BİREYSEL TERCİHLERİN STOKASTİK OLMASI HALİNDE ÇİFTLİ MAMUL KARŞILAŞTIRMA TESTLERİ

B. WIERENGA*

(Çev. Ass. Necmi GÜRSAKAL)

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, bireylerin tercihlerinin olasılık dağılımları iki sonuç üzerinde toplandığı ve her bireysel tercih testi sonucunun, tesadüfî 0 - 1 değişkeni olduğu durumlarda çiftli mamul karşılaş tırma testlerini (Paired comparison tests) inceliyeceğiz.

Önce, her bireyin her zaman aynı tercihi yapması gerektiğini savunan deterministik yaklaşıma karşı kullanılacak, olasılığa dayanan bir tercihler kavramının, deneysel sonuçlarda elde edildiği gibi gerçeği yansıttığını göstereceğiz. Daha sonra, yalnızca seçeneklerden birini tercih edenlerin ana kütledeki oranını bilmektense, tercih dağılımı hakkında daha fazla bilgi edinmenin üstünlüklerini araştıracağız.

Görülecektir ki: Ana kütledeki tercih dağılımı için bir beta dağılımı varsayımı yapıldığında, dağılımın parametreleri bir çiftli mamul karşılaştırma testinin genişletilmesi yoluyla tahmin edilebilir.

(*) B. Wierenga, «Paired Comparison Product Testing When Individual Preferences are Stochastic, Applied Statistics, Vol 23, No. 3, 1974, s. 384 - 396.

Bu yolda yapılması gerekli işlemler, elde edilen veriler kullanılarak gösterilmiştir.

2. ÇİFTLİ MAMUL KARŞILAŞTIRMA TESTLERİ

Bir çiftli mamul karşılaştırma testinde, iki mamul (Bu çalışına boyunca iki mamul A ve B olarak gösterilecektir.) tesadüfî olarak seçilmiş bireylere sırayla gösterilir. Önyargıları önlemek için, mamullerin özellikleri hakkında (örneğin, markaları) hiçbir bilgi verilmez. Her bireyin, iki seçeneği de tadarak veya koklayarak denemelerinden sonra, iki mamulden hangisini tercih ettikleri sorulur. Mamullerin bireylere sunulma sırası cevapları etkiliyebileceğinden, bu sıra test boyunca değiştirilir.

Eğer iki mamul arasında nötr bir tercihe izin verilmiyorsa (zorunlu tercih), o zaman her birey için A ve B gibi iki olası cevap sözkonusudur. Eğer «tercih yapılmadı cevabı kabul ediliyorsa, o zaman A, B ve N (nötr) gibi üç olası sonuç vardır. Biz ikinci durumdaki üç sonucuda şu iki olasılıkla özetliyebiliriz: A ve $\bar{A}$. $\bar{A}$, B veya N nin seçildiğini göstermektedir. Açıktır ki, üç sonucu iki olasılıkla (A ve $\bar{A}$) özetlediğimiz durumda testin sonucu olarak A yı tercih edenlerin sayısı, birey yalnızca A tercihi ile karşı karşıya bırakılsaydı elde edilecek A yı tercih edenlerin sayısından farklı olacaktır. Nötr tercihin etkisi, pazarlama araştırmalarının önemli bir sorunudur.

Çalışmamızda her birey A veya $\bar{A}$ tercihi ile karşı karşıya bırakılmıştır. Seçeneklerden birine veya diğerine A adının verilmesi birşeyi değiştirmez. Zorunlu bir tercih testinde $\bar{A}$ ile B aynı şeydir.

Bu tür testlerin amacı, iki mamul için, mamul testindeki bireylerin oluşturduğu örnek temelinde kütledeki tercihler hakkında sonuçlar çıkarmaktır. Kütle, belirli bir mamule göre ilgilendiğimiz bir hedef kütledir ve bireyler bu kütleden seçilmelidir.

Çiftli mamul karşılaştırma testlerinde mamuller, farklı boyutlarda yargılanabilir. Birey mamulleri farklı özelliklerine göre gözönüne alabilir. Bu özellikler: Şekil, paket renk, koku, tat ve benzerleri olabilir. Test anında oluşan psikolojik koşullar bile tercihte etkili olabilir. Eğer bir mamul yalnız bir boyutta yargılanıyor ve birey iki mamulden birisi için göresel tercihini kullanıyorsa, her seçeneğin farklı örnekler (birey grupları) tarafından yargılanması ve derecelendirilmesi mümkündür. Sonuçta bu derecelemeden göresel tercihler ortaya çıkarılabilir. Yargılamaların çok boyutlu olduğu zaman ise, mamullerin farklı örnekler tarafından incelenmesi yaklaşımı bizi çeşitli güçlüklerle karşı karşıya bırakır. Bireyden mamulün farklı özellikleri hakkında fikirlerini öğrenmek isteyebiliriz, fakat hangi özelliklerin teste alınacağı çoğu zaman açık değildir. Farklı özelliklerin göresel ağırlıklarını belirlemek de güç olabilir. Diğer bir yöntem ise, bireye mamul hakkındaki genel değerlendirmesini sormak olabilir. O zamanda bireyin dikkatini belli bir özelliğe odaklıyarak tercih yapması veya önceden bildiği bir mamulle karşılaştırma yaparak tercih yapması ayrı bir sorun yaratır. Bizim ele aldığımız durumda, yargılamanın yapılacağı tercih temeli bilinmiyordu. ve farklı bireyler farklı tercih temelleri uygulayabilirlerdi. Bu yüzden çok boyutlu yargılamaların yapıldığı durumlarda, çiftli mamul karşılaştırma testleri mamullerin birbirleriyle dolaysız (1) olarak karşılaştırıldığı testler olarak sık sık kullanılmaktadır.

3 — DETERMİNİSTİK YAKLAŞIMA KARŞI STOKASTİK YAKLAŞIM

Mamul testi bitirildikten sonra yapılan herzamanki işlem A yı tercih eden bireylerin oranını bulmaktır. Ana kütlede A yı tercih edenlerin **«gerçek»** oranı P_A olsun. Her birey P_A paremetreli bir Bernoulli dağılımından bir çekiliş olarak düşünülebilir. O zaman, bir mamul testinde n örnek hacmıyla A yı tercih edenlerin sayısı, p ve n parametreli bir binomial tesadüfi değişkendir. Çünkü, ana kütlenin yalnızca A veya $\bar{A}$ ı seçme olasılıkları olan kişilerden oluştuğunu varsaydık ki bu da deterministik bir yaklaşım olarak adlandırılabilir.

Genel olarak bireye gösterilen iki seçeneğin uyardığı sonuçlar tesadüfi değişkenlerdir ve karşılaştırmaların sonuçları sabit değil, stokastiktir. (Bzk Thurston, David'in aldığı şekliyle, 1963, bölüm 1). Genellikle, bireyin A yı tercih etme olasılığı 0 veya 1 değil fakat bu iki değerin arasındadır. Eğer biz tercih durumunu böyle yorumlarsak o zaman stokastik yaklaşımı izlemiş oluruz.

---

(1) Yazar burada «dolaysız» kelimesiyle, karşılaştırmanın bireyin önceden bildiği mamullere göre (dolaylı olarak) yapılmadığını anlatmak istiyor.

Aynı zamanda Day'de (1965), bir çiftli mamul karşılaştırma testinde bireyin A yı tercih olasılığı 0,5 den büyükse bireyin tercihinin A ya olduğunu söyliyerek stokastik tercih kavramını önermiştir.

4 — STOKASTİK YAKLAŞIMIN DENEYSEL OLARAK DOĞRULANMASI :

Mamul testlerinde bireylerin, aynı türden iki mamul arasında birden fazla sayıda tercih yapmaları istendiğinde, tutarlı davranıp davranmadıklarını bilmekte yarar vardır. Deterministik açıdan tercihler hiç değişmez; stokastik açıdan ise belirli sayıda değişiklikler olasıdır.

Elimizde SOCMAR N.V., tarafından sağlanan 12 mamül testinin sonuçları var. Teste alınan mamuller şunlardır:

Test 1 — 3: Jöle

Test 4: Bira

Test 5 — 7: Margarin

Test 8 —10: Ekmek

Test 10 —12: Bisküi

Bu 12 testin herbirinde A ve B gibi iki seçenek sunuldu ve bireyler şu üç olasılıktan birini tercih etmekte serbest bırakıldı: A tercihi, B tercihi, tercih yapılmadı (N).

Her birey aynı teste, zaman aralığı saatlerden günlere kadar değişen bir aralıkta, iki defa alındı. Mamul sunulma sırası test boyunca değişmedi ve bireylere ikinci testteki seçeneklerin birinci testteki seçeneklerle aynı olduğu yani aynı mamullerin sunulduğu söylenmedi. Tercih değişikliklerine göre test sonuçları Tablo 1 de verildi.

Tablo I

İki farklı tercih değişikliği tanımı için 12 mamul testinde tercih değiştirenlerin oranları

Test Sayısı	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
(1) Üç kategoriyle (A, B, N) tercih değiştirenlerin oranı	0.52	0.39	0.43	0.58	0.37	0.38	0.44	0.47	0.32	0.33	0.29	0.42
(2) İki kategoriyle (A, B) tercih değiştirenlerin oranı	0.30	0.28	0.25	0.27	0.20	0.20	0.30	0.31	0.17	0.20	0.18	0.25
(3) Örnek hacmi	100	101	100	161	100	160	160	100	100	100	100	100

Tercih değişikliklerini iki şekilde tanımlayabiliriz: 1) Üç olası cevap olan A,B ve N yi ayrı tercih kategorileri olarak düşünelim. Eğer birey aynı mamulle ilgili iki testte farklı tercih kategorilerini seçiyorsa bu birey tercihini değiştirmiştir diyebiliriz. Tablo 1 in birinci sırasında bu tanıma göre tercih değişikliği yapanların sayıları her testteki kişilerin toplam sayısına oranlanarak verilmiştir. Görüldüğü gibi tercih değiştirme oranı 0.29 ile 0.58 arasında değişmektedir. Tercih değiştirme oranları serisinin medyan değeri 0.41 dir. Bireylerin yaklaşık olarak % 40 ı tercih değişikliği yapmıştır. Bu veriler, tercih değişikliğinin oldukça önemli olduğunu göstermektedir.

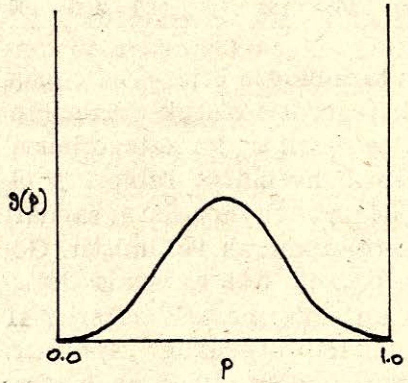
2) Tercih değiştirmede A dan N ye veya B den N ye (veya ters yönde) olan değişmelerden, A dan B ye (veya ters yönde) olan değişmelerin daha önemsiz olduğunu varsayabiliriz. Böylece tercih değişikliğinin anlamını A dan B ye veya B den A ya olarak kısıtlamış oluruz. Böyle bir tanımla tercih değişikliği yapanların sayısı Tablo 1 in ikinci sırasında verilmiştir. Bu durumda tercih değişikliği yapanların oranları 0.17 ve 0.31 arasında değişmektedir. Bu oldukça sınırlı tercih değişikliği tanımıyla, tercih değiştirme yine de önemli bir yer tutmaktadır. Tablo 1 de görüldüğü gibi bireysel tercihlerin stokastik olarak yorumlanması deterministik yorumdan daha tutarlıdır.

5 — TERCİH DAĞILIMI

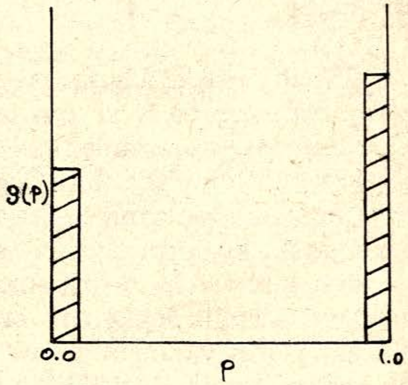
Mamül testinde kütledeki her bireyin A seçeenğini tercih etme olasılığına p diyelim:

p = A ve B seçenekleriyle yapılan çiftli mamül karşılaştırma testinde A nın tercih edilmesi olasılığı olsun. (1)

Varsayalım ki, farklı bireyler farklı p lere sahip olsunlar ve p ler bütün kütle içinde belirli bir şekilde dağılmış olsun. p nin olasılık yoğunluk fonksiyonu p = g(p) olsun. Örneğin, g(p) şekil 1 deki gibi olabilir (çünkü p yalnızca (O,1 aralığında değerler almaktadır.



Şekil 1. p nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun alabileceği bir şekil.



Şekil 2. Özel bir durum: Olasılık yoğunlukları uçlarda toplanmış.

Olasılık yoğunlukları tamamiyle O ve 1 uçlarına toplandığı zaman (Şekil 2) özel bir durum ortaya çıkmakta ve bu bölüm 3 teki deerministik yoruma uymaktadır. Bu yüztden de bu durum, stokastik yaklaşımın özel bir durumu diye nitelenebilir.

Şunu da belirtmeliyiz ki eğer durum şöyle olursa mamul testi sonuçları arasında bir fark olmaz:

a) p anakütle içinde g (p) yoğunluk fonksiyonuna göre μ_1 beklenen değeriyle dağılmış, veya

b) anakütle yalnızca A ve $\bar{A}$ arasında tercih yapan kesin kararlı kişilerden oluşuyorsa ve A yı tercih edenlerin oranı $m\mu_1$ ise,

(a) durumunda tesadüfi olarak seçilmiş bir bireyin A yı tercih etme olasılığı,

$$\int_0^1 p\, g\,(p)\, dp = 1\,, \tag{2}$$

(b) durumunda ise A yı tercih eden birini seçme olasılığı μ_1 dir. Çünkü her sonucun olasılık dağılımı iki durum içinde aynıdır.

Bu noktadan hareketle, bir mamülün üreticisi veya satıcısı için mamule olan tercihin ne yapıda olduğu, yani kaç kişinin onun mamülüne kuvvetli bir tercihle yöneldiği konusu önemlidir. Diğer bir deyişle, mamul testinden elde edilen beklenen değerin tahminden başka p nin dağılımı hakkında daha fazla bilgi sahibi olmak bize birçok yararlar sağlayacaktır.

6 — BETA DAĞILIMININ KULLANIMI

p nin deneysel dağılımı olan g(p) ile çalışabilmemiz için bu dağılıma uygun özel bir şekil varsaymamız gerekir. Tercih durumu çeşitli şekilleri aldığı için biz, uygulamada büyük esnekliğe sahip beta dağılımını öneriyoruz. Beta dağılımının a ve b $(a, b > 0)$ gibi iki parametresi vardır. p nin a ve b parametreli bir beta dağılımına göre dağıldığını şöyle yazabiliriz:

$$p \simeq \beta\,(a,b) \tag{3}$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu U şeklini $(0 < a,b \leq 1)$, ters U şeklini $(a, b > 1)$, J şeklini $(0 < b \leq 1 < a)$ ve rektangüler şekli $(a=b=1)$ alabilir (bak Day, 1965, s. 150 - 151). Beta dağılımının diğer üstünlükleri ise şunlardır:

— p yalnızca 0 dan 1 e kadar değerleri alabilir.

— Momentler için basit ifadeler sağlar.

Pazarlamayla ilgili olarak, bir kütlenin tercih davranışlarının modellenmesinde beta dağılımını ilk kullanan biz değiliz. Bazı marka tercihi modellerinde, kütlenin belirli bir markayı seçme olasılığını tanımlamak için beta dağılımı daha önce de kullanılmıştı. Örneğin: Howard (1968) «Dynamic Inference Model» de, Aaker «New Trier Model» de, Massy, Montgomery ve Morrison (1970) beta dağılımını kullanmış ve marka tercih süreçlerinde kütlenin heterojenitesini tanımlıyan bu dağılımın aldığı çeşitli şekilleri tartışmışlardır. Bu çalışmalarda, tercih durumu unimodal olmadığında beta dağılımına uyumun daha az olduğu belirlenmişti.

a ve b parametreli beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunu şöyle yazabiliriz :

$$b(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \qquad (0 \leq x \leq 1) \qquad (4)$$

Burada B(a,b) a ve b paremetreli bir beta fonksiyonudur ve,

$$\mu_i = Ex^i \qquad (i = 1,2,\ldots\ldots) \qquad (5)$$

dir. Momentler,

$$\mu_1 = \frac{a}{a+b}, \qquad (6)$$

$$\mu_2 = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}, \qquad (7)$$

$$\mu_{i+1} = \mu_i \left(\frac{a+i}{a+b+i} \right) \qquad (i = 1,2,\ldots) \qquad (8)$$

Şimdi beta dağılımını kullanarak, sayısal bir örnek ile bir mamul testinde beklenen değer μ_1 den başka p nin dağılımı hakkında bilgi sahibi olmanın önemini gösterelim.

Şu üç durumu düşünelim (her üç durumda da A ve B arasında tercih yapılsın, A yı tercih olasılığı p olsun ve p kütlede beta dağılımına göre dağılsın.) :

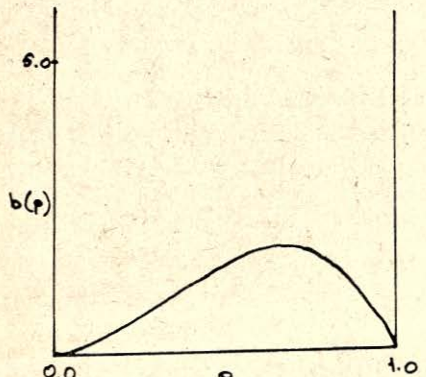
Durum I $\quad p \simeq \beta$ (28.2, 18.8),

Durum II $\quad p \simeq \beta$ (3.0, 2.0),

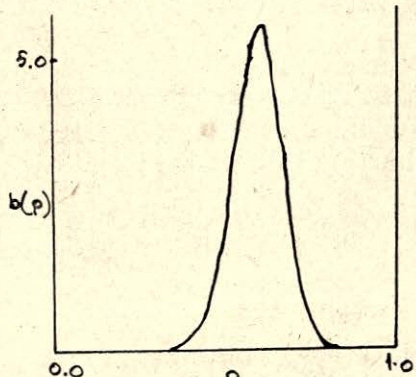
Durum III $\quad p \simeq \beta$ (0.4286, 0.2857).

Bu durumların hepsinde de $E_p = \mu_1 = a/(a+b) = 0.60$ dır, diğer bir deyişle her üç durumda da A yı tercih edenlerin beklenen değeri 0.60 dır. Fakat olasılık yoğunluk fonksiyonlarının çizildiği

3-5 şekillerinde görüldüğü gibi tercih durumları birbirine benzememektedir. Durum I de hemen hemen bütün bireyler 0.50 nin az üzerinde bir olasılıkla A yı tercih ediyorlar; Durum II de bazı bireylerin A yı tercih etme olasılıkları yüksek; Durum III de ise kütlenin büyük bir kısmı A yı kuvvetle tercih eden veya kuvvetle tercih etmeyenlerden oluşmaktadır. Örneğin : A mamulünün satıcısı için, B rekabet eden marka olduğunda, pazarlama açısından bu farklılıklar önemlidir. Durum I in, A yı tercih edenlerin ufak bir değişiklikle A yı tercih etmiyeceklerinden oldukça tehlikeli olduğu söylenebilir. Buna karşı, durum III de A mamulü kütlenin büyük bir kısmını sıkı bir şekilde kendine bağlamıştır. Bu da oldukça iyi bir durum demektir.

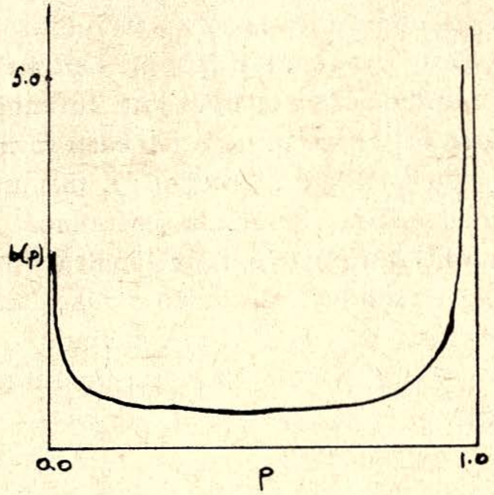


Şekil 3 Durum I: p $\simeq$ β (28.2, 18.8)



Şekil 4. Durum II: p $\simeq$ β (3.0, 2.0)

Bu durum diğer bir şekilde açıklanabilir: Bireyin eğer A' yı tercih etme olasılığı 0.5 den büyükse net-Atercihcisi, 0.75 den büyükse kuvvetle A-tercihcisi ve p $\leq$ 0.25 ise kuvvetle $\bar{A}$ - tercihcisi diye tanımlayabiliriz (şüphesiz bu sınırlar biraz rastgeledir). Şimdi her durumdaki net A - tercihcilerinin, kuvvetle A - tercihcilerinin ve kuvvetle $\bar{A}$ tercihcilerinin kütle içindeki yüzdelerini hesaplıya-



Şekil 5. Durum III : p $\simeq \beta$ (0.4286, 0.2857)

biliriz. Üç durum için sonuçlar Tablo 2 de verilmiştir. Yüzdeler tamamlanmamış beta fonksiyonunun, serilerinin açılımı ile hesaplanmıştır. (Abramowitz and Stegun, 1963, eşitlik 26.5.4).

Tablo 2

Ep = 0.60 ile her üç durumda kütledeki farklı tercihci kategorilerinin yüzdeleri

	Net A-tercihcileri	*Kuvvetle A-tercihcileri*	*Kuvvetle $\bar{A}$-tercihcileri*
	(%)	*(%)*	*(%)*
Durum I	92	1	0
Durum II	69	26	5
Durum III	61	47	27

7. DENEYSEL BİR MAMUL TESTİNDE PARAMETRELERİN TAHMİNİ

Önceki bölümde üç varsayımlı durum için beta dağılımının kullanımını gösterdik. Şimdi deneysel verilerden beta dağılımının parametrelerini tahmin etmek istiyoruz ve bu amaç için aşağıdaki çiftli mamul karşılaştırma testinin aynı koşullarda tekrarlanmasını öneriyoruz.

A ve B mamullerini birbirlerine karşı test etmek istediğimizi varsayalım. Her birey mamul testine iki kere alınsın ve iki testte de seçenekler aynı olsun. Şartlanmayı önlemek için testler arasında zaman olmalı, sunulma sırası değiştirilmeli ve bireyler ikinci testteki seçeneklerin ilk testtekilerin aynı olduğunu bilmemelidir. Son koşulun sağlanması için teste alınan mamullerin çarpıcı özellikleri olmamalıdır. Bütün bireyler teste alındıktan sonra iki şey hesaplanır:

f_1 = Bir defa A′ yı bir defa $\bar{A}$ ı tercih etmiş bireylerin toplam birey sayısına oranı,

f_2 = Her iki defada da A′ yı tercih etmiş bireylerin toplam birey sayısına oranı.

f_2 ye göre bireyin p olasılığıyla her iki defada da A′ yı seçme olasılığı p^2 dir ve A′ yı iki defa tercih edenlerin bütün kütleye oranının beklenen değeri ise şöyle bulunabilir :

$$\int_0^1 p^2\, b(p)\, dp = \mu_2, \tag{9}$$

μ_2 beta dağılımının ikinci momenti olur ve f_2, μ_2 nin yansız bir tahminidir. Aynı şekilde f_1 için, bir bireyin p olasılığı ile bir defa A yı bir defa $\bar{A}$ ı seçme olasılığı $2p(1 - p)$ dir. Bu yüzden f_1, $2(\mu_1 - \mu_2)$ nin yansız bir tahminidir.

f_1 ve f_2 bilindiğinde beta dağılımının ilk iki momentleri

$$f_1 = 2\,(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) \tag{10}$$

den elde edilir ve

$$f_2 = \hat{\mu}_2, \tag{11}$$

$\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ den beta dağılımının parametre tahminleri bulunabilir. Bu amaç için (6) ve (7) diğer bir şekilde yazılır.

$\hat{a}$ ve $\hat{b}$ tahminleri,

$$\hat{a} = \frac{\hat{\mu}_1^2 - \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_1^2} \tag{12}$$

$$\hat{b} = \frac{\hat{a}(1 - \hat{\mu}_1)}{\hat{\mu}_1} \tag{13}$$

a ve b nin tahmininden sonra yoğunluk fonksiyonu b(p), kütle üzerindeki tercih dağılımını göstermek üzere çizilir. Yorumlamayı kolaylaştırmak için Tablo 2 deki şekilde bir sunma kullanışlıdır.

Şüphesiz $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ beta dağılımı varsayımına bağlı değillerdir, kendi değerleri kendi içlerinde ilginçtir çünkü p nin varyansı onlardan türetilebilir.

8. TAHMİNLERDEKİ İSABET

Önceki bölümde tartışılan tahminlerin isabetini bilmek faydalıdır. Açıktır ki bu isabet f_1 ve f_2 nin varyanslarına ve aynı zamanda p nin dağılımına ve N örnek hacmine bağlıdır. f_1, f_2, $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$ nin varyansları, p nin beta dağılımı için doğru a ve b değerleri bilindiğinde hesaplanabilir. Bu bölümde bunu yapacağız. $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$, a ve b yi belirlediği için (12. ve 13. eşitlikler) $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ nin varyansları $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ nin isabeti için önemlidir, fakat var a ve var b nin dolaysız ifadeleri zordur.

S_i bir tesadüfi değişken olsun ve eğer i bireyi A′ yı tercih etme olasılığı p ile bir kere A′ yı bir kere de Ā ı tercih ediyorsa 1 değerini, diğer durumda 0 değerini alsın. O zaman s_i ve s_i^2 değerleri için şu olasılıklar vardır;

s_i	s_i^2	olasılık
1	1	2p(1—p)
0	0	1—2p(1—p)

Böylece

$$E\ s_i = E\ s_i^2 = 2p(1-p)$$

ve

$$\text{var}\ s_i = E\ s_i^2 - (E\ s_i)^2 = 2p - 6p^2 + 8p^3 - 4p^4$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu b(p) ile beta dağılımından çekilen bir i bireyininin A' yı tercih etme olasılığını daha genel olarak düşünürsek,

$$\text{var}\ s_i = \int_0^1 (2p - 6p^2 + 8p^3 - 4p^4)\ bp\ dp$$

$$= 2\mu_1 - 6\mu_2 + 8\mu_3 - 4\mu_4$$

s_i nin tanıma dayanarak:

$$f_1 = (\Sigma\ s_i)/N$$

ve farklı bireylerin tercihleri birbirlerinden bağımsız olarak oluştuğu için:

$$\text{var}\ f_1 = (\text{var}\ s_i)/N = (2\mu_1 - 6\mu_2 + 8\mu_3 - 4\mu_4)/N \qquad (14)$$

t_i tesadüfi değişkenini şöyle tanımlayabiliriz. Eğer teste alınan, b(p) olasılık yoğunluk fonksiyonu ile beta dağılımından çekilme olasılığı p olan bir birey A' yı iki kere diğer malı 0 kere tercih ederse t_i tesadüfi değişkeni 1 değerini alır.

Önceden yaptığımız gibi şöyle türetebiliriz :

$$\text{var}\ t_i = \mu_2 - \mu_4$$

Şimdi

$$f_2 = (\Sigma\ t_i)/N$$

buradan

$$\text{var}\ f_2 = (\mu_2 - \mu_4)/N \qquad (15)$$

ve v_i yi şöyle tanımlıyalım

$$v_i = s_i + t_i \qquad (16)$$

böylece eğer i bireyi $\bar{A}$ yı iki kere diğerlerini 1 kere tercih ederse v_i sıfır değerini alır. v_i ve v_i^2 nin olası değerleri için :

v_i	v_i^2	Olasılık
1	1	$1-(1-p)^2 = 2p-p^2$
0	0	$(1-p)^2$

Böylece

$$E\,v_i = E\,v_i^2 = 2p - p^2$$

ve

$$\text{var}\ v_i = 2\mu_1 - 5\mu_2 + 4\mu_3 - \mu_4$$

tanım olarak,

$$f_{12} = (\Sigma\, v_i/N)$$

$$\text{var}\ f_{12} = (2\mu_1 - 5\mu_2 + 4\mu_3 - \mu_4)/N \qquad (17)$$

(16) dan ve f_{12} nin tanımı dan :

$$f_{12} = f_1 + f_2$$

$$\text{cov}\ (f_1, f_2) = (\text{var}\ f_{12} - \text{var}\ f_1 - \text{var}\ f_2)/2 \qquad (18)$$

Şimdi f_1 ve f_2 nin varyanslarından ve cov (f_1, f_2) den $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ nin varyansları türetilebilir. (10) ve (11) den

$$\hat{\mu}_1 = f_2 + \frac{1}{2} f_1,$$

$$\hat{\mu}_2 = \mu_2\,;$$

$$\text{var}\ \hat{\mu}_1 = \text{var}\ f_2 + \frac{1}{4}\ \text{var}\ f_1 + \text{cov}\ (f_1, f_2), \qquad (19)$$

$$\text{var}\ \hat{\mu}_2 = \text{var}\ f_2 \qquad (20)$$

a ve b parametreleri verilmiş bir beta dağılımı için $\mu_1\, \mu_2, \ldots$ momentleri (6) - (8) eşitlikleri yardımıyla bulunabilir. Verilen bir N örnek hacmi için: var f_1, var f_2 ve cov (f_1, f_2) (14), (15), (17) ve (18) eşitliklerinden bulunur. Bundan sonra (19) ve (20) vasıtasıyla var μ_1 ve var μ_2 elde edilebilir.

Tahmin edilen momentlerin isabeti hakkında bir fikir vermek için, ve b nin çeşitli kombinasyonları ve 100 örnek hacmi için yukarıda anlatıldığı şekilde hesaplanan μ_1 ve μ_2 lerin standart sapmalarını tablo 3 de verdik. 100 X örnek hacmi için standart sapma 100 örnek hacmi için standart sapma değerinin $1/\sqrt{X}$ kadarıdır. Şüphesiz deneysel bir mamul testinde a ve b nin gerçek değerleri bilinmez. Bu yüzden μ_1 ve μ_2 nin kesin standart sapmalarını ortaya çıkarmak için Tablo 3 ü kullanamayız ama a ve b tahmini parametreleriyle Tablo 3 ü kullanarak standart sapmaların yaklaşık değerlerini bulabiliriz. Bundan başka, Tablo 3 teki sayılar standart sapmaların büyüklük sıralarını bilmek açısından faydalıdır. Örneğin N = 100 için hemen bütün standart sapmalar 0.01 ve 0.05 arasındadırki bu da a ve b bilinmediğinde oldukça yararlı genel bir bilgidir.

9. BETA DAĞILIMINA UYUMUN DEĞERLENDİRİLMESİ

Belirli bir duruma beta dağılımının uyumu hakkında şüpheler olduğu zaman test, her bireye tercihi üç defa sorularak genişletilebilir; o zaman beta dağılımının üçüncü nomentini tahmin etmek mümkündür. A' yı üç kere tercih eden bireylerin beklenen oranı

$$\int_0^1 p^3 b(p)\, dp = \mu_3 , \tag{21}$$

A' yı üç kere tercih eden bireylerin oranı için μ_3 tahminine sahibiz ve bunu $\hat{\mu}_3$ ile gösterelim. Bu üçüncü moment ile beta dağılımına uyumu kontrol edebiliriz: $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ nin yardımıyla a ve b yi hesaplar (8) ile de üçüncü momenti hesaplarız. Burada hesaplanan $\hat{\mu}_3$ değerini μ_3^* diye gösterebiliriz, bu değer μ_3 ile karşılaştırılabilir. Eğer beta dağılımına uyum tatminkârsa bu değerler arasındaki fark azdır. Farkın büyüklüğünün önemi bu fark $\hat{\mu}_3$ ün standart sapmasıyla karşılaştırılarak elde edilebilir. Bölüm 8 de $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_2$ nin varyanslarını türetmek için izlenen yolun aynını kullanarak

$$\text{var}\ \hat{\mu}_3 = (\mu_3 - \mu_6)/N \tag{22}$$

bulunur. Deneysel bir durumda var μ_3 ün kesin değerini bilemeyiz. Çünki a ve b parametrelerinin gerçek değerlerini bilmiyoruz, ancak a ve b yi kullanarak var μ_3 için bir yaklaşım yapılabilir.

TABLO 3

Beta dağılımının parametreleri olan a ve b nin (N = 100) çeşitli değerleri için μ_1 ve μ_2 nin hesaplanmış standart sapmaları

a	*SS*	*0.1*	*0.5*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
0.1	μ_1	0.014	0.016	0.015	0.012	0.011	0.010	0.009	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007
	μ_2	0.019	0.019	0.015	0.011	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.004	0.003	0.003
0.5	μ_1	0.016	0.025	0.026	0.024	0.022	0.020	0.019	0.018	0.017	0.016	0.015	0.014
	μ_2	0.023	0.032	0.030	0.024	0.019	0.016	0.014	0.012	0.010	0.009	0.008	0.008
1	μ_1	0.015	0.026	0.029	0.029	0.027	0.026	0.024	0.023	0.022	0.021	0.020	0.020
	μ_2	0.022	0.036	0.037	0.032	0.027	0.023	0.020	0.018	0.016	0.014	0.013	0.012
2	μ_1	0.012	0.024	0.029	0.032	0.032	0.031	0.030	0.029	0.028	0.027	0.026	0.025
	μ_2	0.020	0.036	0.041	0.040	0.036	0.032	0.029	0.026	0.024	0.022	0.020	0.019
3	μ_1	0.011	0.022	0.027	0.032	0.033	0.033	0.032	0.032	0.031	0.030	0.029	0.029
	μ_2	0.018	0.035	0.041	0.043	0.041	0.038	0.035	0.032	0.030	0.028	0.026	0.024
4	μ_1	0.010	0.020	0.026	0.031	0.033	0.033	0.033	0.033	0.033	0.032	0.031	0.031
	μ_2	0.017	0.033	0.041	0.045	0.044	0.041	0.039	0.037	0.034	0.032	0.030	0.028
5	μ_1	0.009	0.019	0.024	0.030	0.032	0.033	0.034	0.034	0.034	0.033	0.033	0.032
	μ_2	0.016	0.032	0.040	0.045	0.045	0.044	0.042	0.040	0.038	0.036	0.034	0.032
6	μ_1	0.008	0.018	0.023	0.029	0.032	0.033	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.033
	μ_2	0.015	0.031	0.039	0.045	0.046	0.045	0.044	0.042	0.040	0.038	0.037	0.035
7	μ_1	0.008	0.017	0.022	0.028	0.031	0.033	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034
	μ_2	0.014	0.029	0.038	0.045	0.046	0.046	0.045	0.044	0.042	0.041	0.039	0.037
8	μ_1	0.007	0.016	0.021	0.027	0.030	0.032	0.033	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034
	μ_2	0.014	0.028	0.037	0.044	0.047	0.047	0.046	0.045	0.044	0.042	0.041	0.039
9	μ_1	0.007	0.015	0.020	0.026	0.029	0.031	0.033	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034
	μ_2	0.013	0.027	0.036	0.043	0.046	0.047	0.047	0.046	0.045	0.044	0.043	0.041
10	μ_1	0.007	0.014	0.020	0.025	0.029	0.031	0.032	0.033	0.034	0.034	0.034	0.035
	μ_2	0.013	0.026	0.035	0.043	0.046	0.047	0.047	0.047	0.046	0.045	0.044	0.043

10. VERİLERE UYGULAMA

Bölüm 5 de tartışılan 12 mamul testi beta dağılımı yaklaşımının uygulanması için bize deneysel veri temin ederler.

Her teste iki yönden bakabiliriz :

a) A diye adlandırdığımız seçeneği inceler ve cevapları A ve $\bar{A}$ diye ikiye ayırırız. Böyle yapmakla A' yı tercih etme olasılığının dağılımını göz önüne almış oluruz.

b) B diye adlandırdığımız seçeneği inceler ve cevapları B ve $\bar{B}$ diye ikiye ayırır B' yi tercih edenlerin olasılığını inceleriz.

Genellikle testi yapanlar mamullerden biriyle ilgilidirler. (Örneğin, kendi ürettikleri veya sattıkları ile) ve bu seçenek için tercih dağılımının bulunması onlara yeterlidir. Tablo 4 iki yaklaşımında sonuçlarını vermektedir.

Her durum için tahmin edilen μ_1 ve μ_2 momentleri, a ve b parametreleri, net - X tercihleri, kuvvetle X - tercihleri ve kuvvetle $\bar{X}$ tercihleri olan tüketicilerin yüzdeleri verilmiştir. Burada X ilişkili seçeneği belirtir, son üç sayı Bölüm 6 daki gibi hesaplanmıştır ve tercih dağılımı hakkında fikir verirler.

Tablo 4 deki $\hat{a}$ ve $\hat{b}$ değerlerinin incelenmesiyle hemen bütün beta dağılımlarının; U şeklinde, ters U şeklinde, J şeklinde, ters J şeklinde bulunduğunu görürüz. Pazarlama politikası açısından en ilginç sayılar kütledeki farklı tercihci kategorilerinin yüzdelerini gösterenlerdir. Bu türden bir bilginin çözümlemede ne kadar önemli olduğu açıktır. Örneğin 4B ve 7B testlerinin sonuçlarında B' yi tercih edenlerin beklenen oranı 0.40 dır. Bununla birlikte tercih dağılımları oldukça farklıdır. İlk durumda B veya $\bar{B}$ için kuvvetli tercihi olan birkaç tüketici vardır, ikinci durumda ise bunların yüzdeleri oldukça büyüktür. Bu türden bilgiler pazarlama politikasını etkiliyecektir. Bireyler yalnızca iki defa teste alındıkları için üçüncü momentin yardımıyla beta dağılımının tercih dağılımına uyup uymadığının ölçüsünü bu verilerden elde edemeyiz.

TABLO 4 : 12 mamul testinin sonuçları

No.	Sabit Seçenek (X)	μ_1	μ_2	$\hat{a}$	$\hat{b}$	Net X-tercihcileri ($p \geq 0.50$) (%)	Kuvvetle X-tercihcileri ($p \geq 0.75$) (%)	Kuvvetle $\bar{X}$-tercihcileri ($p \leq 0.25$) (%)	Örnek hacmi
1	A	0.435	0.240	1.67	2.17	39	10	24	100
	B	0.415	0.200	3.21	4.53	31	3	17	100
2	A	0.337	0.178	0.82	1.62	27	8	45	101
	B	0.594	0.416	1.68	1.15	64	33	11	101
3	A	0.360	0.200	0.82	1.45	30	11	42	100
	B	0.460	0.280	1.21	1.42	44	17	26	100
4	A	0.360	0.155	2.90	5.14	20	1	27	161
	B	0.404	0.180	5.27	7.78	76	0	12	161
5	A	0.570	0.430	0.76	0.57	59	38	23	100
	B	0.295	0.150	0.68	1.62	22	7	53	100
6	A	0.544	0.394	0.83	0.70	56	33	24	160
	B	0.272	0.131	0.67	1.79	19	5	56	160
7	A	0.441	0.250	1.50	1.91	40	12	25	160
	B	0.400	0.219	1.23	1.85	34	10	32	160
8	A	0.305	0.120	2.09	4.77	13	1	42	100
	B	0.565	0.360	2.84	2.19	62	21	7	100
9	A	0.700	0.570	1.14	0.49	75	54	10	100
	B	0.205	0.090	0.49	1.191	12	3	68	100
10	A	0.645	0.500	1.11	0.61	69	46	13	100
	B	0.250	0.130	0.44	1.33	19	7	61	100
11	A	0.340	0.210	0.47	0.91	30	15	50	100
	B	0.375	0.270	0.030	0.51	36	23	50	100
12	A	0.315	0.130	1.89	4.12	16	1	41	100
	B	0.460	0.310	0.70	0.82	45	24	33	100

11. SONUÇ :

Bireysel tercihlerin olasılığa dayanan bir yorumu deneysel gerçekliği yansıtır. Durum bu olunca tercih yapısı hakkında derinlemesine bilgi sahibi olmak, kütledeki tercih dağılımının bilinmesiyle olur. Bu dağılıma beta dağılımı yoluyla yaklaşıldığında tercih dağılımı hakkındaki gerekli bilgi ikili mamul testinin tekrarlanması ile sağlanır.

TEŞEKKÜR

Yazar verileri sağladığından dolayı SOCMAR N.V. ye hesaplamalardaki yardımından dolayı MR. J. A. Bijkerk'e teşekkür eder.

KAYNAKLAR :

AAKER, D. A. (1971). The new trier stochasic model of brand choise, Manag. Sci., 17, 435 - 450. ABRAMOWITZ, M. A. and STEGUN, I. A. (eds). (1968). Handbook of Mathematical Functions. New York: Dover Publications.

DAVİD, H. A. (1963). The Method of Paired Comparisons. London: Griffin.

DAY, R. L. (1965). Systematic paired comparisons in pereference analysis, J. Marketing Res., 2, 406 - 412

HOWARD, R. A. (1968) Stochastic Models of Consumer Behaviour. In Application of the Sciences in Marketing Management (Bass et al., eds) New York: Wiley.

KENDALL, M. G. and STUARY, A. (1969). The Advanced Theory of Statistics. Vol. 1. London: Griffin.

MASSY. W. F., MONTGOMERY, D. B. and MORRİSON, D. G. (1970) Stochastic Mode's of Buying Behaviour. Ch. 3. Cambridge, Mass. M.I.T. Press.