DOĞRUSAL HOMOJEN ÜRETİM FONKSİYONLARI

Dr. Hasan AŞKAN

A. Giriş

Bu tipteki fonksiyonların incelenmesi, ilk bakışta özel bir durumu belirttiklerinden gerekli görülmese de, özelleştirmelere olanak verdiğinden ve basitliklerinden ötürü genel üretim teorisinin geliştirilmesinde yararlı olduklarından ve bu varsayımın üretim faaliyetlerine iyi bir yaklaşım olması, incelenmelerini zorunlu kılar. İlâveten fonksiyonlar bölünemezliğin sebep olduğu azalan ortalama değişen maliyetlerle, kullanılan üretim faktörü miktarının sınırlı olmasının neden olduğu artan ortama değişen maliyetlerle uyum halindedirler. Gerçekten de, bu fonksiyonlar araştırma sonucunda bulunmuş özel fonksiyonlar olmayıp bütün fonksiyonları kapsayan bir çerçeveye veya bir tatolojidir. Burada Pareto'nun (1) kendisine Paris'in metro sistemi iki katına çıkarıldığında belki maliyetler iki kat olacak fakat iki kat gelir elde edilemeyeceğini söyleyen kimseye doğrusal homojenliğin varlığı için ikinci bir Paris'in gerektiğini söylediği hatırlanırsa, söylenen daha iyi anlaşılır. Bu tatolojinin faydası, maliyet koşullarına etki eden faktörlerin sınıflandırılmasındaki etkinliken ötürüdür. Gerçekten de faktör birleşim oranlarındaki değişikliklerden ötürü doğrudan doğruya oluşan maliyetlerdeki değişiklikleri, kullanılan faktörlerden bazılarının miktarlarının sınırlı olmasından ötürü firmanın kontrolü dışındaki maliyet artışları ve bölünemezliğin sebep olduğu maliyetlerdeki azalmaları birbirlerinden ayırdedilebilinmesine olanak verir. Ayrıca belirtilmelidir ki,

(1) M. Friedman, **Price Theory: A Provisional Text**, 1.B., Chicago, Aldine Publishing Company, 1962, s. 79

üretim fonksiyonunun doğrusal homojen olması, firmanın üretim fonksiyonunu doğrusal homojen kabul etmesi demek değildir. Firma yalnız üretim faktörlerini ve maliyetlerini etkileyen kontrolü altındaki faktörleri düşünür. Kısaca firmanın üretim fonksiyonu, fonksiyonun bir kesiti olarak düşünülmelidir ve üretim miktarı da etkilenebilen faktörlerle sabit kalanların birleştirilmesiyle elde edilir.

Genel olarak firmanın bir veya birkaç başkasına devredilemeyen ve bölünemez üretim faktörlerine ki, bunlardan Hicks'in müteşebbis varsayımı en geniş rastlananıdır, sahip olduğu varsayılarak artan uzun dönem maliyet eğrisine varılır. Ve böylece de firma ölçeğinin iktisat ilmi içinde belirlenmesi sağlanmış olur. Öte yanda firmanın üretim fonksiyonunun doğrusal homojen kabul edilmesi, varsayımın reddi ve dolayısiyle de firma ölçeğinin sınırsızlığının kabul edilmesi demektir. Bu söylenenler uzun dönem analizi içinde de geçerlidir. Çünkü, aksi halde en uzun döneme bile bir kısa dönem karşın olduğundan doğrusal homojen üretim fonksiyonu ile karşı karşıya kalınır. Dolayısıyle de ya monopolleşme ile karşılaşılır, ya üretimin firmalar araındaki dağılımı gelişi-güzel olur. Veya firma kavramının anlamı tamamiyle yok olur. Ancak firmanın üretim fonksiyonunun bütün dönemler için aynılığı farsayılarak, devredilemeyen ve bölünmez üretim faktörlerine sahiplik varsayımının fonksiyonunu yerine getirmesi sağlanır.

Ölçeğe göre verimler incelenirken görülür ki, üretim faktörlerinin miktarları pozitif bir sabit olan λ oranında arttırıldığında Q, $\lambda^n F(L, K)$ olarak yazılabilirse, üretim fonksiyonuna n dereceden homoejen denilir. n, bir olduğunda üretim fonksiyonuna doğrusal homojen veya ölçeğe göre sabit verimli üretim fonksiyonu denir. Basit normal eşürün eğrilerini veren $Q = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ olarak yazılan üretim fonksiyonunda faktörler sabit λ oranında arttırılırsa, üretim miktarı da λ oranında artar. Fonksiyonun matematiksel özelliklerini biraraya toplama, makalede incelenecek konuların izlenebilmesinde yararlı olacağından, şimdi bu özelliklerin sıralanması yerinde olur.

B. FONKSİYONUN MATEMATİKSEL ÖZELLİKLERİ

1. Değişkenlerden Birinin Fonksiyonu Olarak Tanımlanabilirliği:

Fonksiyon, değişkenlerden birinin fonksiyonu olarak tanımlanabilir (1). Dolayısıyla bunlarda üretim faktörleri başına üretim

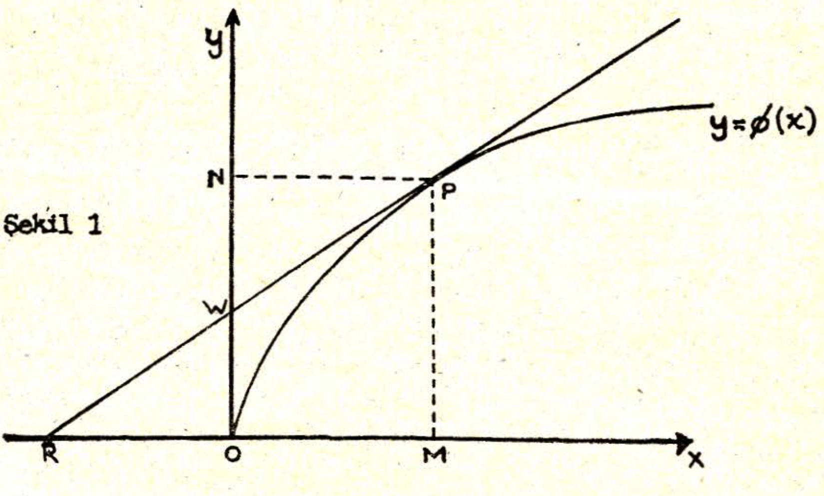
$$Q = L\,\Phi\left(\frac{K}{L}\right) = Kf\left(\frac{L}{K}\right) \qquad (1)$$

miktarını veren fonksiyonlar olarak, (2) de görüldüğü üzere yazılırlar.

$$y = \Phi\ (x),\ z = f\ (k) \qquad (2)$$

Genellikle bu fonksiyonlar «iyi davranan» şekilleriyle alınırlar. (Bunlardan ilkinin iyi davranan olabilmesi için $\Phi'(x)$ sıfırda büyük, $\Phi''(x)$ sıfırdan küçük ve x sıfıra yaklaşırken $\Phi'(x)$ sonsuza, son-

Şekil 1



suza yaklaşırken sıfıra yaklaşması gerekir). Ve ilki şekil 1 de (x, y) düzeyinde temsil edilebilir. İşgücü başına düşen kapital miktarı OM îse, işgücü başına üretim MP ve kapitalin marjinal verimliliği de, eğrinin P noktasındaki teğetinin eğimîdir. Ücret seviyesi Ow ise, kârının maksimize etmeyi amaçlıyan firmanın seçmesi gereken üretim tekniği w noktasından eğrîye çizilen teğetin eğriye değdiği P noktası ile temsil edilebilir. Teğetin eğimine eşit bir ücret kapitale ödenir ($r = wN/NP = wN/x$). Bu ücret sevîyesi de, w'den P'ye çizilen en dik doğru wP teğeti olduğundan en yüksek olanıdır. Kişi başına kapitale ödenen ücret wN olduğundan geriye kalan Ow de kişi başına ücrettir. Ve fonksiyonda «iyi davranan» bir fonksiyon olduğundan, OR, w-r oranına eşîttir. Dolayısiyle de tek bir optimum söz konusudur.

2. Kısmî türevlerinin yalnız faktörlerin birleşim oranlarının fonksiyonları olmaları:

Fonksiyonların kısmî türevleri yalnız faktörlerin birleşim oranlarının bir fonksiyonudur. Üretim fonksiyonunun n dereceden homojen olabilmesi için varlığı gereken eşitliğin faktörlerden biri îçin kısmî türevi alındığında bulunan eşitliğin (3) her iki yanı λ pozitif sabitîne bölünürse (4) de de görüldüğü üzere nacak eşitlik (n—1)

$$\lambda F_1 (\lambda L, \lambda K) = \lambda^n F_1 (L, K) \quad (3)$$

dereceden homojenliğinin tanımını verir. Dolayısiyle şayet üretim fonksiyonu doğrusal homojen ise, üretim faktörlerinin marjinal ve-

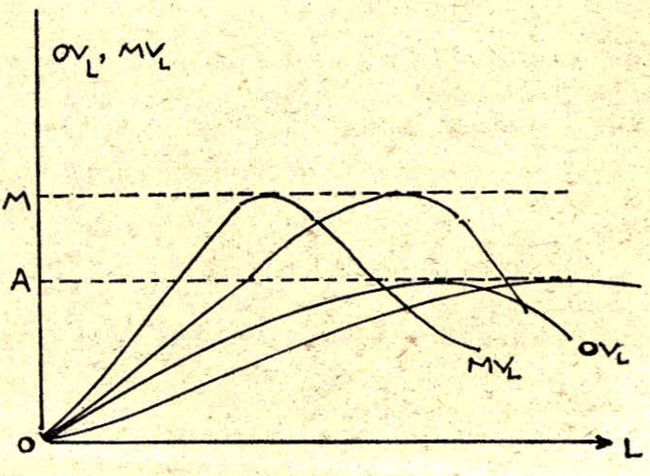
$$F_1 (\lambda L, \lambda K) = \lambda^{n-1} F_1 (L, K) \quad (4)$$

rimlilikleri de, sıfır dereceden homojen olacaktır. Verilen örnekde îşgücü ve kapitalin marjinal verimlilikleri fonksiyonlarının sıfır dereceden homojen olduğu, (5) ve (6) dan görülebilir.

$$F_1 (L, K) = \alpha (AL^{\alpha-1} K^{1-\alpha}) \quad (5)$$

$$F_K (L, K) = (1 - \alpha) (AL^{\alpha} K^{-\alpha}) \quad (6)$$

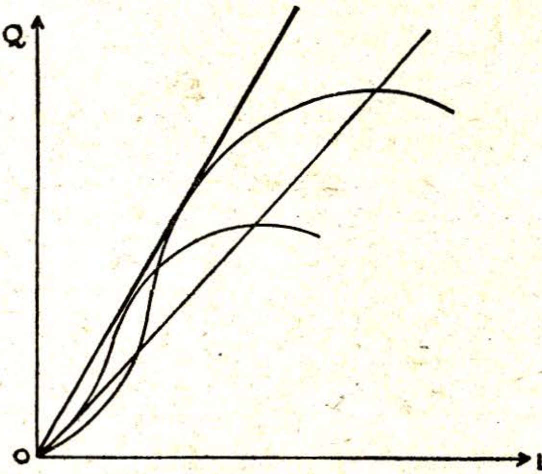
Açıktır ki, üretim faktörlerinin miktarlarının λ pozitif sabitiyle çarpılması sonucu etkilemiyecektir. Marjinal verimlilik için söylenenler, ortalama verimlilikler için de geçerlidir. Örneğimizdeki fonksiyonun ortalama verimi $A(K/L)^{1-\alpha}$ olduğundan, açıktır ki, yalnız faktörlerin birleşim oranlarının bir fonksiyonudur. Benzer olarak kapitalin ortalama veriminin de, birleşim oranının bir fonksiyonu olduğu gösterilebilir. Marjinal ve ortalama verimliliklerin yalnızca faktörlerin birleşim oranlarının fonksiyonu olmalarının, toplam ürün eğrileri üzerinde etkileri olacağı akla hemen gelmelidir. Kapital faktörünün miktarı sabit tutulup, kullanılan işgücü miktarı arttırıldığında işgücünün marjinal ve ortalama verimliliklerinin davranışları, şekil 2'nin yardımıyla izlenebilir. Marjinal verimlilik görüldüğü üze-



Şekil 2.

re OM seviyesine kadar yükselmeğe devam ettikten sonra, düşmeye başlıyarak, ortalama verimi maksimum olduğu noktada keser. Sabit olarak alınan kapital faktörünün miktarını arttırırsak, toplam ürün eğrisi sağa kayarak daha büyük işgücü faktörü kullanımında maksimuma erişecektir (şekil 3). Fakat verimlilik eğrilerinin maksimum noktaları yalnız faktörlerin birleşim oranlarının fonksiyonları olduklarından, kapital faktörünün kullanım miktarındaki değişikliklerden etkilenmiyeceklerdir. Eğrilerde meydana gelen kaymalar şekil 2'de izlenebilir. Maksimum değerleri gene sırasıyla OM ve OA seviyesindedirler. Bu söylenilenler toplam ürün eğrisindeki kaymayı gösteren şekil üzerinde de tekrarlanabilir. Bilindiği üzere başlangıç noktasından geçen ve eğrilere teğet olan doğrunun eğimi, işgücünün ortalama veriminin maksimum değerini verir. Şekilden de görüldüğü üzere, verimin ve toplam ürün eğrisinin maksimum nok-

Şekil 3



taları doğrular üzerinde bulunurlar. Üretim faktörlerinin marjinal verimliliklerinin yalnız faktörlerin birleşim oranlarının fonksiyonları olmaları, başlangıç noktasından geçen herhangi bir doğrunun eşürün eğrilerini eğimlerinin eşit olduğu noktalarda kesmesine neden olur. Üretim faktörlerinin nispi fiyatları sabit kalırsa, gelişim yolu da başlangıç noktasından geçen bir doğrudur. Fakat unutulmamalıdır ki, gelişim yolunun doğru olması üretim fonksiyonunun herhangi dereceden homojen olmasını gerektirmez. $Q = AL^{\alpha} K^{1-\alpha}$ üretim fonksiyonunun gelişim yolu tanımından yararlanılırsa kolayca bulunur (7). Bu dolaysız fonksiyonun verdiği gelişim yolu ((1-α)

$$\frac{w}{r} = \frac{F_1}{F_K} = \frac{\alpha(AL^{\alpha-1} K^{1-\alpha})}{(1-\alpha)(AL^{\alpha} K^{-\alpha})} = \frac{\alpha K}{(1-\alpha)L} \tag{7}$$

$wL - \alpha rK = 0$ görüldüğü üzere başlangıçtan geçen bir doğruyu belirler.

3. Euler teoremi :

Üretimin faktörleri arasındaki dağılımı kendiliğinden gerçekleşir, $(LF_1 + KF_k = Q)$. n dereceden homojenlik için gereken eşitliğin λ ya göre türevi alındığında bulunan eşitlikte (8), λ yerine bir konu-

$$LF_1\ (\lambda L, \lambda K) + KF_K\ (\lambda L, \lambda K) = n\lambda^{n-1} F(L, K) \qquad (8)$$

lursa, (9) da görülen eşitlik elde edilir. Fonksiyon doğrusal homo-

$$LF_1 + KF_K = n\,F(L, K) \qquad (9)$$

jen olduğunda görüldüğü üzere üretim faktörleri arasında bölüşüldükten sonra geriye bir şey kalmaz. Bu (10) da da görüldüğü üzere, örneğimiz tarafından da doğrulanır.

$$\begin{aligned} Q &= L(\alpha AL^{\alpha-1} K^{1-\alpha}) + K(1-\alpha)\, AL^{\alpha} K^{-\alpha}) \\ &\alpha AL^{\alpha} K^{1-\alpha} + (1-\alpha)\, AL^{\alpha} K^{1-\alpha} \\ &= \alpha Q + (1-\alpha)\, Q \qquad (10) \end{aligned}$$

n nin birden büyük oluşu halinde faktörlere marjinal verimliliklerine göre yapılan ödemeler toplam üretim miktarını aşar. n nin birden küçük olması halinde ise pozitif bir fark söz konusu olur. Üretim fonksiyonunun doğrusal homojen olması halinde fonksiyon üretim faktörleri başına üretim miktarını verecek şekilde düzenlenirse, eşitlik kolayca bulunur. Tam rekabette firma kârını maksimize etmeyi amaç edinirse, faktörlerin marjinal verimliliklerinin ücretlerine eşitler. $y = \Phi\ (x)$ fonksiyonunda kapital ve işgücünün marjinal verimlilikleri sırasıyla (11) ve (12) de görüldüğü üzere bulunur ve bunlar

$$\begin{aligned} F_K &= \frac{\partial (L\Phi(x))}{\partial K} = L\ \Phi'(x) \frac{dx}{dL} \\ &= Q'(x) \qquad (11) \end{aligned}$$

$$F_l = \frac{\partial(L\Phi(x))}{\partial L} = \Phi(x) + L\Phi'(x)\frac{dx}{dL}$$

$$= \Phi(x) - x\Phi'(x) \quad (12)$$

ücretlere eşitlenirse (13) üretimin kişi başına kapitale ve işgücüne ücret olarak dağılımı (14) de görüldüğü üzere kendiliğinden gerçekleşir.

$$\frac{r}{p} = \Phi'(x), \frac{w}{p} = \Phi(x) - x\Phi'(x) \quad (13$$

$$\frac{r}{p}x + \frac{w}{p} = x\Phi'(x) + \Phi(x) - x\Phi'(x) = \Phi(x) \quad (14)$$

$\Phi(x)$ in y olduğu hatırlanıp eşitliğin solu ve sağı L ile çarpılırsa aranılan sonuç bulunur (15).

$$F_K K + F_l L = Q \quad (15)$$

Bu eşitlik yanlış olarak marjinal verimlilik teorisinin, dağılımın marjinal verimlilik teorisi sanılmasına yol açmıştır. Yanızca üretim faktörlerinin taleplerini etkilerse de, birçok durumlarda faktörlerin arzlarını sabit varsaymak faydalı olduğundan dağılımın marjinal verimlilik teorisinden bahsedilmeye devam edilmektedir. Fakat talep teorisi olarak kabul edilmesi özellikle faktörlerin piyasa içi ve dışı kullanışları söz konusu olduğunda yerindedir. Çünkü arz miktarı, verilen taleple fiyatı belirtir. Eşitlik tam rekabetin varlığında, üretimin birim fiyatıyla da çarpılsa bozulmaz ve uzun dönem kârının sıfır olmasıyla eşanlamlıdır (16). Hatırlanacağı üzere, firma kâr

$$K(pF_K) + L(pF_l) = pQ \quad (16)$$

maksimizasyonunun birinci derece koşulları parantez içindeki sırasıyla kapital ve işgücünün marjinal verimliliklerinin kıymetlerinin r ve w ye eşit olmasını gerektirdiğinden (16) daki eşitlik uzun dönem toplam giderin toplam gelire eşitliğini verir. Dolayısiyle marjnal verimlilik teorisinin varsayımından ötürü, kâr fiattan bağımsız olarak sıfır bulunur. Fakat bu çözüm çok iyidir! Marjinal verimliliklere göre yapılan ödemeler faktörlerin birleşimleri ne olursa olsun toplam üretim kadar olacaktır. Faktör gelirleri firma ölçeğinden bağımsızdırlar ve üretilen mal sabit fiattan satıldığında kâr maksimizasyonu analizi bu tipteki fonksiyonlar için kullanılamaz. Kâr fonksiyonu da (17) de görüldüğü üzere doğrusal homojen olacağından, bir-

$$\lambda\pi = p\ F\ (\lambda L,\ \lambda K) - w\lambda L - r\gamma K \qquad (17)$$

birinden farklı üç sonuç olarak içindedir. Ya fiatlar herhangi bir faktörler birleşiminde kâr edilmesine olanak verir ki, kâr λ için büyük değerler seçilerek istenildiği oranda yükseltilebileceğinden fonksiyonun maksimizasyonu olanak içinde değildir. Ya verilen fiatlar faktörler birleşimlerinin hepsinde zarar oluşmasına neden olur ki, firma bu iş alanından ayrılmak zorundadır, veya kâr elde edilmesinin olanak içinde olmadığı, marjinalistlerin de çalışmalarını limitledikleri durum oluşur ki, herhangi bir bileşimde sıfır kâr edilmesi bütün λ değerleri için de aynı birleşimin sıfır kâra sahip olmasını gerektirir. Tabii burada bir monopolleşme aşaması söz konusu değildir. Kısaca firma bakımından üretim fonksiyonunun doğrusal homojen olması yapılacak araştırmaların konusunu iktisat değil, teknolojinin oluşturmasını gerektirir.

Gerçekten uzun dönem toplam maliyet eğrisinin doğrusal olma zorunluluğu $Q = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ üretim fonksiyonu örneğimiz tarafından da doğrulanır. Birim üretim maliyeti, şayet optimum faktör birleşimi (L^*, K^*) ise $wL^* + rK^*$ olur. Üretim fonksiyonunun doğrusal homojen olması doğrusal gelişim yoluna neden olduğundan, (QL^*, QK^*) Q birim için optimum faktör birleşimini belirler. Dolayısiyle de üretimin toplam maliyeti bQ ile gösterilir. Bir sabiti belirliyen b, ($wL^* + rK^*$) a eşit olup üretimin marjinal ve ortalama maliyetidir. Örneğin toplam maliyet eğrisini veren fonksiyon kolayca bulunur. b ve gelişim yolunun [(1-α) wL-αK = 0] eşitleri L ve K için çözülürse, (18) deki eşitleri elde edilir.

$$L = \alpha bw \qquad K = (1-\alpha)b/r \tag{18}$$

L ve K nın bulunan bu eşitleri üretim fonksiyonunda yerlerine konulursa (19) elde edilir ki, toplam maliyetin (20) de görüldüğü üzere

$$Q = A \left(\frac{ab}{w}\right)^{\alpha} \left\{\frac{(1-\alpha)b}{r}\right\}^{1-\alpha} \tag{19}$$

üretim miktarı ve parametreler cinsinden yazılması sağlanır.

$$TM = \left\{\frac{w^{\alpha}\, r^{1-\alpha}}{A\alpha^{\alpha}\,(1-\alpha)^{(1-\alpha)}}\right\} Q \tag{20}$$

Şimdi, üretim faktörleri piyasalarında tam rekabetin geçerli olduğunda, tam rekabet koşullarının mal piyasasında bir an bulunmadığını varsayalım. Firma kârının sıfır olabilmesi için, ortalama masrafın azalan bölümünde üretimde bulunulmalıdır. Bunun, ölçeğe göre artan verimliliğe sebep olduğundan (15) deki eşitliği bozacağı düşünülürse de gerçek bir bozma söz konusu değildir. Çünkü, faktörlerin kazançları marjinal fiziksel verimliliklerinin değerlerine değil de, marjinal verimliliklerinin değerine eşittir. Dolayısiyle de marjinal gelirin fiatı oranındaki marjinal fiziksel verimliliklerin değerlerinden azdırlar. Kâr sıfır olduğunda eşitliğin sağlandığının gösterilmesi için ölçeğe göre sabit verimlerin fiziksel olarak değil de değer bakımından varlığı gerekir. Aksak rekabette değer bakımından sabit verimlerin anlaşılmasında bazan güçlük çekilmektedir. Teknik nedenlerin oluşturduğu artan verimler satış fiatındaki düşüşü tam olarak karşılarsa sabit verimlerin varolabileceği açıklığa kavuşur. Firmanın kârının sıfır olması halinde de bu kolayca ispatlanır (2). Şimdi de üretim faktörlerinin arzlarının tam elastik olmadığını düşünelim. Bilindiği üzere bu durumda faktörlerin aldıkları ücretler marjinal verimliliklerinin değerlerinden azdırlar. Gene faktörler fiziksel olarak değil de yapılan harcamaların hacmi cinsinden ölçülürse, zıtlık kendiliğinden ortadan kalkar (3). Kaldı ki, üretim fonksiyonu doğrusal homojen olmasa bile şayet kâr maksimizasyonunun birinci ve ikinci derece koşulları yerine getirilebiliyor ve firmaların o endüstriye giriş ve çıkışları serbest ise (endüstrideki kârın sıfır olması hali), marjinal verimlilik teorisi geçerlidir. (21) de görülen toplam kâr eşitinin sıfır olması ve w ve r nin de sırasıyla pF_l ve pF_k ya eşit ol-

$$\pi = pQ - wL - rK \tag{21}$$

masını da kâr maksimizasyonunun birinci derece koşulları gerektirdiğinden, bu eşitliğin Q için çözümü gene (15) deki eşitliği verir. Görülmektedir ki, sonuç yukarıda eşitlik kullanılmadan da elde edilir ve üretim fonksiyonunda doğrusal homojen olmadığından firma için optimum bir ölçeğin bulunması olanak içindedir. Burada sırası gelmişken marjinal verimlilik teorisine yöneltilen tenkitler de kısaca özetlenebilir. Bunlardan ilki, kanunun geçerli olması halinde faktör paylarının bir tabiat kanunu tarafından belirlenmiş gibi kaçınılmaz olarak tayin edilmiş olacağını ve herhangi bir beşeri unsurun karışmasına olanak vermiyeceğini ileri sürer. Bu iddia doğru olsa bile, teorinin reddedilmesi için yeter değildir. Kaldı ki doğru da değildir. Çünkü, teori payların beşeri unsurlar tarafından nasıl etkilenebileceğini analiz eder ve gerçekten de işgücünün verimi çeşitli yollardan etkilenebilir. İktisada giriş kitapların sık sık görülen teorinin diğer bir tenkidi ise, teorinin faktör mobilitesinin tamlığı, başka alternatiflerin varlığının bilinmesi ve tam rekabetin varlığı varsayımlarına yönelmiştir. Açıktır ki, bu tenkitler teorinin faktör talebinin tayin ve faktör fiatlarının belirtilmesinde pozitif bir analiz

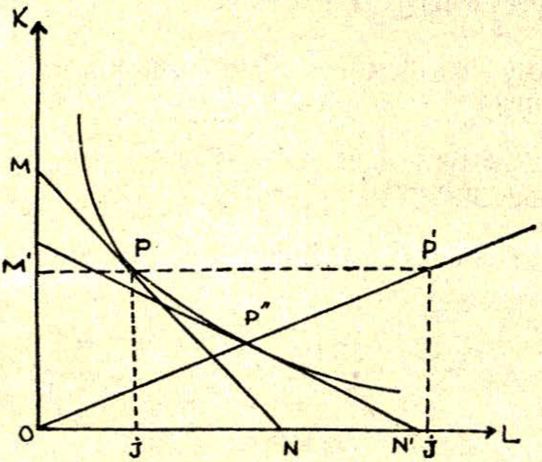
(2) J. Robinson, «Euler's Theorem and the Problem of Distribution», **The Economic Journal**, C. XLIL, (1934), s. 403

(3) Ibid., s. 409

aleti olduğu gerçeğini ortadan kaldırmaz. Bu varsayımlar normatifdir ve teoriye göre yapılan ödemelerin en etkin faktörler dağılımını gerçekleştirmesine olanak verir. Genel olarak faktörlerin marjinal verimliliklerine göre yapılan ödemeler, piyasada nihai ürünler arasında satınalmadaki ikame oranını üretimde nihai ürünler arasındaki teknik ikame oranına eşitler. Normatif konuların münakaşasına, öte yanda özel ve sosyal üretim miktarları arasındaki farklılıklarda girer. Fakat bu da üretimin doğru olarak ölçülmesi halinde niteliğini kaybeder. Görülmektedir ki, münakaşada asıl üstünde durulmakta olan nokta, daha adil bir dağılımın sağlanıp sağlanamıyacağıdır. Ne üretilmişse karşılığı alınmaktadır. Fakat analiz verilen gelir dağılımından başlatılmıştır ki, bu da analize fazla güvenilmemesine neden olmaktadır.

Nihayet (15) deki eşitlikten yararlanılırsa, faktörlerin marjinal verimliliklerinin doğrusal homojen üretim fonksiyonunun eşürün eğrisi verilince kolayca bulunabilineceğinin belirtilmesi gerekir. Şekil 4.'de P eşürün eğrisi üzerindeki herhangi bir nokta olsun ve bu noktadan eğriye teğet çizilirse (22) deki eşitlik bulunur.

Şekil 4.



Eşitliğin her iki yanı MV_1 OJ çarpımına bölünürse (23) deki

$$Q = MV_1.OJ + MV_KPJ \qquad (22)$$

Doğrusal Homojen

$$\frac{Q}{MV_1OJ} = 1 + \frac{MV_KPJ}{MV_LOJ}$$

$$= 1 + \frac{NJ}{PJ} \frac{PJ}{OJ}$$

$$= \frac{ON}{OJ} \tag{23}$$

sonuçtan MV_1, Q/ON olarak bulunur. MV_k de benzer yoldan Q/OM olarak bulunur. Kapitalin miktarını PJ de sabit tutarken, işgücünün miktarını JJ' kadar arttıralım. OP' doğrusunun eşürün eğrisini P" de kestiğini varsayarak, bu noktadan eğriye M'N' teğeti çizilirse, MV_1 nin P' ve P" noktalarında eşdeğerli ve Q/ON ye eşit olduğu görülür. Bu yöntemle daha birçok noktalar elde edilerek istenirse bir eğri çizilebilinir. Bu analiz doğrusal homojen fonksiyonlarının herhangi bir tipdeki eşürün eğrisine uygulanabilir (4).

4. Diğer matematiksel özellikleri:

Fonksiyonun diğer matematiksel özellikleri de, devamla kısaca sıralanabilir:

a) Fonksiyonun ikinci kısmi türevleri ile ikinci çapraz türevleri arasında ilişkiler.

Bu ilişkiler (24) de görüldüğü üzere yazılır (5).

$$F_{11} = -\frac{K}{L} F_{1K}\,,\; F_{kk} = -\frac{L}{K} F_{1K} \tag{24}$$

(4) A. S. Gerakis, «A Note an Linear and Homogeneous Fuctions and Marjinal Products», **Economica**, C. XXIX, (1962), s. 283

(5) R.G.D. Allen, **Mathematical Analysis for Economists, I.B., London,** Macmillan and Co., Ltd., 1967, s. 318

b) Fonksiyon ikinci kısmi türevlerinin aralarındaki ilişki:

Bu ilişki, (24) deki eşitliklerden kolayca elde edilir. Bu son iki

$$F_{KK} = \frac{L^2}{K^2} F_{11} \qquad (25)$$

eşitlikten görülür ki, herhangi bir pozitif üretim seviyesinde ikinci kısmi türevlerden birinin değerinin sıfır olması diğerlerinin değerlerinin de sıfır olmasına neden olur.

c) Üretim miktarı karesinin, üretim faktörleri ve fonksiyonun kısmi türevleri cinsinden ifade edilebilirliği:

$$Q^2 = F^2_1 L^2 + 2F_1 F_K LK + F^2_K K \qquad (26)$$[6]

d) Fonksiyonun üçüncü kısmi türevlerinin aralarındaki ilişki:

$$F_{111} = -\frac{1}{L} F_{11} - \frac{K^3}{L^3} F_{kkk} \qquad (27)$$

C. AZALAN MARJİNAL VERİMLER

Genel olarak çizilen toplam ürün eğrilerinin doğrusal homojen üretim fonksiyonu için geçerli olamayacağının tartışılması daha doğrusu değişen oranlar kanunu olarak adlandırılması gereken konunun bu makalede incelenmesine neden olmuştur. Bilindiği üzere firmalar kısa dönemde, kısa dönemin tanımından ötürü en az bir faktörün sağladığı hizmetlere fiatlarını etkilemeden sahip olamazlar. Verilen fiatlarda çeşitli üretim faktörlerinin hangi oranda birleşti-

(6) C.E. Ferguson, **The Neoclassical Theory of Production and Distribution,** I.B., London, The Cambridge University Press, 1969, s. 95

rilmesi sorusuna cevap veren klasik üretim fonksiyonlarında, değişen faktörün veriminin önce artan dönüşüm noktasından sonra da azalan hızla artacağı ve hız sıfır olduktan sonra da toplam ürünün azalarak sıfır olacağı kabul edilir. Şüphesiz bu davranışın arkasında ne bir teori ve ne de bir mantık vardır. Yalnızca iktisadi olaylarda geçerli olduğu kabul edilmiştir. Konunun incelenebilinmesi için, miktarı sabit alınan üretim faktörünün bölünemez ve tam uyabilir olmalıdır ki, değişen faktör pozitif bir sabitten sonra ne miktarda kullanılırsa kullanılsın üretilen ürün miktarı maksimum olsun. Ve miktarı değiştirebilen faktörün de küçük homojen parçalara bölünebilmesi gereklidir. Açıktır ki, sıfır uyabilirlik halinde toplam ürün eğrisi tek bir noktaya dönüşerek konunun incelenmesine olanak vermez. Firmalar kısa dönemde bazı faktörlerin hizmetlerinden daha fazla faydalanamadıklarından, üretim miktarlarındaki değişiklikleri izlemek için daha esnek üretim sistemleriyle çalışmak isterler. Tabii esnek sistemlere sahip olmanın da bir fiatı vardır. Çünkü, genellikle daha fazla sabit üretim faktörü gerektirirler. Fakat sistemlerin seçimi nin, azalan marjinal verimlerle dolaysız ilişkisi bulunmaması konunun üzerinde daha fazla durulmasına gerek bırakmaz. Değişen üretim faktörünün pozitif bir sabitten sonra ne miktarda kullanılırsa kullanılsın toplam ürün eğrisi üretilebilecek maksimum ürctimi belirliyorsa bu toplam ürün eğrisinin türetildiği üretim fonksiyonuna Knight tipi denilir. Ve bu tipteki fonksiyonlar, üretim faaliyetinin miktarı sabit kalan üretim faktörünün değişir olanına oranı sonsuz olmadan durdurulması tabii olduğundan toplam ürün eğrileri başlangıç noktasından başlayan üretim fonksiyonlarına yeğ tutulmalıdır. Ferguson ise, bu tipteki toplam ürün eğrisini verecek üretim fonksiyonunun ifadesinin en az iki terimli olma ve en az bir teriminin de diğerlerinden çıkarılması zorunluluğundan ve terimlerin birbirlerinden çıkarılmalarına da gerek teknik ve gerekse iktisadi bir neden göremediğinden, bu tipteki fonksinoyları reddeder (7). Fakat bu itiraz geçerli olmadığı gibi başlangıç noktasından başlayan toplam ürün eğrileri miktar eksenini kesmiyerek miktarı değişir üretim faktörünün ortalama verimliliğinin hiçbir zaman sıfır olmaması yanlışlığını da beraberliklerinde taşımaktadırlar. Eğrinin miktar eksenine

---

(7) İbid., s. 318

asimptot olmasının gerekliliği kolayca gösterilebilinir. İşgücü-kapital oranı sıfır olurken toplam üretimde sıfır olur. Simetri yapıda kapital-işgücü oranı sıfır olduğunda toplam üretim sıfır veya işgücü-kapital oranı sonsuza yaklaşırken eğrinin eksene asimptotluğunun gerektirir. Basit-normal eşürün eğrisini veren $Q=AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ üretim fonksiyonu ile konu, toplam ürün eğrisi azalan bir eğimle artıp maksimum değere ulaşamayacağından incelenemez. Ayrıca toplam ürün eğrisinin maksimum noktası ile eğrinin miktar eksenini kestiği noktalar arasındaki mesafelerden sağındakinin daha büyük olması gerekliliği belirtilmelidir (8). Üretim faktörlerinin birleşim oranı, her ilave değişir faktör biriminden daha az etkilenir. İktisatta uzunca bir süreden beri doğrusal homojen üretim fonksiyonlarının Knight tipinin özelliklerine sahip olup olmayacakları tartışılagelmektedir. Aşağıda sırasıyla Fergusan (9), Sato (10) ve Rowe (11) tarafından

$$Q = A\left\{\frac{BL^3K^2 + CL^2K^3}{EL^4 + GK^4}\right\} \tag{28}$$

$$Q = \frac{L^2K^2}{b_0L^3 + b_1K^3} \tag{29}$$

$$Q = \frac{L^a\ K^a}{gL^{2a-1} + (1-g)K^{2a-1}} \tag{30}$$

Knight tipine örnek oldukları ileri sürülen doğrusal homojen fonksiyonlar görülmektedir. Fakat bunların hepsinin de kesitleri başlan-

---

(8) L.M. Cassels, «On the Law of Variable Proportions», **Readings in the Theory of Income Distribution,** der The American Economic Assocation 4.B., London, George Allen and Union Ltd., 1967, s. 104

(9) Fergusan, loc. cit., s. 122

(10) R. Sato, «Diminishing Returns and Linear Homegeneily: Comment», **American Economic Review,** C. LIV, (1964), s. 745

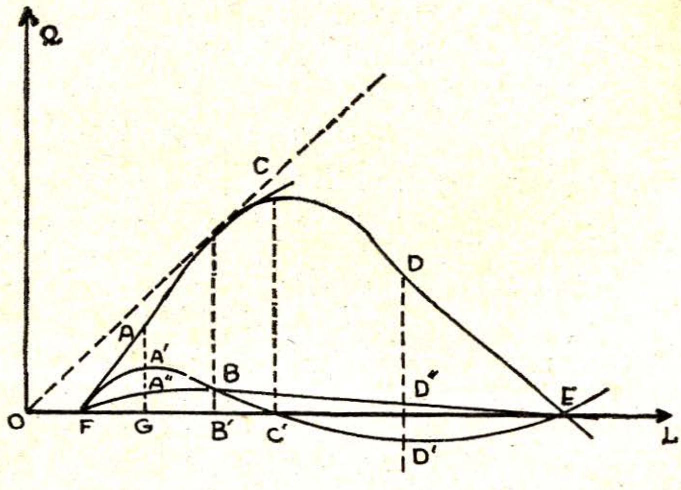
(11) J. W. Rowe, Returns and Linear Homogeneity, Coument», **American Economie Review** C. LV. (1965), s. 591

gıç geçtiklerinden toplam ürün eğrileri değişir üretim faktörü miktar eksenini kesmezler ve dolayısiyle de Knight tipi fonksiyonlar olarak kabul edilmeleri olanaksızdır. Genel şekli (31) de görüldüğü üzere yazılabilen Knight tipindeki doğrusal homojen üretim fonksiyonunun özel hali Schneider tarafından bulunmuştur (12). Fonksiyonda α ve β katsayıları pozitif sabit, β katsayıları arasındaki ilişki Σ_{i-1}^{m-1} $\beta_i > \beta_0 + \beta_m$

$$\frac{-\,{}_{i=1}^{m-1}\,\beta_0 L^{m/n} + \Sigma \beta_i L^{(m-i)/n} K^{i/n} - \beta_m K^{m/n}}{\alpha_0 L^{(m-n)/n} + \alpha_1 K^{(m-n)/n}} \tag{31}$$

ve m ve n de birbirlerinden farklı tek sayılardır. Schneider'in fonksiyonunda (32) K yerine bir konulduğunda, şekil 5'de çizilmiş

Şekil 5.



bulunan kesitinden de görüleceği üzere, bu fonksiyon Knight tipinde doğrusal homojen üretim fonksiyonudur. Kesit, değişir faktörün iki pozitif miktarında (.15 ve 6.85) ekseni keser ve bir maksimum, iki

(12) D. Schneider, «Diminishing Returns Linear Homogeneity: Comment», **Amerikan Economie Review**, C. LIV, (1964), s. 749

$$Q = \frac{-L^3 + 6L^2K + 6LK^2 - K^3}{L^2 + K^2} \qquad (32)$$

dönüşüm noktasına sahip bulunur. Euler teoreminden yararlanılırsa, faktörlerin marjinal verimliliklerinin eşitleri (33) de görüldüğü üzere

$$F_1 = \frac{Q - KF_k}{L}, \; F_k = \frac{Q - LF_1}{K} \qquad (33)$$

elde edilir. l'Hopital kuralı bunlardan ilkine uygulandığında görülür ki, işgücünün marjinal verimliliği ve dolayısiyle de kapitalin marjinal verimliliği F noktasında sıfırdır. Ortalama veriminin eşiti de (34) de görüldüğü üzere yazılabilindiğinden F de işgücünün orta-

$$\frac{Q}{L} = \frac{K}{L} F_k + F_1 \qquad (34)$$

lama verimliliği de sıfırdır. İşgücünün .25 miktarında kullanımında (şekilde G noktası ile belirlenmiştir) F_{111},- 52. 13 ye eşit olacağından gerek F_1 ve gerekse F_{11} F, G noktaları arasında sıfırdan büyüklerdir ve bu aralıkta F_{111} nin değerini sıfır yapan bir nokta bulunmadığından işgücünün marjinal verimliliği azalan bir hızla artar ve dolayısiyle bir dönüşüm noktasına sahip olmaz. Ve G noktasında açıktır ki, marjinal verimlilik eğrisi bir maksimuma erişir ve toplam ürün eğrisinin içbükeyliğinin yönü kurala göre yukarıdan iken aşağıya olacak şekilde değişir. Bu noktadan sonra işgücünün marjinal verimliliği azalmaya başlar. Ortalama verimin maksimum noktasından geçerek toplam ürünü maksimum yapan 1.56 birim işgücü kullanımında (şekilde C' noktasında) sıfır olur. İşgücünün .64 birim kullanımında (şekilde B' noktası) maksimum olan işgücünün ortalama verimliliği eğrisi, $\partial^2(Q/L)\partial^2L$, A" noktasının solundaki aralığın herhangi bir noktasında sıfır olmadığından, bir dönüşüm noktasına sahip değildir. Bilindiği üzere miktarı değişen faktörün ortalama veriminin miktarı sabit kalan faktörün toplam ürünü olabilmesi için ortalama verimlilik eğrisinin dönüşüm noktasının marjinal verimlilik eğrisinin maksimum, minimum noktaları arasında bulunması gerektiğinden, dönüşüm noktasının marjinal verimlilik eğrisinin maksimum noktasının solunda aranmasının bir çelişki yarattığı düşünülebilinir. İşgücünün ortalama verimliliğinin türevleri kapitale göre alınırsa, (Q, K) düzeyinde ortalama verimin, işgücünün miktarı bir alındığında kapitalin toplam ürünü olduğu görüleceğinden sözü edilen çelişkinin varlığı gerçekleşmez. Yukarıda, firmanın üretim faaliyetine ortalama verimin maksimum olduğu B noktasında girişeceği söylenmişti. Bu noktada miktarı sabit kalan faktörün marjinal verimliliğinin sıfır oluşu, doğrusal homojen fonksiyonlar için kolayca ıspatlanır. Ortalama verimin türevi sıfıra eşitlendiğinde, LF_{11} nin $-K F_{1k}$ ya eşitliği hatırlanırsa $-(K/L^2) F_k$ nin sıfır olma gerekliliği kendiliğinden ortaya çıkar. Faktörlerin kullanım miktarları da pozitif olduğundan miktarı sabit kalan faktörün marjinal verimliliğinin B noktasında sıfır olduğu sonucuna varılır. Nihayet işgücünün 6.85 birim kullanılmasıyla marjinal ve ortalama verim eğrileri E noktasında toplam ürün eğrisi ile birlikte miktar eksenini keser ve sıfır değerini alırlar. İşgücünün marjinal verimliliği, 3.75 birimin kullanılmasıyla bir ekstrim noktasına daha sahip olur ve bu nokta F_{111}, .066 olduğundan bir minimumdur. Toplam ürün eğrisinin içbükeyliğinin yönü aşağıdan iken yukarıya olacak şekilde değişmiştir. Ortalama

$$\frac{\partial(\frac{Q}{L})}{\partial L} = F_{11} - \frac{K}{L^2} F_k + \frac{K}{L} F_{1k} \tag{35}$$

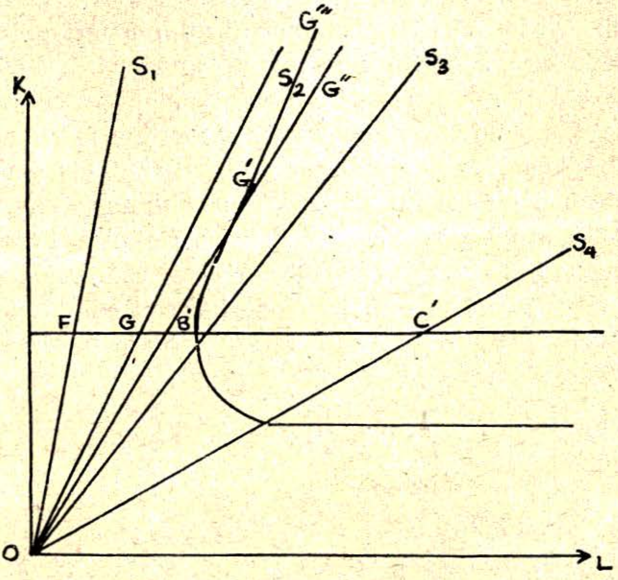
verimlilik eğrisi de, bu nokta ile kendi maksimum noktası arasında bir birim işgücünün kullanımında $\partial^2(Q/L)/\partial L^2$ olduğundan bir dönüşüm noktasına sahiptir. Ve bu dönüşüm noktasında $\partial^3(Q/L)/\partial L^3$ 7.5 olarak bulunduğundan eğrinin işbükeyliğinin yönü de aşağıdan iken yukarıya olacak şekilde değişir. Dolayısiyle ortalama verimlilik eğrisi, birinci safhada dönüşüm noktasına sahip olsun olmasın bir dönüşüm noktasına sahiptir.

Bu söylenenleri, eşürün eğrisi üzerinde de izlemeden önce iki noktanın hatırlanması faydalıdır.

Şayet üretim fonksiyonları, verilen teknoloji seviyesinde faktörlerin birleşiminden elde edilecek maksimum ürün miktarını belirler olarak tanımlanırsa, eşürün eğrileri marjinal verimliliklerin sıfır oldukları noktalardan sonra eksenlere paralel devam ederler. Verilen ürün miktarı için gereken minimum faktörler ihtiyacını belirler şekilde tanımlanırsa, İsocline'lerin dışında kalan parçalar bu sefer yokolurlar. Ve ki üretim faktörünün oluşturduğu üretim fonksiyonlarında azalan verimler yalnız bir faktör için incelenebilir. Bir faktörün aynı anda hem bölünemez ve hem de bölünebilir olarak kabul edilmesi olanaksız olduğundan, yalnız bir ekonomik olmayan bölge tanımlanabilir.

Bu hatırlatmadan sonra (K, L) düzeyinin başlangıçtan çıkan doğrularla bölümlere ayrılabilineceği gösterilebilinir. Şekil 5'deki OF mesafesi doğrudan doğruya sabit faktörün miktarıyla orantılıdır. Dolaysıyle şekil 6'daki OS_1 doğrusu kapital miktarı devamlı değişti-

Şekil 6.



rilerek elde edilir. Gene homojenlik özelliği, kapital miktarının devamlı değiştirilmesinde OS^3 doğrusunun elde edilmesine olanak verir. Şekildeki OS_2 doğrusu da işgücü faktörünün marjinal verimliliğinin maksimum noktalarının geometrik yerini temsil eder. Yukarıda verilen üretim fonksiyonunun her iki tanımı da, miktarı sabit alınan üretim faktörünün bölünemez ve tam uyabilirliği halinde, eşürün eğrisinin ekonomik bölgenin dışında varolmasına engel olmaz. Kapital miktarı bir birimde sabit tutulup işgücü miktarı C' noktasına kadar devamlı olarak değiştirilirse, her noktada maksimum toplam ürün elde edilir. Bu yapıldıktan sonra da kapital miktarı bir birime kadar devamlı olarak değiştirilirse, OK ve OS_4 arasını kapsayan eşürün yüzeyinin tamamı elde edilir. Şekildeki C' noktasından sonra işgücü kullanımı faaliyetini iktisadi yürüten firmalarda üretim seviyesinin düşmesine neden olmaz. İlâve işgücü ya boş bırakılır veya üretim faaliyetine karıştırılmaz. Üretim fonksiyonunun ilk tanımı benimsenirse, eşürün eğrileri OS_4 eğrisine değdikten sonra işgücü eksenine paralel devam ederler. Ayrıca bir faktörün hem bölünemez ve hem de bölünebilir olarak kabul edilmesi belirtildiği üzere olanaksız olduğundan, eşürün eğrisinin çiziminin de tutarlılığı ortadadır. Öte yanda ekonomik olmayan bölgenin karakteristiği olan pozitif eğimli eşürün eğrileri, homojen üretim fonksiyonunun özellikleri ile bağdaşmaz. Ekonomik bölgenin dışındaki OS_2 doğrusu eşürün eğrisini G' noktasından sonra bir başka açıdan G" noktasında keser ve böylece de homojen fonksiyonların temel özelliği olan eşürün eğrilerinin başlangıç noktasından geçen herhangi bir doğru boyunca eğimlerinin eşit olması kuralı bozulmuş bulunur. Gerçekten de eşürün eğrileri bu bölgede yön değiştirirler. Doğrusal homojen üretim fonksiyonu, $Q = F(L, K)$ ile gösterilirse, eşürün eğrisinin eğimi dK/dL, $-(F_1/F_k)$ dır ve eğri üzerinde hareket edildiğinde eğimdeki değişme haddi, d^2K/dL^2 nin eşiti tarafından verilir. Doğrusal homo-

$$\frac{d^2{}_K}{dL^2} = -\frac{1}{F^3{}_K}(F^2{}_kF_{11} - 2F_1F_kF_{1K} + F^2{}_1F_{KK})$$

jen üretim fonksiyonlarında F_{kk}, $F_{11}(L^2/K^2)$ye ve F_{1K} da $-F_{11}(L/K)$ ya eşit olduğundan, eşitlik tekrar (36) da görüldüğü üzere düzenle-

$$\frac{d^2K}{dL^2} = -\frac{F_{11}}{K^2F^3{}_K}\{K^2F^2 + 2LKF_1F_K + {}^2F^2{}_1\} \qquad (36)$$

nebilir. Eşitliğin sağındaki parantezin içi, gene doğrusal homojen fonksiyonlar için Q^2 ye eşit olduğundan, (36) daki eşitlik daha basit olarak yazılabilir (37). Şimdi OS_1 ile OS_3 arasında kalan eşürün eğri

$$\frac{d^2 K}{d L^2} = - \frac{F_{11} Q^2}{K^2 F^3_K} \qquad (37)$$

parçasının şekli araştırılabilinir. Bilindiği üzere, ekonomik olan bölgede her iki faktörün marjinal verimliliği pozitifken, bu arada F_1 pozitif, F_k negatiftir. Marjnal verimliliklerin işaretleri ters olması eğrinin eğiminin pozitif olması sonucunu verir. OS_2 doğrusu da işgücü faktörünün marjinal verimliliğinin maksimum noktalarının geometrik yeri olduğundan F_{11} sıfırdır. F_1 sıfır olunca da d^2K/dL^2 de sıfır olur. dK/dL sıfırdan büyük olduğundan, eşürün eğrisi OS_2 yi kestiği G' noktasında bir ekstirme sahip olmadığından doğruyu dönüşüm noktasında kesmelidir. OS_2 ve OS_3 çizimlerinden ötürü aralarında işgüsünün marjinal verimliliği düşer. F_{11} nin sıfırdan küçük oluşuna ilâveten F_k nın da sıfırdan küçüklüğü d^2K/dL^2 nin negatif olmasına yol açar. İşgücünün marjinal verimliliğinin pozitif olması dK/dL nın pozitif ve dolayısiyle de eğrinin bu arada pozitif eğimli olmasına neden olur. Fakat eğrinin eğimi B' den G' ne gidildikçe azalır. OS_1, OS_2 doğruları arasında ise, çizimlerinden ötürü, işgücünün marjinal verimliliğ artar. İlâveten, bu arada F_k nın negatifliği d^2K/dL^2 nin pozitifliğine neden olur. Gene işgücünün marjinal verimliliğinin pozitif olması dK/dL nin pozitif ve dolayısiyle de eğrinin bu arada pozitif eğimli olmasına neden olur. Fakat bu defa eğimin değeri G'den uzaklaştıkça artar. Kısaca, eşürün eğrisi G', G' arasında orijine dışbükey G', G''' arasında ise içbükeydir. Diğer bir belirtilmesi gereken nokta da, eşürün eğrilerinin dönüşüm noktalarını birleştiren doğrunun dik olmamak koşuluyla istenildiği kadar dik çizilebileceğidir. Böylece yalnızca OK üzerinde eşürün eğrisi tanımlanamaz. Üretim fonksiyonunun bütün pozitif K, L değerleri için tanımlanamayacağı kolayca gösterilebilinir. OK ile OS_2 arasında işgücünün marjinal verimliliğinin arttığını varsayalım. K ve L pozitif olduğundan F_{11} nin eşiti $(K/L)^2$ F_{kk} dan F_{KK} pozitif olarak bulunur. K/L ile gösterilebilen doğru dik olunca $(L/K)^2$ sıfıra yaklaşacağından F_{11} de sonsuza yaklaşır. Kısaca sabit bir kapital miktarı için, kapital eksenine yaklaşıldıkça işgücünün marjinal verimliliği eğrisinin eğimi dikleşir. Üretim faktörlerinin pozitif değerleri için pozitif üretim miktarının varlığı varsayılır. Dolayısiyle verilen bir kapital miktarında işgücü miktarı sıfıra yaklaşırken üretim miktarı halâ pozitiftir. Şimdi kullanılan işgüiünün miktarı sıfır olduğunda, üretim fonksiyonunun halâ geçerli olup olmadığını araştıralım. Doğrusal homojen üretim fonksiyonları için $LF_1 + KF_k = Q$ olduğundan işgücü miktarının sıfır oluşunda KF_k, Q ya eşit olur. Şayet üretim fonksiyonu halâ geçerliyse, F_k sıfırdan küçük olduğundan üretim miktarı da sıfırdan küçük olmalıdır. Bunun anlamı ise, verilen kapital miktarı için işgücü eksenine ne kadar yaklaşırsak yaklaşalım Q pozitiftir. Fakat işgücünün kullanım miktarının sıfır oluşunda Q negatif olduğundan devamlılık eksenler üzerinde söz konusu olamaz. Kısaca dönüşüm noktaları OS_2 doğrusu üzerindedirler ve verilen sabit kapital miktarları için işgücünün marjinal verimlilikleri maksimumdur. Şekil 6 daki G' dönüşüm noktası, toplam ürün eğrisinin A noktasındaki dönüşüm noktasının karşıtıdır.

Burada konuyla yakından ilişkisi bulunan değişen masraflara bir göz atılması gerekir. Görüldüğü üzere kısa dönemde, üretim seviyesinde oluşturulan değişiklikler, sabit alınan üretim faktörü miktarında herhangi bir değişiklik gerektirmez. Kısaca miktarı sabit alınan faktörün başka bir kullanım yeri olmadığından, kaybedilen alternatif yalnızca miktarı değişir üretim faktörünün birimleri için yapılan harcamalardır. Bilindiği üzere marjinal maliyet, toplam maliyetteki değişmenin üretim seviyesindeki değişmeye oranlanmasıyla bulunur. Tam rekabette, toplam maliyetin değişmesi, işgücünün kullanım miktarındaki değişiklikle ücret seviyesinin çarpımına eşit olduğundan görülür ki, marjinal maliyet işgücünün marjinal verimliliği ile ters orantılıdır. Dolayısiyle tam rekabet koşullarında, azalan marjinal verimlerin varlığı artan maliyetlere sebep olur. Ve firmanın kısa - dönemdeki ürettiği mal miktarındaki değişiklikler, değişir ortama masraf eğrisinin minimum noktasının üzerinde kalan marjinal maliyet eğri parçası üzerinde izlenir. Kısaca eğrinin bu parçası firmanın kısa - dönem arz eğrisidir.

D. İkame Elastikiyeti ve Faktörlerin Nispi Paylarındaki Değişme ile Arasındaki İlişki

Fonksiyonun matematiksel özelliklerinden yararlanılırsa üretim faktörleri arasındaki ikame elastikiyeti için basit bir ifade bulunabilir. İkame elastikiyetinin değeri kısmî türevlerin bir fonksiyonu olarak yazılabilir. İfadenin payı doğrusal homojen fonksyonlar

$$\sigma = \frac{-F_1 F_K (LF_1 + KF_K)}{LK(F_{11}F^2_K - 2F_{1K}F_1F_k + F_{KK}F^2_1)}$$

için F_1K_kQ, paydası ise, F_{11} nin $-F_{1k}$ (K/L) ye eşit olduğu hatırlandığında (36) dan da görüldüğü üzere,

$-F_{1K}(K^2F^2_K + 2F_{1k}F_1F_k + L^2F^2_1)$ olarak yazılanabilir. Düzenlenen paydanın içi de, doğrusal homojen fonksiyonlar Q^2 ye eşit olduğundan ikame elastikiyeti için (38) de görüldüğü üzere çok basit bir ifade elde edilebilir. Dikkat edilirse, bu ifade faktörler arası ikakamenin derinliği tanımının aynısıdır. Bununla beraber ikame elas-

$$\sigma = \frac{F_1 F_K}{Q F_{1K}} \tag{38}$$

tikiyeti için daha basit bir ifadenin elde edilmesi olanak içindedir. Yukarıda (11) ve (12) de sırasıyla kapital ve işgücünün marjinal verimlilikleri $\Phi'(x)$ ve $\Phi(x) - x\Phi'(x)$ olarak bulunmuştu. Bulunanlar tanımında yerlerine konulursa, (39) da görüldüğü üzere ikame elastikiyeti için doğrusal olmayan bir differensiyel eşitlik bu-

$$\sigma = -\frac{\Phi'(x)\{\Phi(x) - x\Phi'(x)\}}{x\Phi(x)\Phi''(x)} \tag{39}$$

lunur. Fakat faktör oranlarının tek bağımsız değişken olmalarından ötürü, kısmi differensiyel bir eşitlik değildir. $Q = AL^{\alpha} K^{1-\alpha}$ ile ifade edilen doğrusal homojen üretim fonksiyonlarına misalimizde, $MTİH_{kl}$ nin değeri $(\alpha/(1-\alpha))x$ olduğundan ikame elastikiyetinin değeri bütün noktalarda bire eşittir.

Sırası gelmişken burada, ikame elastikiyeti ile faktörlerin nispi paylarındaki değişmeler arasındaki ilişkiler incelenebilir. Üretim içinde, işgücü ve kapitalin nispi payları sırasıyla wL/pQ ve rk/pQ dür. Doğrusal homojen üretim fonksiyonlarında, faktörlerin nispi payları daima üretim elastikiyetlerine eşit olduğundan, oranları da $\varepsilon_L - \varepsilon_K$ oranına eşit olur. Mutlak geliri artan üretim faktörünün nispi payı, ikame elastikiyetinin birden küçük, bire eşit veya birden büyük oluşuna göre artar, sabit kalır veya azalır. Tam rekabet koşulları altında bilindiği üzere kârını maksimize etmeyi amaçlıyan firma, faktörlerin marjinal verimliliklerini ücretlerine eşitler.

Fakat üretim faktörlerinin fiatları aynı zamanda faktörlerin birleşim oranlarının da bir fonksiyonudur. Dolayısiyle üretim faktörlerinden birinin, işgücünün fiatı değiştikçe, $x(=K/L)$ deki ve bağımlı olarak da $y(=Q/L)$ deki değişiklikler araştırılabilinir. $(\frac{w}{p})$ nin eşitinden $(\Phi(x) - x\Phi'(x))\ dw/dx$, $-x\Phi''(x)$ ve y den de dy/dx, $\Phi'(x)$ olarak elde edildiğinden, $dy/d(wp)$ nin eşiti $-\Phi'(x)/x\Phi''(x)$ olarak bulunur. y nin ücret seviyesine göre elastikiyeti alınırsa, (40) da görülen elastikiyetin eşiti, ikame elastikiyetinin doğrusal olmayan differensiyel eşitidir. Diğer taraftana faktörlerin optimum bir-

$$\frac{(w/p)}{y}\frac{dy}{d(\omega/p)} = \frac{\Phi(x) - x\Phi'(x)}{\Phi(x)}\left(-\frac{\Phi'(x)}{x\Phi''(x)}\right) \qquad (40)$$

leşiminde kapitalin payı $\frac{r}{p}(x/y)$, $x\Phi'(x)/\Phi(x)$ e eşittir. İşgücünün fiatı yükseldiğinde x nin değeri artacağından kapitalin payındaki (41) deki eşitlik verir.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\Phi'(x)}{\Phi(x)}\right) = \frac{1}{\Phi^2(x)}\{\Phi(x)\ (\Phi'(x) + x\Phi''(x)) - x\Phi'^2(x)\}$$

$$= \frac{x\Phi''(x)}{\Phi(x)} \{ \frac{\Phi'(x)\{\Phi(x) - x\Phi'(x)\}}{x\Phi(x)\Phi''(x)} + 1\}$$

$$= \frac{x}{(\Phi)x} (-\Phi''(x)) (\sigma - 1) \qquad (41)$$

İkame elastikiyetinin değeri birden büyük ise, kapitalin payı x ve $(\frac{w}{p})$ ile birlikte yükselir. Değerin birden küçük olması halinde ise, pay azalır. İkame elastikiyetinin değerinin bir olduğu özel halde ise, kapital ve işgücünün payı, x ve $(\frac{w}{p})$ değerlerindeki bütün değişmelerden etkilenmiyerek sabit kalırlar.

(39) daki eşitlikte, ikame elastikiyeti için çeşitli değerler konularak elde edilecek çeşitli doğrusal homojen fonksiyonların ifadelerinin bulunulmasına geçilmeden önce, çeşitli anlamlardaki teknolojik ilerlemeleri veren üretim fonksiyonlarının nasıl elde edildiği gösterilebilinir. Ayrıca doğrusal homojen üretim fonksiyonunun, üretim faktörleri başına üretim miktarını belirleyen fonksiyonların düzenlenmesine olanak vermesi, gerek Hicks ve grekse Harrod anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeden sonraki durumun şekil ile gösterilebilinmesini gerçekleştirir.

E. Çeşitli Anlamlardaki Teknolojik İlerlemeleri Veren Fonksiyonların Elde Edilmeleri

1. Hicks anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeyi veren fonksiyonun elde edilmesi :

Bilindiği üzere, $MTİH_{K1}$ Hicks anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeden etkilenmediğinden $\partial S/\partial t$ de sıfırdır. Dolayısiyle, (42) de, $MTİH_{K1}$ nin değeri w-r oranına eşittir ve bu değerde teknolojik ilerlemeden etkilenmediğinden $\partial S/\partial t$ de sıfırdır. Dolayısiyle, (42)

$$\frac{\Phi(x) - x\Phi(x)}{\Phi'(x)} = \frac{\Phi(x)}{\Phi'(x)} - x = \bar{s} \tag{42}$$

deki eşitlik yazılabilir (43) de görüldüğü üzere düzenlenip her iki yanının integrali alınırsa, (44) deki eşitlik bulunur.

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\Phi(x)} \quad \frac{\partial x}{\bar{s}-x} \tag{43}$$

$$\ln\Phi(x,t) - \ln A(t) = \int \frac{\partial x}{\bar{s}-x} \tag{44}$$

In A(t), herhangi bir sabittir ve $\partial\Phi(x)/\Phi(x)$ nin entegralinin sonucu olup teknolojik ilerleme faktörünü ölçer. (44) deki eşitlik (45) de görüldüğü üzere yazılıp $e^{\int \frac{\partial x}{s+x}}$ yerine Φ (x) konulursa Hicks anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeyi veren fonksiyon bulunur (46). Teknolojik ilerlemeden sonraki durumu göstermek

$$\Phi(x,t) = A(t)e^{\int \frac{\partial x}{s+x}} \tag{45}$$

$$\Phi(x,t) = A(t)\Phi(x) \tag{46}$$

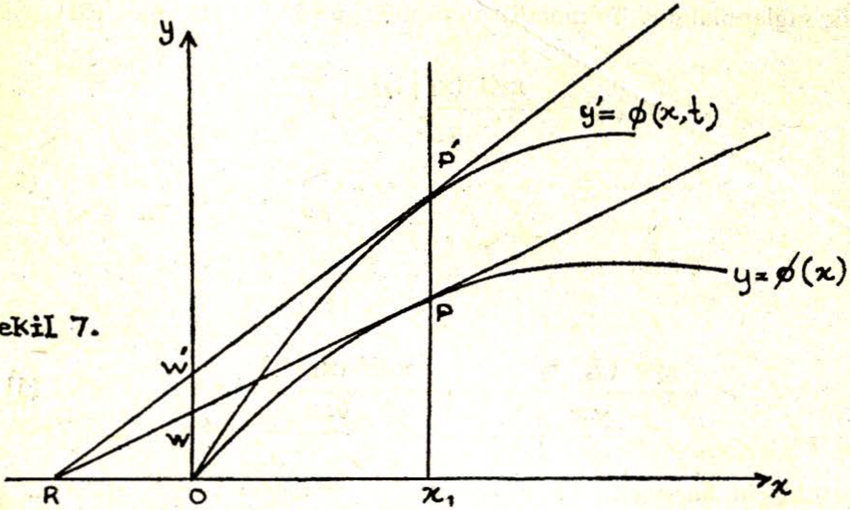
için de şekil 7 çizilir. Şekildeki OR mesafesi faktörlerin marjinal verimliliklerinin oranını verir[13]. Bu mesafe verilen her hangi bir x değerinde teknolojik ilerlemeden etkilenmez. $\Phi(x, t)$ ile temsil edilen eğri bütün x değerleri için $\Phi(x)$ in aynı oranda arttırılması ile bulunur.

Hicks anlamındaki teknolojik ilerlemenin üretim faktörlerinin

---

[13] F. H. Hahn ve R. C. O. Matthows, «The Theory of Economic Growth,» The Economie Journal, C. LXXIV, (1964), s. 830

üretim elastikiyetlerindeki veya nispi paylarındaki değişmelere göre sınıflandırılabilineceği yukarıda söylenmişti. İşgücünün nispi payı α ile gösterilirse, kapitalin nispi payı (47) de gösterildiği üzere ya-



Şekil 7.

zılır. Yalnız t_1 ve t_2 zamanları alınırsa Hicks anlamındaki bir yansız teknolojik ilerlemenin varolabilmesi için, x in değeri sabit kal-

$$\varepsilon_K = \frac{x\Phi'(x)}{y} = (1-\alpha) \qquad (47)$$

malı ve $MTİH_{K1}$ lerin oranı bire eşit olmalıdır. Dolayısiyle Hicks' in yansızlık koşulu (48) de görüldüğü üzere yazılır.

$$\frac{y_2 - x_1\Phi'(x_1 \mid t_2)}{y_1 - x_1\Phi'(x_1 \mid t_1)} \quad \frac{\Phi'(x_1 \mid t_1)}{\Phi'(x_1 \mid t_2)} = 1 \qquad (48)$$

İlaveten bu zaman aralığında kapitalin üretim elastikiyeti de sabit kalırsa, (49) daki eşitlik yazılır. Bu eşitliğin (48) de yerine ko-

$$\frac{x_1\Phi'(x_1 \mid t_1)}{y_1} = \frac{x_1\Phi'(x_1 \mid t_2)}{y_2} \quad (49)$$

nularak elde edilen eitliğin (50) gerçekleşmesi için, (51) deki eşitlik sağlanmalıdır. Teknolojik ilerlemenin yönü, (49) ve (51) deki

$$\frac{y_2\left\{1 - \dfrac{x_1\Phi'(x_1 \mid t_2)}{y_2}\right\}}{y_1\left\{1 - \dfrac{x_1\Phi'(x_1 \mid t_1)}{y_1}\right\}} : \frac{y_1}{y_2} = 1 \quad (50)$$

$$\frac{x_1\Phi'(x_1 \mid t_2)}{y_2} = \frac{x_1\Phi'(x_1 \mid t_1)}{y_1} \quad (51)$$

eşitliklerin karşılaştırılmalarıyla tayin edilir.

2. Harrod anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeyi veren fonksiyonun elde edilmesi :

Harrod anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeyi veren üretim fonksiyonu da kolayca bulunur. Kapitalin ücreti, üretim-kapital miktarı oranının bir fonksiyonudur. Dolayısiyle kapitalin ücreti $(z-kz_K)$ ye eşit olacağından, (52) de görülen differensiyel denklem elde edi-

$$z-kz_K = f(z) \quad (52)$$

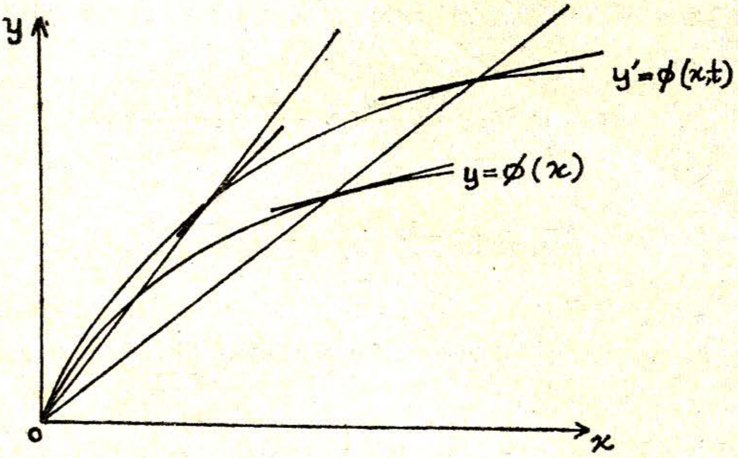
dir. Bu denklemin bilinen yoldan çözümü ile de Harrod anlamında yansız teknolojik ilerlemeyi veren üretim fonksiyonu elde edilir.[14]

---

[14] R. Sato ve M. J. Beckmann, «Neutral Inventions and Produetion Functions», **The Review of Economie Studies**, C. XXXV, (1968), s. 61

Gene çizilecek bir şekilde, Harrod anlamındaki tarafsız teknolojik ilerlemeden sonraki durumu izlenebilir. Şekil 8 de $\Phi(x,t)$ eğrisi orijinden geçen herhangi bir doğrunun eğriyi kestiği noktada, eğrinin teğetinin eğiminin aynı doğrunun $\Phi(x)$ eğrisini kestiği noktadaki te-

Şekil 8.



ğetin eğimine eşit yapacak şekilde çizilmiştir. Orijinden geçen bu doğrunun eğimi üretim-kapital miktarı oranına eşittir. Ve bilindiği üzere yansız teknolojik ilerlemede, sabit olan bu oranda kapitalin ücretinin sabit kalmasıyla tanımlanır. Şeklinden de görüleceği üzere, teğetlerin eğilimleri sabit kalmaktadır. Harrod anlamındaki yansız teknolojik ilerlemenin simetriği olan, Solow anlamındaki yan sız teknolojik ilerlemeyi veren üretim fonksiyonu da kolayca bulunur. Ücret haddi yalnızca üretim-işgücü miktarı oranının bir fonksiyonu olup $(y - xy_x)$ e eşit olduğundan, (53) de görülen differensiyel denklemin integralinden bu defa Solow anlamında yansız tek-

$$y - xy_x = f(y) \qquad (53)$$

nolojik ilerlemeyi veren üretim fonksiyonu elde edilir.

3. Faktör miktarlarını arttırıcı yansız teknolojik ilerlemeyi veren fonksiyonun elde edilmesi

Faktör miktarlarını arttırıcı yansız teknolojik ilerleme, üretim faktörlerinin paylarının sabit kaldığı sürece ikame elastikiyetinin sabitliği ile tanımlanmıştı. Bu tipteki yansız teknolojik ilerlemeyi veren üretim fonksiyonu, (54) de yazılmış bulunan ikame elastikiyeti tanımının tersinden elde edilebilinir. İkame elastikiyetinin değeri, (55) de görüldüğü üzere işgücünün nispi payının (kz_K/z) bir fonksiyonudur. (kz_K/z) yerine u konulursa, eşitlik tekrar (56) da

$$\sigma = \frac{\Delta(K/L)}{K/L} : \frac{\Delta(w/r)}{w/r} \tag{54}$$

$$\partial \ln \frac{z-kz_K}{z_K} \,/\, \partial \ln k = f(kz_K/z) \tag{55}$$

görüldüğü üzere yazılabilir. Bu eşitlikten $\partial k/k = \partial u/f(u)$

$$k \frac{\partial}{k\partial} \ln \{k(\frac{1}{u} - 1)\} = f(u) \tag{56}$$

bulunacağından $\ln k + \ln C(t) = g(u)$ veya $u = G(C(t)k)$ sonucuna varılır. u yerine eşiti konulduktan sonra (57) de görüldüğü üzere düzenlenip iki yanının integrali alınırsa z nin eşiti elde edilir (58).

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial k}{kG(C(t)k)} \tag{57}$$

$$z = A(t) \int_e^K \frac{C(t)v}{C(t)vG(C(t)v)} \tag{58}$$

Eşitliğin sağındaki $C(t)v$ yerine p konularak z için (59) da görüldüğü üzere daha basit bir eşitlik elde edilir. z nin eşiti (60) da görüldüğü üzere yazılabilineceğinden nihayet bu tipdeki teknolojik ilerlemeyi verecek üretim fonksiyonuna varılır.

$$z = A(t) \int_{e}^{C(t)k} \frac{\partial p}{pG(p)} \tag{59}$$

$$z = A(t)\ f(C(t)k) \tag{60}$$

Bu tipteki teknolojik ilerlemelerin yanlılığının bulunabilinmesi için, A(t) ve B(t) nin tahminleri gerektiğinden bunların üretim fonksiyonundan ayrılması yöntemi bulunmalıdır. Üretim fonksiyonunun zamana göre toplam türevi alınıp üretim miktarına bölündüğünde, $\partial F/\partial A$, $\partial F/\partial K$, $\partial F/\partial B$ ve $\partial F/\partial L$ nin sırasıyla K { $\partial F/\partial(AK)$ }, A { $\partial F/\partial(AK)$ }, L { $\partial F/\partial(BL)$ } B { $\partial F/\partial(BL)$ } ye eşit olduğu hatırlanırsa, (61) de yazılan ilişkiler bulunabilir.

$$\frac{dQ/dt}{Q} = \frac{\partial F}{\partial(AK)} \frac{\partial(AK)}{\partial K} \frac{K}{Q} \frac{dK/dt}{K} + \frac{\partial F}{\partial(AK)} \frac{\partial(AK)}{\partial A} \frac{A}{Q} \frac{dA/dt}{A}$$

$$\frac{dA/dt}{A} = \frac{\partial F}{\partial(BL)} \frac{\partial(BL)}{\partial L} \frac{L}{Q} \frac{dL/dt}{L} + \frac{\partial F}{\partial(BL)} \frac{\partial(BL)}{\partial B} \frac{B}{Q} \frac{dB/dt}{B}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A} \frac{A}{Q} = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{K}{Q} = \frac{AK}{Q} \frac{\partial F}{\partial(AK)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial B} \frac{B}{Q} = \frac{\partial F}{\partial L} \frac{L}{Q} = \frac{BL}{Q} \frac{\partial F}{\partial (BL)} \tag{61}$$

$\frac{\partial F}{\partial K} \frac{K}{Q}$ ve $\frac{\partial F}{\partial L} \frac{L}{Q}$ sırasıyla kapital ve işgücünün nispi payları olduklarından, toplam türevin üretim miktarına oranı, (62) de görüldüğü üzere daha basitçe yazılabilir. İşgücü-kapital ve üretim-işgücü oranları için sırasıyla k ve y kullanılırsa, tekrar bir düzenle-

$$\frac{dQ/dt}{Q} = \beta\left(\frac{dk/dt}{K} + \frac{dA/dt}{A}\right) + \alpha\left(\frac{dL/dt}{L} + \frac{dB/dt}{B}\right) \quad (62)$$

meye gidilebilir (63). Şayet kapital ve işgücü faktörlerinin verimli-

$$\frac{dy/dt}{y} = \beta\frac{dA/dt}{A} + \alpha\frac{dB/dt}{B} - \beta\frac{dk/dt}{K} \quad (63)$$

liklerinin artmaları aynıysa $\frac{dA/dt}{A} = \frac{dB/dt}{B} = \frac{dT/dt}{T}$), (63) deki eşitlik Solow'un tarafsız teknolojik ilerlemeleri tahmin için kullandığı orijinal eşitliğe dönüşür (64)[15]. Fakat Solow'un bu yöntemi $\frac{dA/dt}{A}$, $\frac{dB/dt}{B}$ ye eşit olmadığında kullanılamaz. İfade iki bi-

$$\frac{dy/dt}{y} = \frac{dT/dt}{T} - \beta\frac{dk/dt}{k} \quad (64)$$

bilinmiyenliye dönüşmüştür ve çözümü diğer bir denkleme ihtiyaç gösterir. Bu ihtiyacı ikame elastikiyetinin faktör paylarının bir fonksiyonu olarak tanımlanması giderir. İşgücünün (Bf' (C(t)k) ve kapitalin ücretinin (AfC(t)k) −kBf' (C(t)k) zamana göre türevi alınıp kendilerine bölündükten sonra ikame elastikiyetinin (65) deki

$$\sigma = \frac{wr}{-kz\frac{\partial w}{\partial k}} \quad (65)$$

[15] R. M. Solow, «Technical Change and Aggregate Production Function,» **Review of Economics and Statistics,** C. XXXIX, (1957), s. 314

eşiti kullanılırsa, (66) deki eşitlikler elde edilir[16]. (62) de yazılmış bulunan eşitlikle, eşitliklerden ilki çözülüp ikincisinden yararlanırsa, dA/Adt ve dB/Bdt nin tahminleri için iki temel denklem elde

$$\frac{dw/dt}{w} = \frac{dB/dt}{B} - \frac{\beta}{\sigma}\left(\frac{dB/dt}{B} - \frac{dA/dt}{A} + \frac{dk/dt}{k}\right.$$

$$\frac{dr/dt}{r} = \frac{dA/dt}{A} - \frac{\alpha}{\sigma}\left(\frac{dB/dt}{B} - \frac{dA/dt}{A} + \frac{dk/dt}{k}\right. \tag{66}$$

edilir (67). Fakat burada sonuçla ilgili iki nokta belirtilmelidir. A (t)

$$\frac{dA/dt}{A} = \frac{\sigma\dfrac{dr/dt}{r} - \dfrac{dz/dt}{z}}{\sigma-1}$$

$$\frac{dB/dt}{B} = \frac{\sigma\dfrac{dw/dt}{w} - \dfrac{dy/dt}{y}}{\sigma-1} \tag{67}$$

ve B (t) nin tahminlerinin yapılabilmesi için, ikame elastikiyetinin değeri bir olmamalıdır. İkame elastikiyetinin bire eşit olması halinde A (t) ve B (t) nin tahmin edilmesini sağlayacak hiçbir yöntem yoktur. dw/wdt, dy/ydt ye eşit olacağından (66) daki ilk eşitlik, (63) deki eşitliğe dönüşür ve gene iki bilinmiyenli tek bir denklemle karşı karşıya kalınır. Ayrıca olanaksız teoreminden ötürü ikame elastikiyetinin değeri bir olmasa bile, tahminde bulunulabilmesi için, değerinin önceden bilinmesi gerekir. Ger-

16 R. Sato, «The Estimation of Biased Technical Progress and the Production Function **International Economic Review,** C. XI, (1970), s. 185

çekten de (63) ve (66) daki eşitliklerin Jacobian determinantı[17] (68) den görüleceği üzere sıfıra eşittir.

Nihayet bu tipteki teknolojik ilerlemenin hangi yönde yanlılığa

$$|J| \equiv \begin{vmatrix} \beta & \sigma & 0 \\ (\sigma-1) & 0 & \dfrac{dA/dt}{A} - \dfrac{dr/dt}{r} \\ 0 & (\sigma-1) & \dfrac{dB/dt}{B} - \dfrac{dw/dt}{w} \end{vmatrix} \quad (68)$$

sahip olduğunun bu analiz içinde iade edilebilirliği gösterilebilinir. ω, r—w oranını temsil ederse, (66) deki iki eşitlikten elde edilebilen (69) da yazılmış bulunan eşitlik, çeşitli olasılıklardan bahsedilmeye olanak verir.

$$\frac{d\omega/dt}{\omega} = \frac{dr/dt}{r} - \frac{dw/dt}{w}$$

---

[17] Jacobian determinantı: Doğrusallığı zorunlu olmayan, n değişkenli ve n türevi alınabilen fonksiyonun determinantı (1) de görüldüğü üzere yazılır.

$$|J| \equiv \frac{\partial(y_1, y_2 \ldots. y_n)}{\partial(x_1, x_2 \ldots. x_n)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots. & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots. & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots. & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (1)$$

şayet fonksiyonlar doğrusal veya olmasın bağımlı iseler, $|J|$, x_1 x_2 nin bütün değerleri sıfır olur. A.C. Chiang, **Fundamental Methods of Mathematical Economics**, I.B., New York, Mc Graw - Hill, Inc., 1967, s. 192

$$= \left(\frac{dA/dt}{A} - \frac{dB/dt}{B}\right)\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}\frac{dk/dt}{k} \qquad (69)$$

4. Bağımlı teknolojik ilerlemede verimlilik ayarlanması yapılmış kapital malları stokuyla fonksiyonun yazılması

Teknolojik ilerlemenin bağımlı olması halinde de, verimlilik ayarlanması yapılmış kapital malları stokuyla, üretim fonksiyonu yazılabilir. Toplam üretim farklı yaşlardaki kapital mallarından ya rarlanarak elde edilen üretimlerin toplamı ve tam olarak istihdam edilen işgücünün kullanılan farklı yaşlardaki bütün kapital mallarına dağıtıldığı varsayılırsa, (70) ve (71) deki eşitlikler yazılabilir. Dağılımın optimum olabilmesi için işgücünün farklı yaşlardaki ka-

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{t} Q_v(t)\, dv \qquad (70)$$

$$L(t) = \int_{-\infty}^{t} L_v(t)\, dc \qquad (71)$$

pital mallarındaki marjinal verimliliği aynı olmalıdır. Tam rekabet koşullarında, işgücünün marjinal verimiliği ücrete eşittir ve her yaştaki kapital mallarında çalışanlar eşiti (72) de yazılmış bulunan

$$\frac{w}{p}(t) = \frac{\partial}{\partial L} F\{ m(v) K_v(t), L_v(t) \} \qquad (72)$$

ücreti alacaklardır. F nin homojenlik varsayımından ötürü $\frac{w}{p}(t)$ tekrar (73) de görüldüğü üzere düzenlenebilir. Parantez içinde gö-

$$\frac{w}{p}(t) = \frac{\partial}{\partial L} L_v(t)\, F\left\{\frac{m(v)\, K_v(t)}{L_v(t)}, 1\right\} \qquad (73)$$

rülen $m(v)\, K_v(t)/L_v(t)$ yalnızca ücret haddinin bir fonksiyonudur.

Gene F nin homojenlik özelliğinden toplam üretimi veren eşitlik (74) de görüldüğü üzere bulunur. $m(v)\ K_V(t)/L_V(t)$ yerine ücret

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{t} L_V(t)\ F\ \{ \frac{m(v)\ K_V(t)}{L_V(t)}, 1 \} \qquad (74)$$

haddi edildikten sonra, entegral «t» yi kapsamadığından $Q(t)$ için

$$Q(t) = F\ \{ f(\frac{W}{P}(t)), 1 \} \int_{-\infty}^{t} L_V(t) \qquad (75)$$

(75) de görülen yeni bir eşitlik elde edilir. Entegralin içinin eşiti $L(t)$ olduğundan $Q(t)$ nin eşiti (76) da görüldüğü üzere tekrar yazılır. $L(t)$ için ifade de kolayca (77) de görüldüğü üzere elde edilir. İntegralin içi için $J(t)$ yazılıp (76) da yerine konulursa, t zamanında verimlilik ayarlanması yapılmış kapital malları stoku ile toplam üretim fonksiyonuna varılır.

$$\begin{aligned} Q(t) &= L(t)\ F\ \{ f(\frac{w}{p}(t)), 1 \} \\ &= F\ \{ f(\frac{w}{p}(t) L(t), L(t) \} \end{aligned} \qquad (76)$$

$$L(t) = \int_{-\infty}^{t} L_V(t)\ dv = \frac{1}{f(w/p(t))} \int^{t} m(v)\ K_V(t)\ dv \qquad (77)$$

F. Çeşitli Doğrusal Homojen Üretim Fonksiyonlarının İfadelerinin Elde Edilmesi

Makalemin bu son paragrafında, ikame elastikiyetinin yukarıda (39) da yazılmış eşitinden yararlanarak çeşitli doğrusal homojen üretim fonksiyonlarının ifadeleri bulunacaktır.

1. İkame elastikiyetinin değerinin sıfır olması hali :

(39) da ikame değeri içn sıfır alınır ve trivial çözümü[18] ihmal edilirse, (78) de görülen birinci dereceden doğrusal differensiyel eşitlik elde edilir. İntegralin sabitli olarak, $1/\alpha$ alınırsa eşitliğin çö-

$$\frac{d\Phi(x)}{\Phi(x)} - \frac{dx}{x} = 0 \qquad (78)$$

zümü (79) dan $\Phi(x) = (1/\alpha)x$ olarak bulunur. $\Phi(x)$ ve x yerine de eşitleri alınırsa, $Q = (1/\alpha)K$ bulunur. Diğer taraftan aynı çalış-

$$\ln\Phi(x) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) \qquad (79)$$

ma $z = f(k)$ için tekrarlanırsa, $Q = (1/\beta)L$ bulunur. Bu iki sonuçtan ikame elastikiyetlerinin değerleri sıfır olan üretim fonksiyonları için

$$Q = \frac{1}{\alpha}K + \frac{1}{\beta}L \qquad (80)$$

iki temel şekil elde edilir. (80) de görülen şekil iki sonucun toplanmasıyla bulunur. $Q = (1/\alpha)K$ ve $Q = (1/\beta)L$ eşitlikleri geçerliyse veya bunlardan bir tanesinin miktarı bol ise, (81) de ifadesi yazılmış bulunan faktörlerin birleşim oranları sabit olan üretim fonksiyonunun özel Leontief şekli elde edilir. İlkinde faktörlerin miktar-

---

[18] Trivial çözüm: a ve a_2 lerin sabit olduğu (1) de görülen denklemin trivial çözümü, bütün x değerleri için sıfır olan Φ fonksiyonudur. E. A. Coddington, **Ordinary Differential Equations, 1.B., Englewood** Cliffs, Prentice-Hall, Inc., 1961, s. 51

$$L(y) = y'' + a_1y' + a_2y = 0 \qquad (1)$$

$$Q = \min \left(\frac{1}{\alpha} K, \frac{1}{\beta} L\right) \tag{81}$$

larındaki değişiklikler, marjinal verimliliklerin pozitif ve sabit oluşlarını etkilemez. İkincisinde ise marjinal verimliliklerin davranışları farklı olacaktır. Karşılıklı faktör miktarları limitinin başlangıç noktasında faktörlerden birinin miktarındaki azalma, marjinal verimliliğini etkilemezken (kapital ve işgücü faktörünün marjinal verimlilikleri sırasıyla $(1/\alpha)$ ve $(1/\beta)$ değerlerinde sabit kalırlar) miktarında oluşturulan artma marjinal verimliliğinin sıfır olmasına neden olur. Dolayısiyle ikame elastikiyetinin değeri sıfır olunca, marjinal verimlilikleri pozitif sabit veya negatif olmalıdır ve karşılık faktörleri limiti noktasında belirli bir devamsızlıkla iki farklı sabit olmalıdır.

2. İkame elastikiyetinin değerinin birim olması hali :

(39) daki eşitlik, ikame elastikiyetinin değerinin bir olması halinde düzenlendiğinde (82) deki eşitlik elde edilir. Φ (x) için e^{ux}

$$\Phi''(x) + \frac{1}{x} \Phi'(x) - \frac{1}{\Phi(x)} \Phi^2 (x) = 0 \tag{82}$$

transformasyonu kullanılırsa eşitlik (83) deki eşitliğe dönüşür. Nihayet u' (x) yerine p (x) yazılarak (84) deki eşitlik elde edilir. Bu

$$u''(x) + \frac{1}{x} u'(x) = 0 \tag{83}$$

$$p'(x) + \frac{1}{x} p(x) = 0 \tag{84}$$

eşitliğin entegral faktörü $e^{\int (\frac{1}{x})dx}$ olduğundan, çözümü yazılabilir (85). Çözümdeki α, integralin sabitidir. p(x) in, u(x) yerine yazıldığı

$$p(x) = \frac{\alpha}{x} \qquad (85)$$

hatırlanırsa, du = $(\alpha/x)dx$ elde edilir ki, bunun da çözümü (86) da

$$u(x) = \alpha \ln + \ln A \qquad (86)$$

görüldüğü üzere yazılır. A gene entegralin sabitidir. Bu çözümde transformasyonda yerine konulursa, (87) deki eşitlik elde edilir ki, Φ (x) ve x in eşitleri yerlerine yazıldığında $Q = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$ bulunur.

$$\Phi(x) = e^{\alpha \ln x + \ln a} = Ax^{\alpha} \qquad (87)$$

Bu ilişki ise, Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun doğrusal homojen şeklidir. Fonksiyonun iktisadi anlamda geçerliliği için şüphesiz A nın sıfırdan büyük α nın da sıfır ile bir aralığında bulunması gerekir. Burada A nın verimlilik ve α nın da yoğunluk parametresi olarak adlandırıldığının belirtilmesi yeterlidir.

3. İkame elastikiyetinin değerinin sabit olması hali :

Değeri sabit alındığında (39) daki eşitlik tekrar düzenlenebilir (88). Eşitlikteki bağımlı değişkenden, $\Phi(x)$ için $e^{u(x)}$ transformasyo-

$$\Phi''(x) + \frac{1}{\sigma x}\Phi'(x) - \frac{1}{\sigma \Phi(x)}\Phi'^2(x) = 0 \qquad (38)$$

nu kullanılarak kurtulunabilinir. Ve eşitlik (89) da yazıldığı üzere tekrar yazılabilir. Bu eşitlikte, u' (x) için p(x) alınarak doğrusal olmayan birinci derece differensiyel denkleme dönüştürülebilinir (90).

$$u''(x) + \frac{1}{\sigma x} u'(x) + \left(\frac{\sigma-1}{\sigma\Phi(x)}\right) u'^2(x) = 0 \qquad (89)$$

$$\frac{p'(x)}{p^2(x)} + \frac{1}{\sigma x}\,\frac{1}{p(x)} + \frac{\sigma-1}{\sigma} = 0 \qquad (90)$$

Nihayet, $1/p(x)$ yerine $w(x)$ konularak azaltma eylemi tamamlanarak (91) de görülen doğrusal birinci derece differensiyel denklem

$$w'(x) - \frac{1}{\sigma x} w(x) = \frac{\sigma-1}{\sigma} \qquad (91)$$

elde edilir. Eşitliğin entegral faktörü ($e^{-1/\sigma \int dx/x} = e^{\ln x^{-1/\sigma}} = x^{-1/\sigma}$) eşitlikte yerine konulup, (91) in integrali alınırsa (92) de görülen sonuç elde edilir. Sonuçtaki $(1-\delta)/\delta$ ifadesi integralin sabitidir. Ge-

$$w = x\left\{1 + \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) x^{(1-\sigma)/\sigma}\right\} \qquad (92)$$

riye döndüğünde (93) de görülen eşitlik elde edilir. $\gamma\delta^{\sigma/(\sigma-1)}$ in-

$$\int du = \int \frac{dx}{x\left\{1 + \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) x^{(1-\sigma)/\sigma}\right\}} + \ln\gamma\delta^{\sigma/(\sigma-1)} \qquad (93)$$

tegralin seçilen sabitidir. Her iki yanın integralinin alınmasıyla nihayet (94) deki eşitlik bulunur[19]. u için bulunan bu eşitlikten de

[19] Ferguson, loc, Cit., s. 102

Φ (x) in eşiti elde edilir (95). Φ (x) ve x in eşitleri yerlerine konul-

$$u = \ln \{ (\frac{1-\delta}{\delta}) + x^{(\sigma-1)/\sigma} \}^{\sigma/(\sigma-1)} + \ln\gamma\delta^{\sigma/(\sigma-1)} \tag{94}$$

$$\Phi(x) = \gamma\delta^{\sigma/(\sigma-1)} \{ (\frac{1-\sigma}{\sigma}) + x^{(\sigma-1)/\sigma} \}^{\sigma/(\sigma-1)} \tag{95}$$

duğunda da üretim miktarını belirleyen (96) da görülen ifade elde edilir. Eşitlikte σ için $1/(1+p)$ yazılırsa, CES üretim fonksiyonu-

$$Q = \gamma \{ \delta K^{(\sigma-1)/\sigma} - (1-\delta) L^{(-1)/\sigma} \}^{\sigma/(\sigma-1)}$$
$$Q = \gamma \{ \delta K^{-p} + (1-\delta) L^{-p} \}^{-1/p} \tag{96}$$

nun bilinen şekli bulunur. Bu fonksiyonun iktisadi anlamda geçerliliği için, γ nın sıfırdan büyük olması, δ nın sıfır ile bir aralığında bulunması ve σ nın da en az sıfıra eşit olması gerekir. Son koşul p ya işaret bakımından bir kısıtlama getirmemekle beraber p nin sonsuz ile eksi bir aralığında bulunması gerektirir. Bu tipteki üretim fonksiyonunun üç parametresi vardır. İkisi integralin sabitleri olarak ortaya çıkmış, diğeri ise ikame elastikiyetinin değerinin sabit oluşu varsayımından oluşmuştur. γ, δ, p sabitleri sırasıyla verimlilik, yoğunluk ve ikame parametreleri olarak adlandırılır.

Burada belirtilmesi gerekir, ki CES üretim fonksiyonu ikame elastikiyetinin değeri bir olduğunda Cobb-Douglas, sıfır olduğunda Leontief fonksiyonuna dönüşür.

Fonksiyonun p sıfıra yaklaşırken limiti alınırsa, (97) de görülen sonuç bulunur. p sıfıra yaklaşırken pay herhangi bir probleme neden

$$\lim_{p \to 0} Q = \lim_{p \to 0} \gamma \{ \delta K^{-p} + (1-\delta) L^{-p} \}^{-1/p}$$

$$= \frac{\gamma}{\{ \frac{\delta}{K^p} + \frac{(1-\delta)}{L^p} \}^{1/p}} = \frac{\gamma L}{\{ \delta (\frac{L}{K})^p + (1-\delta) \}^{1/p}} \tag{97}$$

olmazken payda 1^{∞} şeklindeki belirsizlik halini alır. Payda yerine R yazıldığında lnR (98), p sıfıra yaklaşırken $0 \div 0$ sınıfının belirsizlik şeklidir. l' Hopital kuralından yararlanılırsa, (99) daki sonuca

$$\ln R = \frac{\ln \{ \delta (\frac{L}{K})^{p} + (1-\delta) \}}{p} \tag{98}$$

$$\lim_{p \to 0} \ln R = \lim_{p \to 0} \frac{\delta e^{p/n(L/K)} \ln(\frac{L}{K})}{\{ \delta(\frac{L}{K})^{p} + (1-\delta) \}} = \delta \ln (\frac{L}{K}) \tag{99}$$

$$\lim_{p \to 0} R = (\frac{L}{K})^{\delta}$$

varılır. Dolayısıyla da p sıfıra yaklaşırken lim Q ün eşiti de (100) de görüldüğü üzere bulunur. Görülür ki, eşitin en sağındaki ifade Cobb-Douglas fonksiyonunun ifadesidir. Fonksiyonun şimdi de p sonsuza yaklaşırken limiti düşünülmelidir. Fonksiyonun limiti iki durum için alınmalıdır. Kapitalin miktarı işgücününkinden küçükse, limitin değeri γK olarak bulunur. (101). Çünkü kapitalin miktarı işgücününkinden küçük olduğunda $(K/L)^{p}$ sıfıra, p sonsuza yaklaşır ve $\delta^{1/p}$ bire eşittir. Şayet işgücünün miktarı kapitalinkinden küçükse, bu defa benzer yolda limitin değeri γL olarak bulunur. Her iki limitin değeri de verilen koşullarda geçerli olduğundan (102) deki

$$\lim Q = \frac{\gamma L}{(\frac{L}{K})^{\delta}} = \gamma L L^{-\gamma} K = \gamma K^{\delta} L^{1-\delta} \tag{100}$$

$$\lim_{p\to\infty} Q = \lim_{p\to\infty} \frac{\gamma}{\left\{ \frac{\delta}{K^p} + \frac{(1-\delta)}{L^p} \right\}^{1/p}}$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{\gamma K}{\left\{ \delta + (1-\delta) \left(\frac{K}{L}\right)^p \right\}^{1/p}} = \gamma K \quad (101)$$

eşitlik elde edilir. Sağ yanı çok özel bir hali olmakla beraber gene

$$\lim Q = \gamma \min (K, L) \quad (102)$$

de Leontief fonksiyonudur. Leontief fonksiyonun genel şekli, CES fonksiyonu (103) görüldüğü gibi yazılırsa elde edilir. Limit analizi (104) deki sonucu verir. (γ/δ) yerine $1/\alpha$ ve $(\gamma/(1-\delta))$ yerine de $1/\beta$

$$Q = \gamma \{ \delta^p K^{-p} + (1-\delta) L^{-p} \}^{-1/p} \quad (103)$$

$$\lim Q = \gamma \min \left\{ \frac{K}{\delta} \frac{L}{1-\delta} \right\} \quad (104)$$

konulursa, kullanılan Leontief fonksiyonun ifade şekli elde edilir.

$$\lim_{p\to\infty} Q = \min \left\{ \frac{K}{\alpha}, \frac{L}{\beta} \right\}$$

Gerek Cob-Douglas ve gerekse CES üretim fonksiyonları ölçeğe göre verimlilik parametresini kapsayacak şekilde de bulunabilirler.[20] Fonksiyonların matematiksel şekilleri gerek doğrusal ve gerekse doğrusal olmasınlar yaklaşık olarak aynıdır. Doğrusal olanın OCES, olmayanın MCES olarak adlandırıldığına rastlanır.[21]

---

20 M. Brown, **On the Theory and Measurement of Technolojical Change,** 1.B., Cambridge, Cambridge University Press, 1968, s. 196

21 C.E. Ferguson, «Substitutions, Technical Progress, and Returns to Seale», **American Economic Review,** Papers and Proceedings, C. LV, (1965), s. 297