

CES FONKSİYONU

Dr. Hasan AŞKAN

A. GİRİŞ

Fonksiyon, Cobb - Douglas fonksiyonundan sonra **Marshallian** tipteki üretim fonksiyonlarındaki en önemli gelişmeyi oluşturur. Bu gelişim, Cobb-Douglas fonksiyonunun genelleştirilmesi ile sağlanmıştır. Fonksiyonun ikame elastikiyetinin değeri sabittir. Fakat bir elma koşuluyla sınırlandırılmıştır. Fonksiyona ilk defa 1954 yılında Dickinson'ın yazdığı makaledeki dipnotta rastlanmıştır (1). Fakat Nerlove'ın (2). Belirttiği gibi fonksiyon, 1956 yılında Swan ve Solow tarafından kullanılmasına karşın geniş kabul edilebilirliğini Arrow, Chenery, Minhas ve Solow'un birlikte yazdıkları makaleye borçludur.

Bu fonksiyonda, Cobb-Douglas fonksiyonunun elde edilmesinde olduğu gibi, işgücü payının gözlenmesi sonucunda elde edilmiştir. Kişi başına üretimin ücret seviyesinin değişen oranı olarak gözlenmesi (1) deki eşitliğin farklı olarak yazılmasını gerektirmiş-

-
- (1) H.D. Dickinson, «A Note on Dynamic Economics», *Review of Economic Studies*, C. XX, (1954) s. 182
 - (2) M. Nerlove., «Recent Empirical Studies of the CES and Related Production Functions», *The Theory and Empirical Analysis of Production*, der. M. Brown, Studies in Income and Wealth C. XXXI, 1. B., New York, National Bureau of Economic Research, 1967, s. 158

$$\left(\frac{W}{P}\right)L = \alpha Q \quad (1)$$

tır (2). Açıkıtır ki λ ın birden büyük olması, kişi başına üretimi üç-

$$\frac{Q}{L} = \alpha \left(\frac{W}{P}\right)^\lambda \quad (2)$$

ret haddinin artan bir fonksiyonu olarak belirler. α ve λ parametreleri, (2) nin logaritmik şekli olan (3) den tahmin edilebilirler.

$$\ln\left(\frac{Q}{L}\right) = \ln\alpha + \lambda \ln\left(\frac{W}{P}\right) \quad (3)$$

Şayet λ ın tahmin edilen değeri, anlamlı şekilde birden farklıken bir olarak sınırlandırılrsa, mantıksızlık yapılmış olur. Şimdi, (2) deki eşitliği veren fonksiyonun geriye gidilerek bulunmasına sıra gelir. Bilindiği üzere, herhangi bir fonksiyonda toplam üretim seviyesindeki değişiklik, işgücü ve kapital faktörlerinin üretimleri toplamına eşittir. Kısaca matematiksel olarak da, (4) de görüldüğü üzere yazılır. Ölçeğe sabit verimlerin varlığı da, dQ/Q , dK/K ve

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL \quad (4)$$

dL/L nin birbirlerine eşitliklerinin gerektirdiğinden (4) deki eşitlik, (5) de görüldüğü üzere yazılır. Kârını maksimize etmeyi

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial K} K + \frac{\partial Q}{\partial L} L \quad (5)$$

amaçlayan firmanın tam rekabet koşullarında, işgücünün ücretini $\left(\frac{W}{P}\right)$ marjinal verimliliğine eşitliyeceği hatırlanırsa, üretim miktarını veren eşitlik tekrar (6) da görüldüğü üzere yazılır.

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial K} K + \left(\frac{W}{P}\right)L \quad (6)$$

Eşitlikten elde edilen $(\frac{w}{P})$ nin eşiti (3) de yerine konulduğunda (7) veya (8) de görülen eşitlik elde edilir. Dolayısıyla, (8)

$$\ln\left(\frac{Q}{L}\right) = \ln\alpha + \lambda \ln\left(\frac{Q}{L} - \frac{K}{L} \frac{\partial Q}{\partial K}\right) \quad (7)$$

$$\frac{Q}{L} = \alpha \left(\frac{Q}{L} - \frac{K}{L} \frac{\partial Q}{\partial K}\right) \quad (8)$$

den (9) daki eşitliğe varılır. Eşitlikte $\alpha^{-1/\lambda}$ yerine a , $1/\lambda - 1$ yerine

$$\alpha^{-1/\lambda} \left(\frac{Q}{L}\right)^{1/\lambda} = \frac{Q}{L} - \frac{K}{L} \frac{\partial Q}{\partial K}$$

$$\frac{Q}{L} (1 - \alpha^{-1/\lambda} \left(\frac{Q}{L}\right)^{1/\lambda - 1}) = \frac{K}{L} \frac{\partial Q}{\partial K} \quad (9)$$

de p konulduğunda eşitliğin basit olarak ifade edilmesi sağlanır

$$\frac{Q}{L} (1 - a) \left(\frac{Q}{L}\right) = \frac{K}{L} \frac{\partial Q}{\partial K} \quad (10)$$

(10). İşgücü miktarı sabit tutulduğunda (L), eşitlik tekrar yazılır

$$\frac{\partial Q}{\left(\frac{Q}{L}\right) (1 - a) \left(\frac{Q}{L}\right)^\rho} = \bar{L} \frac{\partial K}{K} \quad (11)$$

lır (11). Eşitlikte, (12) de görüldüğü üzere düzenlenip integrali

$$\bar{L} = \frac{\partial Q}{Q} + \frac{a(Q/\bar{L})^{\rho-1} \partial Q}{1 - a(Q/\bar{L})^\rho} = \bar{L} \frac{\partial K}{K} \quad (12)$$

alındığında $(1/\rho) \ln\beta$ nin integralin sabiti olduğu, (13) de görü-

$$\bar{L} \ln Q - \frac{\bar{L}}{\rho} \ln(1 - a(Q/\bar{L})^\rho) = \bar{L} \ln K - \frac{1}{\rho} \ln\beta \quad (13)$$

len sonuç elde edilir. Eşitliğin anti logaritması alındığında da (14) de görülen eşitlik elde edilir. β , entegralin sabitinden elde edildiğinden Q ve K dan bağımsız olmasına karşın, işgücünün bir fonk-

$$\frac{Q}{(1-a(Q/\bar{L}))^{1/\rho}} = \frac{K}{\beta^{1/L\rho}} \quad ; \quad Q^\rho = (1-a(Q/\bar{L}))^\rho \frac{K^\rho}{\beta^{1/\bar{L}}}$$

$$\beta^{1/\bar{L}} \frac{Q^\rho}{K^\rho} + a \frac{Q^\rho}{L^\rho} = 1 \quad ; \quad \beta^{1/\bar{L}} \frac{K^{-\rho}}{Q^{-\rho}} + a \frac{\bar{L}^{-\rho}}{Q^{-\rho}} = 1$$

$$Q^{-\rho} = \beta^{1/\bar{L}} K^{-\rho} + a\bar{L}^{-\rho} \quad (14)$$

siyonu olabileceği hâlâ düşünülebilir. Eşitliğin L ye göre kısmi türevi alınarak, β ile L arasındaki ilişki belirlenebilir. (L, L ile K da K ile değiştirilerek, (3) deki eşitliğin gerçekleşmesi için β nın

$$-\rho Q^{-\rho-1} \partial Q = \frac{\partial}{\partial L} (\beta^{1/L} K^{-\rho}) - \rho \epsilon L^{-\rho-1} \partial Q \quad (15)$$

alacağı değer bulunacaktır.) Eşitliğin alınan türevi (15), görüldüğü üzere ancak $\frac{\partial}{\partial L} (\beta^{1/L} K^{-\rho})$ sıfır olduğunda $Q/L = (\frac{\partial Q}{\partial L})^\lambda$ şeklindeki eşitliği verir. Dolayısıyla $\beta^{1/L}$ nin L den de bağımsız olduğu görülür. Kapital ve üretim miktarından da bağımsız olduğu görüldüğünde, $\beta^{1/L}$ yerine bir sabit, μ konulduğunda, (14) CES fonksiyonunun temel şeklini verir. Fonksiyon, ölçüğe göre sabit verimler, tam rekabet koşullarında firmanın kârını maksimize etmeyi amaçlayacağı varsayımları ve orijinal $Q/L = \alpha w^\lambda$ izlenimi sonucunda zorunlu olarak elde edilir.

$$Q^{-\rho} = \mu K^{-\rho} + aL^{-\rho}$$

Fonksiyonun eşürün eğrilerinin şekilleri araştırılmağa başlamadan önce, dağılım ve verimlilik parametrelerinin ayrılmasında

da kullanılması zorunlu olacak ACMS (3) tarafından kullanılan yaklaşım, temel şekilden elde edilmelidir. Fonksiyonun temel şekli, (16) da görüldüğü üzere yazılıp, $(\mu+a)$ yerine $\gamma^{-\rho}$ konulursa, $Q^{-\rho}$ için yeni bir eşitlik elde edilir (17). Nihayet $\mu\delta^{\rho}$ yerine de

$$Q^{-\rho} = (\mu+a) \left(\frac{\mu}{\mu+a} K^{-\rho} + \frac{a}{\mu+a} L^{-\rho} \right) \quad (16)$$

δ konularak, kullanılan yaklaşım (18) de görüldüğü üzere elde edilmiş bulunur.

$$Q^{-\rho} = \gamma^{-\rho} (\mu\gamma^{\rho} K^{-\rho} + (1-\mu\gamma^{\rho}) L^{-\rho}) \quad (17)$$

$$Q = \gamma (\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho})^{-1/\rho} \quad (18)$$

Fonksiyonun eşürün eğrilerinin şekilleri, üretim miktarı sabit tutularak araştırılır. Fonksiyonun toplam türevi (19) sıfıra eşitlendiğinde dK/dL , nin eşiği (20) de görüldüğü üzere kolayca elde edilir.

$$Q = \{-1/\rho\gamma(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-(1/\rho)-1} \cdot -\rho\delta K^{-\rho-1}\} dK \\ + \{-1/\rho\delta(\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho})^{-(1/\rho)-1} \cdot -\rho(1-\delta)L^{-\rho-1}\} dL \quad (19)$$

$$\frac{dK}{dL} = - \frac{(1-\delta)}{\delta} \left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1} \quad (20)$$

Eşitlik, görüldüğü üzere eşürün eğrisinin eğimini faktörlerin birleşim oranlarının bir fonksiyonu olarak belirler, ρ eksi bir olduğunda, $dK/dL = -(1-\delta)/\delta$ değerini alır. Eşitinin gerek payı ve gerekse paydası sabit olduğundan, eşürün eğrisi bir doğrudur. ρ nin değeri eksi birle, sıfır arasında bulunduğu, kapital işgücü oranı arttığında $MTIH_k$ nin değeri artacağından eşürün eğrisi orijine dışbükeydir ve gerek işgücü ve gerekse kapital eksenlerini ke-

(3) K.J. Arrow, H.B. Chenery, B.S. Minhas ve R.N. Solow, «Capital and Labor Substitution and Economic Efficiency», *Review of Economics and Statistics*, C. XLIII, (1961), s. 230

ser. ρ sıfır olduğunda, işgücü ve kapital eksenleri eşürün eğrilerinin asimptotları olurlar. ρ sıfır değeri aldığıında, λ da bir olacağından bu eşürün eğrileri, Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun eşürün eğrileridir. Fakat ρ sıfır olduğunda, CES fonksiyonunun Cobb-Douglas fonksiyonuna döneceği açık değildir. ρ sıfır olduğunda (21) da görüldüğü üzere yazılan fonksiyonun sol ve sağ yanı bire

$$Q^{-\rho} = \delta^{-\rho} (\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}) \quad (21)$$

eşit olur. Problemden, l'Hopital kuralından yararlanarak kaçınılabilir. Fonksiyonun türevi alındıktan sonra parametrenin aldığı değer yerine konulur. Bulunan eşitliğin (22), entegrali alındıgın

$$-\delta Q^{-(1-\rho)} dQ = -\gamma^{-\rho} \delta \rho K^{-(1+\rho)} dK - \rho \gamma^{-\rho} (1-\delta) L^{-(1+\rho)} dL$$

$$\frac{dQ}{Q(1-\rho)} = \gamma^{-\rho} \delta \frac{dK}{K(1+\rho)} + \gamma^{-\rho} (1-\delta) \frac{dL}{L(1+\rho)}$$

$$\frac{dQ}{Q} = \delta \frac{dK}{K} + (1-\delta) \frac{dL}{L} \quad (22)$$

da logaritmik olarak yazılmış bulunan eşitlik, (23) de görüldüğü üzere elde edilir. Eşitlikte görülen $\ln A$, integralin sabitini oluşturur. Eşitliğin antilogaritması alındığında $Q = AK^\delta L^{(1-\delta)}$ bu-

$$\ln Q = \delta \ln K + (1-\delta) \ln L + \ln A \quad (23)$$

lunur. CES fonksiyonu elde edilirken, ölçüğe göre sabit verimler varsayıldığından, elde edilen Cobb-Douglas fonksiyonu da ölçüğe göre sabit verimlere sahiptir. ρ nın değeri sıfırdan büyük olmasında da sık sık yapılan yanlışlığın aksine işgücü ve kapital eksenleri, eşürün eğrilerinin asimptotları değildirler. Eşürün eğrilerinin asimptotları eksenlerle çakışmaz. (4) Eşürün eğrilerinin (24) ve

(4) T. Supel ve S. Garson, «A Note on the Asymptotes of the CES Production Function in the Case where $\sigma < 1$ », *Review of Economics and Statistics*, C. LII, (1970), s. 337

$$K = \left\{ \frac{1}{\delta} \left(\frac{Q}{Y} \right)^{-\rho} - \frac{(1-\delta)}{\delta} L^{-\rho} \right\}^{-1/\rho} \quad (24)$$

$$L = \left\{ \frac{1}{(1-\delta)} \left(\frac{Q}{Y} \right)^{-\rho} - \frac{(1-\delta)}{\delta} K^{-\rho} \right\}^{-1/\rho} \quad (25)$$

$$K = \frac{Q\delta^{1/\rho}}{Y} \quad , \quad L = \frac{Q}{Y} (1-\delta)^{1/\rho} \quad (26)$$

rı veren eşitlikler elde edilir (26), ρ değerinin sonsuza yaklaştığında da, faktörlerin birleşim oranlarının zorunlu olarak sabit kaldığı duruma yaklaşılır. Eğrinin eğimi, kapital - işgücü oranının birden küçük oluşunda sıfır birden büyük oluşunda sonsuz ve bir olduğunda da $-(1-\delta)/\delta$ olacaktır. Dolayısıyla CES fonksiyonu, ρ değerlerinin eksi birle sonsuz arasında bulunduğu bütün eşürün eğrilerini kapsar.

B. FONKSİYONUN VERİMLİLİK, DAĞILIM ve İKAME PARAMETRELERİ

Fonksiyonun görüldüğü üzere, üç parametresi varsa da bunların iktisadi anlamdaki manaları ilk bakışta anlaşılabilir. Fakat önceden bilinmelidir ki, bu fonksiyonun da ikame elastikiyeti parametresi vardır. Dolayısıyla ilk olarak bu parametrelerden hangisinin, ikame elastikiyeti parametresini temsil ettiği bulunmalıdır. Fonksiyonda, kapital ve işgücünün marjinal verimlilikleri, sırasıyla (27) ve (28) de görüldüğü üzere bulunur. Eşitlikler, faktörlerin kullanım ve üretim miktarlarının bir fonksiyonudur ve değerleri, bütün terimleri pozitif olduğundan da pozitif miktarda faktör kullanımlarında pozitiflerdir. Faktörlerin kullanım miktarları, sıfır

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \delta \gamma^{-\rho} \left(\frac{Q}{K} \right)^{1+\rho} \quad (27)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = (1-\delta) \gamma^{-\rho} \left(\frac{Q}{L} \right)^{1+\rho} \quad (28)$$

dan sonsuza artarken, marjinal verimliliklerinin değeri de monotonik olarak azalır. Gerçekten de, Euler teoreminden (29) ve (30) da eşitleri yazılmış bulunulan fonksiyonun ikinci kısmı türevlerin de yararlanılırsa, sonuç elde edilir. Marjinal verimliliklerin eşitlerinden, kapitalin işgücü için olan marjinal teknik ikame haddi $(-dK/dL)$, fonksiyonun toplam türevinden de elde edilen

şeklinde kolayca bulunur (31). s nin eşitinin kapital-işgücü ora-

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = (1+\rho) \delta \gamma^{-\rho} \left(\frac{Q}{K}\right)^\rho \left(\frac{K(\partial Q/K) - Q}{K^2}\right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = (1+\rho) (1-\delta) \gamma^{-\rho} \left(\frac{Q}{L}\right) \left(\frac{L(\partial Q/\partial L) - Q}{L^2}\right) \quad (30)$$

nına (x) göre türevi alındığında, bulunan eşitlik (32) tersine çevrilip, s-x oranı ile çarpılırsa, bilindiği üzere bulunacak sonuç ta-

$$s = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) \left(\frac{K}{L}\right) (\rho+1) \quad (31)$$

nımından ötürü ikame elastikiyetinin parametresi olacaktır (33). Sonuç ikame elastikiyetinin değerini gerçekten sabit ve $1/(1+\rho)$

$$\frac{ds}{dx} = (\rho+1) \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) \left(\frac{K}{L}\right)^\rho \quad (32)$$

olarak verdiğinden, değeri fonksiyonun ρ parametresi tarafından tek bir değer belirlenir. Kısaca ikame elastikiyeti, marjinal teknik ikame haddini veren eşitlikte kapital - işgücü oranının üssünün

$$\frac{dx}{ds} \frac{s}{x} = \rho = \frac{\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) \left(\frac{K}{L}\right) (\rho+1)}{(\rho+1) \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) \left(\frac{K}{L}\right)^\rho \left(\frac{K}{L}\right)} = \frac{1}{(\rho-1)} \quad (33)$$

tersidir. İkame elastikiyeti parametresinin neden s nin eşitinde yer aldığı da kolayca anlaşılabilir. İkame elastikiyetinin değeri büyük olduğunda, faktörler birbirinin yerlerine kolayca ikame edilebilirler. s nin değeri ise, diğerleri sabitken faktörlerin birbirlerinin yerlerine kolay ikame edilmelerine karşın kolay ikame edilememelerinde işgücü miktarındaki bir birim azalmanın daha fazla miktarda kapital gerektireceğini verir. Birbirlerinin yerlerine kolay ikame edilebilen faktörler ekonomik açıdan birbirlerine benzerler. İkame elastikiyetinin, küçük bir değer alması ise faktörlerin birbirlerine benzemediklerini gösterir. Ve değerinin büyük olmasına karşın, s değerindeki artma kapitalin verimliliğinin azalmaya daha hızlı başlamasına neden olur.

ρ yerine $(\frac{1}{\lambda} - 1)$ konulduğunda görüleceği üzere ikame elastikiyeti λ ya eşit olacağından doğrudan doğruya (3) den yararlanarak tahmin edilebilir. Değeri bir olduğunda, λ nın da değeri bir olur ve üretim ilişkilerinin şekli Cobb-Douglas ile ifade edilir.

Burada sırası gelmişken, CES fonksiyonunun ilave bir özelliğinden de söz edilmelidir. Faktörlerden birinin miktarı sabit kaldığında, diğerinin miktarı sınırsız olarak artmağa başladığında fonksiyon asimptotik davranış içine girer. Aşağıda görüleceği üzere bu sonuç, bütünüyle ikame elastikiyetinin alacağı değere bağlıdır. Kapitalin miktarı sabit kalırken, işgücünün kullanım miktarının sonsuza doğru arttırıldığını varsayalım. Fonksiyonun limitinin değeri ρ yerine ikame elastikiyeti cinsinden eşiti yazıldığında (34), ikame elastikiyetinin alacağı değere bağlıdır. Değerinin birden büyük olması halinde, (35) den görüldüğü üzere üretimin

$$\lim_{L \rightarrow \infty} Q = \lim_{L \rightarrow \infty} \{ \delta K^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\delta)L^{(\sigma-1)/\sigma} \}^{\sigma/(\sigma-1)}$$

(34)

miktarı sonsuz olacağından herhangi bir asimptotun varlığı söz

$$\lim_{L \rightarrow \infty} Q = \lim_{L \rightarrow \infty} \{ \delta K^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\delta)L^{(\sigma-1)/\sigma} \}^{\sigma/(\sigma-1)} \rightarrow \infty$$

(35)

konusu olmaz. Öte yandan ikame elastikiyeti değerinin birden küçük olması halinde, limit için belirli bir değer elde edilir. (34) deki eşitliğin üsleri negatif olacağından, (36) da görülen sonuç

$$\lim_{L \rightarrow \infty} Q = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{Y}{\left\{ \frac{\delta}{K^{(1-\sigma)/\sigma}} + \frac{(1-\delta)}{K^{(1-\sigma)/\sigma}} \right\}^{\sigma/(1-\sigma)}} = \gamma \delta^{\sigma/(\sigma-1)} K_{-}$$

(36)

elde edilir. Bu sonuçların arkasındaki ekonomik neden açıktır. İkame elastikiyetinin birden büyük olması demek, faktörlerin teknolojik açıdan birbirlerine benzemesi demektir. Teknoloji miktarı sınırsız olarak arttırılan faktörün, miktarı sabit kalan faktörün yerine kolayca ikame edilmesine olanak verir. Dolayısıyla her iki faktörün de miktarı sınırsız olarak artmış olacağından, üretime

katıldıkları malın miktarı da sınırsız olarak artar. Öte yandan değerinin birden küçüklüğü, faktörlerin teknolojik açıdan nispi olarak birbirlerine benzememeleri demektir. Miktarı arttırılan faktörün, miktarı sabit kalan faktör yerine ikamesi zordur. Faktörlerden birinin miktarı sınırsız olarak arttırılırsa bile üretilen mal miktarı, miktarı sabit kalan üretim faktörü tarafından teknik açıdan sınırlandırılır.

Marjinal verimliliklerinin davranışları da, toplam üretimin davranışıyla uyum içindedir. İkame elastikiyetinin değeri birden büyük olduğunda, işgücünün kullanımı miktarı sonsuza yaklaştığında işgücünün marjinal verimliliğinin limiti için (37) de görü-

$$\begin{aligned}
 \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{Q}{L} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\gamma(1-\delta) \{ \delta K^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\delta)L^{(\sigma-1)/\sigma} \}}{L^{1/\sigma}} \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \gamma(1-\delta) \left\{ \delta \left(\frac{K}{L} \right)^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\delta) \right\}^{1/(\sigma-1)} \\
 &= \gamma(1-\delta)^{\sigma/(\sigma-1)}
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

len sonuç elde edilir. Bulunan sonuç pozitif olduğundan, kapitalin kullanım miktarı sabitken işgücünün kullanım miktarının sınırsız olarak arttırılması, işgücünün marjinal verimliliğinin sifıra yaklaşmasına neden olmaz. Aksine marjinal verimliliğinin değeri, asimptotik olarak belirli pozitif bir limite yaklaşacağından toplam üretimin miktarı da sınırsız olarak artar. Öte yandan ikame elastikiyetinin değerinin birden küçüklüğü, işgücünün kullanım miktarının sınırsız olarak arttırıldığında marjinal verimliliğinin sifıra yaklaşmasına neden olur. İşgücünün kullanım miktarı sonsuza yaklaşırken $\left\{ \left(\frac{K}{L} \right)^{(1-\sigma)/\sigma} \right\}$ da sonsuza yaklaşacağından, bu sonuç limit analizinden derhal elde edilir (38).

Fonksiyonun dağılım ve verimlilik parametrelerinin ayrılabilinmeleri için, yukarıda belirtildiği üzere ACMS yaklaşımından yararlanılır. Fonksiyonun γ parametresindeki artma üretim miktarında da orantılı bir artmaya neden olur. Dolayısıyla Cobb-Douglas fonksiyonunun A parametresi ile eş anlamlıdır ve verimlilik parametresi olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned}
\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial Q}{\partial L} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \gamma (1-\delta) \left\{ \delta \left(\frac{K}{L} \right)^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\delta) \right\}^{1/(\sigma-1)} \\
&= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\gamma (1-\delta)}{\left\{ \delta \left(\frac{K}{L} \right)^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\delta) \right\}^{1/(1-\sigma)}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{38}$$

Fonksiyonun δ parametresi ile faktörlerin payları arasındaki ilişki de bulunabilir. (Parametre, faktör yoğunluğu parametresi olarak da adlandırılabilir. Marjinal teknik ikame haddi eşitlenmeden görüleceği üzere, verilen σ ve s değerlerinde büyük δ değerleri, kapital-işgücü oranının artmasına neden olur. Dolayısıyla büyük δ değerleri, her üretim noktasında daha kapital yoğun tekniklerin kullanılmasını gerektirirler.) Tam rekabet koşullarında, marjinal teknik ikame haddi $w-r$ oranına eşitlenmek istendiğinden, (39) daki eşitlik yazılır. Eşitlik işgücünün üretimdeki payının kapitalinkine oranı olarak düzenlendiğinde de, (40) elde edilir. Hattırlanacağı üzere, Cobb-Douglas fonksiyonunda faktörlerin payla-

$$\frac{w}{r} = \left(\frac{1-\delta}{\delta} \right) \left(\frac{K}{L} \right)^{\rho+1} \tag{39}$$

$$\frac{wL}{rK} = \left(\frac{1-\delta}{\delta} \right) \left(\frac{K}{L} \right)^{\rho} \tag{40}$$

rı oranı sabit ve $\alpha/(1-\alpha)$ ya eşit idi. Dolayısıyla fonksiyonların dağılım parametreleri, birbirlerinin aynısı değildir. Bununla birlikte CES fonksiyonunda da, ikame elastikiyetinin ve faktörlerin birleşim oranlarının verilen değerlerinde, üretimin faktörler arasındaki dağılımı δ parametresi tarafından belirlenir.

CES fonksiyonunda da, fonksiyonun doğrusal homojen olması halinde, üretim faktörleri fiyatları sabit kaldığında toplam maliyetin yalnız üretim miktarının bir fonksiyonu olduğu gösterilebilir. K^* ve L^* , maliyetleri minimize eden üretim faktörleri oranında, Q birim üretim için gereken kapital ve işgücü miktarını belirlerse, gelişim yolunun tanımından (41), K^* yı veren eşitlik (42) de görüldüğü üzere yazılır. Bulunan eşiti fonksiyonda yerine (48) de görüldükleri üzere yazılabilineceğinden, toplam maliyeti

konulduğunda fonksiyon 43 de görüldüğü üzere yazılır. Fonksiyon L^* ters çözüldüğünde bulunan sonuç (44), (42) de yerine konulduğunda K^* yı veren eşitlik (45) de görüldüğü üzere elde edilir. Q birim üretiminde toplam maliyeti $(rK^* + wL^*)$, dolayısıyla (46) da görüldüğü üzere yazılır. Eşitliğin sağ yanındaki ilk parantezin içi (42), ikinci parantezin içi de (48) de görüldükleri üzere yazılabileneğinden, toplam maliyeti

$$\left(\frac{K}{L}\right)^{-(1-\rho)} = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) \frac{r}{w} \quad (41)$$

$$K^* = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{-\rho} \left(\frac{r}{w}\right)^{-\rho} L^* \quad (42)$$

veren eşitlik (49) da görüldüğü üzere daha basitçe yazılır.

$$Q = \gamma \left\{ \delta \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{1-\sigma} \left(\frac{r}{w}\right)^{1-\sigma} L^{*\sigma} (\sigma-1) / \sigma + L^{*\sigma} (\sigma-1) / \sigma \right\} \sigma / (\sigma-1) \quad (43)$$

$$L^* = \frac{Q}{\gamma} \left\{ \delta \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{1-\sigma} \left(\frac{r}{w}\right)^{1-\sigma} + (1-\delta) \right\}^{\sigma / (1-\sigma)} \quad (44)$$

$$K^* = \frac{Q}{\gamma} \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{-\sigma} \left(\frac{r}{w}\right)^{-\sigma} \left\{ \delta \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{1-\sigma} \left(\frac{r}{w}\right)^{1-\sigma} + (1-\delta) \right\}^{\sigma / (1-\sigma)} \quad (45)$$

$$TM = \frac{Q}{\gamma} \left\{ \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{-\sigma} r^{(1-\sigma)} w^{\sigma} + w \right\} \left\{ \delta \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{1-\sigma} \left(\frac{r}{w}\right)^{1-\sigma} + (1-\delta) \right\}^{\sigma / (1-\sigma)} \quad (46)$$

$$TM = \frac{Q}{\gamma} \left\{ \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{-\sigma} r^{(1-\sigma)} w^{\sigma} + w \right\} \left\{ \delta \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{1-\sigma} \left(\frac{r}{w}\right)^{1-\sigma} + (1-\delta) \right\}^{\sigma / (1-\sigma)} \quad (47)$$

$$r \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{-\sigma} \left(\frac{w}{r}\right)^{\sigma} + w \quad (48)$$

$$\left(\frac{1-\delta}{w}\right)^{\sigma / (1-\sigma)} \left\{ r \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{-\sigma} \left(\frac{w}{r}\right)^{\sigma} + w \right\}^{\sigma / (1-\sigma)} \quad (49)$$

$$TM = \left(\frac{1-\delta}{w}\right)^{\sigma / (1-\sigma)} \left\{ r \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\sigma} \left(\frac{w}{r}\right)^{\sigma} + w \right\}^{1 / (1-\sigma)} \frac{Q}{\gamma} \quad (49)$$

Toplam maliyet üretim miktarının doğrusal bir fonksiyonu olduğundan da, verilen sabit faktör fiyatlarında marjinal ve ortalama maliyetler birbirlerine eşit olup, maliyetlerin elastikiyetleri de aynı değere sahiptirler. Cobb-Douglas üretim fonksiyonu ile ara-

sındaki temel fark, yalnızca fonksiyonun σ ya sahip olmasındandır. Fonksiyonun bütün terimlerinin pozitif olması (50) deki eşitsizliklerin yazılmasına olanak verir. İlk eşitsizlik, maliyetlerle verimlilik parametresi arasındaki beklenen ters orantılı ilişkiyi gös-

$$\frac{dTM}{d\gamma} < 0, \quad \frac{dTM}{d\sigma} < 0 \quad (50)$$

terir. İkinci eşitsizlik ise, ikame elastikiyetinin büyük değerinin diğerleri sabitken maliyet seviyesinin düşük düzeyde oluşmasına olanak vereceğini gösterir.

C. FONKSİYONUN TAHMİNİ

Fonksiyonun γ , δ ve ρ parametreleri, doğrusal regresyon analizinden yararlanıp tahmin edilemedikleri gibi değişkenlerin logaritmaları alınarak da fonksiyon doğrusallaştırılamaz. Parametrelerin tahminleri için, iki farklı yöntemden yararlanılır.

1. Parametrelerin tahminlerinin sırasıyla yapılması:

Bu yöntemle ρ nın tahmininden başlanarak sırasıyla δ ve γ parametreleri tahmin edilir.

a) ρ parametresinin tahmini :

Fonksiyonun işgücüne göre kısmi türevi alındığında, bulunan sonuç (28) ücrete eşitlendiğinde (31) de görüldüğü üzere doğrusallaştırılabilir. Ücretin eşitinden $(-\rho \ln \gamma + \ln(1-\delta))$ ve $(1-\rho)$ nin tahminleri elde edilir. İlkinde ρ , γ ve δ parametreleri birbirlerinden ayrılmazlarken, $(1-\rho)$ den ρ parametresi kolayca bulunur.

$$\left(\frac{K}{L}\right)^{-(1-\rho)} = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) \frac{r}{w}$$

$$\ln \frac{w}{P} = -\rho \ln \gamma + \ln(1-\delta) + (1+\rho) \ln \left(\frac{Q}{L}\right) \quad (51)$$

b) δ parametresinin tahmini :

Şimdi de fonksiyonun kapitale göre kısmi türevi alınıp, bulunan sonuç (27) kapitalin ücretine eşitlenir. Ücretlere eşitlenen kısmi türevler eşitleriyle birlikte birbirlerine bölündüğünde bilindiği üzere, marjinal teknik ikame haddi, $w-r$ oranı eşitliği elde edilir. ρ , $K-L$ ve $w-r$ oranları bilindiğinden eşitlikten yararlanıldığında, $(1-\delta)/\delta$ adi regresyon analizinden yararlanılarak bulunur.

c) γ parametresinin tahmini :

Nihayet ρ ve δ parametreleriyle Q , K ve L nin değerleri bilindiğinden fonksiyona dönülüp, γ parametresi doğrudan doğruya regresyon analizinden yararlanarak tahmin edilir.

2. Parametrelerin Diğer Tahmin Yöntemi:

γ , δ ve ρ parametreleri Şayet w , r , K , Q ve L nin değerleri bilinirse, faktörlerin marjinal verimliliklerinin ücretlerine eşitleyen eşitlikler logaritmik hale dönüŐtürülerek tahmin edilebilirler.

Bu yöntem bize aynı zamanda, gerçekten (K/Q) nn ssnn (L/Q) nn ss ile aynı olup olmadığını kontrol etme olanağını verir. Bu Dhrymes (5) tarafından yapılmış ve üslerin birbirlerinden farklı oldukları bulunmuŐtur. Dhrymes tarafından tahmin edilen iki eşitliğe (52) ve (53) ve π nin aŐırı karı belirttiği, faktörlerin toplam gelirlerinin ilave toplam değere eşitliğini gerektiren muhasebe eŐitlięine (54) sahip olduğumuzu varsayalım. Son eŐitli-

ęin her iki yanını malın fiyatına bölerek terimlerini gerçek değerlere çevirirsek, muhasebe eşitliği yeniden (55) de görüldüğü üzere yazı-

$$\frac{r}{p} = c \left(\frac{Q}{K} \right)^d \quad (53)$$

lır. (52) ve (53) deki eşitleri yerlerine konulup ve denge halinde de

$$\pi + wL + rK = Qp \quad (54)$$

π nin sıfır olacağı hatırlandığında, (55) den (56) da görülen eşitlik elde edilir. Beklendiği üzere bu eşitlik, ölçeğe göre sabit verimleri

$$\frac{\pi}{p} + \left(\frac{w}{p} \right) L + \left(\frac{r}{p} \right) K = Q \quad (55)$$

temsil eder ve b, d ye eşit olduğunda CES fonksiyonuna dönüşür.

(5) P.J. Dhrymes, «Some Extensicus adn Tests for the CES Class of Production Functions», *Review of Economics and Statistics*, C. XLVII, (1965) s. 357 - 366

Fonksiyon (52) ve (53) de yazılmış bulunan deneysel eşitliklerden elde edilmiş bulunup, faktör payları toplamının üretilen ilave değe-

$$a \frac{L^{1-b}}{Q^{-b}} + c \frac{K^{1-d}}{Q^{-d}} = Q \quad (56)$$

re eşitliğinin gerçekleşmesi için mantıken zorunlu koşuldur. Fonksiyon ikame elastikiyetlerinin sabit kaldığı fonksiyonlar sınıfından değildir ve şayet (52) ve (53) deki eşitlikler kabul edilirse CES üretim fonksiyonu hipotezi reddedilmelidir. Fonksiyonun, tam rekabet koşullarının yokluğunda geçerli olan CES tipindeki bir fonksiyon olduğu da söylenemez. Çünkü, elde edilmişine görüldüğü üzere piyasa koşulları ile ilgili herhangi bir varsayım yapılmadı. Ayrıca fonksiyonun işgücüne göre alınan kısmî türevi, (52) deki eşitlikle belirtilen ilişkiyi de vermez. Dolayısıyla, ACMS nin elde edilmesinin dayandığı tam rekabet koşullarının varlığı varsayımında reddedilmelidir.

Şayet CES tipi üretim fonksiyonu üzerinde ısrar edilecekse, (52) veya (53) deki eşitliklerden birinden vazgeçilmelidir. Dhrymes (53) deki eşitlikten vazgeçip, tam rekabet koşullarının yokluğunda (52) deki eşitliğe dayanan CES fonksiyonu elde etmiştir. Elde ettiği fonksiyonun basit bir örneği alınarak, bazı ilgi çekici sonuçlar belirtilebilir. Şayet yalnız işgücü piyasasında tam rekabet koşulları geçerli değilse işgücünün marjinal maliyetinin ücret haddine eşitliği yerine daha karışık bir fonksiyonla karşılaşılır. Toplam maliyetin eşitinden ($wL + rK$), işgücünün marjinal maliyeti (57) de görüldüğü üzere elde edilir. Parantez içindeki

$\frac{\partial w}{\partial L} \frac{L}{w}$ ifadesi, işgücü kullanım miktarına göre ücretin elastikiyetidir. (İşgücü arz eğrisinin elastikiyetinin tersi) Kısaca. ε_{wL} ile

$$\begin{aligned} \frac{\partial TM}{\partial L} &= \frac{\partial w}{\partial L} L + w \\ &= w \left(\frac{\partial w}{\partial L} \frac{L}{w} + 1 \right) \end{aligned} \quad (57)$$

gösterilirse, (57) deki eşitlik tekrar kısa olarak ifade edilebilir (58). Öte yanda kâr maksimizasyonu, $\partial TM / \partial L$ nin $\partial Q / \partial L$ ye eşit-

$$\frac{\partial TM}{\partial L} = w (\varepsilon_{wL} + 1) \quad (58)$$

liğini gerektirdiğinden (59) daki eşitlik yazılır. Toplama koşulu ve ölçüğe göre sabit verimlerin varlığının neden olduğu (60) daki

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = w(\epsilon_{wL} + 1) \quad (59)$$

eşitlikte yerine konulduğunda, elde edilen eşitlik (61), w yi verecek şekilde (62) de görüldüğü üzere düzenlenebilir. Eşitlikten bu-

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial K} K + \frac{\partial Q}{\partial L} L \quad (60)$$

lunan w nin eşiti, (3) de yerine konulduğunda, (63) de görülen

$$Q = \frac{\partial Q}{\partial K} K + w(\epsilon_{wL} + 1) L \quad (61)$$

eşitlik elde edilir. Dolayısıyla de (64) de görülen eşitliğe varılır.

$$w = \left(\frac{Q}{L} - \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{L} \right) \frac{1}{(\epsilon_{wL} + 1)} \quad (62)$$

$$\ln\left(\frac{Q}{L}\right) = \ln a + \lambda \ln\left(\frac{Q}{L} - \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{L}\right) \left(\frac{1}{\epsilon_{wL} + 1}\right) \quad (63)$$

$$\frac{Q}{L} = \frac{a}{(\epsilon_{wL} + 1)^\lambda} \left(\frac{Q}{L} - \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{L}\right)^\lambda$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{1/\lambda} \left(\frac{Q}{L}\right)^{1/\lambda} (\epsilon_{wL} + 1) = \frac{Q}{L} - \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{K}{L}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{1/\lambda} (\epsilon_{wL} + 1) \left(\frac{Q}{L}\right)^{1/\lambda - 1} - 1 = \frac{K}{\partial K} \frac{\partial Q}{Q} \quad (64)$$

Bu eşitlik, $\left(\frac{1}{a}\right)^{1/\lambda} (\epsilon_{wL} + 1)$ yerine a, $(1/\lambda - 1)$ yerine de ρ konulduğunda, (65) de

$$a \left(\frac{Q}{L}\right)^{\rho - 1} = \frac{K}{\partial K} \frac{\partial Q}{Q} \quad (65)$$

görülen eşitlik yazılır. Dikkat edildiğinde görülür ki, bu eşitlik CES fonksiyonunun elde edilmesinde yararlanılan, eşitliğin (15) aynıdır. Ve yukarıda bulunan CES fonksiyonunun temel şekli, gene elde edilir. Bununla birlikte şimdi a , $(\frac{1}{\alpha})^{1/\lambda} (\epsilon_{wL} + 1)$ yerine yazılmıştır. Fonksiyon, (66) da görüldüğü üzere bu yeni şekliyle yazılınca da, üretim fonksiyonları ile ilgili iki sorunun var-

$$Q^{-\rho} = \mu K^{-\rho} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\lambda} (\epsilon_{wL} + 1) L^{-\rho} \quad (66)$$

lığı ortaya çıkar. a parametresi yalnız işgücü ve üretim arasındaki fiziksel ilişkilerin değil piyasa koşullarının da bir fonksiyonudur. İşgücünün arz eğrisinin elastikiyeti değiştiğinde fonksiyonun parametresinin değeri de değişecektir. Dolayısıyla bu anlamda kullanılan üretim fonksiyonu, alışlagelen anlamda kullanılmamaktadır. Diğer bir sorun da, yalnız a parametresinin tahmin edilebilirliğinden doğar. Fakat parametrenin tahmini $(\frac{1}{\alpha})^{1/\lambda}$ ve $(\epsilon_{Lw} + 1)$ bölmülerinin ayrı ayrı tahmin edilebilmesine olanak vermez. Bu **identification** probleminin tipik bir örneğidir (6). Kısaca üretim fonksiyonunun fiziksel özellikleri, parametrelerin tahminlerinden bulunamaz.

Dhrymes, bunu gerçekleştirmeğe çalışmıştır. **Cross-section**'a ait bilgilerden yararlanmış ve örnekte, firmanın karşılaşacağı işgücü arzının elastikiyetinin, işgücü kullanım miktarının toplam işgücü arzına oranı değiştikçe değişeceğini varsaymıştır. Gerçekten de toplam işgücü oranının %50 sini kullanan firmanın karşılaştığı elastikiyet, yalnız toplam işgücünün % 5 ini kullanan firmanın karşılaştığı elastikiyetten farklıdır. Bu ayrı aksaklık indeksinden yararlanıldığında, fonksiyon tekrar (67) de görüldüğü üzere

$$Q^{-\rho} = \mu K^{-\rho} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\lambda} L^{-\rho} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/\lambda} Q (C_I L^{-\rho}) \quad (67)$$

re yazılır. Fonksiyonda, $X C_I$, ϵ_{wL} ye eşit ve C_I de düzenlenen aksaklık indeksidir. Fonksiyonun parametreleri sırasıyla μ , $(\frac{1}{\alpha})^{1/\lambda}$ X dir ve $(\frac{1}{\alpha})^{1/\lambda}$ X sıfırdan anlamlı şekilde farklıysa tam rekabet koşullarının gerçekleşmediği sonucuna varılır.

(6) R.J. Wonnacott ve T.H. Wonnacott, *Econometrics*, 1. B., New York, John Wiley and Sons, Inc., 1970, s. 80

D. TEKNOLOJİK İLERLEME

Teknolojik ilerleme fonksiyona iki yoldan sokulabilir. Fonksiyonun parametrelerinden yalnız γ ve δ teknolojik ilerlemeden etkilenir. ρ parametresi, görüldüğü üzere fonksiyonun ikame elastikiyetini belirler ve tanımdan ötürü sabit kalır.

1. Teknolojik ilerlemenin, γ ve δ parametrelerini etkilediği şekilde düşünülmesi.

Zaman boyunca γ parametresinde oluşan değişim, verilen faktör miktarlarıyla üretilen mal miktarını etkiler. Fakat verilen faktör fiyatlarında, faktörlerin birleşim oranları bu değişimden etkilenmez. Marjinal teknik ikame haddini, faktörlerin ücretleri oranına eşitleyen (39) deki eşitlik hatırlandığında, faktörlerin birleşim oranlarının γ parametresindeki değişimlerden etkilenmeyeceği derhal görülür. Dolayısıyla γ parametresindeki değişimlerle ifade edilen teknolojik ilerlemeler, Hicks anlamında yansızdırlar. Ve üretim faktörlerinin nispi paylarını, yalnız ikame elastikiyetinin değeri ve faktörlerin arzlarındaki nispi değişimin yönü etkiler. Kapital-işgücü oranında oluşan artma, ikame elastikiyetinin değerinin birden küçük veya büyük oluşuna göre, üretimde işgücünün nispi payının artmasına veya azalmasına neden olur.

Öte yanda δ parametresindeki değişimlerin, faktörlerin birleşim oranları üzerinde etkileri vardır (39) da yazılı eşitlikten görüleceği üzere, ρ nun değerinin eksi birden büyük oluşunda, δ parametresinin değerinin artması işgücü-kapital oranının azalmasına neden olacağından, işgücü miktarını arttırıcı teknolojik ilerleme ile karşılaşmış bulunulur. Parametrenin değerindeki azalma ise, aksine kapital miktarını arttırıcı teknolojik ilerlemeye neden olur.

Bu fonksiyonda, Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun aksine yanlı teknolojik ilerlemelerin üretimi nasıl etkileyecekleri önceden bilinebilir. δ parametresinin değeri arttığında, kapital faktörü miktarındaki artma, işgücü faktörünün miktarındaki artmadan büyükse, üretim miktarı artacaktır. Fakat işgücü faktörü miktarındaki artmanın hızı, kapital faktörü miktarındaki artma hızından daha büyükse, parametredeki değişim ve büyüme hızları miktarlaştırılmadan teknolojik ilerlemenin üretim seviyesi üzerindeki etkisi ile ilgili birşey söylenemez.

2. Teknolojik ilerlemenin faktörlerin verimliliklerini etkilemesi şeklinde düşünülmesi.

Üretim faktörleri verimlilikleri birimiyle ölçüldüğünde fonksiyon (68) de görüldüğü üzere yazılır. Fonksiyonda, K ve L sırasıyla e^{mt} K ve e^{mL} yerlerine yazılmışlardır. Şayet faktörlerin ve-

$$Q^{-\rho} = \gamma^{-\rho} \{ \delta \bar{K}^{-\rho} + (1-\delta) \bar{L}^{-\rho} \} \quad (68)$$

rimlilikleri zaman boyunca aynı oranda artıyorsa, fonksiyon (69) da görüldüğü üzere yazılır. Dolayısıyla faktörlerin verimliliklerindeki aynı oranda değişimler, γ parametresindeki değişimle ifade edilirler ($\gamma = \gamma e^{mt}$). Yukarıda görüldüğü üzere, γ parametresindeki

$$Q^{-\rho} = \gamma^{-\rho} \{ \delta e^{-mt\rho} K^{-\rho} + (1-\delta) e^{-mt\rho} L^{-\rho} \}$$

$$Q^{-\rho} = \gamma^{-\rho} e^{-mt\rho} \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}$$

$$Q = \gamma e^{mt} \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}^{-1/\rho} \quad (69)$$

değişimle ifade edilebilen teknolojik ilerlemeler, Hicks anlamında yansız teknolojik ilerlemelerdir.

Son zamanlarda, istatistiksel testlere uygun model sağladığından, teknolojik ilerlemelerin bütünüyle faktör miktarlarını arttırıcı modeli geniş bir kabul edilebilirliğe kavuşmuştur. Bütünüyle faktör miktarlarını arttırıcı teknolojik ilerleme ile, genel CES fonksiyonu (70) de görüldüğü üzere yazılır. Teknolojik ilerlemenin

$$Q = \{ (A(t)K)^{-\rho} + (B(t)L)^{-\rho} \}^{-1/\rho} \quad (70)$$

yanlılığını veren (71) de yazılmış bulunan eşitlikten (7) teknolojik ilerlemenin yanlılığının yönü araştırılabilir. İkame elastiki-

$$Y = \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \left(\frac{dA/dt}{A} - \frac{dB/dt}{B} \right) \quad (71)$$

yetinin değerinin birden küçük olduğunda şayet dA/dt , dB/dt den büyükse veya değerinin birden büyük oluşunda, şayet dB/dt , dA/dt

(7) C.E. Ferguson, *The Neoclassical Theory of Production and Distribution*, 1.B., London, The Cambridge University Press, 1969, s. 244

den büyükse, işgücü kullanan teknolojik ilerleme ile karşılaşılır. Cümlede uygun değişiklikler yapıldığında, kapital kullanan teknolojik ilerleme varlığı için gerekli koşullar elde edilir.

İşgücünün nispi payındaki değişmeyi de, (72) de görülen eşitlik verir (8). Parantez içi, kapital - işgücü oranındaki değişimin

$$\frac{d\alpha/dt}{\alpha} = -(1-\alpha) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left\{ \left(\frac{dA/dt}{A} + \frac{dK/dt}{K}\right) - \left(\frac{dB/dt}{B} + \frac{dL/dt}{L}\right) \right\} \quad (72)$$

efektif gross haddi olarak düşünülebilir. Bu haddin pozitif olduğu varsayılırsa, ikame elastikiyeti değerinin birden küçük veya büyük oluşuna göre, işgücü nispi payındaki değişim haddi pozitif veya negatif olur.

Harrod anlamında yansızlıkla, bu modele kolayca sokulabilir. Uzawa'nın (9) gösterdiği gibi, Harrod anlamında yansızlık için, (73) de yazılan koşullar gerçekleşmiş bulunmalıdır. Ve bu koşul-

$$\frac{dA/dt}{A} > 0, \quad \frac{dB/dt}{B} > 0 \quad (73)$$

lar gerçekleştirildiğinde, fonksiyon (74) de görüldüğü üzere yazılır.

$$Q^{-\rho} = \gamma^{-\rho} \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) (Le^{mt})^{-\rho} \} \quad (74)$$

lır. Fonksiyon, ikame elastikiyetinin değeri bir olduğunda, Hicks ve Harrod anlamındaki yansızlıkların koşullarını bir arada sağlar. Fonksiyonda, teknolojik ilerlemenin yanlılığını ve işgücünün nispi payındaki değişim haddini, sırasıyla (75) ve (76) da görülen

$$Y = -m \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \quad (75)$$

$$\frac{d\alpha/dt}{\alpha} = -(1-\alpha) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{dx/dt}{x} - m\right) \quad (76)$$

eşitlikler verir. Eşitliklerden, $-em$ nin sıfırdan büyük veya küçük oluşuna göre, teknolojik ilerlemenin Hicks anlamında kapital ve-

(8) Ibid., s. 244

(9) H. Uzawa, «Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium». *Review of Economic Studies*, C. XXVIII, (1961), s. 112

ya işgücü kullanan tipde olduğu bulunur. Ayrıca eşitlikten, şayet işgücü miktarındaki büyüme haddi, kapital-işgücü oranının büyüme haddinden büyükse, işgücü nispi payının büyüme haddinin pozitifliği ile ikame elastikiyeti değerinin birden büyük olmasının, birbirleriyle bağdaşacağı görülür.

Harrod anlamındaki yansız teknolojik ilerlemenin tam ters simetriği olan Solow anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeyi veren üretim fonksiyonunda, (77) de görüldüğü üzere yazılır.

$$Q^{-\rho} = \gamma^{-\rho} \{ \delta (Ke^{mt})^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho} \} \quad (77)$$

Cobb-Douglas üretim fonksiyonundan farklı olarak, teknolojik ilerlemenin her üç şekli de deneysel olarak birbirlerinden ayırdedilebilirler. Çünkü, cebirsel ifadeleri birbirlerinden farklıdır. Bu farklılık fonksiyonun parametrelerinin tahminine engel oluşturmaz. Örnek olarak Hicks anlamındaki yansız teknolojik ilerleme alınırsa, Q,K,L nin değerleri bilindiğinden $-1/\rho$ ve δ parametrelerinin tahmininin, faktörlerin marjinal verimliliklerini ücretlerine eşitleyen eşitliklerden sağlanabileceği görülür. Fonksiyon (78) de görüldüğü üzere yazılabilir olduğundan, (79) daki logaritmik eşit-

$$Q = \gamma e^{mt} (x) \quad (78)$$

lik elde edilir. t değerine sahip olduğundan, eşitlikten γ ve m parametrelerinin ayrı ayrı tahminleri elde edilir.

$$\ln Q = \ln \gamma + mt + \ln x \quad (79)$$

Harrod anlamında yansız teknolojik ilerlemeyi veren fonksiyondan da parametrelerin tahminleri kolayca elde edilir. Fonksiyonun işgücüne göre alınan kısmi türevi (80), (81) de görüldüğü gibi doğrusallaştırıldığında, eşitlikten ρ ve m parametrelerinin ayrı olarak tahminleri elde edilebilir. $(\rho+1)$ den ρ parametresinin, t

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \gamma^{-\rho} (1-\delta) e^{-\rho mt} \left(\frac{L}{Q}\right)^{-(\rho+1)} \quad (80)$$

$$\ln\left(\frac{W}{P}\right) = -\ln \gamma + \ln(1-\delta) - \rho mt - (\rho+1) \ln\left(\frac{L}{Q}\right) \quad (81)$$

nin katsayısından da ρ değeri bilineceğinden m nin tahminleri elde edilir. Eşitliğin sağındaki iki terim tek bir sabiti oluşturduklarından, parçaları birbirlerinden ayırılmaz.

Solow anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeyi veren fonksiyonun da parametreleri, Harrod anlamındaki yansız teknolojik ilerlemeyi veren fonksiyondan parametrelerin elde edilmesi gibi elde edilir. Yalnız ücretle (L/Q) arasındaki ilişkinin yerini, kapitalin ücreti ile (K/Q) arasındaki ilişki alır.

E. FONKSİYONDA ÖLÇEĞE GÖRE VERİMLER

v ile ölçeğe göre verimlilik parametresi belirtilirse, fonksiyonun daha az kısıtlanan şekli (82) de görüldüğü üzere yazılır. Fonksiyonun ikame elastikiyetinin eşiti gene $1/(1+\rho)$ dur. Fakat artık ölçeğe verimler bire eşit değildir. Fonksiyon, (83) de görüldüğü

$$Q = \gamma \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \}^{-v/\rho} \quad (82)$$

$$Q^{-\rho/v} = \gamma^{-\rho/v} \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \} \quad (83)$$

$$\frac{-\rho}{v} dQ \frac{Q^{-\rho/v}}{Q} = -\gamma^{-\rho/v} \rho \left\{ \delta \frac{K^{-\rho}}{K} dK + (1-\delta) \frac{L^{-\rho}}{L} dL \right\}$$

(84)

gibi yazılabileceğinden, (84) de yazılan eşitlik elde edilir. Ölçeğe göre

verimlerin araştırılması, (dL/L) nin (dK/K) ya eşitliğini gerektirdiğinden sırasıyla (85) ve (86) da görülen eşitlikler elde edilir. Dolayısıyla, kapital ve işgücünün kullanılmasındaki %10 luk

$$\frac{dQ}{Q} \frac{Q^{-\rho/v}}{v} = \frac{dK}{K} \gamma^{-\rho/v} \{ \delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \} \quad (85)$$

bir artma, üretim seviyesinde %10. v miktarında bir artmaya neden olur. v parametresi değerinin, birden küçük veya büyük olu-

$$\frac{dQ}{Q} = v \frac{dK}{K} \quad (86)$$

şunda, ölçeğe göre azalan veya artan verimlerle karşılaşılır. Değerinin bir oluşunda, ölçeğe göre verimler sabit kalacağından fonksiyon orijinal şekline dönüşür.

Fakat bu parametre, kullanılan kapital ve işgücü faktörünün gerçek miktarı bilinmeden, üretim miktarındaki değişimin ne kadarlık kısmının, üretim ölçeğinin sağladığı tasarruflardan yararlanmaya ait olduğunu doğru olarak göstermez. Verilen bir teknoloji, ölçeğe göre yüksek verimlere neden oluyorsa, firmanın kullandığı üretim faktörlerinin miktarı sifıra yaklaşık olduğunda, teknolojinin bu ölçekte kullanılmasının neden olduğu kazançlar mutlak anlamında küçüktürler. v parametresindeki değişikliklere, teknolojik ilerlemelerin neden olduğu yaklaşık olarak söylenebilir. Fakat üretim ölçeğindeki değişikliklerinde parametrelerde değişikliklere neden olabileceği açıktır.

Burada belirtilmelidir ki, Cobb-Douglas üretim fonksiyonunda ölçeğe göre verimlilik parametresine sahiptir. Tekrar l'Hopital kuralı uygulandığında elde edilen eşitlikte (87), ρ nın değeri sıfır

$$\frac{dQ}{Q} \frac{Q^{-\rho/v}}{v} = \gamma^{-\rho/v} \left\{ \delta \frac{K^{-\rho}}{K} dK + (1-\delta) \frac{L^{-\rho}}{L} dL \right\} \quad (87)$$

olduğunda, (88) de görülen eşitlik bulunur. Eşitliğin entegrali

$$\frac{dQ}{Q} = \delta v \frac{dK}{K} + (1-\delta) v \frac{dL}{L} \quad (88)$$

alındığında, $\ln A$ nın entegralin sabiti olduğu logaritmik eşitlik

$$\ln Q = \delta v \ln K + (1-\delta) v \ln L + \ln A \quad (89)$$

elde edilir (89). Ve bu eşitliğin antilogaritması alındığında, (90) da görülen fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyonda, ölçeğe göre ve-

$$Q = AK^{\delta v} L^{(1-\delta)v} \quad (90)$$

rimleri faktör üslerinin toplamı verdiğiinden, v ölçeğe göre verimler parametresidir. Böylece Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun ölçeğe göre verimlilik parametresi, CES fonksiyonundan elde edilmiş bulunmaktadır.

F. SONUÇ

Cobb-Douglas üretim fonksiyonunda, Q , K ve L değişkenleri indeks sayılarına indirgenerek, A sabit oranının doğuracağı boyut problemlerinin bazılarında kaçınılmazdır. Bu CES fonksiyon-

nunda yapılamaz. Değişkenlerin şimdiki değerle değerlendirildiği fonksiyon, başlangıç dönemi değerleriyle değişkenlerinin değerlendirildiği fonksiyona bölünmesi, değişkenlerinin indeks sayılarına indirgendiği fonksiyonu vermez. Kısaca γ verimlilik parametresinin değeri, ρ veya Q , K ve L nin birimlerinden bağımsız kılınamaz. Toplama problemi ile ilgili yukarıda söylenenler bu fonksiyon için de tekrarlanabilir.

CES fonksiyonu, faktörlerin gerek birbirlerinin yerlerine ikame edilebilirliğine ve gerekse birbirlerinin tamamlayıcısı olabilirliliğine olanak verdiği için, yalnız uzun-dönem araştırmalarında kullanılması gibi bir kısıtlamağa gidilmesine gerek bırakmaz. Fakat belirtmelidir ki, fonksiyonun parametrelerinin tahminlerinde, şayet doğrusal regresyon teknikleri kullanılıyorsa, yapılması gereken faktörlerin marjinal maliyetlerinin marjinal verimliliklerinin kıymetlerine eşit olduğu varsayımının, faktörler birbirlerinin tamamlayıcıları olduklarında, nasıl gerçekleştirildiğini anlamak güçtür. Şayet bir birim kapitalin kullanılması, dört birim işgücünün kullanılmasını gerektiriyorsa, dördüncü birimin marjinal verimliliğinin kıymeti, üretim faaliyeti sonunda elde edilen üretimin kıymeti, üretim faaliyeti sonunda elde edilen üretimin toplam miktarıdır. Beşinci birim işgücünün marjinal verimliliği se, sıfır olur. Dolayısıyla, faktörlerin marjinal gelirleri, marjinal maliyetlerine eşitlenirse, faktörlerin birbirlerinin tamamlayıcıları olabilme olasılığının olmadığı varsayılmalıdır.

Yukarıda söylendiği üzere, verimlilik parametresi iki kuvvetin etkisini kapsar. Ölçeğe göre verimler, verilen teknoloji seviyesinde ölçeğin arttırılması nedeni ile oluşmuş olabileceği gibi, ölçek sabit kaldığında teknolojik ilerleme de üretim miktarında bir artmaya neden olabilir. Bu iki etkide, dolayısıyla homojenlik parametresini etkileyebilir. Deneysel uygulamalarda, etkinlikleri sonuçlarını birbirlerinden ayrılabilinmesi olanak içinde olmayabilir.

Diğer bir güçlük ise, fonksiyonun n faktöre genelleştirilmesinin de rastlanan güçlüktür. Aşağıda özetlenen Uzawa'nın (10) genelleştirilmesi başarılı olmasına karşın, ikame elastikiyeti değerinin sabitliği çerçevesinde kaldığından tam bir genelleştirme değildir.

$$Q = \gamma \{ \delta_1 x_1^{-\rho} + \delta_2 x_2^{-\rho} + \dots + \delta_n x_n^{-\rho} \}^{-1/\rho} \quad (91)$$

(10) H. Uzawa «Production Functions with Constant Elasticity of Substitution», *The Review of Economic Studies*, C. XXIX, (1962), s. 291-299

x_1, x_2, \dots, x_n ile üretim faktörleri belirlenirse, ilk genelleştirilme, fonksiyon (91) de görüldüğü üzere yazıldığında gerçekleşir. Görüldüğü üzere fonksiyon doğrusal homojendir ve bütün faktörler için azalan verimleri kapsar. Ve herhangi iki faktör arasındaki ikame elastikiyeti değerinin diğer faktör çiftleri arasındaki ikame elastikiyeti değerine eşit olduğu varsayılır. Bu çok kısıtlayıcı varsayımı, Uzawa ikinci genelleştirmesinde terkeder. Dört faktörü kullanan bir üretim faaliyetini düşünelim. Faktörlerden x_1 ve x_2 , σ_{12} kadar bir kolaylıkla, x_3 ve x_4 de σ_{34} kadar bir kolaylıkla birbirlerinin yerine ikame edilsinler. x_1 ve x_3 faktörlerinin kısmi ikame elastikiyeti σ_{13} nin, x_1 ve x_4 faktörlerinin kısmi ikame elastikiyeti σ_{14} nin ve gene σ_{23} ve σ_{24} nin değerleri bir olsun. Bu koşulları gerçekleştiren fonksiyon (92) de görüldüğü üzere yazılır. Fonksi-

$$Q = \rho (\delta_1 x_1^{-\rho_{12}} + \delta_2 x_2^{-\rho_{12}})^{-\alpha_1 / \rho_{12}} (\delta_3 x_3^{-\rho_{34}} + \delta_4 x_4^{-\rho_{34}})^{-\alpha_2 / \rho_{34}} \quad (92)$$

yonda ρ_{hk} ve δ_2 ler önceden olduğu gibi sabittirler (93). α lar toplamının da bir olarak seçilmesi, ölçüğe göre sabit verimlerin varlığını garantiler. Fonksiyonun anlamı, x_1 ve x_2 , x_3 ve x_4 ün ortak kısmi ikame

$$\rho_{12} = -\left(1 - \frac{1}{\sigma_{12}}\right), \quad \rho_{34} = -\left(1 - \frac{1}{\sigma_{34}}\right) \quad (93)$$

elastikiyetleri farklı olan iki seti oluşturması ve iki farklı sete ait değişkenler arasındaki kısmi ikame elastikiyetleri değerlerinin birle sınırlandırılmış olmasıdır. Fonksiyon, ölçüğe göre verimlerin sabit ve faktörlerin verimliliklerinin azalmakta olması özelliğine sahiptir. Fonksiyonun ölçüğe göre verimlerin sabitliği özelliği, kolayca istenildiğinde terkedilebilir. Değişik setlere ait değişkenler arasındaki, kısmi ikame elastikiyeti değerinin birle sınırlandırılması, fonksiyon için bir güçlüğü oluştursa da, şimdiye kadar bulunan en genel sabit elastikiyetli üretim fonksiyonudur. Fonksiyonun parametreleri de kolayca tahmin edilebilir. f_1, f_2, f_3, f_4 üretim fonksiyonunun faktörlere göre sırasıyla kısmi türevlerini ve p_1, p_2, p_3 ve p_4 de faktörlerin fiyatlarını belirtirse, (94) de yazılan eşitlikler elde edilir. Önceden hangi değişkenlerin, hangi setlere ait oldukları bilinmediğinden, (94) deki bütün eşitlikler tahmin edilmelidir. Eşitliklerden bir tanesi alınarak incelenebilir. İkinci satırdaki ikinci eşitlik alındığında (95) de görülen eşitlik yazılabilir. Bu eşitlik logaritmik eşitliğe çevrildiğinde de, parametrelerin tahminleri elde

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_2} &= \frac{p_1}{p_2}, \quad \frac{f_1}{f_3} = \frac{p_1}{p_3}, \quad \frac{f_1}{f_4} = \frac{p_1}{p_4} \\ \frac{f_2}{f_3} &= \frac{p_2}{p_3}, \quad \frac{f_2}{f_4} = \frac{p_2}{p_4} \\ \frac{f_3}{f_4} &= \frac{p_3}{p_4} \end{aligned} \quad (94)$$

edilir. Şayet σ_{24} nin tahmini birden farklı bulunursa, faktörlerin aynı sete ait olduğu sonucuna varılır. Şimdi de $f_2/f_3 = p_2/p_3$ tah-

$$\left(\frac{\delta_2}{\delta_4}\right) \left(\frac{x_4}{x_2}\right)^1 / \sigma_{24} = \frac{p_2}{p_4} \quad (95)$$

min edilir. Elde edilen σ_{23} nin tahmini σ_{24} nin tahminine eşit bulunursa, x_2 , x_3 ve x_4 ile belirtilen faktörlerin aynı sete ait oldukları sonucuna varılır. Bu yolla setler saptandıktan sonra, δ ve σ parametreleri tahmin edilir. Bu tahminler fonksiyonda yerlerine konulduktan sonra, fonksiyon logaritmik olarak yazılırsa, ρ ve α parametrelerinin tahminleri de elde edilir.

Nihayet fonksiyonun ikame elastikiyeti değerinin, faktörlerin birleşim oranlarından etkilenip etkilenmediklerinin bilinmediğinin belirtilmesi gerekir. Fakat bu güçlüğü, bütünüyle genel bir fonksiyon bulununcaya kadar katlanılmalıdır. Eldeki veriler ve istatistik teknikleriyle, genel bir fonksiyonun tahmin edilmesinin olanaksız olması ve genel fonksiyonların, Neo-klasik koşulları bütünüyle sağlayamamaları sabit elastikiyetli üretim fonksiyonunun kullanılmasına devam edilmesini zorunlu kılar.

