2 + c - 2a - ac}{1 + c + a - ac} z + \frac{1 - 2c + a + 2ac}{1 + c + a - ac} \right) \\
& = \frac{(1 + c + a - ac)(1 + c - a + ac)}{(1 + c)^2} \\
& \times (z - 1) \left(z - \frac{1 + a - 2c(1 - a)}{1 + a + c(1 - a)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $p_1(z)$, $0 < c \leq \frac{2(1+a)}{1-a}$ için birim çemberin içinde veya üzerinde olan $z_1^* = 1$ ve $z_2^* = \frac{1+a-2c(1-a)}{1+a+c(1-a)}$ köklerine sahiptir. Cohn Kuralı ile $p(z)$ nin bütün kökleri \bar{U} dadır, yani her $z \in U$ için $A, B, C \in \bar{U}$ ve $|\tilde{w}_2(z)| < 1$ olur.

Teorem 3.4.5'in ispatındaki yöntemle benzer şekilde bir yaklaşımla aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 3.5.4. Verilen $L_c = H_c + \bar{G}_c$ genelleştirilmiş sağ yarı düzlem dönüşümü (3.17) denklemindeki gibi alınsın ve $f_n = h + \bar{g}$ fonksiyonu $h + g = \frac{z}{1-z}$ ve $w(z) = e^{i\theta} z^n$ ($\theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$) özelliğinde olsun. Bu takdirde, $L_c * f_n$ yalınkattır ve $0 < c \leq \frac{2}{n}$ olmak üzere reel eksen yönünde konvektir.

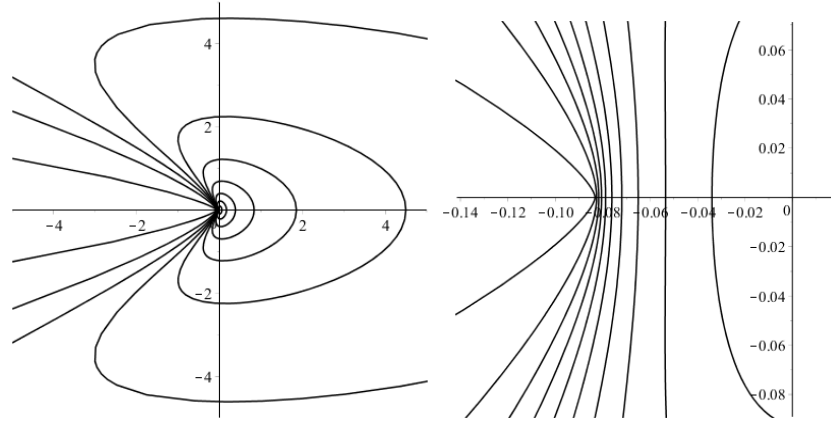
Sonuç 3.5.6. Teorem 3.5.3 ve Teorem 3.5.4 de $c = 1$ iken $L_1 = f_0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla, Teorem 3.5.3 ve Teorem 3.5.4 sırasıyla Dorff ve ark. (2012) tarafından verilen Teorem 3.3.3 ve Teorem 3.3.1'in genelleştirilmiş halidir. Ayrıca, $c = 1$ olduğunda Teorem 3.3.1'in $n \geq 3$ için neden sağlanmadığını açıklar. Çünkü, Teorem 3.5.3'e göre $0 < c \leq \frac{2}{n}$ eşitsizliği $n = 1, 2$ iken sağlanır.

Örnek 3.5.7. Teorem 3.5.3'de, (3.16) ve (3.18) kullanıldığında,

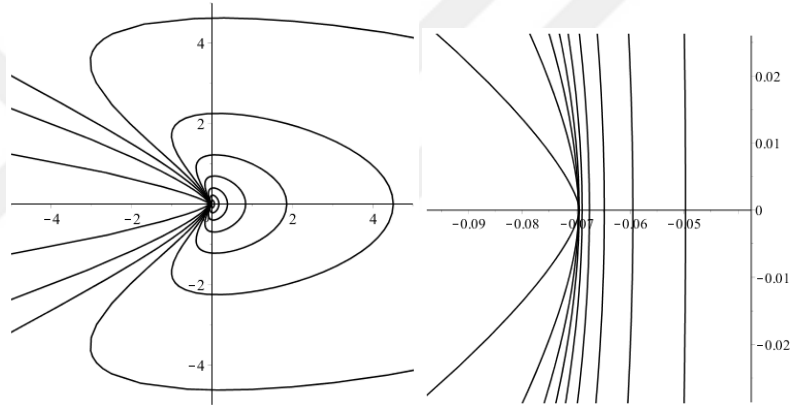
$$\begin{aligned}
L_c * f_a &= \frac{1}{1+c} [h_a(z) + czh_a'(z)] + \frac{1}{1+c} [\overline{g_a(z) - czg_a'(z)}] \\
&= \frac{1}{1+c} \left[\frac{\frac{1}{1+a}z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} + \frac{cz(1-az)}{(1+a)(1-z)^3} \right] \\
&\quad + \frac{1}{1+c} \left[\overline{\frac{\frac{a}{1+a}z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} - \frac{cz(a-z)}{(1+a)(1-z)^3}} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \frac{z}{(1+c)(1-z)} + \frac{c(1-a)z(1+z)}{(1+c)(1+a)(1-z)^3} \right\} \\
&\quad + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{\left(\frac{1-a}{1+a} + c \right) z}{(1+c)(1-z)^2} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 3.5.3 gereği, seçilen a ve c parametreleri için $L_c * f_a$ nın yalınkat olup olmadığı bilinir. Eğer, $a = 0,5$ ve $c = 6$ alınırsa, $L_c * f_a$ yalınkattır ve görüntüsü reel eksen yönünde konvektir. Eğer, $a = 0,5$ ve $c = 6,2$ alınırsa, $L_c * f_a$ yalınkat değildir.

Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 de alınan özel parametre değerleri için birim diskin $L_c * f_a$ altındaki görüntüsü verilmiştir. Şekillerde ilk resim $L_c * f_a(\mathbb{U})$ iken ikinci resim ilk resmin yalınkatlığın (ya da yalınkatlığın bozulduğu yerin) daha iyi görünebilmesi için yakınlştırılmasından ibarettir.



Şekil 3.3. $a = 0,5$ ve $c = 5$ alındığında, $L_c * f_a(\mathbb{U})$ resmi (yalıncat)



Şekil 3.4. $a = 0,5$ ve $c = 6,2$ alındığında, $L_c * f_a(\mathbb{U})$ resmi (yalıncat değil)

3.6. Genelleştirilmiş Dönüşümler ile Harmonik Bir Dönüşümün Konvolüsyonu

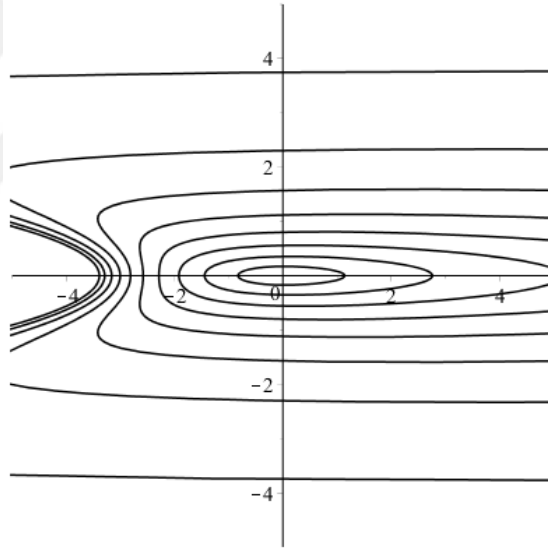
Bir $f_a = h_a + \overline{g_a}$ fonksiyonu,

$$h_a - g_a = (1 + a) \frac{z}{1-z}, w(z) = \frac{a+z}{1+az} \quad (-1 < a < 1) \quad (3.22)$$

olarak ele alınsın. Kesme yöntemi ile,

$$\begin{aligned}
 h_a(z) &= \frac{1+a}{1-a} \left[\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{(1-z)^2} \right] \\
 g_a(z) &= \frac{1+a}{1-a} \left[\frac{az}{(1-z)^2} + \frac{1-2a}{2} \frac{z^2}{(1-z)^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

bulunur. f_a fonksiyonunun $a = 0,7$ için birim diski resmettiği bölge Şekil 3.5’de verildiği gibidir:



Şekil 3.5. $a = 0,7$ için, $f_a(\mathbb{U})$ resmi

(3.22) denklemleri ile tanımlanan $f_a = h_a + \overline{g_a}$ fonksiyonunda $a = 0$ alınırsa $H_1 - G_1 = \frac{z}{1-z}$ ve $w_1(z) = z$ olur. Bu şekilde tanımlanan fonksiyon $F_1(z) = H_1(z) + \overline{G_1(z)}$ ile gösterilsin. Li ve Liu 2013 yılında $F_1(\mathbb{U}) = \{u + iv: v^2 > -(u + 1/4)\}$ olduğunu kanıtladılar. Bu da $F_1(z)$ nin yatay yönde konveks (ancak sağ yarı düzlem

dönüşümü değil) olduğunu gösterir. Wang ve arkadaşları 2016 yılında $F_1(z)$ nin çeşitli konvolüsyonlarını araştırdılar.

Diğer taraftan Liu ve Li'nin 2013' de yaptıkları çalışmada aşağıdaki genelleştirilmiş harmonik yalınkat dönüşümleri tanımladı. Her $z \in \mathbb{U}$, $c > 0$ için

$$P_c(z) = H_c(z) + \overline{G_c(z)}$$

$$= \frac{1}{1+c} \left[\frac{cz}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z} \right] + \frac{1}{1+c} \left[\frac{cz}{(1-z)^2} - \frac{z}{1-z} \right] \quad (3.24)$$

dir.

Burada $P_0(z) = F_1(z)$ olduğu açıktır. Eğer $f = h + \bar{g} \in S_H$ ise

$$P_c * f = \frac{czh' + h}{1+c} + \frac{czg' - g}{1+c} \quad (3.25)$$

yazılır.

Teorem 3.6.1. Genelleştirilmiş harmonik dönüşüm olan $P_c = H_c(z) + \overline{G_c(z)}$ (3.24)'de tanımlandığı gibi alınsın. Eğer $f_a = h_a + \bar{g}_a \in S_H^0$ fonksiyonu $-1 < a < 1$ aralığında $h_a - g_a = (1+a) \frac{z}{1-z}$ ve genişlemesi $w_a(z) = \frac{a+z}{1+az}$ ise $0 < c \leq \frac{2(1-a)}{1+a}$ için $P_c * f_a \in S_H^0$ dir ve görüntüsü yatay yönde konvektir.

İspat. Lemma 3.4.2'ye göre $P_c * f_a$ nın lokal yalınkat ve yön koruyan olduğu gösterilmelidir. Öncelikle, $w(z) = w_a(z) = \frac{a+z}{1+az}$ genişlemesi (3.10)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_1(z) &= \frac{[(c-1) + z(1+c)] \frac{a+z}{1+az} \left(1 - \frac{a+z}{1+az}\right) + c \frac{1-a^2}{(1+az)^2} z(1-z)}{[(c+1) + (c-1)z] \left(1 - \frac{a+z}{1+az}\right) + c \frac{1-a^2}{(1+az)^2} z(1-z)} \\
&= -\frac{z^3 - \frac{2-a-c-2ac}{1+c} z^2 + \frac{1-2a-2c-ac}{1+c} z - \frac{a(c-1)}{1+c}}{1 - \frac{2-a-c-2ac}{1+c} z + \frac{1-2a-2c-ac}{1+c} z^2 - \frac{a(c-1)}{1+c} z^3}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. Sonrasında $0 < c \leq \frac{2(1-a)}{1+a}$ ($-1 < a < 1$) için $|\tilde{w}_1(z)| < 1$ olduğu gösterilmelidir. Aşağıdaki iki durum dikkate alınacaktır:

Durum 1. $a = 0$ olsun. (3.26)'da $a = 0$ alındığında,

$$\tilde{w}_1(z) = -z \frac{z^2 - \frac{2-c}{1+c} z + \frac{1-2c}{1+c}}{1 - \frac{2-c}{1+c} z + \frac{1-2c}{1+c} z^2} = -z \frac{(z-1)\left(z - \frac{1-2c}{1+c}\right)}{(1-z)\left(1 - \frac{1-2c}{1+c} z\right)}$$

olur. Her $0 < c \leq 2$ için $z_1 = 1$ ve $z_2 = \frac{1-2c}{1+c}$ kökleri birim çemberin içinde ya da üzerinde yer alır, böylelikle $|\tilde{w}_1(z)| < 1$ olduğu görülür.

Durum 2. $a \neq 0$ olsun. (3.26)'dan

$$\tilde{w}_1(z) = -\frac{z^3 - \frac{2-a-c-2ac}{1+c} z^2 + \frac{1-2a-2c-ac}{1+c} z - \frac{a(c-1)}{1+c}}{1 - \frac{2-a-c-2ac}{1+c} z + \frac{1-2a-2c-ac}{1+c} z^2 - \frac{a(c-1)}{1+c} z^3}$$

$$= -\frac{p(z)}{p^*(z)} = \frac{(z-A)(z-B)(z-C)}{(1-\bar{A}z)(1-\bar{B}z)(1-\bar{C}z)}$$

yazılır. Buradan, $0 < c \leq \frac{2(1-a)}{1+a}$ için $A, B, C \in \bar{U}$ olduğu gösterilecektir. Cohn Kuralı'ndan

$$p(z) = z^3 - \frac{2-a-c-2ac}{1+c}z^2 + \frac{1-2a-2c-ac}{1+c}z - \frac{a(c-1)}{1+c}$$

olur. Ayrıca $c > 0$ ve $-1 < a < 1$ için $\left| \frac{a(c-1)}{1+c} \right| < 1$ dir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} p_1(z) &= \frac{\bar{a}_3 p(z) - a_0 p^*(z)}{z} = \frac{p(z) + \frac{a(c-1)}{1+c} p^*(z)}{z} \\ &= \frac{(1+c+a-ac)(1+c-a+ac)}{(1+c)^2} z^2 \\ &\quad + \frac{-2-c+6ac+c^2+2a^2-a^2c-a^2c^2}{(1+c)^2} z \\ &\quad + \frac{1-c-6ac-2c^2-a^2-a^2c+2a^2c^2}{(1+c)^2} \end{aligned}$$

dir ve düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
p_1(z) &= \frac{(1+c+a-ac)(1+c-a+ac)}{(1+c)^2} z^2 + \frac{-2+c+2a+ac}{1+c-a+ac} z \\
&\quad + \frac{1-2c-a-2ac}{1+c-a+ac} \\
&= \frac{(1+c+a-ac)(1+c-a+ac)}{(1+c)^2} (z-1) \left(z - \frac{1-a-2c(1+a)}{1-a+c(1+a)} \right)
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Yani $0 < c \leq \frac{2(1-a)}{1+a}$ için $p_1(z)$ nin birim diskin içinde $z_1^* = 1$ ve $z_2^* = \frac{1-a-2c(1+a)}{1-a+c(1+a)}$ olmak üzere iki farklı kökü vardır. Böylece, Lemma 3.4.1'den, $p(z)$ nin tüm sıfırları \bar{U} üzerinde bulunur, yani $A, B, C \in \bar{U}$ olur ve böylece her $z \in U$ için $|\tilde{w}_1(z)| < 1$ dir.

Teorem 3.6.2. Genelleştirilmiş harmonik dönüşüm $P_c = H_c(z) + \overline{G_c(z)}$ (3.24)'de tanımlandığı gibi olsun. Eğer $f_n = h + \bar{g} = \frac{z}{1-z}$ ve genişleme $w(z) = e^{i\theta} z^n$ ($\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$) ise $P_c * f_n \in S_H^0$ dir ve $0 < c \leq \frac{2}{n}$ için yatay yönde konvektir.

İspat. Teorem 3.6.2'nin ispatı Teorem 3.4.5' in ispatı gibidir.

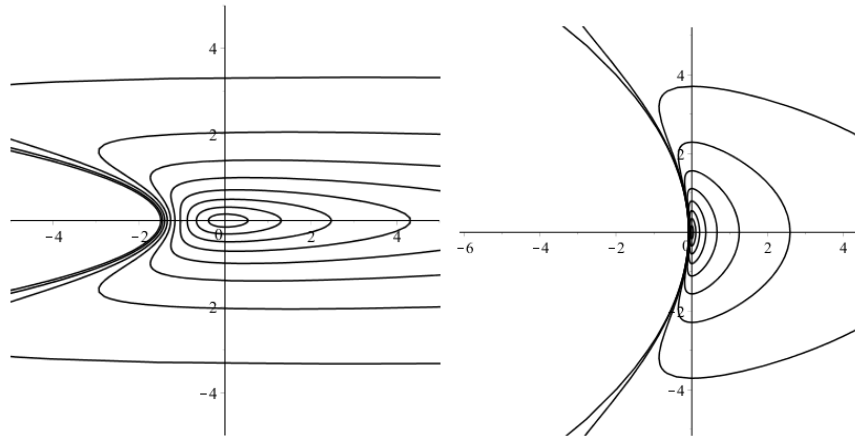
Örnek 3.6.3. Teorem 3.6.1'de, (3.22) ve (3.25) denklemleri kullanıldığında

$$P_c * f_a = \frac{1}{1+c} [czh_a'(z) + h_a(z)] + \frac{1}{1+c} [\overline{czg_a'(z) - g_a(z)}]$$

olduğundan

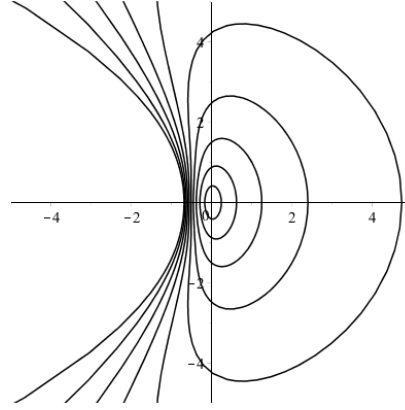
$$\begin{aligned}
P_c * f_a &= \frac{1}{1+c} \left[cz \left(\frac{1+a}{1-a} \right) \frac{1}{(1-z)^3} + \left(\frac{1+a}{1-a} \right) \left(\frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{1+c} \left[\overline{\left(cz \left(\frac{1+a}{1-a} \right) \left[\frac{a+z-az}{(1-z)^3} \right] \right)} - \overline{\left(\left(\frac{1+a}{1-a} \right) \frac{az + \frac{1-2a}{2}z^2}{(1-z)^2} \right)} \right] \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+a}{(1+c)(1-a)(1-z)^3} [cz(1+a+z(1-a))] + \frac{(1+a)z}{(1+c)(1-z)} \right\} \\
&\quad + i \operatorname{Im} \left\{ \frac{(1+a)cz}{(1+c)(1-z)^2} + \frac{1+a}{(1+c)(1-a)(1-z)^2} [z+az-az^2] \right\}
\end{aligned}$$

ele edilir. Teorem 3.6.1, a ve c parametrelerinin seçimine göre $P_c * f_a$ nın yalınkat olup olmadığı hakkında bilgi verecektir. Eğer $a = 0,5$ ve $c = 0,1$ alınırsa $P_c * f_a$ yalınkattır ve görüntüsü yatay yönde konvektir. Şekil 3.6(a) ve (b) de birim diskin $f_{0,5}$ ve $P_{0,2}$ dönüşümleri altındaki resimleri, Şekil 3.7'de $P_{0,2} * f_{0,5}$ konvolüsyon fonksiyonunun birim diski resmettiği bölge verilmiştir.



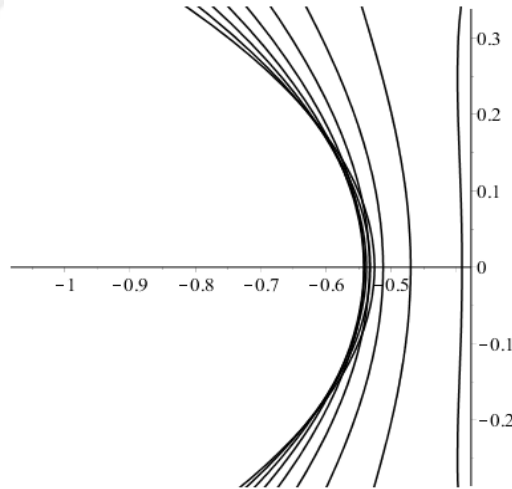
Şekil 3.6. (a) $f_{0,5}(U)$ resmi

(b) $P_{0,2}(U)$ resmi



Şekil 3.7. $P_{0,2} * f_{0,5}(\mathbb{U})$ resmi

Benzer şekilde, $a = 0,5$ ve $c = 1,5$ alınırsa $P_c * f_a$ yalınkat değildir. Şekil 3.8' de yalınkatlığın sağlanmadığı daha ayrıntılı görülür.



Şekil 3.8. $P_{1,5} * f_{0,5}(\mathbb{U})$ resmi

Araştırma Problemi. Bir $f_a = h_a + \overline{g_a} \in S_H^0$ fonksiyonu $h_a - g_a = (1 + a) \frac{z}{1-z}$ ve genişlemesi $w_a(z) = \frac{a+z}{1+az}$ özelliğinde olsun. Hangi $a \in \mathbb{U}$ değerleri için Teorem 3.6.1'in sağlanacağını bulunuz.

4. SONUÇ

Bu tezde, Clunie ve Sheil-Small'un (1984) makalelerinde belirttiği harmonik konveks bir fonksiyonun hangi özellikteki bir fonksiyonla konvolüsyonunun yine harmonik konveks olabileceği açık problemi üzerine yapılan bazı çalışmalar (Dorff 2001, Dorff ve ark. 2012a, 2012b, Li ve Liu 2013, Liu ve Li 2016) incelenmiştir. Ayrıca, (Kumar ve ark. 2016)'da tanımlanan bir harmonik dönüşüm ile (Li ve Liu 2013)'de tanımlanan genelleştirilmiş harmonik dönüşümün konvolüsyonunun hangi şart altında yalınkat ve reel eksen yönünde konveks olabileceği araştırılmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde, belirtilen açık problem üzerine yapılan çalışmalar ve araştırılan problem yer almaktadır. 1984 yılında Clunie ve Sheil-Small tarafından belirlenen açık probleme verilen en iyi cevap 2001 yılında Dorff tarafından verilmiştir. Dorff 2001'de $h_i + g_i = \frac{z}{1-z}$, ($i = 1,2$) özelliğindeki $f_i = h_i + \bar{g}_i$ (sağ yarı düzlem dönüşümü) konveks harmonik fonksiyonlarını ele almış, $f_1 * f_2$ konvolüsyon fonksiyonu lokal yalınkat ve yön koruyan olduğunda $f_1 * f_2$ konvolüsyon fonksiyonunun S_H^0 sınıfına ait olduğunu ve reel eksen yönünde konveks olduğunu göstermiştir. Ayrıca $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$ olmak üzere $h(z) + g(z) = \frac{1}{2i \sin \alpha} \log \left(\frac{1+ze^{i\alpha}}{1+ze^{-i\alpha}} \right)$, $w(z) = e^{i\theta} z^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\theta \in \mathbb{R}$) özelliğindeki $f = h + \bar{g}$ dikey şerit harmonik dönüşümleri ile sağ yarı düzlem dönüşümlerinin konvolüsyonu lokal yalınkat ve yön koruyan olduğundan konvolüsyon fonksiyonunun S_H^0 sınıfına ait olduğunu ve reel eksen yönünde konveks olduğunu göstermiştir.

Dorff ve ark.'nın 2012 yılında yaptığı çalışmada ise Clunie ve Sheil-Small'un harmonik kesme yöntemi ile elde edilen $f_0 = h_0 + \bar{g}_0$, $h_0 + g_0 = \frac{z}{1-z}$, $w_0(z) = -z$ harmonik sağ yarı düzlem dönüşümü ile $h + g = \frac{z}{1-z}$, $w(z) = e^{i\theta} z^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\theta \in \mathbb{R}$) özelliğindeki $f = h + \bar{g}$ konveks harmonik fonksiyonu ele alınmıştır. Bu çalışmada,

Cohn kuralı kullanılarak, lokal yalınkat ve yön koruyanlık şartının $n = 1, 2$ iken sağlandığı dolayısıyla da $n = 1, 2$ iken $f_0 * f$ konvolüsyon fonksiyonunun S_H^0 sınıfına ait olduğu ve reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilmiştir. Aynı çalışmada, $f = h + \bar{g}$ dikey şerit harmonik dönüşümleri ile f_0 harmonik sağ yarı düzlem dönüşümünün konvolüsyonunun $n = 1, 2$ için S_H^0 sınıfına ait olduğu ve reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilmiştir. Yine harmonik dikey şerit dönüşümü $w(z) = \frac{a+z}{1+az}$, $0 \leq a < 1$ genişlemesi ile ele alınarak ve Schur-Cohn algoritması kullanılarak harmonik sağ yarı düzlem dönüşümü ile konvolüsyonunun S_H^0 sınıfına ait olduğu ve reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilmiştir.

Liu ve Li'nin 2013 yılında yaptıkları çalışmada, $h - g = \frac{z}{1-z}$, $w = z$ özelliğindeki fonksiyonları genelleştirerek normalizasyonu sağlayan yalınkat analitik bir f fonksiyonu için $c > 0$ olmak üzere $P_c[f](z) = \frac{czf'(z)+f(z)}{1+c} + \frac{\overline{czf'(z)-f(z)}}{1+c}$ harmonik dönüşüm ailesi tanımlanmıştır. Tanımlanan bu genelleştirilmiş harmonik dönüşüm ailesi ile $h - g = \frac{z}{1-z}$, $w = e^{i\theta} z^n$ olmak üzere $f_n = h + \bar{g}$ fonksiyonlarının konvolüsyonunun $0 < c \leq \frac{2}{n}$ için S_H^0 sınıfına ait olduğu ve reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilmiştir.

Li ve Liu'nun 2016 yılında yaptıkları çalışmada, Kumar ve ark. (2016) tarafından tanımlanan $h_a + g_a = \frac{z}{1-z}$, $w_a(z) = \frac{a-z}{1-az}$, $-1 < a < 1$ olmak üzere $f_a = h_a + \bar{g}_a$ harmonik sağ yarı düzlem dönüşümleri ile Muir (2008) tarafından tanımlanan $L_c(z) = H_c(z) + \overline{G_c(z)} = \frac{1}{1+c} \left[\frac{z}{1-z} + \frac{cz}{(1-z)^2} \right] + \frac{1}{1+c} \left[\frac{z}{1-z} - \frac{cz}{(1-z)^2} \right]$ genelleştirilmiş harmonik sağ yarı düzlem dönüşümleri ele alınmıştır. Bu çalışmada, $0 < c \leq \frac{2(1+a)}{1-a}$ için $L_c * f_a$ konvolüsyon fonksiyonunun S_H^0 sınıfına ait olduğu ve reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilmiştir.

Tezin orijinal kısmında ise, $h_a - g_a = (1 + a) \frac{z}{1-z}$, $w(z) = \frac{a+z}{1+az}$ ($-1 < a < 1$) olmak üzere $f_a = h_a + \overline{g_a}$ fonksiyonu ve Liu ile Li (2013) tarafından tanımlanan genelleştirilmiş harmonik P_c dönüşümleri ele alınmıştır. Bu dönüşümlerin her ikisi de sağ yarı düzlem dönüşümü değildir ancak reel eksen yönünde konveks dönüşümlerdir. Ele alınan bu iki dönüşümün konvolüsyonunun $0 < c \leq \frac{2(1-a)}{1+a}$ için S_H^0 sınıfına ait olduğu ve reel eksen yönünde konveks olduğu gösterilmiştir. İspatında (Liu ve Li 2013) ve (Li ve Liu 2016) kaynaklarından faydalanılmıştır. Ayrıca, parametrelerin çeşitli seçimleri ile elde edilen dönüşümlerin birim diski resmettiği bölgeler Maple 2015 programı kullanılarak çizdirilmiş, yakıncat olmayan dönüşümlerde yalınkatlığın değiştiği bölgeler özellikle belirtilmiştir.

KAYNAKLAR

- Abu-Muhanna, Y., Schober, G. 1987.** Harmonic mappings onto convex domains. *Can. J. Math.*, 39(6): 1489-1530.
- Bieberbach, L. 1916.** Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen. *Welche eine Schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln*, *Sitzungber, Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.*, 940-955.
- Branges, L. 1985.** A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Mathematica*, 154:137-152.
- Cheng, J.S. 1990.** A parallel algorithm for finding roots of a complex polynomial. *Journal of Computer Science and Technology*, 5(1): 71-81.
- Clunie, J., Sheil-Small T. 1984.** Harmonic univalent functions. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae A*, 3-25.
- Cohn, A. 1922.** Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. *Mathematische Zeitschrift*, 14(1): 110-148.
- Dorff, M. 1999.** Harmonic mappings onto asymmetric vertical strips. *Computational Methods and Function Theory*, 1997, (Papamichael, N., Ruscheweyh S.T., Saff E.B. eds.), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1999, 171-175.
- Dorff, M. 2001.** Convolutions of planar harmonic convex mappings, *Complex Variables Theory Appl.*, 45(3): 263-271.
- Dorff, M. 2012a.** Convolutions of harmonic convex mappings. *Complex Variables Elliptic Equations*, 57(5): 489-503.
- Dorff, M. 2012b.** Anamorphosis, Mapping Problems and Harmonic Univalent Functions, *Explorations in Complex Analysis: Math. Assoc. of America, Inc.: Washington, DC*, 197-269.
- Duren, P. 1992.** A survey of harmonic mappings in the plane, *Texas Tech. Univ. Math. Series, Visiting Scholars Lectures, 1990-1992*, 18: 1-15.
- Duren, P. 2004.** Harmonic mappings in the plane, *Cambridge Tracts in Mathematics*, 156, Cambridge University Press, New York, USA, 212 pp.
- Goodloe, M. 2002.** Hadamard products of convex harmonic mappings. *Complex Var. Theory Appl.*, 47(2): 81-92.
- Goodman, A.W. 1983.** Univalent Functions I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 556 pp.
- Hengartner, W., Schober, G. 1987.** Univalent harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 299 (1): 1-31.
- Koebe, P. 1907.** Über die uniformisierung beliebiger analytischer kreuven. *Nach. Ges. Wiss. Göttingen*, 191-210.
- Kumar, R., Dorff, M., Gupta S., Singh S. 2016.** Convolution properties of some harmonic mappings in the right-half plane, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 39(1): 439-455.
- Lewy, H. 1936.** On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42: 689-692.
- Li, Y., Liu, Z. 2016.** Convolutions of harmonic right half plane mappings, *Open Math.*, 14: 789-800.
- Liu, Z., Li, Y. 2013.** The properties of a new subclass of harmonic univalent mappings, *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 794108.

- Muir, S. 2008.** Weak subordination for convex univalent harmonic functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 348: 689–692.
- Pommerenke, C. 1963.** On starlike and close-to-convex functions, *Proc. London Math. Soc.*, 13(3): 290-304.
- Pommerenke, C. 1975.** Univalent Functions: Vandenhoeck & Ruprecht: Göttingen, 376 pp.
- Rahman, Q.I., Schmeisser, G. 2002.** Analytic Theory of Polynomials: London Mathematical Society Mono-graphs New Series: 26, Oxford University Press, Oxford, 742 pp.
- Riemann, B. 1851.** Grundlagen für eine allgemeine theorie der functionen einer veränderlichen complexen Grosse. PhD thesis, University of Göttingen, Germany.
- Ruscheweyh, St., Sheil-Small, T. 1973.** Hadamard products of schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture, *Comment. Math. Helv.*, 48: 119-135.
- Ruscheweyh, St., Salinas, L. 1989.** On the preservation of direction-convexity and the Goodman-Saff conjecture. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math.*, 14: 63-73.
- Wang Z., Liu Z., Li Y. 2016.** On convolutions of harmonic univalent mappings convex in the direction of the real axis, *J. Appl. Anal. Comput.*, 6(1): 145-155.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özge ÖZDEMİR
Doğum Yeri ve Tarihi : Ardanuç- 24.02.1992
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Nilüfer Fatih Lisesi-2009

Lisans : Uludağ Üniversitesi-2013

Çalıştığı Kurum ve Yıl

: İletişim Dershanesi 2013-2014

Uzman Kariyer Eğitim Kurumları 2014-2017

Omega Özel Öğretim Kursu 2017-2018

MEB Bulanık Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi 2018-

İletişim (e-posta)

: ozge.ozdemir91@hotmail.com

Yayınları

: