PARAMETRİK DOĞRUSAL PROGRAMLAMANIN BİR ÜRÜNÜN SUNUM ve İSTEM EĞRİLERİNİN BELİRLENİŞİNDE KULLANILMASI

Dr. İsmail İLHAN

G İ R İ Ş

Eniyilenmiş sonuçlara ulaşmayı amaçlayan birçok programlama problеminde, çeşitli koşulların değişmez kalacağı varsayımından hareket edilmektedir. «Fakat, gerçekte koşullar değişkendir. ve ekonomi kuramı, genellikle bu değişen koşullara karşı, firmaların ve tüketicilerin tepkileri ile ilgilenir. Örneğin, sunum ve istem eğrileri, alıcıların ve satıcıların fiatlardaki değişikliklere karşı tepkilerini göstermektedir. Doğrusal programlama, (DP) fiatların sabit olduğu varsayımına bağlı olarak, miktar değişmelerinin eniyilenmiş çözüme etkilerini hesaplıyabilecek yöntemler sağlamaktadır (1).» Ancak, fiatların ya da benzer ögelerin değişmez varsayılmasının sonuçlar üzerinde yaratacağı olumsuz etki ihmal edilmeyecek ölçülerde olabilir. Bu istenmeyen etkileri azaltmak için programlama modellerinde değişmez varsayılan ögelerin deği-

---

(1) Daniel C. VANDERMEULEN; Linear Economic Theory, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1971 s. 78-79

şimine izin vermek, soruna önemli ölçüde bir çözüm getirmek anlamını taşımaktadır. Parametrik doğrusal programlama (PDP) sabit varsayılan bu ögelerin belli sınırlar içinde değişimine olanak sağlayan bir programlama tekniğidir (2). Bu makalenin amacı, PDP tekniğinin çok ürünlü firmalarda ürünler için sunum ve marjinal maliyet eğrileri, girdiler için ise marjinal gelir ve istem eğrileri çıkartılmasında nasıl kullanıldığının açıklanmasıdır.

1. BİR ÜRÜN İÇİN SUNUM EĞRİSİNİN ÇIKARTILMASI

1.1 Bir Ürün için Sunum Fonksiyonunun Genel Tanımı

Bir ürünün sunum miktarının fiziksel olarak, onun elde edilişinde kullanılan faktörlerin bir fonksiyonu şeklinde yazılabileceği bilinmektedir. Yani x malı üretiminde kullanılan faktörler $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ olarak belirlenmişse x in sunum fonksiyonu;

$$F = F(b_1, b_2, \ldots b_n) \tag{1.1}$$

şeklinde yazılabilir. Bir başka tanımla x malının üretim miktarı, kendi fiatının (P) ve üretiminde kullanılan faktörlerin fiatının $(q_1, q_2, \ldots q_m)$ bir fonksiyonudur. Bu tanıma uygun olarak her bir üretim faktörü;

$$\begin{aligned} b_1 &= g_1(P, q_1, q_2 \ldots q_m) \\ b_2 &= g_2(P, q_1, q_2 \ldots q_m) \\ &\cdot \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdots \; \cdot \\ b_n &= g_n(P, q_1, q_2, \ldots q_m) \end{aligned} \tag{1.2}$$

şeklinde yazılıp (1.1) fonksiyonunda yerine konulursa x malının sunum fonksiyonu;

$$\begin{aligned} F &= F\, g_1(P, q_1, \ldots, q_m),\; g_2(P, q_1, \ldots, q_m) \;\ldots\; g_n(P, q_1 \ldots q_m) \\ &= h(P, q_1, q_2 \ldots, q_m) \end{aligned} \tag{1.3}$$

(2) Van de PANNE; Methods For Linear and Quadratic Prog. North Holl. 1975. s. 17
Saul I. GASS. Linear programming, Mc Graw-Hill Book Company New-York 1969. S. 135
Van de PANNE; Linear programming and Related Techniques, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971. s. 104

olarak fiatlara bağlı bir biçimde yeniden tanımlanmış olur. Böyle bir fonksiyon, her fiat seviyesinde söz konusu ürünün sunum eğrisi ile ilgili tüm bilgileri içerir. (1.3) olarak belirlenen bir ürünün sunumunun genel fonksiyonunu incelemek demektir (3). Sunum fonksiyonunun geometrik bir gösterilimi olan sunum eğrisi tüm koşullar değişmez kaldığında, fiatın her seviyesinde sunulan miktarı belirlemektedir. Çok ürünlü ve tam rekabet koşullarına bağlı firmalar için değişmez varsayılan koşullar teknoloji, tüm değişken girdilerin fiatı ve tüm diğer ürünlerin fiatıdır. Ayrıca, sunum eğrisi girdi ve üretimin yalnızca pozitif değerleri için tanımlanmıştır. Negatif değerler bu konu çerçevesinde bir anlam taşımamaktadır.

1.2 BİR ÜRÜN İÇİN PARAMETRİK DOĞRUSAL SUNUM EĞRİSİNİN ELDE EDİLMESİ

Bir ürün için sunum eğrisinin elde edilmesinde uygulanan yöntem bir ürünün fiatını değiştirmek ve buna firmanın tepkilerini gözlemektir. Her değişik fiat için firmanın tepkisinin o fiat için eniyilenmiş olan ürün miktarının sunumu şeklnde olacağı doğaldır. «Tam rekabet tipli firma kuramının önemli bir parçası, işletmenin, pazar fiatını parametre olarak aldığı varsayımına dayanır. Fiatların her seviyesinde işletme, bu fiatları verilmiş olarak alır ve fiatlardaki değişikliği önceden görmeğe çalışmaksızın ve kendi kararlarının fiatların seviyesindeki olasılı etkisi için herhangi bir tolerans tanımaksızın karar verir. Bir fiat değiştiği zaman, aynı karar süreci, yeni seviye verilmişcesine basit olarak tekrarlanır.

Firmanın kararları, bu kontrollü deneylerin başarılı bir sonucu olduğu zaman ürünün pazar fiatı parametrenin rolünü oynar. Fakat, seri deneylerin amacı, genel bir kural ya da fonksiyonel bir ilişki saptamaktır[4]. Sunum eğrisi firma için, sunulan miktarın pazar fiatı ile nasıl değiştiğini ortaya koymaktadır.

DP, her bir fiat seviyesi için eniyilenmiş olan ürün miktarlarını ayrı ayrı modeller kurarak saptamaları ile bir sunum eğrisi

---

(3) R. FRİSÇH; Lois Techniques et Economiques de la Production, Dunod, Paris 1963, s. 181

(4) Daniel C. VANDERMEULEN; Agk., s. 79

elde etmek mümkün, ancak bu çok yorucu olmaktadır. PDP böyle bir yöntemi gereksiz kılmaktadır. Ürün fiatlarının herhangi bir kümesi için eniyilenmiş bir çözüm sağlandığında, ürün fiatlarından birisinin belli sınırlar arasında değişmesine izin verilerek bütün olasılı eniyilenmiş çözümleri elde etmek mümkün olmaktadır.

Aşağıda dört mümkün ürünü, iki sabit ve bir değişken girdisi bulunan çok ürünlü bir firma için belirlenmiş bir DP modeli görülmektedir.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+ a_{13}x_3+a_{14}x_4 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1a_{22}x_2+ a_{23}x_3+a_{24}x_4 &\leq b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4 &= z_3 \\ p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4 - c_3z_3 &= G \end{aligned} \tag{1.4}$$

Değişken girdi Z sembolü ile gösterilmiştir. Z_3, değişken girdi olarak satın alınan toplam miktar olmaktadır. Değişken girdiyi içeren üçüncü eşitlik, fazla istemin sıfır olduğunu ya da girdi isteminin girdi sunumuna eşit olduğunu ifade etmektedir. Değişken girdinin pazar fiatı c_3 (rakamsal örnekte $c_3 = 1$ dir) ile gösterilmiştir. Böylece net gelir, ürünlerin gelir toplamından (px) değişken girdinin maliyeti (c_3z_3) çıktıktan sonra geriye kalan kısmı tanımlamaktadır.

PDP dan yararlanarak bir ürün için sunum eğrisi çıkartılmasını sağlayacak rakamlı bir örnek model,

$$\begin{aligned} 3x_1+x_2+x_3+3x_4 &\leq 90 \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4 &\leq 80 \\ 6x_1+3x_2+5x_3+2x_4 &= Z_3 \\ 16x_1+7x_2+10x_3+8x_4-Z_3 &= G \text{ (Max)} \end{aligned} \tag{1.5}$$

olarak belirlenmiş olsun. Her DP problemi uygun bir sabitin parametreleştirilmesi ile PDP problemine dönüştürülebilir. (1.5) ifadesi ile belirlenen DP problemi biraz ileride x_3 ün katsayısının parametreleştirilmesi ile parametrik hale dönüştürülecektir. Ancak, daha önce (1.5) için eniyilenmiş olan çözümünün bulunması gerektiği bilinmektedir. Bu nedenle (1.5) problemi, amaç fonksiyonu net gelir eşitliğine dönüştürülerek çözülecektir.

(1.4) ifadesi S_1, S_2 ve Z_3 e göre kanonik şekilde yeniden;

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2 +a_{13}x_3+a_{14}x_4+S_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 +a_{23}x_3+a_{24}x_4+S_2 &= b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33} x_3+a_{34}x_4-Z_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

olarak yazılıp Z_3 ün buradan elde edilen değeri amaç fonksiyonunda yerine konulursa amaç ifadesi;

$$(p_1-c_3a_{31})x_1+(p_2-c_3a_{32})\ x_2+(p_3-c_3a_{33})\ x_3+(p_4-c_3a_{34})x_4 = G \tag{1.7}$$

şeklini alır. Burada amaç fonksiyon katsayıları, ürün satış fiatlarının birim değişken maliyet üzerine fazlalığını, ya da her birim ürün için kârı belirlemektir (5). Amaç katsayıları net gelire çevrildikten sonra değişken girdi eşitliği artık dikkate alınmaz. Aynı biçimde (1.3) örnek modeli değişken girdi denkleminin yok edilmesi ya da amaç katsayılarının net gelire çevrilmesi ile;

$$\begin{aligned} 3x_1+x_2+x_3+3x_4+S_1 &= 90 \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4+S_2 &= 80 \\ 10x_1+4x_2+5x_3+6x_4 &= G\ (\text{Max.}) \end{aligned} \tag{1.8}$$

şeklini alacaktır. Şimdi, simpleks süreci işletilerek ürünlerden birisi için fiat değişmelerinin başlatılabileceği bir başlangıç eniyilenmiş çözüm bulunacaktır. Bu çözüm için başlangıç tablosu aşağıdaki biçimde düzenlenir.

Tablo (1.1)

Başlangıç Tablosu

Temel değişkenler	*T. Değ. değerler*	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2
G	0	–10	–4	–5	–6	0	0
S_1	90	3	1	1	3	1	0
S_2	80	2	1	2	1	0	1

x_1 değişkeninin temel olduğu ilk dönüştürme işlemlerinin sonunda ilk çözüm matrisinin cebirsel ifadesi olan;

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 + \frac{1}{3}S_1 &= 30 \\ \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 + 4x_4 - \frac{2}{3}S_1 + S_2 &= 20 \\ \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + x_4 - \frac{10}{3}S_1 &= G - 300 \end{aligned} \tag{1.9}$$

---

(5) Net gelire çevrilmiş amaç katsayıları bundan sonraki analizlerde r sembolü ile temsil edileceklerdir. Örneğin $r_1 = p_1 - c_3\,a_{31}$ gibi

sistemi elde edilir. x_2 nin temel değişken olduğu ikinci dönüştürme işlemleri sonucu ise;

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 2x_4 + S_1 - S_2 &= 10 \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2S_1 + 3S_2 &= 60 \\ - x_3 - 2x_4 - 2S_1 - 2S_2 &= G - 340 \end{aligned} \quad (1.10)$$

çözümü elde edilir. Bu çözüm, amaç fonksiyon değişkenlerinin katsayılarının tümü negatif olduğundan eniyilenmiştir. PDP'nın görevi buradan itibaren başlamaktadır.

(1.10) ifadesi ile belirlenen eniyilenmiş çözüm, (birim satış fiatı değişken maliyetinden 5 TL. daha fazla olmasına rağmen) üçüncü ürün (x_3) ü üretim dışı bırakmaktadır. Bu, üretimine karar verilen x_1 ve x_2 nin, sabit girdilerin kısıtlı miktarlarını daha verimli bir biçimde kullandığı anlamını taşır.

Modelin tüm katsayılarının analiz edilebilmesi için (1.4) sistemi dönüştürülmüş katsayıları tanımlayan a', b' ve r' notasyonlarına göre yeniden;

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{13}x_3 + a'_{14}x_4 + a'_{15} S_1 + a'_{16}S_2 &= b'_1 \\ x_2 + a'_{23}x_3 + '_{24}x_4 + a'_{25}SS_1 + a'_{26}S_2 &= b''_2 \\ r'_3 x_3 + r'_4 x_4 + r'_5 S_1 + r'_6 S_2S_2 &= G - G' \end{aligned} \quad (1.11)$$

olarak yazılabilir. Bu, parametresiz doğrusal programlama probleminin eniyilenmiş çözümü yani (1.10) un harflerle yazılmış şeklidir. (1.10) ile belirlenen eniyilenmiş çözüme göre üçüncü ürünün her birim üretiminin net gelire katkısı;

$$r'_3 = r_3 - (a'_{13}r_1 + a'_{23}r_2) = 5 - [(-1) . 10 + 4.4)] = -1 \text{ TL.} \quad (1.12)$$

olmaktadır [6]. Bu, olumlu (pozitif) bir katkı değildir. Bu nedenle üçüncü ürün üretilmemektedir. r'_3 eşitliği (1.12) nde parantez içindeki kısım üretilmeyen üçüncü ürünün, üretimine karar verilen ilk iki ürün cinsinden (x_1, x_2) fırsat maliyetine eşit olmaktadır. Üçüncü ürünün net geliri (r_3) fırsat maliyetine eşit olduğu anda bu ürün üretimi başlatılabilir. r_3 ün bu kritik değeri;

$$r'_3 = r_3 - (-1.10 + 4.4) = 0 \quad (1.13)$$

---

(6) Bkz. Daniel C. VANDERMEULEN Agk. s. 46

eşitliği yardımı ile $r_3 = 6$ olarak elde edilir. r_3 ün bu değeri için x_3 çözüme girebilir. Bu durumda net gelirde bir artma ya da azalma olmayacaktır. Ancak r_3 ün kritik değerinde meydana getirilecek bir artış dengeyi üçüncü ürün lehine çevirecektir.

Bu noktadan itibaren r_3, üçüncü ürünün giderek artan fiatı olduğundan artık bir parametredir. Bu nedenle bundan sonraki işlemlerde bir karışıklığa meydan vermemek için r_3 yerine t kullanılacaktır.

1.3 PDP nın Eniyilenmiş Çözümleri

x_3 çözüme (temele) alındığında yine, simpleks süreci işletilerek (1.11) çözümünün katsayıları dönüştürülür. Buna uygun olarak (1.10) sayısal örneğin kısıtlayıcı denklemleri;

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{4} x_2 \quad + \frac{5}{4} x_4 + \frac{1}{2} S_1 - \frac{1}{4} S_2 &= 25 \\ \frac{1}{4} x_2 + x_3 - \frac{3}{4} x_4 - \frac{2}{2} S_1 + \frac{3}{4} S_2 &= 15 \end{aligned}\right\} \quad (1.14)$$

olmaktadır. Amaç fonksiyonun yeni katsayıları (1.12) formülü gereğince;

$$\begin{aligned} r'_2 &= r_2 - (a'_{12} r_1 + a'_{23} r_3) = 4 - \left(\frac{1}{4} . 10 + \frac{1}{4} . r_3\right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{4} r_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r'_4 &= r_4 - (a'_{14} r_1 + a'_{24} r_3) = 6 - \left(\frac{5}{4} .10 - \frac{3}{4} .r_3\right) = \frac{13}{2} \\ &- \frac{3}{4} r_3 \end{aligned}$$

$$G = r_1 b'_1 + r_3 b'_2 = 10.25 + r_3.15 = 250 + 15\ t$$

olup t kritik değer olan 6 değerini aldığı zaman bu katsayılar;

$$r'_2 = 0, \quad r'_4 = -2, \quad r'_5 = -2, \quad r'_6 = -2 \text{ ve } G = 340$$

olmaktadır. Amaç fonksiyonunun değerinde (net gelirde) henüz hiç bir değişiklik olmamıştır. Amaç fonksiyonunun yeni ifadesi;

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} t\right) x_2 + \left(- \frac{13}{2} + \frac{4}{3} t\right) x_4 + \left(\frac{1}{2} t-5\right)$$

$$S_1 + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{4} t\right) S_2 = 250 + 15 t \qquad (1.15)$$

şeklini alır. t artmağa devam ettikçe x_3 ün çözümde kalacağı açıktır. Fakat x_1 in üretimi sürdürüldükçe x_3 üretiminin arttırılması olanağı yoktur. (1.14) eşitliklerinden anlaşılacağı üzere x_3 çözüme girdiğinde, kaynak kullanımında rakip olan x_2 çözümden çıkmıştır. x_2 nin çözümden çıkması x_1 üretiminin miktarını arttırmıştır [7]. Amaç fonksiyon katsayıları (r') pozitif değerlere geçmediği sürece x_1 in üretimi en kârlı olmaktadır, t nın artan değerleri yalnızca r'_4 ve r'_5 katsayılarının değerlerini arttırmaktadır. Diğer katsayılar t nın artan değerleri ile birlikte azalmaktadır. Bu nedenle t nın yeni kritik değeri;

$$\begin{aligned} r'_4 &= -\frac{13}{2} + \frac{3}{4} t \geq 0 \text{ ya da } t \geq \frac{26}{3} \\ r'_5 &= -5 + \frac{1}{2} t \geq 0 \text{ ya da } t \geq 10 \end{aligned} \qquad (3.16)$$

bağıntılarından elde edilen;

$$\text{Min.}\left(\frac{26}{3}, 10\right) = \frac{26}{3} \qquad (3.17)$$

olacaktır. t, $\frac{26}{3}$ den daha büyük değerlere ulaştığı zaman üçüncü ürünün net geliri pozitif olmaktadır. Bu anda x_4 ürünü deneye sokulmalıdır. Çünkü t nin 26/3 den büyük değerleri için x_1 in üretimine devam edilmesi hem net gelirde bir artış sağlamamakta, hem de daha fazla x_3 üretimini engellemektedir. Böylece, x_1 çözümden çıkar.

r'_4 eşitliğinde yer alan a'_{24} katsayısı negatiftir, $\left(a'_{24} = -\frac{3}{4}\right)$. Bu nedenle r'_4, t ile birlikte artar. $a'_{24} < 0$ ın anlamı x_3 ve x_4 ürünlerinin tamamlayıcı iki ürün olduğu biçimindedir. x_4 ün çözüme girmesi, x_3 ün daha çok üretimi için gerekli olan bir miktar kayna-

(7) Bu örnekte x_1,x_2 tamamlayıcı, x_2 ile x_3 ise ikame iki ürün durumundadır.

ğın serbest kalmasına neden olmaktadır. x_4 ün çözüme girmesi sonucunda yeni eniyilenmiş çözüm için dönüştürülmüş kısıtlayıcı denklemler;

$$\begin{aligned} &\frac{4}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 + x_4 + \frac{2}{5} S_1 - \frac{1}{5} S_2 = 20 \\ &-\frac{3}{5} x_1 + \frac{2}{5} x_2 + x_3 - \frac{1}{5} S_1 + \frac{3}{5} S_2 = 30 \end{aligned} \tag{1.18}$$

olarak elde edilir. Bu yeni çözüme göre r′ net gelir katsayılar da,

$$\begin{aligned} r'_1 &= \frac{26}{5} - \frac{3}{5} t \\ r'_2 &= \frac{14}{5} - \frac{2}{5} t \\ r'_5 &= -\frac{12}{5} + \frac{1}{5} t \\ r'_6 &= \frac{6}{5} - \frac{3}{5} t \end{aligned} \tag{1.19}$$

olacaktır. Bu katsayılara göre amaç fonksiyonun yeni ifadesi;

$$G = (\frac{26}{5} - \frac{3}{5} t)\ x_1 + (\frac{14}{5} - \frac{2}{5} t)\ x_2 - (\frac{12}{5}$$

$$- \frac{1}{5} t)\ S_1 + (\frac{6}{5} - \frac{3}{5} t)\ S_1 = 120-30\ t \tag{1.20}$$

olmaktadır. (1.19) eşitliklerinden anlaşıldığı üzere t ile birlikte değeri yükselen net gelir katsayısı yalnızca r'_5 dür. t için yeni kritik değer r'_5 0 koşulundan elde edilir. Bu değer;

$$\frac{1}{5} t \geq \frac{5}{12} \ \text{yada}\ t \geq 12 \tag{1.21}$$

olarak saptanır. $t = 12$ için S_1 aylık değişkenin çözüme alınması x_3 üretimini ve net geliri arttırabilir. Bu nedenle, S_1 için kısıtlayıcı denklemler;

$$2x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{5}{2} x_4 + S_1 - \frac{1}{2} S_2 = 50$$

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 + x_3 + \frac{1}{2} x_4 + \frac{1}{2} S_2 = 40 \qquad (1.22)$$

olmaktadır. t de meydana gelecek bir artış çözüme girmeyen tüm değişkenlerin r' katsayılarını azaltmaktadır. t nin bu yeni değeri için amaç fonksiyonun alacağı değer;

$$G = r_5 . b_1' + r_3 . b_2' = 0 + 40t \text{ ya da}$$

$$G = 120 + 30t - 50. \left(\frac{12}{5} - \frac{1}{5} t\right) = 40\, t \qquad (1.23)$$

olarak elde edilir. $t > 12$ için net gelirde bir artma sağlanamaz. Çünkü r' net gelir katsayıları artan değerleri ile birlikte azalacaklardır.

1.4 Çözüm Bulgularının özeti ve sunum eğrisinin çizimi

Üçüncü ürün fiatının parametreleştirilmesi ile elde edilen PDP problemin çözümü sonucunda saptanan bulgular özet olarak tablo (1.2) de sunulmuştur.

Tablo (1.2)

Üçüncü ürün fiatındaki değişmelerin üretime etkileri

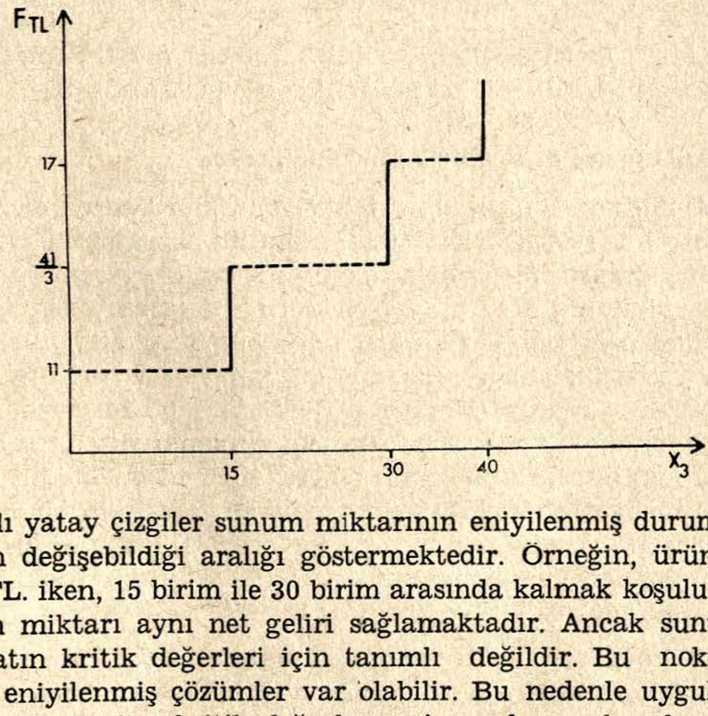
$r_3 = t$	x_3	x_1	x_2	x_4	G	$S_1 = -r_5'$	$S_2 = -r_6'$
0—6	0	10	60	0	340	2	2
$6 - \frac{26}{3}$	15	25	0	0	250+15t	$5 - \frac{1}{2} t$	$-\frac{5}{2} + \frac{3}{4} t$
$\frac{26}{3} - 12$	30	0	0	20	120+30t	$\frac{12}{5} - \frac{1}{5} t$	$-\frac{5}{6} + \frac{3}{5} t$
12	40	0	0	0	0+40t	0	$0 + \frac{1}{22} t$

Tablodaki bulgular x_3 ürünü için bir sunum eğrisi çıkarmağa yeterli olmaktadır. Değişik fiat seviyelerinde x_3 ürününden sunulan miktar grafiksel olarak şekil (1.1) ile gösterilmiştir. Grafikten anlaşılacağı üzere ürünün sunulan miktarı fiatın süreksiz bir fonksiyonudur. Kesik çizgilerle belirlenen yatay doğru parçaları üzerinde herhangi bir noktada sunulan miktar kesinlikle belli olmamakla birlikte, fiatta sıçramalar biçimindeki her artış, sunum miktarında artışlara neden olmakta ve bu artışlar yatay çizgiler olarak görülmektedir.

Sunum eğrisinin bu yöntemle elde edilişine, «maksimum net gelir yöntemi» denilmektedir (8). Bu şekilde elde edilen sunum eğrisi yalnızca düşey doğru parçalarından oluşmaktadır.

Şekil (1.1)

x_3 ürünü için sunum eğrisi



Noktalı yatay çizgiler sunum miktarının eniyilenmiş durumu bozmadan değişebildiği aralığı göstermektedir. Örneğin, ürün fiatı 41/3 TL. iken, 15 birim ile 30 birim arasında kalmak koşulu ile her üretim miktarı aynı net geliri sağlamaktadır. Ancak sunum eğrisi fiatın kritik değerleri için tanımlı değildir. Bu noktalarda başka eniyilenmiş çözümler var olabilir. Bu nedenle uygulamada belirsizlik yaratan kritik değerler yerine onlara çok yakın değerler alarak sonuca gidilebilir. Kritik değerler tüm mümkün fiatların çok küçük bir kısmı olduğundan kararlardaki hata payı da önemsenmeyecek ölçüde olacaktır.

---

(8) Daniel C. VANDERMEULAN; Agk., s. 84

Tablo (1.2) de her kritik t değeri için çözümde olmayan değişkenlerden en az birisinin r′ katsayısı sıfır olarak görünmektedir. Bu durum, değişkenin üretime alınması ile ikinci bir eniyilenmiş çözüm daha bulunabileceğini ifade etmektedir. Eniyilenmiş çözüm tek ise firmanın onu seçeceği doğaldır. Ancak, bu programlama modelinin sağlayabileceği kolaylık bütün bir eniyilenmiş çözümler tümcesi içinde firmanın, seçimi hangi sınırlar arasında yapabileceğini saptamasına yardım etmek olmaktadır.

Çok ürünlü firmaların daha büyük modellerinde aynı yoldan giderek her ürün için bir sunum eğrisi elde edilebilir. Ancak, giderek çoğalan işlemler, bilgisayar kullanma gereğini zorunlu kılmaktadır.

2. MALİYET EĞRİLERİNİN ÇIKARTILMASI ve BU EĞRİLERİN ÜRÜN SUNUMU İLE İLİŞKİLERİNİN SAPTANMASI

2.1 Uygulanacak Parametrik Modelin Tanımı

Üretimin pazar fiatı, amaç fonksiyonda bir katsayı olarak ya doğrudan ya da net gelir katsayısının önemli bir parçası olarak yer alır. Sonuç olarak, amaç fonksiyonuna uygulanan parametrik doğrusal programlama, bir ürün için sunum eğrisi çıkartmağa gerekli tüm verileri doğrudan sağlar. Daha çok bilinen ve kullanılan yöntem, önce marjinal maliyet eğrisinin çıkartılması ve sonra onun, belli koşullar altında sunum eğrisi olarak kullanılabileceğinin gösterilmesi yöntemidir (9). Bir ürün için firmanın sunum eğrisinin marjinal maliyete bakılmaksızın çıkartılabilmesi önemlidir. Fakat marjinal maliyet eğrisi belirtileri ekonomik gereklerin bir kısmını sağlar. Toplam ve marjinal maliyet kavramları, farklı bir deneysel düşünce yöntemi gerektirir. Bunun için PDP'nın bir başka tipine gerek vardır (10).

Modelin işleyişinde uygulanan kavramsal deney, diğer bütün koşullar değişmeksizin, sabit girdilerin birinin miktarında oluştu-

---

(9) R. FRISCH; Lois Techniques et Economique de la Production, Dunod, Paris 1963. s. 182
Thomas H. TAYLOR; John M. VERNON; Microeconomics and decison Models of the firm, Harcourt, Brace World, inc, New York 1969 s. 113 - 114

(10) Daniel C. VANDERMULAN! Agk, s. 85

rulacak değişikliğin sonuç üzerindeki etkilerini saptamak amacını taşımaktadır. Bu nedenle söz konusu girdi bir parametre olarak ele alınacaktır. Burada toplam net gelirin ulaşılabilir bir maksimum olacağı ekonomi kuramının gereği olan bir amaçtır. Analizin görevi ise bu amaç doğrultusunda her girdi seviyesi için firmanın kararlarına yol göstermek olacaktır.

2.2 Girdiler için Marjinal Verimlilik

Sabit girdilerle çözülen DP problemlerine simples süreci uygulandığında bu girdiler ürünlere dönüşürken, orijinal seviyedeki işaretlerini tamamen kaybetmektedir. Ancak modelin girdilere göre diagonal biçimde yazılması eniyilenmiş çözümdeki girdi seviyelerinin elde tutulmasını sağladığı gibi orijinal işaretlerin de değişmemesine neden olmaktadır. Değişken girdi eşitliği yokedilmiş (1.4) sistemi buna göre yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+S_1+O.S_2 &= b_1+O.b_2 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4+O.S_1+S_2 &= O.b_1+b_2 \\
r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3+r_4x_4+O.S_1+O.S_2 &= O.b_1+O.b_2+G
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

elde edilir. Bu modelin eniyilenmiş çözümünü elde etmek için uygulanacak simpleks süreci, girdilerin katsayılarını değiştirmekle birlikte işaretlerini değiştirmemektedir. Ayrıca, eniyilenmiş çözümde elde edilen tüm değerler aynı kalmaktadır. Gerçek katsayılı (1.5) sistemi, (2.1) şeklinde yazılarak simpleks çözüm yöntemi uygulanırsa eniyilenmiş çözüm;

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_4 + S_1 - S_2 &= b_1 - b_2 = 10 \\
x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2S_1 + 3S_2 &= -2b_1 + 3b_2 = 60 \\
-x_3 - 2x_4 - 2S_1 - 2S_2 &= 2b_1 - 2b_2 + G
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

olarak elde edilir. Bu şekil «değiştirilmiş kanonik şekil» adını almaktadır. b_1, b_2 için verilen değerler yerlerine konulduğunda (2.2) in, (1.10) çözümü ile aynı olduğu hemen görülmektedir. Yani eniyilenmiş ürün seviyeleri;

$$x_1 = b_1-b_2 = 90-80 = 10, x_2 = -2b_1+3b_2 = 2.90+3.80 = 60$$

dir. (2.2) çözümünde ortaya çıkan girdi katsayıları ekonomik açıdan çok büyük önem taşımaktadır. Verimlilik (prodüktivite) katsayıları denilen ve (k) sembolü ile gösterilecek olan bu katsayıların aşağıda ekonomik olarak açıklanmasına çalışılmıştır.

Katsayılar için daha önce belirlenmiş olan semboller kullanarak (2.2) eniyilenmiş çözümü yeniden;

$$\begin{aligned} x_1 &= k_{11}b_1 + k_{12}b_2 - (a_{13}'x_3 + a_{14}'x_4 + a_{15}'S_1 + a_{16}'S_2) \\ x_2 &= k_{21}b_1 + k_{22}b_2 - (a_{23}'x_3 + a_{24}'x_4 + a'_{25}S_1 + a_{26}'S_2) \\ -\hat{G} &= -C_1b_1 - C_2b_2 - (r_3'\,x_3 + r_4'\,x_4 + r_5'\,S_1 + r_6'\,S_2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak yazılabilir. Yeniden düzenlenmiş bu şekil, girdilerle ürünler arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır.

(k) katsayılarının ekonomik anlamını açıklayabilmek için, b_1 girdisinin, Δb_1 kadar arttırıldığı ve b_2 nin sabit kaldığı varsayımından hareket edilecektir. Bu durumda x_1 ve x_2 ürünleri için yeni seviyeler;

$$\begin{aligned} x_1 + \Delta x_1 &= k_{11}\,(b_1 + \Delta b_1) + k_{12}b_2 - L_1 \quad (11). \\ x_2 + \Delta x_2 &= k_{21}\,(b_1 + \Delta b_1) + k_{22}b_2 - L_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

olarak ortaya çıkacaktır. x_1 ve x_2 den başka ürün üretilmediği zaman $x_3 = x_4 = S_1 = S_2 = 0$ olacaktır. Bu nedenle (2.3) sisteminin ilk iki denklemi;

$$\begin{aligned} x_1 &= k_{11}b_1 + k_{12}b_2 \\ x_2 &= k_{21}b_1 + k_{22}b_2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

olarak yazılabilecektir. (2.4) den (2.5) taraf tarafı çıkartılırsa;

$$\Delta x_1 = k_{11}\,\Delta b_1\;; \Delta x_2 = k_{21}\,\Delta b_1 \tag{2.6}$$

bu eşitliklerden de;

$$k_{11} = \frac{\Delta x_1}{\Delta b_1}\;; \quad k_{21} = \frac{\Delta x_2}{\Delta b_1} \tag{2.7}$$

bulunur. Bu oranlar (k) katsayılarının, girdideki değişmeye göre ürünün değişme oranını belirlediğini ortaya koymaktadır. Bu katsayıları verimlilik katsayıları denilmektedir. Herhangi bir ürün

(11) L_1 ve L_2 (2.3) ifadelerinde parantez içindeki cebirsel toplamın kısaltılarak yazılmış şeklidir.

ile bir girdi arasındaki ilişkinin sabit bir veri olmayıp diğer çıktılara da bağlı olduğu ekonomik modellerin çözümünün çeşitli evrelerinde açıkça görülebilmektedir. Çözüm matrisine giren her yeni ürün, dönüştürme işlemleri ile birlikte farklı bir (k) katsayıları takımı ortaya çıkarmaktadır. Bu nedenle bu katsayılara, «mukayeseli verimlilik katsayıları» da denilmektedir (12).

Yukarıda verilen örnek, verimlilik katsayılarının (—) işarette olabileceğini göstermektedir. Hatta, başlangıç tablosunda bütün (a) katsayıları (+) ve bütün girdiler tamamiyle kullanılıyorsa, bazı (k) ların (—) işarette olması zorunludur. Bunun nedeni, üretimdeki bileşimleri değiştirilemiyen girdi gereksinmeleridir. Girdilerin her ikisi de fazla miktarda var olmadıkça üretimde artış olamaz. Bir girdinin miktarı sabit olduğu zaman diğerinin, fazla miktardaki üretime kaynak sağlaması için bir ürün miktarı azaltılmalıdır. Örneğimizde, (k) katsayıları soldan sağa doğru inen diagonalde (—) dirler. Bu durumun açıklanması diagonal şekle dönüştürme sürecinde yatmaktadır. x_1 değişkeni birinci satırda yer aldığından ilk girdi, arttırılmak istenen üretime engeli teşkil eder. x_2 üretimi için limit, x_1 in üretiminden arta kalan b_2 girdisinin miktarı olmaktadır. İlk girdinin miktarının arttırılması birinci ürünün daha fazla üretilmesini sağlamakla birlikte x_2 için kullanılabilir ikinci girdinin miktarını da azaltır. Benzer bir biçimde b_1 ve b_2 girdilerinin miktarındaki bir artış x_2 nin daha fazla üretimine izin vermekle birlikte bu, x_1 girdisinin daha fazla miktarını geri çekme sonucunda olur. Darboğaz yaratan girdiyi yeni ürünün çözüme girdiği satır belirlemektedir. Sonuç oalrak rakamsal örnekte k_{11} ve k_{22} pozitiftir, diğer katsayılar negatiftir.

Daha büyük modellerde de bir ürünün üretime girdiğl satırdaki girdiye göre (k) katsayısı pozitif, her sütun ve her satırda hiç olmazsa bir katsayı negatif olmalıdır. Aksi halde girdinin arttırılması olanaksızdır.

(k) sayılarının tanımlanmasında bir girdi dışında diğer girdi miktarları sabit tutulmuşlardır. Ancak, böyle bir zorunluluk yoktur. Hatta işletmecinin, her ürünün eniyilenmiş miktarını ve girdilerin her değişik bileşiminde elde edilebilecek maksimum elde edilebilir geliri seçebilmesi için bütün ürünler değişime açık (parametre) olmalıdır. Birden fazla ürünün parametre olarak ele

---

(12) Bkz. Daniel C. VANDERMEULEN; Agk., s. 87

alınması halinde de girdiler serbest tutulmalı ve kısıtlayıcılar bağlayıcı olarak kalmamalıdır.

Genel bir DP modelinde orjinal problem geliri, ürün seviyelerinin doğrusal bir fonksiyonu olarak gösterir. Kanonik şekle indirgeme ise geliri, girdilerin doğrusal fonksiyonuna dönüştürmektedir.

2.3 Toplam gelir ve marjinal verimlilik eğrilerinin çıkartılması (parametrik modelin eniyilenmiş çözümleri)

Analize bütünlük kazandırmak amacı ile, bir değişken girdi için toplam gelir ve marjinal verimlilik eğrilerinin elde edilişi açıklanacaktır. Burada, birinci girdi deneyimler sonunda bağımsız bir değişken olacak olan bir parametre olarak ele alınacaktır. b_1 değişken girdisi için Z_1 sembolü kullanılarak (2.2) başlangıç eniyilenmiş çözümü yeniden;

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_3 + 2x_4 + S_1 - S_2 &= Z_1 - b_2 \\
x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2S_1 + 3S_2 &= 2Z_1 + 3b_2 \\
- x_3 - 2x_4 - 2S_1 + 2S_2 &= -2Z_1 - 2b_2 + G
\end{aligned}
\qquad (2.8)
$$

olarak yazılır. Z_1 in giderek artan miktarları, ikinci denklemde x_2 nin sıfıra ve sonra negatif değerlere (mümkün olmayan bölge) geçmesine neden olmaktadır. Benzer bir biçimde Z_1 in giderek azalması, $b_2 > 0$ olduğundan sonuçda x_1 in azalmasına neden olmaktadır. $b_2 = 80$ olduğundan Z_1 için;

$$
\begin{aligned}
&\text{Alt limit:} \quad x_1 = Z_1 - 80 \geq 0 \text{ ya da } Z_1 \geq 80 \\
&\text{Üst limit:} \quad x_2 = -2Z_1 + 240 \geq 0 \text{ ya da } Z_1 \leq 120
\end{aligned}
\qquad (2.9)
$$

olarak elde edilir. Z_1 bu limit değerleri geçmedikçe çözüm olasılı ve eniyilenmiştir. Çünkü, sabit girdilerdeki değişmelerin r' katsayıları üzerinde hiçbir etkisi yoktur (13). Bu katsayıların değişimi yalnızca temel seçimine ve kanonik şekli indirgemek için gerekli

---

(13) Teorem: Bir doğrusal programlamada kısıtlayıcı sabitler değiştikçe çözümün geçerliliğini ve optimalliği bozulmaz. Ancak, optimal değer değişir.
Bkz. Arrow Kenneth J., Leonıd, HRWICZ; Hirofumı UZAWA; Studies in linear and non-Linear programming, Stanford Unıvarsity Press Stanford-California 1972, s. 38

olan dönüştürme işlemlerine bağlı olmaktadır. Böylece G nin değişken girdiye bağlı ifadesi;

$$G = 2Z_1 - 160; \quad 80 \leq Z_1 \leq 120 \tag{2.10}$$

olarak yazılabilir. Z_1 e bağlı bu fonksiyon doğrusaldır. Z_1 in bilinen limitler arasındaki değeri için bir doğru parçası tanımlar. Z_1, üst limitin üzerine çıktığında temel değişmelidir. $Z_1 > 120$ için temel olma niteliğini yitiren değişken x_2 dir. Bilinen gereklere uygun olan x_4 değişkeni çözüme girer. Bu yeni değişken için eniyilenmiş çözüm;

$$x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{5}{3} x_3 - \frac{1}{3} S_1 + S_2 = - \frac{1}{3} Z_1 + b_2$$

$$x_2 - \frac{1}{3} x_4 - \frac{4}{3} x_3 + \frac{2}{3} S_1 - S_2 = \frac{2}{3} Z_1 - b_2 \tag{2.11}$$

$$- \frac{2}{3} x_2 - \frac{11}{3} x_3 - \frac{2}{3} S_1 - 4S_2 = - \frac{2}{3} \quad -Z_1 - 4b_2 + G$$

olacaktır. Çözümden açıkça görüleceği üzere Z_1 artarken sıfıra ilk yaklaşan temel değişken x_1 olmaktadır. Bu nedenle, (2.8) eniyilenmiş çözümünde saptanan biçimde Z_1 için yeni limit;

$$- \frac{1}{3} Z_1 + b_2 = - \frac{1}{3} Z_1 + 80 \geq 0 \text{ ya da } Z_1 \leq 240 \tag{2.12}$$

olarak elde edilir. (2.11) çözümüne karşılık gelen net gelir fonksiyonu;

$$G = \frac{2}{3} Z_1 + 320 \; ; \qquad 120 \leq Z_1 \leq 240 \tag{2.13}$$

olmaktadır. Z_1 in alt limitinde $G = 400$ dür. Toplam net gelir fonksiyonunun bu değeri bir önceki üst limitteki değeridir. $G = \frac{2}{3} .240 + 320 = 480$ dir. Z_1 arttırılmağa devam edilirse çözümden çıkacak değişken x_1 olacaktır. x_1 in satırında, Z_1 arttıkça artan tek değişken S_1 dir. Çünkü diğer değişkenlerin tümünün katsayısı Z_1 inki ile ters işaretlidir. Bu nedenle yeni temel değişken S_1 aylak değişkeni olur. S_1 in temel alındığı yeni eniyilenmiş çözüm de;

$$S_1 - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3S_2 = Z_1 - 3b_2$$

$$x_4 + 2x_1 + x_2 + 2x_3 + S_2 = O.Z_1 + b_2 \qquad (2.14)$$

$$-2x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 6S_2 - 6S_2 = O.Z_1 - 6b_2 + \bar{G}$$

olarak bulunur. Bu çözüm sonunda Z_1 ile birlikte artan hiçbir değişken kalmamıştır. Bunun anlamı, artık Z_1 in arttırılmasının bu son eniyilenmiş çözümü değiştirmeyeceği şeklindedir. Z_1 in 240 dan büyük miktarları için yeni bir eniyilenmiş çözüm yoktur. Bir başka anlatımla, Z_1 deki daha fazla artışlar üretim ve toplam gelir üzerinde hiçbir etki yapmadan yapay olarak yığılırlar. İlk girdinin marjinal verimliliği sıfıra düşer. Gelir fonksiyonu son durumunda;

$$G = O.Z_1 + 480 \qquad (2.15)$$

olmaktadır. Değişken girdi arttırılmağa devam edilerek toplam gelir hiçbir şekilde 480 birimin üzerine çıkartılamaz.

Amaç ifadesinde yer alan girdi katsayılarının o girdinin marjinal verimliliğini ölçtüğü belirtilmişti. (2.8), (2.11) ve (2.14) eniyilenmiş çözümlerine bir göz atılırsa, değişken girdiye ait söz konusu katsayıların 2 den 2/3 e ve son çözümde sıfıra düştüğü görülecektir. Bu, bir ya da birden fazla ürün üretiminde giderek artan miktarlarda kullanılan bir girdinin marjinal verimliliğinin azalacağını ve bir noktada sıfır olacağını kanıtlamaktadır. Aynı çözümlerde b_2 girdisinin marjinal verimliliği ise 2 den 4'e ve son çözümde 6 ya yükselmiştir. Bu sonuç, belli bir sayısal örnekle sınırlı bulunmamaktadır. Bir girdinin marjinal verimliliği bir noktadan sonra onun kullanılan miktarı ile ters orantılı olmaktadır (14).

Toplam gelir ve marjinal verimlilik eğrilerinin çıkartılmasında gerekli bulguların tamamlanması için, değişken girdi, orjinal seviyesinin altına da indirilmelidir. Z_1 in azalan değerleri için saptanacak eniyilenmiş çözümlerin ilki yine (2.8) olacaktır. Çünkü, bu çözüm Z_1 in parametre olarak alınması halinde parametrenin hem giderek artan değerleri için hem de aynı noktadan itibaren azalan değerleri için bir başlangıç eniyilenmiş çözüm olmaktadır. (2.8) çözümünden Z_1 için üst limit;

(14) Bkz. Henderson-Quant; Microeconomic Theory, A Matematical Approach Mc Graw-hıll Book Company, New York 197y, s. 75

$$x_1 = Z_1 - b_2 = Z_1 - 80 = 0 \text{ ya da } Z_1 = 80 \tag{2.16}$$

bulunur. Z_1 80 olduğu zaman x_1 değişkeni k_{11} i pozitiften negatife çevirebilecek bir değişkenle değiştirilmelidir. x_1 in satırında buna aday iki değişken x_3 ve S_2 dir. Bunların hangisinin temel olacağı «minimum oranlar kuralı» ile belirlenir.

$$\text{Min.} \left(\frac{r_3'}{a_{13}'}, \frac{r_6'}{a_{16}'} \right) = (1,2) = 1 \tag{2.17}$$

Böylece çözüme x_3 girer. Yeni eniyilenmiş çözüm;

$$x_3 - x_1 - 2x_4 - S_1 + S_2 = Z_1 + b_2$$

$$x_2 - 4x_1 + 5x_4 + 2S_1 - S_2 = 2Z_1 - b_2$$

$$- x_1 - 4x_4 - 3S_1 - S_2 = 3Z_1 - b_2 + G \tag{2.18}$$

olur. Şimdi Z_1 azaldıkça sıfıra yaklaşan temel değişken x_2 olmaktadır. Bu nedenle çözümün eniyilenmiş kalması için Z_1 in yeni sınları;

$$x_3 = -Z_1 + 80 = 0 \text{ ya da } Z_1 = 80$$

$$x_2 = 2Z_1 - 80 = 0 \text{ ya da } Z_1 = 40$$

ve toplam gelir fonksiyonun bu çözümle elde edilen parçası da;

$$G = 3Z_1 + 80; \qquad 40 \leq Z_1 \leq 80 \tag{2.19}$$

olacaktır. Amaç ifadesinde Z_1 in katsayısı 3 e yükselmiştir. Bir başka söyleyişle, birinci girdinin kullanılan miktarı azalınca, onun marjinal verimliliği artmıştır.

$Z_1 < 40$ olduğu zaman x_2 çözümden çıkar. Bu aşamada çözüme giren değişken S_2 dir. Gerekli dönüştürme işlemleri yapıldığında gelir fonksiyonu için;

$$G = 5Z_1 + 0.b_2; \qquad 0 \leq Z_1 \leq 40 \tag{2.20}$$

ifadesi elde edilir. Bu elde edilebilecek son eniyilenmiş çözümüdür.

Tüm eniyilenmiş çözümlerle sağlanan bulgular tablo (2.1) de özetlenmiştir. Tabloda yer alan değerler toplam gelir ve marjinal verimlilik eğrilerinin çizimi için gerekli bilgileri sağlamaktadır. Şekil (2.1) toplam gelirin, şekil (2.2) de marjinal verimliliğin Z_1 parametrik girdisi için grafiklerini göstermektedir.

Toplam gelirin grafiği uç noktalarında doğru parçalarının karşılaşmalarından oluşmuştur. Fonksiyon her bir aralıkta doğrusaldır. Fakat her aralıkta eğim değişmektedir. Marjinal verimlilik eğrisinin grafiğini ise toplam gelir fonksiyonunun eğimleri belirlemektedir. Bu nedenle bu grafik yatay doğru parçaları biçiminde süreksiz bir eğridir. Çünkü, toplam gelir fonksiyonunun eğimi her aralıkta başka bir sabittir.

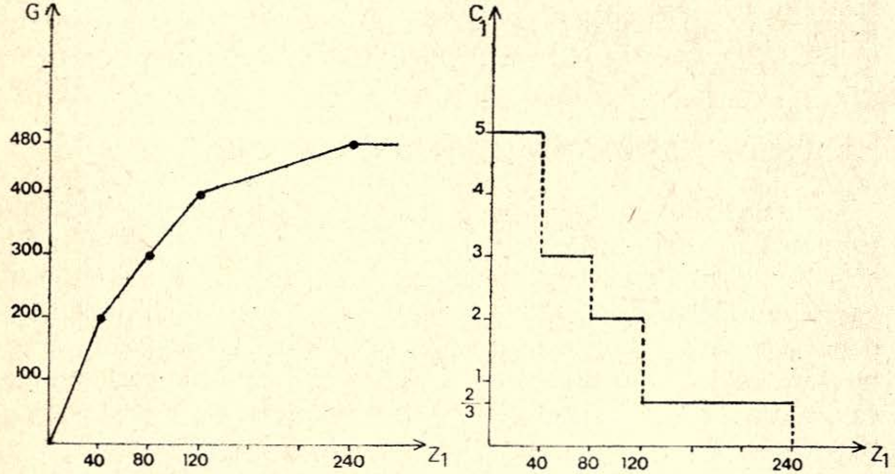
Tablo (2.1)

Grafik çizimi için gerekli bulguların özeti

Z_1	G	C_1	C_2
0 — 40	$5Z_1 + 0$	5	0
40 — 80	$3Z_1 + 80$	3	1
80 — 120	$2Z_1 + 160$	2	2
120 — 240	$\frac{2Z_1}{3} + 320$	$\frac{2}{3}$	4
240	$0Z_1 + 480$	0	6

Doğru parçalarının uç noktalarında fonksiyon belirsiz olup bu noktalar, gelir maksimizasyonu problemlerinin eniyilenmiş çözümünde bozulma durumuna karşılık gelmektedir.

Değişken girdi miktarı arttıkça toplam gelir, bir en yüksek değere ulaşmaktadır. Bu noktada marjinal verimlilik sıfıra düşer. $Z_1 = 0$ olduğu ve toplam gelir eğrisi düşey ekseni kestiği zaman birinci girdiyi gereksinmeyen bir ürün, geliri oluşturur. Grafiğin öteki sonunda, ikinci girdiyi gereksinmeyen bir ürün, geliri, değişken girdi maliyeti ile sabit bir oranda ve belirsiz bir şekilde artmağa bırakır. Oldukça fazla Z_1 kullanan ürünler olabilir. Fakat bunlar çok az gelir sağlar. Böyle ürünler, daha kârlı olabilecek ürünlerden kaynakları çekmek suretiyle geliri gerçekten düşürebilir. Firmanın Z_1 değişken girdisinin artan miktarını aylak değişken eniyilenmiş çözüm (son çözüm) içinde tuttuğu sürece, toplam gelire negatif bir eğim veren bir doğru parçasını ekleyecek biçimde bir ürün seçimi yapması söz konusu olmayacaktır. Fakat atıl kapasite bir masraf ise, etkisiz üretimden doğan gelir kaybı, atıl bırakmanın maliyetinden daha düşük olabilir. Böyle bir durumda, toplam gelir aşağıya doğru bir meyil alır ve marjinal gelir verimliliği negatif değerlere geçer.



(2.8) ile başlayan eniyilenmiş çözümlerin hepsinde dikkati çeken bir durumu belirlemekte yarar umulmuştur. Bu, bütün temel satırlarda verimlilik katsayılarının (k) ters işaretli bulunmalarıdır. İki girdili bir eniyilenmiş çözümde (k) katsayıları temel satırda ters işarette bulunuyorsa, bu girdiler belirli bir ürünün üretiminde tamamlayıcı niteliktedir. Bunu ispatlamak kolay olmaktadır. Bunun için üretim değişmez tutulup, girdilerin bir miktar arttırıldığı varsayılacaktır. Birinci satırda girdilerdeki değişmeler aşağıdaki gereksinmeyi sağlamalıdır;

$$k_{11}\Delta b_1 + k_{12}\Delta b_2 = 0 \text{ ya da } \frac{\Delta b_1}{\Delta b_2} = - \frac{k_{12}}{k_{11}} \qquad (2.21)$$

(k) katsayıları farklı işarette ise bu iki oran da pozitiftir. Ayrıca, k_{11} ve k_{12} sabit sayılar olduğundan girdilerden birisindeki bir artış, oranın bozulmaması için öteki girdinin de zorunlu olarak artmasını gerektirir. Çok girdili bir modelde aynı işaretli (k) sayılarının bulunması, ilgili ürünlerin üretiminde aynı işaretli (k) ları katsayı kabul eden girdilerin ikame girdi olduklarını gös-

(15) R. FRISCH; Agk., s. 55

terir. Aynı işaretli (+) k sayılarından oluşan tümceye «ikame alanı» denilmektedir. Bu alan, marjinal verimlilikleri negatif olmayan girdi miktarlarından oluşan noktaların geometrik yeri olmaktadır [15]. Ancak her ürün her girdinin pozitif miktarlarını gereksindikçe girdi çiftleri temeldeki bütün ürünlerin üretiminde ikame girdi olamazlar; fakat tamamlayıcı olabilirler.

2.3 Ürünler için Marjinal Maliyet Eğrileri

Bir değişken ve bir sabit girdi kullanarak üretimde bulunan firmanın en basit modelinde, ürünün marjinal maliyeti yalnızca değişken girdinin artan harcamasından ibarettir. Firmanın, birkaç potansiyel ürünü olduğu zaman bu ürünlerden birinde meydana gelecek artış onu, diğerlerinin sağlayacağı gelirden yoksun bırakır. Değişken maliyete ek olarak bir fırsat maliyeti bulunacak, sonra da bunlar değişken girdinin maliyeti ile birleştirilecektir.

Net gelir katsayısı sıfır olan bir ürünün net gelir üzerinde doğrudan bir etkisi yoktur. Eğer böyle bir ürünün üretilmesi söz konusu olursa bu, kaynak kullanımını gerektirecek ve firmayı diğer ürünlerin üretimi ile elde edebileceği net gelirden yoksun bırakacaktır. Bir ürünün net gelir üzerindeki dolaylı etkisini bulmak için, net gelir katsayısı sıfır kılınır ve ürünü temsil eden değişken eşitliğin sağ tarafına aktarılır. Böylece parametrik doğrusal programlamanın yeni bir tipi ile karşılaşılır. Amaç katsayı-

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{14}x_4+S_1 &= 1.(b_1+a_{13}x_3)+0.(b_2-a_{23}x_3)\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{24}x_4+S_1 &= 0.(b_1-a_{13}x_3)+1.(b_2-a_{23}x_3) \qquad (2.22)\\
r_1x_1+r_2x_2+r_4x_4 &= 0.(b_1-a_{13}x_3)-0.(b_2-a_{23}x_3)\ +\ G\ (\text{Max.})
\end{aligned}
$$

ları net gelire (r) çevrilmiş durumdaki (2.1) doğrusal sistemi yeniden; olarak yazılabilir. Doğrusal sistemin x_1 ve x_2 nin temel deolarak yazılabilir. Doğrusal sistemin x_1 ve x_2 nin temel değişkenler olduğu kanonik şekli indirgemesi (başlangıç eniyilenmiş çözümü), aşağıda (e) ile gösterilecek olan yeni, bir katsayı takımı oluştururur. Söz konusu katsayılar ile başlangıç eniyilenmiş çözümün kısıtlayıcıları arasında;

$$x_1 + a_{14}'x_4 a_{15}'S_1 + a_{166}'S_2 = e_{11}(b_1 - a_{13}x_3x_3) + e_{12}(b_2 - a_{23}x_3) = b_1' - a_{13}x_3$$

$$x_2 + a_{24}'x_4 + a_{25}'S_1 + a_{26}'S_2 = e_{21}(b_1 - a_{13}x_3) + e_{22}(b_2 - a_{23}x_3) = b_2' - a_{23}x_3 \quad (2.23)$$

bağıntısı vardır. Başlangıç eniyilenmiş çözüm sonunda amaç fonksiyonu da;

$$r_4'x_4 + r_5'S_1 + r_6'S_2 = -C_1(b_1 - a_{13}x_3) - C_2(b_2 - a_{23}x_3) + G$$
$$= -G' - (r_1a_{13}' - r_2a_{23}')x_3 + G \quad (2.24)$$

ifadesine sahip olacaktır. Bu ifade x_3 arttıkça net gelirin, yüklenmiş (inputed) birim maliyete ya da birim fırsat maliyete eşit bir oranda azaldığını göstermektedir. Bölümün rakamsal örneği;

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_4 - S_1 - S_2 &= 10 + x_3 \\ x_2 - 3x_4 - 2S_1 + 3S_2 &= 60 - 4x_3 \quad (2.25) \\ -2x_4 - 2S_1 - 2S_2 &= -340 + 6x_3 + G \end{aligned}$$

başlangıç eniyilenmiş çözüm ifadesine sahip olacaktır. Bu çözüm aslında, ($r_3 = 6$ kritik değeri ile x_3 ün etkisiz olarak yer aldığı) (1.10) eniyilenmiş çözümünün aynıdır. Ancak orada x_3 ün fiatının parametrik olarak değişmesinin net gelir üzerindeki doğrudan etkisi araştırılmıştı. Bu problemde ise, x_3 ün kendisi parametrik olarak değişmeye bırakılacak ve bunun net gelir üzerindeki dolaylı etkisi araştırılacaktır.

$x_3 = 0$ olduğu zaman (2.25) çözümünün eniyilenmiş kaldığı (1.10) dan bilinmektedir. $x_3 = t$ yazılarak (2.25) den ilk limitler;

$$x_1 = 10 + t \geq 0 \text{ ya da } t \geq -10$$
$$x_2 = 60 - 4t \geq 0 \text{ ya da } t \leq 15 \quad (2.26)$$

olarak elde edilir. Programlamanın $x \geq 0$ temel koşulu hatırlanırsa t için ilk geçerli aralık $0 \leq t \leq 15$ olarak saptanır. (t) nin bu aralıktaki değerleri için net gelir fonksiyonunun ilk doğrusal parçası;

$$G = 340 - 6t; \quad 0 \leq t \leq 15 \quad (2.27)$$

olacaktır.

(t) parametresi 15 değerine yaklaşırken sıfıra yaklaşan değişken x_2 olmaktadır. Bu nedenle $t > 15$ için x_2 çözümden çıkar. Çözüme x_4 girer. Yeni eniyilenmiş çözüm;

$$
\begin{aligned}
x_1 + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{2} S_1 + S_2 &= 50 - \frac{5}{3} t \\
x_4 - \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} S_1 - S_2 &= 20 + \frac{4}{3} t \qquad (2.28) \\
-\frac{2}{3} x_2 - \frac{2}{3} S_1 - 4S_2 &= 380 - \frac{26}{3} t - G
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. (t) için yeni limitler;

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 50 - \frac{5}{3} t \geq 0 \text{ ya da } t \leq 30 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.29) \\
x_4 &= 20 + \frac{3}{4} t \geq 0 \text{ ya da } t \geq 15
\end{aligned}
$$

olacak ve net gelir fonksiyonunun ikinci doğrusal parçası;

$$G = 380 - \frac{26}{3} t, \qquad 15 \leq t \leq 30 \qquad (2.30)$$

bulunacaktır.

$t > 30$ olduğu zaman x_1 çözümden çıkar ve çözüme S_1 değişkeni girer. Dönüştürme işlemleri sonunda (t) için yeni limitler ve net gelir fonksiyonunun son doğru parçası;

$$G = 480 - 12t; \qquad 30 \leq t \leq 40 \qquad (2.31)$$

olarak elde edilir. (t) nin 40 dan büyük değerleri için başka bir eniyilenmiş çözüm yoktur.

Parametrik eniyilenmiş çözümlerden sağlanan bulgular tablo (2.2) de gösterilmiştir. Bu tabloda beş sütun yer almaktadır. İlk iki sütundaki değerler açıklama gerektirmemektedir. Fırsat maliyetini tanımlayan üçüncü sütunun elemanları, F.M. $= 340 - G$ eşitliğinden elde edilmişlerdir. Dördüncü sütunun elemanları, her eniyilenmiş çözüm için değişken girdinin maliyeti olup, D.G.M. $= C_3 a_{33} t$ ifadesine sahiptir. Toplam maliyetleri belirleyen son sütun elemanları üç ve dördüncü sütun elemanlarının toplamlarından oluşmaktadır.

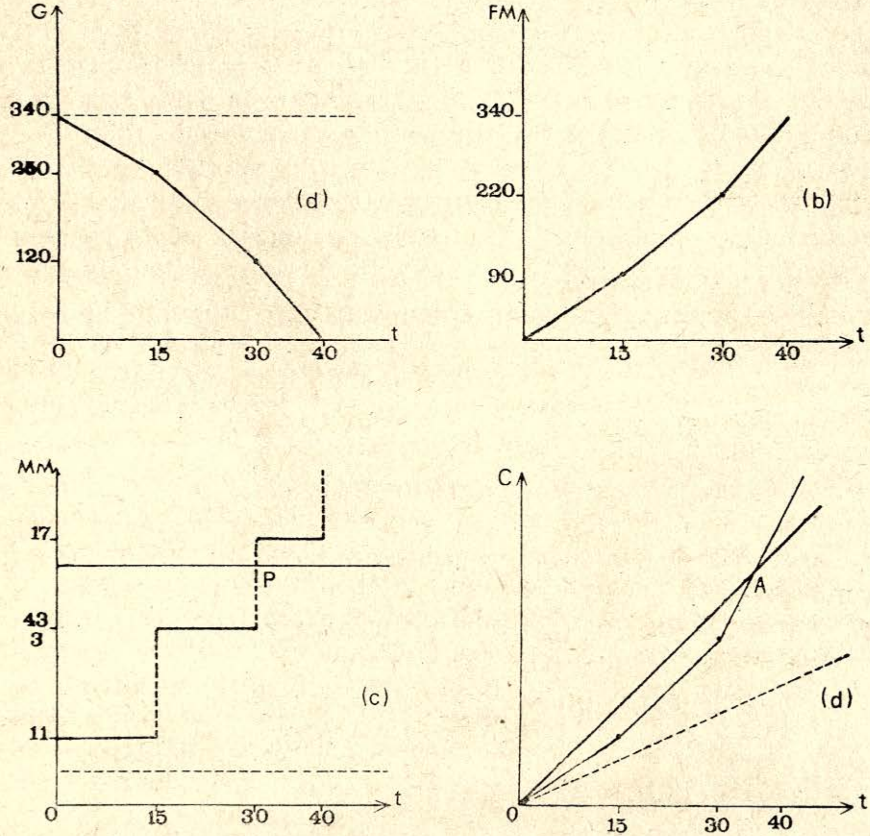
Tablo (2.2)

Bir çıktının toplam maliyeti

1	2	3	4	5
Sınırlar (t)	*Net gelir (G)*	*Fırsat maliyeti*	*Değişken gir. mali.*	*Toplam maliyet*
0 — 15	340— 6t	6t	5t	11t
15 — 30	$380 - \frac{26}{3}t$	$\frac{26}{3}$	5t	$\frac{41}{3}t - 40$
30 — 40	480— 12t	12t—140	5t	17t—140

Şekil (2.3)

Maliyet ve Gelir Eğrileri



Tablo (2.2) deki bulgulardan yararlanılarak şekil (2.3) deki grafikler çizilmiştir. Şekil (2.3 - a), diğer ürünlerden elde edilen net geliri (t) nin bir fonksiyonu olarak göstermektedir. (t) nin eniyilenmiş çözümlerle elde edilen her düzeyinde x_3 üretilmediği zaman fırsat maliyeti maksimum düzeyde olacaktır. Bu, net gelirde bir düşüşe neden olur. Net gelirdeki bu düşüş şekil (2.3 - a) da, tablo (2.2) in üçüncü sütunda görülen fırsat maliyetinin maksimum düzeyleri şekil (2.3 - b) de grafiklendirilmiştir. $t = 40$ olduğu zaman ikinci girdinin tabanı (80 birim) kullanılmış olmaktadır. (t) için, 40 dan büyük bir değer bulmak olasılı olmamaktadır. Bu nedenle fırsat maliyeti eğrisi bir noktada sona erer. Tabloda 4. sütun değerleri $C_3 = 1$ TL. ve $a_{33} = 5$ alınarak elde edilmiştir.

Bu aşamada $(t > 40)$ x_3 ün fiatı gözönüne alınarak, üretmeğe değer olup olmadığı, üretmeğe değerse eniyilenmiş düzeyin ne olduğu saptanabilir. Şekil (2.3 - d), toplam maliyet (C_3) e karşı toplam gelirin ($G = P_3x_3$) grafiğini göstermektedir. P_3 sıfırdan itibaren arttıkça gelir doğrusu okla gösterilen yönde döner. $P_3 = 11$ TL. olduğu zaman gelir doğrusu toplam maliyet eğrisinin ilk parçası ile çakışır. Bu durumda $G_3 - C_3 = 0$ olacağından bu doğru parçası boyunca (OA) firmanın hiç x_3 üretmemesi ya da herhangi bir düzeyde üretmesi farksızdır. P_3 de 11 TL dan itibaren sağlanacak küçük bir artış, gelir doğrusunun maliyet eğrisinden daha hızlı bir artış göstermesine neden olur. Eğer bu son durumda $x_3 = 15$ ise gelirle maliyet arasındaki fark maksimumdur. Bu tek eniyilenmiş durum $P_3 = \frac{41}{3}$ e kadar aynı noktada (A) kalır. $P_3 = \frac{41}{3}$ olduğunda bu çözüm geçerli değildir. Bu bölgede, $G_3 = \frac{41}{3} . x_3$ ve $C_3 = \frac{41}{3} . x_3 - 40$ ifadelerine sahip olduklarından paraleldir. AB doğru parçası boyunca bütün ürünler aynı net geliri verir. $P_3 \frac{41}{3}$ için $P_3 = 17$ TL na kadar B noktası tek eniyi olarak kalır. P_3 17 olduğunda bu eniyi de geçerliliğini yitirir. Fiattaki daha fazla artışlar firmanın olasılı kapasitesinin limitine kadar x_3 üretilmesine elvermektedir. Son durumda ($P_3 = 17$) yine $G_3 = 17x_3$ ve $C_3 = 17x_3 - 140$ olduğundan gelir doğrusu ile masraf eğrisinin son parçası paraleldir. Bu son durumdan daha fazladır. ($G_3 - C_3 = 140$ TL).

Genel firma kuramında bir ürünün marjinal maliyeti, toplam maliyet fonksiyonunun o ürüne göre değişimi, bir başka tanımla

(16) Bkz., Hendersen - Quant; Agk., s. 17

toplam maliyet fonksiyonunun söz konusu ürüne göre birinci kısmî türevi olmaktadır (16). Burada da durum farklı olmamaktadır. Toplam maliyet fonksiyonunun eğimi ya da toplam maliyetin ürüne göre değişimi;

$$\frac{\Delta C_3}{\Delta x_3}$$

x_3 ün marjinal maliyeti olmaktadır. Toplam maliyet fonksiyonu doğrusal olduğundan marjinal maliyet, toplam maliyet fonksiyonunda x_3 ün katsayıları olmaktadır. Bu katsayılar da (2.24) den;

$$w_3 = C_1a_{13}+C_2a_{23}+C_3a_{33}' = r_1a_{13}'+r_2a_{23}'+C_3a_{33} \qquad (2.32)$$

olarak yazılabilir. Burada ilk iki terim x_3 ün fırsat maliyeti katsayısıdır. Böylece, her birim için (marjinal maliyet = fırsat maliyeti — değişken birim maliyeti) olur. Şekil (2.3 - c) marjinal maliyet eğrisini göstermektedir. Yatay fiat doğrusu marjinal maliyet eğrisinin bir parçası ile ortak olduğu zaman, toplam gelir ve toplam maliyet doğruları çakışık ya da paralel bir fiat doğrusu ise bir uca karşılık gelir ve tek bir eniyilenmiş ürün seviyesi belirler ($W_3 = P_3$)

Şimdi, sunum miktarı marjinal maliyet terimleri ile açıklanabilir. Eğer P_3 düşey bir boşluktan geçiyorsa bu boşluğa karşılık gelen ürün miktarından daha fazla ürün miktarları için marjinal maliyet eğrisi fiat doğrusunun üzerine çıkar. Daha az ürün seviyelerinde ise fiat doğrusunun altında kalır. Düşey boşluğun yukarı uç noktasında toplam maliyet toplam gelirden daha hızlı artmaktadır. Boşluğun altında ise W_3 P_3 dür ve toplam gelir toplam maliyetten daha hızlı azalır. Yatay doğru parçaları boyunca ürünlerdeki artış ve azalışlar kâr üzerinde etkili olmadıklarından firma, düşey boşluğa karşılık gelen miktarlarda üretimde bulunacak ve bu boşluktan geçen herhangi bir fiat için bu üretimini sürdürecektir. Bir boşluk içinde fiatın değişmesi, şekil (1.1) de elde edilen sunum eğrisinin düşey bir parçasını çizer. Böylece marjinal maliyet eğrisinin düşey boşlukları aynı ürün için sunum eğrisinden başka bir şey olmamaktadır. Yine MM eğrisinin yatay parçaları sunum eğrisinin yatay boşlukları ile aynıdır. Bu açıklamadan çıkartılacak sonuç, bir ürün için MM eğrisinin o ürün için sunum eğrisi olarak kullanılabileceği olmaktadır. Ancak gözden kaçırılmaması gereken nokta marjinal maliyet, maliyetin ürün miktarı ile nasıl değiştiğini ölçerken ya da bir başka tanımla MM ürünün bir fonksiyonu iken, sunum eğrisinde sunulan ürün miktarının, fiatın bir fonksiyonu olduğudur. Bu nedenle MM eğrisi, sunum eğrisi olarak kullanıldığı zaman bağımlı ve bağımsız değişken yer değiştirmiş olmaktadır. MM eğrisinde ürün miktarı bağımsız değişkendir. Bunun sunum eğrisi olarak kullanılması halinde ise eniyilenmiş çözümde MM' e eşit oaln fiat, yatay etkendeki ürünün yerine düşey eksende bağımsız değişken, ürün miktarı da bağımlı değişken olur. Sürekli ve artan bir MM eğrisi için de durum aynıdır (17). Böyle eğrilerin düşey boşlukları ve yatay doğru parçaları olmayacağı açıktır. Firma, fiatı MM' ne eşit olan ürün miktarını seçeceğinden MM eğrisi düşey eksende her fiat için sunulan miktarı gösterir.

Genel ve alışılmış şekilde çizilen MM eğrisi sürekli, önce azalan sonra artan parabolik bir fonksiyonla ifade edilmektedir (18). Böyle bir eğri süreklilik nedeni ile yatay fiat doğrusunu en az bir noktada kesmelidir. Bu nokta eniyilenmiş ürün miktarını belirler ve şekil (2.3 - C) deki P noktasına karşılıktır. Sürekli MM eğrisinin azalan konumundan fiat doğrusu ile kesişmesi bir eniyiyi belirlememektedir. Böyle bir durumla karşılaşan firmanın genişlemesi yada toparlanması gerekir.

Sonuç olarak bir ürün için PDP yöntemi ile elde edilen MM eğrisi, aynı ürünün sunum eğrisi olarak kullanılmak isteniyorsa, bu eğrinin düşey boşlukları düşey doğru parçaları olarak, yatay doğru parçalarıda yatay boşluklar olarak çizilip değerlendirilmelidir. Üretim kapasitesinin son limitinde MM eğrisi bir noktada biter. Fakat sunum eğrisi yukarı doğru dikey bir biçimde devam eder.

3. GİRDİLER İÇİN İSTEM EĞRİSİNİN ELDE EDİLMESİ

3.1. Genel Girdi İsteme Fonksiyonunun elde edilişi

Üreticinin girdi istemi, ürettiği mala olan isteme göre şekillenir. Genel firma kuramında girdi istemi eğrileri, girdinin fiatı (R) ve ilgili ürünün satış fiatı (P) nin fonksiyonu olarak belirlenen girdi istemi fonksiyonu (X)'ndan elde edilir. Örneğin,

---

(17) Bkz., R. FRISCH; Agk., s. 58

(18) Thomas H. TAYLOR; Microeconomics and decision Models of the firm John M. VERNOW; Harcourt, Brace World, İn., New York 1969

$\alpha>0$, $\beta>0$ ve $\alpha+\beta<1$ koşulları ile belirlenen ve x_1, $x_2 \geq 0$ olarak tanımlanan bir üretim fonksiyonu;

$$q = Ax_1^{\alpha} \ x_2^{\beta} \tag{3.1}$$

ve net gelir fonksiyonu da;

$$G = PAx_1^{\alpha} \ x_2^{\beta} \ -r_1x_1-r_2x_2 \tag{3.2}$$

olsun. Bu fonksiyonun x_1 ve x_2 ye göre kısmî türevi;

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = P\alpha Ax_1^{\alpha-1} \ . \ x_2^{\beta} \ -r_1$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = P \ . \ \beta Ax_1^{\alpha} \ . \ x_2^{\beta-1} \ -r_2 \tag{3.3}$$

olarak bulunur. Türev ifadeleri sıfıra eşitlenip x_1 ve x_2 için çözüldüğünde elde edilen;

$$x_1 = \left(\frac{\alpha}{r_1}\right)^{\frac{(1-\beta)}{t}} . \left(\frac{\beta}{r_2}\right)^{\frac{\beta}{t}} . \ (Ap)^{\frac{1}{t}} \qquad (3.4) \ (19)$$

$$x_2 = \left(\frac{\alpha}{r_1}\right)^{\frac{\alpha}{t}} . \left(\frac{\beta}{r_2}\right)^{\frac{(1-\alpha)}{t}} . \ (Ap)^{\frac{1}{t}} \tag{3.5}$$

ifadeleri x_1 ve x_2 için girdi istem fonksiyonları olmaktadır. Bu fonksiyonların belirlediği eğriler de girdi istem eğrileridir. Her girdi istem eğrisi r_1 ve r_2 ile ters yönde, P ile aynı yönde artacaktır. Bunun nedeni; x_1 in fiatında artma yönündeki bir değişme karşısında diğer fiatlar sabitken firmanın x_1 kullanımını azaltacağıdır. Bu durum, girdi istemi fonksiyonunun girdi fiatına göre değişiminin ($\frac{\partial x_1}{\partial r_1}$) daima negatif olması sonucunu, bu nedenle üreticinin girdi istem eğrilerinin aşağıya doğru meyilli (azalan) olmasını gerektirir (20).

---

(19) (3.4) ve (3.5) fonksiyonlarında $t=1-\alpha-\beta$ olarak kısaltılmıştır.

(20) Henderson - Quant; Microeconomic Theory, A Mathematical Approach, Mc GRAW-Hill Book Company, New York 1971. s. 69

3.2. Bir Girdi İçin İstem Eğrisinin Çıkartılması

PDP yöntemi ile bir girdi için istem eğrisinin elde edilişi sunum, marjinal verimlilik ve marjinal maliyet eğrilerinin elde edilişinde uygulanan kavramsal deneyin benzeri bir yöntemi gerektirmektedir. Fiatı sistematik olarak değişen bir girdiden, firmanın ihtiyacı kadar miktarı alabileceği varsayılmaktadır. Firmanın amacı, girdinin her yeni fiatını kabul edip, varolan koşullarda eniyilenmiş olan ürün bileşimini belirlemektir. Söz konusu koşulların tam olarak belirlenmesi zorunludur. Çünkü, bunlar, eniyilenmiş çözümü ve her fiat seviyesinde istenen girdi miktarını etkilemektedir. Genel olarak teknolojik koşullar gibi ürün fiatları da sabit kalmaktadır. Girdiler için ise iki olasılı durum vardır: ya girdinin miktarı ya da fiatı sabittir. Çok sayıda girdi olduğunda bunlardan bazılarının fiatları, bazılarının da miktarları sabit olabilir. Genel durumda her belirli üretim bileşimi farklı bir girdi istem eğrisi belirler (21). Burada yalnızca girdinin miktarının sabit olduğu durum incelenecektir.

İncelemenin başında ele alınan doğrusal model, ilk girdi değişken girdi olarak alınıp amaç fonksiyonu da net gelire dönüştürülmüş olarak aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned} 3x_1+x_2+x_3 &= Z_1 \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4+S_2 &= 80 \\ 10x_1+4x_2+5x_3+6x_4-C_1Z_1 &= G \end{aligned} \tag{3.6}$$

bu doğrusal sistemde ilk eşitlik firmanın, birinci girdiden (Z_1) dilediği miktarda kullanabileceğini göstermektedir. (3.6) ifadesi Z_1 ve S_2 ye göre kanonik şekilde yazılırsa;

$$\begin{aligned} -3x_1-x_2-x_3-3x_4+Z_1 &= 0 \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4+S_2 &= 80 \\ (10-3C_1)x_1+(4-C_1)x_2+(5-C_1)x_3+(6-3C_1)x_4 &= G-O.C_1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.7) ifadesi, sabit girdinin tamamının aylak değişkene tahsis edildiği bir başlangıç çözümü olarak alınabilir. Bu aşamada değişken girdi hiç kullanılmamaktadır. Eğer değişken girdinin fiatı $C_1 \geq 5$ TL ise amaç katsayılarının tümü negatif olacağından çözüm eniyilenmiştir.

---

(21) Daniel C. VANDERMEULEN; Agk. S. 103

Bundan sonraki eniyilenmiş çözümlerde C_1 bir parametre olup, değişken girdinin fiatıdır. $C_1=5$ TL. olduğunda kârlılık marjına ulaşacak ilk değişken x_3 olacaktır. Bu nedenle ikinci aşamada x_3, S_2 nin yerine çözüme girer. İlk kısıtlayıcı denklem her zaman sağlanacağından, çözümlerin hiç birisinde dikkate alınmaz. Geriye kalan ikinci kısıtlayıcı temel sıra şekline konduktan sonra $(5-C_1)$ ile çarpılıp her bir terim amaç ifadesinden çıkartılırsa yeni eniyilenmiş çözüm;

$$x_1+\frac{1}{2}x_2+x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}S_2=40$$

$$(5-2c_1)x_1+\frac{2}{1}(3-C_1)x_2+\frac{1}{2}(7-5C_1)x_4-\frac{1}{2}$$
$$(5-C_1)S_2=G-40(5-C_1) \qquad (3.8)$$

olarak elde edilir. Çözümün eniyilenmiş kalması C_1 in $3 \leq C_1 \leq 5$ sınırları arasında bulunması koşuluna bağlıdır. Çünkü C_1 azaldıkça sıfıra yaklaşan ilk amaç katsayısı x_2 değişkenine aittir ve $\frac{1}{2}.\ (3-C_1) \leq 0$ koşulundan $C_1 \geq 3$ olarak elde edilir. $C_1 = 3$ olduğunda ikinci ürün kârlılık sınırına ulaşmış olur. C_1, $3 < C_1 < 5$ sınırları arasında kaldıkça çözüm eniyilenmiş olup üretim $x_3 = 40$ birim olarak gerçekleşir.

$C_1 \leq 3$ için x_3 çözümden çıkar, yerine x_2 geçer. x_2 nin temel olduğu kısıtlayıcı denklem $(3-C_1)$ ile çarpılıp yine her bir terim amaç ifadesinden çıkartılırsa;

$$2x_1+x_2+x_4+S_2=80$$
$$(2-C_1)x_1+(3-C_1)x_3+2(1-C_1)x_4-(4-C_1)S_2=G-80(1-C_1) \qquad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) çözümü $2 < C_1 < 3$ aralığında eniyilenmiştir. Üretim $x_2 = 80$ birimdir. C_1, 2 değerine yaklaştıkça kârlılık sınırına ulaşan ilk değişken x_1 olmaktadır. Bu nedenle çözümden çıkan x_2 yerine x_1 çözüme alınır. Dönüştürme işlemleri sonunda yeni eniyilenmiş çözüm;

$$x_1+\frac{1}{2}x_2+x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}S_2=40$$

$$-\frac{1}{2}(2-C_1)x_2-(5-2C_1)x_3+\frac{1}{2}(2-3C_1)x_4-\frac{1}{2}$$
$$(10-3C_1)S=G-40(4-3C_1) \qquad (3.10)$$

olarak bulunur. Bu eniyilenmiş çözüm sonunda C_1 azalırken katsayısı artan tek değişken x_4 olmaktadır. Bu nedenle, (3.10) çözümü $\frac{2}{3} < C_1 < 2$ aralığında eniyilenmiştir. Üretim $x_1 = 40$ birimdir. Böylece $C_1 \leq \frac{3}{2}$ olduğunda x_4, x_1 in yerine çözüme alınır. Gerekli işlemlerden sonra eniyilenmiş çözüm;

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + S_2 = 80$$

$$-(2-3C_1)x_1-2(1-C_1)x_2-(7-5C_1)x_3-3(2-C_1)S_2=G-240(1-C_1) \quad (3.11)$$

olacaktır. Bu son çözümde C_1 azalmağa devam ederse hiçbir değişkenin katsayısı artmamakta ve pozitif bir değerde bulunmamaktadır. Bu nedenle (3.11) çözümü elde edilebilecek son eniyilenmiş çözümdür. Çözüm $0 < C_1 < \frac{2}{3}$ aralığında eniyilenmiştir.

Aşağıdaki tabloda çözüm sonuçları özetlenmiştir. İlk sütunda değişken girdinin fiatının (C_1) parametrik değişimi, ikinci sütunda her fiat seviyesinde kullanımı gereken değişken girdi miktarı görülmektedir. Üçüncü sütun ise C_1 birinci sütunda belirlenen aralıklarda değişirken sabit girdinin fiatının değiştiği aralıkları belirlemektedir. Tablo (3.1) in ilk iki sütundan yararlanılarak çizilen «bir girdi için istem eğrisi» şekil (3.1) de gösterilmiştir. Değişken girdi fiatının (C_1 parametresinin), sınır değerleri aldığı zamanlarda istenen girdi miktarı belli olmamaktadır. Matematik dili ile, fiatın sınır değerleri aldığı limit konumlarda «değişken girdi istem fonksiyonu süreksizdir. Bu nedenle fiatın bu değerlerine karşılık gelen yatay doğrultular noktalı çizgilerle gösterilmiştir. Modelde yalnızca bir etkili kısıtlayıcı bulunduğu için geçerli temel çözümler tek bir üründen (değişkenden) oluşmaktadır. Noktalı yatay doğru parçaları boyunca işletme iki ürünün uygun bileşimlerini seçerek ilk girdinin herhangi miktarını kullanıp üretimde bulunabilir. Ancak yukarıda da belirtildiği gibi istem eğrisi yatay doğru parçaları boyunca tanımlı değildir.

Tablo (3.1)

Bir girdi için istem programı

Değişken girdinin		*Çözümdeki*	*Sabit girdinin*
Fiatı (C_1)	*Miktarı (Z_1)*	*değişken*	*Fiatı ($-r_6$)*
$C_1 > 5$	0	$S_2 = 80$	$y_2 = 0$
$5 > C_1 > 3$	40	$x_3 = 40$	0 y_2 1
$3 > C_1 > 2$	80	$x_2 = 80$	1 y_2 2
$2 > C_1 > \frac{2}{3}$	120	$x_1 = 40$	2 y_2 4
$\frac{2}{3} > C_1 > 0$	240	$x_4 = 80$	4 y_2 6

3.3 Problemin İrdelenmesi

Girdi istem eğrisinin her düşey parçası, farklı tek bir ürünün üretimi için istenen değişken girdi miktarının, fiatın hangi sınırları arasında eniyilenmiş kaldığını belirlemektedir. Örneğin; (2,3) aralığına karşılık gelen düşey doğru parçası fiat $2 < C_1 < 3$ iken x_2 nin üretildiğini ve bu üretim için 80 birim değişken girdi isteminin eniyilenmiş olduğunu belirler.

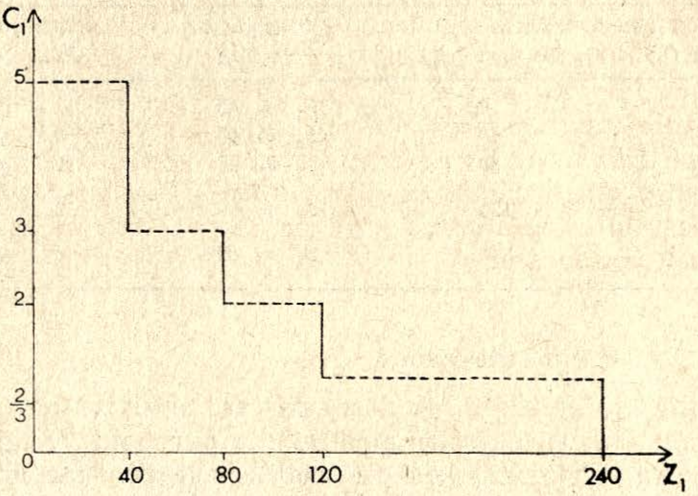
Böylece problemi doğru bir biçimde kurup, uygun parametreyi değiştirerek girdi istem eğrisi çıkartılabilir. Fakat girdi kullanımının gelir ve maliyet üzerindeki farklı etkilerini kıyaslıyarak firmanın satın almayı arzuladığı girdi miktarı için önceden de bir tahmin yapılabilir.

Şekil (2.4 - d) de gösterilmiş olan toplam gelir eğrisinin yanında tablo (2.1) in 1. ve 3. sütun elemanlarının çarpımından yararlanılarak değişken girdi için toplam maliyet $(C_1 = c_1 z_1)$ doğrusu da çizilebilir. $c_1 = y_1$, ilk yüksek düzeyinden itibaren azaldıkça maliyet doğrusu daha küçük pozitif eğilimli doğrulara dönüşür. $C_1 = C_1 Z_1$ doğrusunun, toplam gelir doğru parçasına eşit olduğu C_1 in bir yada birkaç değeri için belirsizlik durumu söz konusudur.

Daha önce, bir ürünün marjinal maliyet eğrisinin bazı değişik yorumlarla o ürün için sunum eğrisi olarak kullanılabileceği belirtilmişti. Benzer biçimde marjinal verimlilik eğrisi de girdi istem eğrisi olarak kullanılabilmektedir. Marjinal verimlilik eğrisinin yatay doğru parçaları girdi istem eğrisinin yatay boşlukları-

Şekil (3.1)

Gir girdi için istem eğrisi



na karşılık gelmektedir. Bir başka deyişle yine bağımlı ve bağımsız değişkenlerin yerleri değişmektedir.

Girdi fiatı doğrusu marjinal verimlilik eğrisindeki düşey bir boşluktan geçtiği zaman, Z_1 deki artışlar gelirin, maliyetten daha yavaş bir hızda artması sonucunu doğurur. Z_1 deki azalışlar ise gelirdeki azalışın maliyetin azalışından daha hızlı olmasına neden olur. C_1 düşey boşlukta değiştiği sürece Z_1 in eniyilenmiş miktarında hiçbir değişiklik olmaz. Bu durum, girdi istem eğrisinin düşey bir doğru parçasına karşılık gelir.

Firmanın alışılagelen genel ekonomik açıklanışında, marjinal verimlilik eğrileri sürekli ve azalan fonksiyonlarla temsil edilmektedirler. Bu durum, düşey boşlukların yok olup, herhangi bir fiat doğrusunun eğriyi zorunlu olarak kesmesi sonucunu doğurmaktadır. Eğri azalan bir eğri ise girdinin, kesim noktasına tekabül eden miktardan daha büyük ve daha küçük miktarları girdinin eniyilenmiş miktarlarını, bir başka tanımla girdi istem eğrisinin geometrik yerini belirler. Bağımlı değişkenin (Z_1) yatay miktar ekseninden düşey eksendeki girdi fiatına dönüştürülerek azalan marjinal verimlilik eğrisi, sürekli bir girdi istem eğrisi olarak açıklanabilir. Marjinal verimlilik eğrisi artan bir eğri ise fiat doğrusu ile kesişme noktaları maksimum net geliri göstermemektedir. Şekil

(2.3 - c) deki gibi süreksiz doğrusal marjinal verimlilik eğrilerinde fiat doğrusunun içinden geçtiği düşey boşluklar söz konusu eğri kavramı içinde hiçbir anlam taşımamakta, ancak girdi talebi eğrisininse tüm sürekli parçalarını (aralıklarını) belirlemektedir.

Aynı yöntemle bir değişken girdi ve birden çok sabit girdi bulunduran bir doğrusal model çözülerek bir girdi için istem eğrisi oluşturabilir. Bu, hem girdilerin sayısına bakmaksızın, diğerleri sabit olmak üzere bir girdinin marjinal verimlilik eğrisini elde ederek onun, girdi istem eğrisi olarak kullanılması biçiminde, hem de değişken girdi fiatını amaç kat, sayılarına aktararak dolaysız bir biçimde oluşturulur.