

**BAZI TEK FREKANS KESTİRİCİLERİNİN
PERFORMANS ANALİZİ**

Ahmet HANILÇI



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI TEK FREKANS KESTİRİCİLERİNİN PERFORMANS ANALİZİ

Ahmet HANILÇI
ORCID: 0000-0002-8330-8320

Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

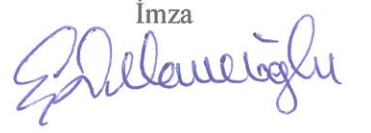
BURSA – 2019

TEZ ONAYI

Ahmet HANILÇI tarafından hazırlanan "BAZI TEK FREKANS KESTİRİCİLERİNİN PERFORMANS ANALİZİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

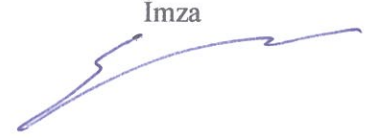
Başkan : Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU
Bursa Uludağ Üniversitesi, Mühendislik
Fakültesi,
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza


Üye : Doç. Dr. Hakan GÜRKAN
Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa
Bilimleri Fakültesi,
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza


Üye : Dr. Öğr. Üyesi Esin KARPAT
Bursa Uludağ Üniversitesi, Mühendislik
Fakültesi,
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza


Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü



U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

30.07.2019

Ahmet HANİLÇİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI TEK FREKANS KESTİRİCİLERİNİN PERFORMANS ANALİZİ

Ahmet HANILÇI

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

Sinyal işleme alanında gürültü içeren reel sinüzoide ait frekans kestirimi konusu bu tezde ele alınmıştır. Reel sinüs veri modeli için farklı kestiriciler kullanılarak bu kestiricilerin performansları incelenmiştir. Farklı pencere fonksiyonları ile bu kestiriciler birlikte kullanıldığında frekans kestiricilerin analizleri yapılmıştır. MATLAB yazılımı ortamında gerçekleştirilen deneysel çalışmalarda, toplamsal gürültü durumunda Bartlett pencere fonksiyonunun en iyi performansı verdiği tespit edilmiştir. Gürültünün olmadığı durumda ise pencere fonksiyonunun kullanılmasının kestiricinin performansını olumsuz yönde etkilediği bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Frekans Kestirimi, Reel Sinüs, Pencere Fonksiyonlar
2019, viii + 37 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

PERFORMANCE ANALYSIS OF SOME SINGLE-TONE FREQUENCY ESTIMATORS

Ahmet HANILÇI

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electronic Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Erdogan DİLAVEROĞLU

Frequency estimation of real sinusoid containing noise in signal processing area is discussed in this thesis. For the real sinusoidal data model, the performances of different estimators were analyzed. When these estimators are used together with various window functions, frequency estimators are analyzed. In experimental studies conducted in MATLAB software, Bartlett window function has been found to give the best performance in case of additive noise. In the absence of noise, it was found that the use of the window function had an adverse effect on the performance of the estimator.

Keywords: Frequency Estimation, Real Sinusoid, Window functions
2019, viii + 37 pages.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımda bana vermiő olduğu destekleri ve olumlu yönlendirmelerinden dolayı danışman hocam Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU'na teőekkürlerimi sunarım.

Bana her konuda destek olan ve her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Ahmet HANILÇI
30.07.2019

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	2
2.1. Kestirim Teorisi.....	2
2.2. Cramer Rao Sınırı.....	5
2.3. Frekans Kestirimi.....	7
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
3.1. Veri Modeli.....	9
3.2. Gürültü Modeli.....	9
3.3. Sinyal Gürültü Oranı (SNR).....	10
3.4. Ayrık Fourier Dönüşümü ile Frekans Kestiricileri.....	12
3.4.1. Giriş.....	12
3.4.2. Fourier Dönüşümü Pencere Fonksiyonları.....	15
4. BULGULAR.....	19
4.1. Ayrık Fourier Dönüşümü ile Frekans Kestirimi Performans Analizi.....	19
5. SONUÇ.....	35
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ.....	37

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

θ	Bilinmeyen Parametre
$\hat{\theta}$	θ 'nın Kestiricisi
A	Öngörü Matrisi
σ^2	Gürültünün Varyansı
ω_0	Reel Sinüsün Frekans Parametresi
φ_0	Reel Sinüsün Fazı
α_0	Reel Sinüsün Genliği
N	Toplam Örnek Sayısı
E	Beklenen Değer
Y	Veri Vektörü
var	Varyans

Kısaltmalar

Açıklama

SNR	Sinyal Gürültü Oranı (Signal to Noise Ratio)
DFT	Ayrık Fourier Dönüşümü (Discrete Fourier Transform)
FFT	Hızlı Fourier Dönüşümü (Fast Fourier Transform)
PDF	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu(Probability Density Function)
CRLB	Cramer Rao Sınırı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Örnek Ortalaması ve Birinci Örnek Değeri için Histogramlar	4
Şekil 3.1. Örnek bir sinüs sinyali	9
Şekil 3.2. Örnek bir gürültü sinyali	10
Şekil 3.3. Örnek bir gürültü eklenmiş sinüs sinyali SNR=1	11
Şekil 3.4. Örnek bir gürültü eklenmiş sinüs sinyali SNR=5	11
Şekil 3.5. Örnek bir gürültü eklenmiş sinüs sinyali SNR=20	12
Şekil 3.6. Bir spektral tonun DFT Genlik Örnekleri.....	13
Şekil 3.7. Hamming Pencere Fonksiyonu	15
Şekil 3.8. Hanning Pencere Fonksiyonu	16
Şekil 3.9. Blackman Pencere Fonksiyonu.....	16
Şekil 3.10. Blackman-Harris Pencere Fonksiyonu	17
Şekil 3.11. Bartlett Pencere Fonksiyonu	17
Şekil 3.12. Gauss Pencere Fonksiyonu	18
Şekil 4.1. Denklem (3.6.) ile Frekans Kestiricisinin RMS Hata Grafiği	19
Şekil 4.2. Denklem (3.7.) ile Frekans Kestiricisinin RMS Hata Grafiği	20
Şekil 4.3. Hamming Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.7.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,22)	20
Şekil 4.4. Hamming Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,22)	21
Şekil 4.5. Hanning Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,36)	21
Şekil 4.6. Blackman Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,75)	22
Şekil 4.7. Blackman-Harris Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,72)	22
Şekil 4.8. Bartlett Pencere Fonksiyonu ile Denklem (3.8.) Kullanılarak Farklı P Değerleri için Frekans Kestiricisinin Performansı	23
Şekil 4.9. Bartlett Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,30)	24
Şekil 4.10. Gauss Pencere Fonksiyonu ile Denklem (3.8.) Kullanılarak Farklı P Değerleri için Frekans Kestiricisinin Performansı	25
Şekil 4.11. Gauss Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,50)	26
Şekil 4.12. Hamming Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (Q=0,60).....	27
Şekil 4.13. Hamming Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (Q=0,60).....	27
Şekil 4.14. Blackman Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (Q=0,55).....	28
Şekil 4.15. Blackman-Harris Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (Q=0,56).....	28
Şekil 4.16. Bartlett Pencere Fonksiyonu ile Denklem (3.9.) Kullanılarak Farklı Q Değerleri için Frekans Kestiricisinin Performansı	29
Şekil 4.17. Bartlett Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (Q=0,55).....	30

	Sayfa
Şekil 4.18. Gauss Pencere Fonksiyonu ile Denklem (3.9.) Kullanılarak Farklı Q Değerleri için Frekans Kestiricisinin Performansı	31
Şekil 4.19. Gauss Pencere Fonksiyonu ile Pencereleşmiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (Q=0,55).....	32
Şekil 4.20. Gürültünün olmadığı durumda farklı BİN lokasyonlarına göre Frekans kestiricilerinin RMS Performansının Karşılaştırması	34
Şekil 4.21. Gürültünün olmadığı durumda farklı BİN lokasyonlarına göre Frekans kestiricilerinin BİAS(Yanlılık) Performansının Karşılaştırması	34

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. Farklı SNR, N ve f Değerleri Kullanılarak Optimum P Değerleri	24
Çizelge 4.2. Farklı SNR, N ve f Değerleri Kullanılarak Optimum P Değerleri	26
Çizelge 4.3. Farklı SNR, N ve f Değerleri Kullanılarak Optimum Q Değerleri.....	30
Çizelge 4.4. Farklı SNR, N ve f Değerleri Kullanılarak Optimum Q Değerleri.....	32
Çizelge 4.5. Farklı Pencere Fonksiyonları için Optimum P ve Q Değerleri.....	33

1. GİRİŞ

Elektronik sinyal işleme sistemlerinde bilgi elde etmek için tasarlanmış ve bu konuda önemli bir yere sahip olan süreçlerden biri kestirim teorisidir. Sinyal işleme sistemlerden bazıları; ses, görüntü işleme, haberleşme, biyomedikal, radar, sonar, kontrol ve sismoloji sistemleridir. Bu sistemlerde bilgi elde etmek için karşılaşılan ortak problem bazı parametrelere ait değerlerin kestirimidir.

Sinyal işleme literatüründe gürültü tarafından bozulmuş bir sinyalin frekans kestirimi sıkça karşılaşılan problemlerdendir. Ancak çoğu uygulamada frekans kestirimi zorunludur. Bundan dolayı gürültülü bir sinüzoidal bir frekansta, gerçek değerine en yakın ve en doğru kestirim önemli bir problem haline gelmiştir. Bu problemin çözümü için birçok yöntem geliştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında; bazı frekans kestiricilerinin analizi ve pencere fonksiyonları kullanılarak performans analizleri yapılacaktır. Yapılan karşılaştırmalar ile en uygun frekans kestirim yönteminin belirlenmesi üzerinde çalışılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Kestirim Teorisi

Sinyal işleme alanında; bilgi sağlamak amacıyla tasarlanmış bir sinyalin bazı parametrelerinin kestirilmesi ihtiyacı ortak problemlerdendir. Bu parametreleri kestirmek için sürekli zaman dalga biçimlerinden örneklenen veri kümeleri kullanılması gerekmektedir.

Kestirim matematiksel olarak ifade edilirse, bilinmeyen θ parametresine bağlı N adet veriden oluşan $\{ y(0), y(1), \dots, y(N-1) \}$ kümesi kullanılarak aşağıdaki (2.1.) eşitliğinde belirtilen ifade ile $\hat{\theta}$ kestiricisi aracılığıyla θ ' nın değeri elde edilir.

$$\hat{\theta} = g (y(0), y(1), \dots, y(N-1)) \quad (2.1.)$$

Yukarıdaki denklemde belirtilen g kestiriciyi tanımlayan fonksiyondur. Kestirimin başarılı olabilmesi bu fonksiyonun seçimine bağlıdır.

Başarılı kestiricilerin elde edilmesi için bilinmeyen parametreye bağlı veri kümesinin modellenmesi gerekir. Veriler rasgele oldukları için olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) yoluyla tanımlanırlar. PDF, bilinmeyen parametre θ ' nın bir fonksiyonu biçiminde düzenlenirse farklı θ değerleri için farklı değerler alan PDF kümesi elde edilir. $N=1$ ve θ parametresi ortalama değer olması durumunda verinin olasılık yoğunluk fonksiyonu (2.2.) denklemi yardımı ile elde edilir.

$$P(y(0);\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (y(0) - \theta)^2\right) \quad (2.2.)$$

PDF fonksiyonunun değişimi incelendiğinde; θ parametresi $y(0)$ olasılığını etkiler ve θ değeri $y(0)$ gözlemlenerek elde edilebilir. Bu fonksiyonun özelliği kestiricilerin tasarımında başarılı sonuçlar almak için çok öneme sahiptir. Gerçek problemlerde PDF fonksiyonu bilinmemekte, problemin şartlarına uygun ve matematiksel olarak kolay bir tanesinin seçilmesi gerekir.

Uygun bir PDF seçildikten sonra problem, en iyi kestiricinin belirlenmesidir. Kestirici, veri kümesinin her bir gerçekleşmesinde θ ' ya bir değer atayan kural gibi düşünülebilir. Verilen herhangi bir gerçekleşme için elde edilen θ değeri ise θ 'nın bir kestirim değeridir. Rastgele bir değişken ve onun aldığı bir değer kestirici ve kestirim değeri arasındaki ilişkiye benzer özellikler taşır.

Örnek olarak bir gürültülü doğru akım sinyali düşünecek olursak gürültü içindeki bir doğru akım bileşeni, A öngörü matrisinden oluştuğu görülebilir. Veriyi (2.3.) denklemi ile ifade edilebilir.

$$y(t) = A + e(t), \quad t=0,1, \dots, N-1 \quad (2.3.)$$

$e(t)$ sıfır ortalamalı gürültü bileşenidir. A parametresini kestirebilmek için veri kümesi $\{y(0), y(1), \dots, y(N-1)\}$ değerlerini kullanarak $y(t)$ 'nin ortalama değeri olan A'yı (veri kümesinin ortalama değeri) aşağıdaki (2.4.) eşitlik ile öngörebiliriz.

$$\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y(t) \quad (2.4.)$$

Ortalama değer hesabıyla kestiricinin gerçek değerine ne kadar yakın olduğu birkaç örnekleme ile görülür.

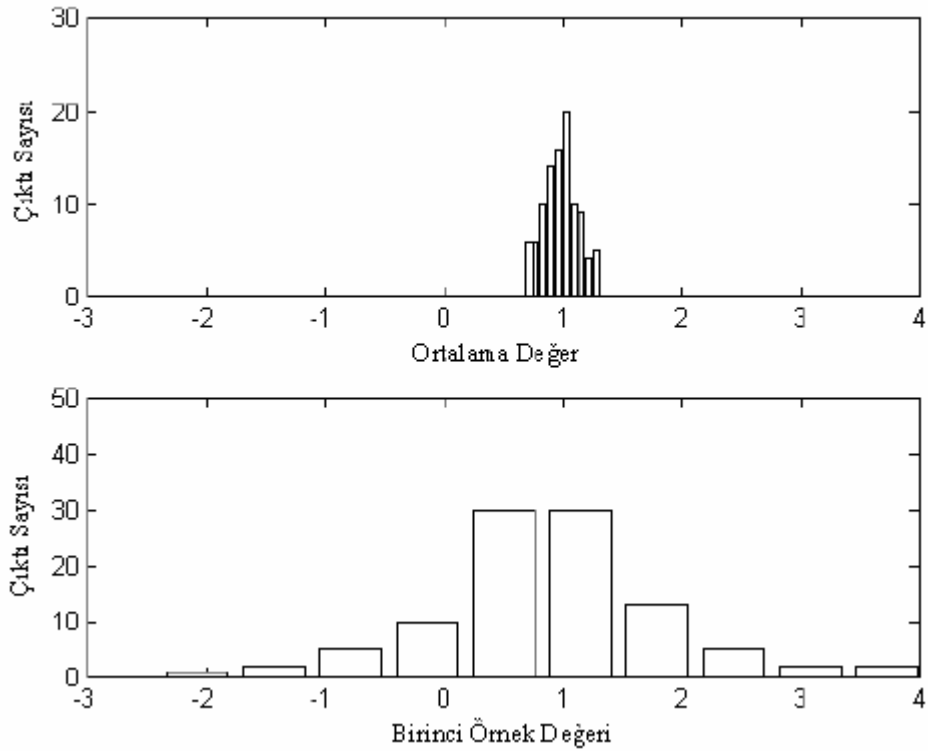
Bir diğer kestirici (2.5.) eşitliğindeki gibi olabilir.

$$\bar{A} = y(0) \quad (2.5.)$$

Bu kestiricide veri kümesinin bütün elemanları kullanılmadığından performansının düşük olacağı öngörülür. Gürültü etkisini azaltacak bir ortalama değer alınmamıştır ancak \bar{A} 'nin değeri \hat{A} ile kıyaslandığında \bar{A} 'ın A'nın gerçek değerine ortalama değer kestiricisinden daha yakın olduğu görülmüştür. Ancak bu değerlerin yakın değer çıkması \bar{A} kestiricisinin daha iyi bir kestirici olduğu anlamına gelmez. Çünkü \bar{A} kestiricisi veri kümesinin bir fonksiyonu ve rastgele değişkendir. Bu kestirici sadece bir gerçekleşme için gerçek

değere yakın bir sonuç vermiştir. Kestirici performansının detaylı incelenmesi için istatistiksel araştırmalar yapılmalıdır.

Ortalama değeri kestiricisi \hat{A} ve birinci örnek değeri kestiricisi \bar{A} incelendiğinde; $A=1$ değeri sabit tutularak $e(t)$ 'nin farklı değerlerinin eklenmesi ile $y(t)$ için bir gerçekenme kümesi elde edilerek iki kestiricinin değerlerini belirleyerek histogramlarını çizelim. Elde edilen histogramlar Şekil 2.1'de gösterilmiştir. (Kay 1993)



Şekil 2.1. Örnek ortalaması ve birinci örnek değeri için histogramlar

Ortalama değeri kestiricisi histogramları incelendiğinde; kestiricinin $A=1$ değerine yakın yoğunlaştığı görülmüştür. Ancak \hat{A} 'nın \bar{A} 'dan daha iyi bir kestirici olduğunu ispatlayabilmek için varyansının daha düşük olduğu gösterilmelidir. Bunun için öncelikle gürültü bileşeni $e(t)$ için ilişkisiz ve eşit σ^2 varyansa sahip olduğunu düşünelim.

İlk olarak her iki kestiricinin ortalama değerlerini hesaplayalım.

$$E(\hat{A}) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y(t)\right) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} E(y(t)) = A \quad (2.6.)$$

$$E(\bar{\bar{A}}) = E(y(0)) = A \quad (2.7.)$$

Görüldüğü gibi ortalama değerinde her iki kestiricide gerçek değeri vermektedir.

Şimdi de kestiricilerin varyanslarını elde edelim:

$$var(\hat{A}) = var\left(\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y(t)\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{t=0}^{N-1} var(y(t)) = \frac{\sigma^2}{N} \quad (2.8.)$$

$$var(\hat{A}) = \frac{\sigma^2}{N}$$

$$var(\bar{\bar{A}}) = var(y(0)) \quad (2.9.)$$

$$var(\bar{\bar{A}}) = \sigma^2$$

$$var(\bar{\bar{A}}) > var(\hat{A})$$

Yukarıda görüldüğü gibi;

$\bar{\bar{A}}$ kestiricisinin varyansı sabit σ^2 'dir.

\hat{A} kestiricisinin varyansı ise toplam veri sayısı ile ters orantılıdır.

Sonuç olarak; bir kestiricinin performansının iyi olması için sadece ortalama değerinde gerçek değeri vermesi (yansız olması) yeterli değildir. Yansız bir kestiricinin varyansının küçük olması ile ilişkilidir.

2.2. Cramer-Rao Sınırı

Bir kestiricinin varyansının ulaşabileceği en düşük alt sınır Cramer-Rao alt sınırı olarak adlandırılır ve 2.10. denkleminde belirtildiği gibi tanımlanır. Kullanılan kestiriciden bağımsız olarak veri modelleri için elde edilebilecek en yüksek performansı vermektedir.

Bu yüzden Cramer Rao sınırı kestiricilerin performansını değerlendirmede bir ölçüt olarak kullanılmaktadır.

Reel beyaz Gauss gürültü içindeki reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli için frekans parametrelerinin kestirimine ilişkin Cramer Rao (C-R) sınırları çözümsel olarak elde edilmiştir (Kay 1993).

$$y(t) = s(t; \theta) + e(t), \quad t=0,1,\dots,N-1 \quad (2.10.)$$

Olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki eşitlikte belirtilmiştir.

$$p(y; \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} (y(t) - s(t; \theta))^2 \right\} \quad (2.11.)$$

Denklemin türevi alınırsa;

$$\frac{\partial \ln p(y; \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} (y(t) - s(t; \theta)) \frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta} \quad (2.12.)$$

Olabilirlik fonksiyonunun düzenlilik koşulunu sağladığı kabul edilirse (2.12.) denkleminin beklenen değeri, bütün θ ' lar için (2.13.) ifadesinde verilen biçimde 0 olduğu görülür.

$$E \left[\frac{\partial \ln p(y; \theta)}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (2.13.)$$

Olabilirlik fonksiyonunun ikinci türevi alınırsa;

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \ln p(y; \theta)}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} \left\{ (y(t) - s(t; \theta)) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta} \right) \right) - \frac{(\partial s(t; \theta))^2}{\partial \theta} \right\} \quad (2.14.)$$

(2.2.4) ifadesinin beklenen değeri alınarak (2.2.6) eşitliği elde edilir.

$$E \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \ln p(y; \theta)}{\partial \theta} \right) \right] = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{t=0}^{N-1} \left(\frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \quad (2.15.)$$

Fisher bilgi matrisi $I(\theta)$ denklemi aşağıdaki eşitlikte (2.16.) belirtilmiştir.

$$I(\theta) = -E \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \ln p(y; \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.16.)$$

Bilinmeyen θ parametresinin varyansı aşağıdaki eşitlikte (2.17.) belirtilmiştir.

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{t=0}^{N-1} \left(\frac{\partial s(t; \theta)}{\partial \theta} \right)^2} \quad (2.17.)$$

Cramer Rao sınırı modeli Fisher bilgi matrisinin evriği alınarak elde edilir. Varyans ile Fisher bilgi matrisi arasındaki ilişki aşağıdaki eşitlikte (2.18.) belirtilmiştir.

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)} \quad (2.18.)$$

2.3. Frekans Kestirimi

Sinyal işleme alanında karşılaşılan birçok problem, gürültülü bir yada daha fazla sönümlü veya sönümsüz sinüsün parametrelerinin kestirimine dayanmaktadır. Çoklu yol ortamında katlı zaman gecikmesi kestirim problemi ise veri Fourier bölgesine taşındıktan sonra, sinüsün parametre kestirim problemine dönüşür. Zayıflama parametresi genlik parametresinin, zaman gecikmesi frekans parametresinin rolünü üstlenir (Kay 1993).

Vektörel sinyal işleme alanında karşılaşılan varış yönü kestirimi (DOA) problemi de çok sayıdaki sinüsün frekanslarının kestirimi problemine dönüşür (Van Veen ve Buckley 1988).

Bir veri modelinde, modele doğrusal olmayan biçimde bağlı parametrelerin kestirimi yapıldıktan sonra doğrusal biçimde bağlı diğer parametrelerin kestirimi, model doğrusal model biçiminde düzenlenebildiği için, en küçük kareler yöntemi ile kolaylıkla gerçekleştirilir (So ve ark. 2013).

Faz ve genlik parametreleri sinüslere doğrusal biçimde bağlı iken frekans parametreleri sinüslere doğrusal olmayan biçimde bağlıdır. Frekans parametreleri kestirimi yapıldıktan sonra faz ve genlik parametreleri kolayca kestirilebilir.

Sinyal işleme alanında frekans kestirimi önemli bir yere sahiptir ve bu tezin ana temel amacını kapsamaktadır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

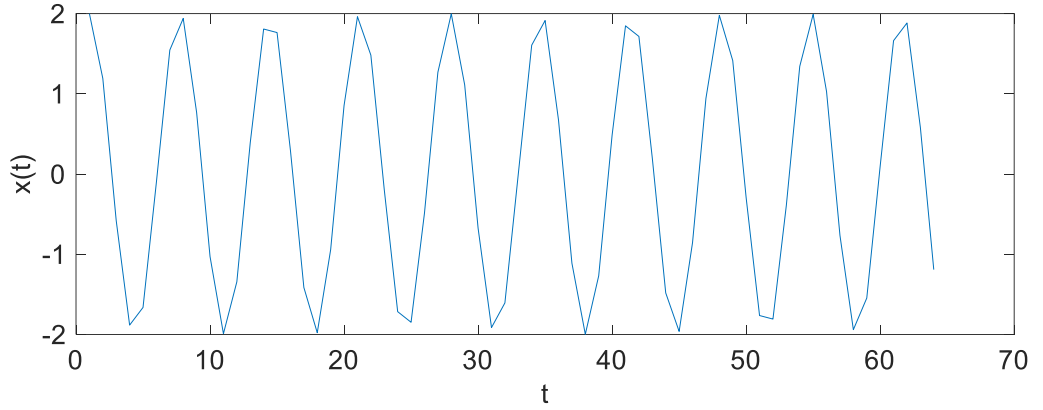
3.1. Veri Modeli

Bu bölümde tez çalışmasında ele alınan gürültü içindeki bir reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli tanıtımı yapılmıştır.

Bir reel sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli (3.1.) denklemindeki şekilde tanımlanabilir.

$$y(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + e(t), \quad t = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.1.)$$

Yukarıdaki belirtilen parametreler; α_0 sinüsün genliği, φ_0 sinüsün fazı, $\omega_0 \in (0, \pi)$ ise sinüsün frekansını göstermektedir. $e(t)$ reel gürültü bileşenini ve N örnek sayısını belirtmektedir.



Şekil 3.1. Örnek bir sinüs sinyali

3.2. Gürültü Modeli

Bu bölümde tez çalışmasında ele alınan bir reel sinüsün gürültü modellerinin zaman bölgesi parametreleri tanıtımı yapılmıştır.

Reel veri modellerinde σ^2 varyanslı ve sıfır ortalamalı reel toplanır beyaz Gauss gürültüsü tez çalışmasında gürültü bileşeni olarak seçilmiştir.

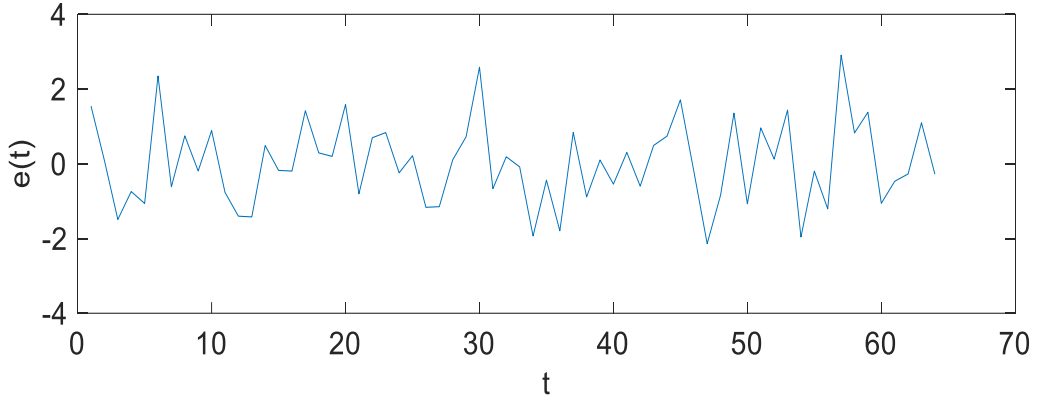
Reel beyaz gürültü için $e(t)$:

$$E[e(t)] = 0 \quad (3.2.)$$

$$E[e(t)e(s)] = \sigma^2 \delta_{ts} \quad (3.3.)$$

Yukarıda belirtilen δ kronecker delta fonksiyonu ve $t,s = 1,2,\dots,N$.

Gürültü bileşeninin Gauss olması, gürültü örneklerinin genlik dağılımının Gauss şeklinde olduğunu göstermektedir.



Şekil 3.2. Örnek bir gürültü sinyali

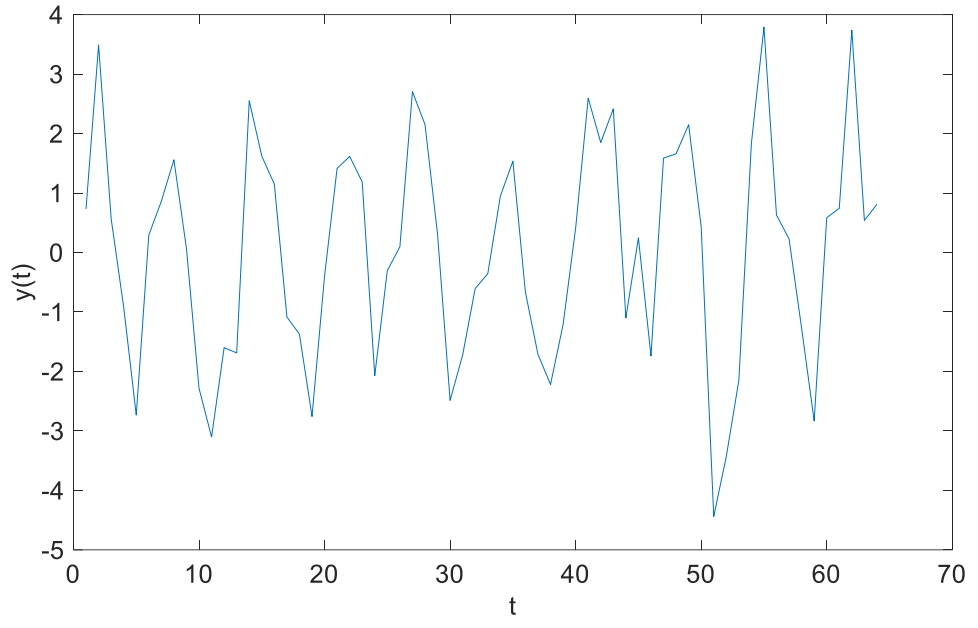
3.3. Sinyal Gürültü Oranı (SNR)

Signal to Noise Ratio (SNR), Sinyal gürültü oranı reel veri modeli aşağıdaki eşitlikte gösterilmiştir.

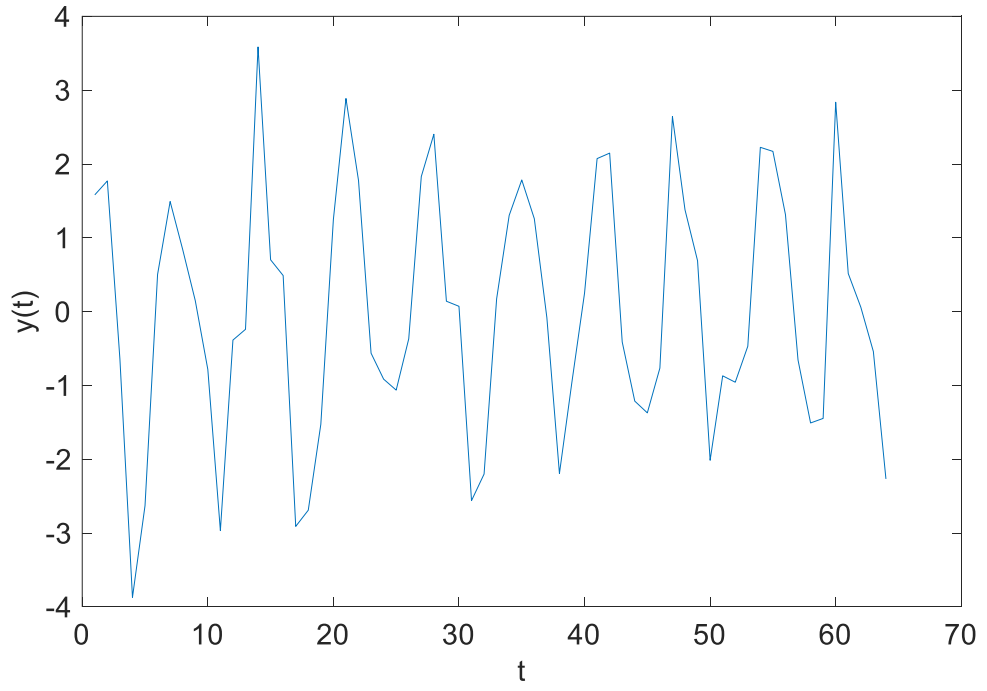
$$SNR = \frac{\alpha_0^2}{2\sigma^2} \quad (3.4.)$$

α_0 : Sinüsün genliği

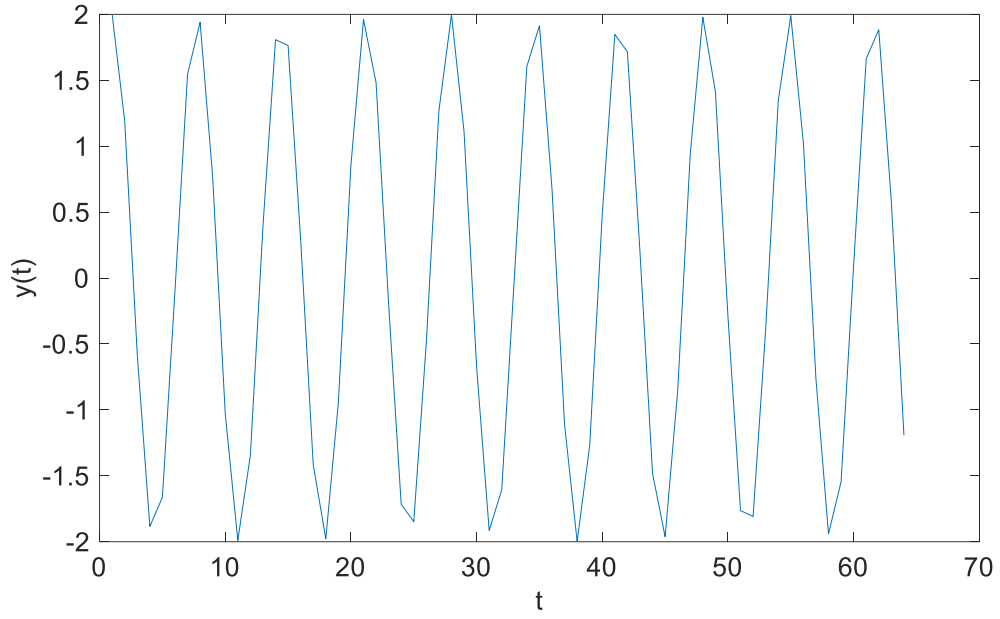
σ : Sinüsün varyansı



Şekil 3.3. Örnek bir gürültü eklenmiş sinüs sinyali SNR=1



Şekil 3.4. Örnek bir gürültü eklenmiş sinüs sinyali SNR=5



Şekil 3.5. Örnek bir gürültü eklenmiş sinüs sinyali SNR=20

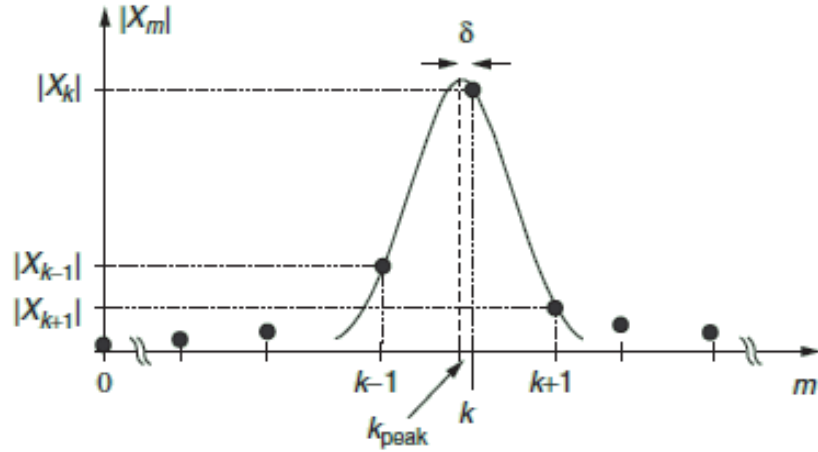
3.4. Ayırık Fourier Dönüşümü ile Frekans Kestiricileri

3.4.1. Giriş

Bu tez çalışmasında ayırık fourier dönüşümü ile frekans kestiricilerinin performans analizleri yapılacaktır.

Kestirim, gürültülü frekans sinyallerinin performanslarının incelenmesinde önemli bir yere sahiptir ve haberleşme, sağlık, tıp, enstrümantasyon ve diğer uygulamalarda sık görülen bir probleme dönüşmüştür. Bu problemin çözümü için en önemli yöntemlerden biri Fourier Dönüşümü (DFT) ya da benzer bir yöntem olan Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT)'dir. Her iki yöntemde de veri toplamak için geçen süre toplanan veri sayısı, zaman tanım bölgesinde kullanılan pencere fonksiyonunun türü ve frekans tanım bölgesinde erişilebilecek çözünürlük arasında bir ödünleşim durumu bulunmaktadır. Bu tezde hesaplama açısından kolay ve ayırık fourier dönüşümü örneklerinden fourier dönüşümü örnek sayısını artırmaya gerek kalmadan frekans kestirimi problemi ele alınmıştır.

Örnek bir sinüs sinyali ele alırsak ve bu sinyalin frekans kestirimi ile ilgili sonuçlar elde etmek için aşağıdaki grafiği (Şekil 3.4.1) inceleyelim.



Şekil 3.6. Bir spektral tonun DFT Genlik Örnekleri

Sinyalin frekansını kestirebilmek için grafikte belirtilen 3 tane DFT örneğini (X_k , X_{k-1} , X_{k+1}) ele alalım. Eğer k_{peak} değerini ayrık fourier dönüşümü genliğinin maksimum olduğu örneğin indisi olarak seçersek bu durumda k_{peak} değerindeki maksimum kestirim hatası DFT binin yarısına eşit olur. Ancak frekans tanım bölgesindeki tepe örneği X_k ve onun iki komşu örneği olan X_{k-1} , X_{k+1} değerlerini kullanırsak tepe noktasının yerinin kestirimi basit regresyon algoritmaları ile daha başarılı bir şekilde yapılabilir. Bu çalışmada tepe noktası k_{peak} değerinin kestirimi için bir δ düzeltme terimini bulacak çözümler incelenmiştir. Bu çözümler aşağıdaki denklemlerde belirtildiği şekilde yapılmaktadır (Jacobsen ve Kootsookos, 2007).

$$k_{peak} = k + \delta$$

$$f_{tone} = k_{peak} \cdot f_s / N \quad (3.5.)$$

f_s : Örnekleme frekansı

N : Örnek sayısı

Bu yöntem düşük SNR durumlarında dahi başarılı bir şekilde çalışmaktadır.

Görüldüğü gibi k_{peak} değerini bulurken δ düzeltme terimini elde edilecek birçok eşitlik geliştirilmiştir. Birçok spektral tonun tepe değerini (k_{peak}) farklı çözüm yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmada δ değerini dört farklı eşitlik kullanılarak performans analizleri yapılacaktır.

$$\delta = \frac{(|X_{k+1}| - |X_{k-1}|)}{(4|X_k| - 2|X_{k-1}| - 2|X_{k+1}|)} \quad (3.6.)$$

Yukarıdaki eşitlik basit bir ifadedir ancak gürültü olması durumunda incelendiğinde istatistiksel olarak kötü ve önyargılı bir sonuç elde edilir. Bu denklemde kompleks DFT değerleri kullanarak ve birkaç ufak değişiklik yapılarak aşağıdaki bir diğer eşitlik elde edilir (Jacobsen ve Kootsookos, 2007).

$$\delta = -Re \left[\frac{(X_{k+1} - X_{k-1})}{(2X_k - X_{k-1} - X_{k+1})} \right] \quad (3.7.)$$

Bu eşitlikte ise (3.7.) denkleminde görülen istatistiksel kötü performans iyileştirilerek tepe noktasının kestiriminde daha doğru sonuçlar elde edilmektedir. Ayrıca (3.7.) denklemindeki katsayılar hesaplamada oluşan büyüklükler bu denklemde önemsiz hale getirilmiştir.

δ düzeltme terimini pencere fonksiyonları kullanarak aşağıdaki eşitliği ile elde edelim.

$$\delta = \frac{P(|X_{k+1}| - |X_{k-1}|)}{(|X_k| + |X_{k-1}| + |X_{k+1}|)} \quad (3.8.)$$

Yukarıdaki denklemde belirtilen P değeri, farklı pencere fonksiyonlarında elde edilen P değerleri kullanılarak kestirim performansları incelenebilir (Jacobsen ve Kootsookos, 2007).

Bu denklem geliştirilerek kompleks DFT değerleri kullanılarak aşağıda belirtilen diğer bir eşitlik elde edilir.

$$\delta = Re \left[\frac{Q(X_{k-1} - X_{k+1})}{(2X_k + X_{k-1} + X_{k+1})} \right] \quad (3.9.)$$

Yukarıdaki denklemde belirtilen Q değeri, farklı pencere fonksiyonlarında elde edilen Q değerleri kullanılarak kestirim performansları incelenebilir (Jacobsen ve Kootsookos, 2007).

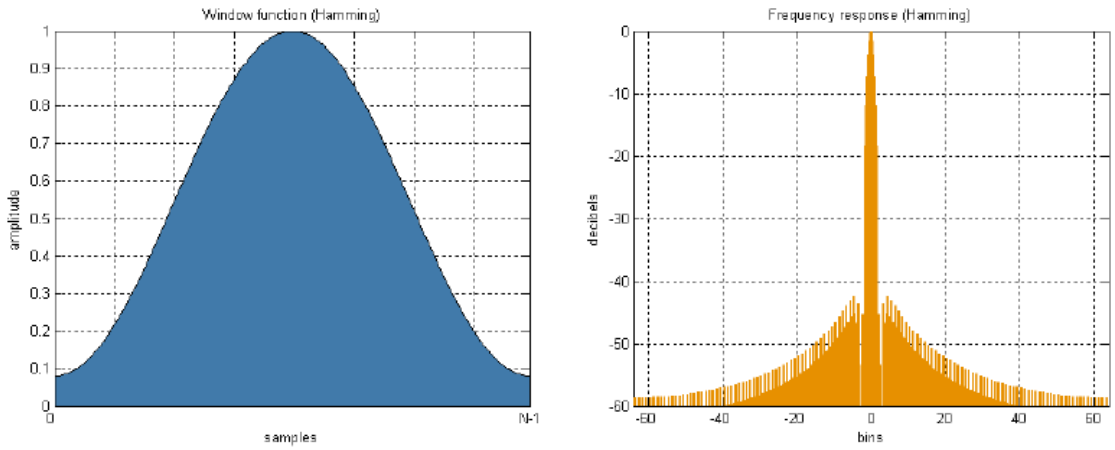
Bu tez çalışmasında farklı pencere fonksiyonlarında elde edilen P ve Q değerleri ile yukarıda belirtilen eşitlikle ayrı ayrı incelenerek frekans kestirim performansları incelenecektir.

3.4.2 Fourier Dönüşümü Pencere Fonksiyonları

Sinyal işleme alanında; pencere fonksiyonları bazı değer aralıklarında sıfırdan farklı bir matematiksel bir işlev değeridir. Farklı pencere fonksiyonlarını ele alalım.

Hamming pencere fonksiyonunun matematiksel ifadesi ve grafiği aşağıda belirtilmiştir.

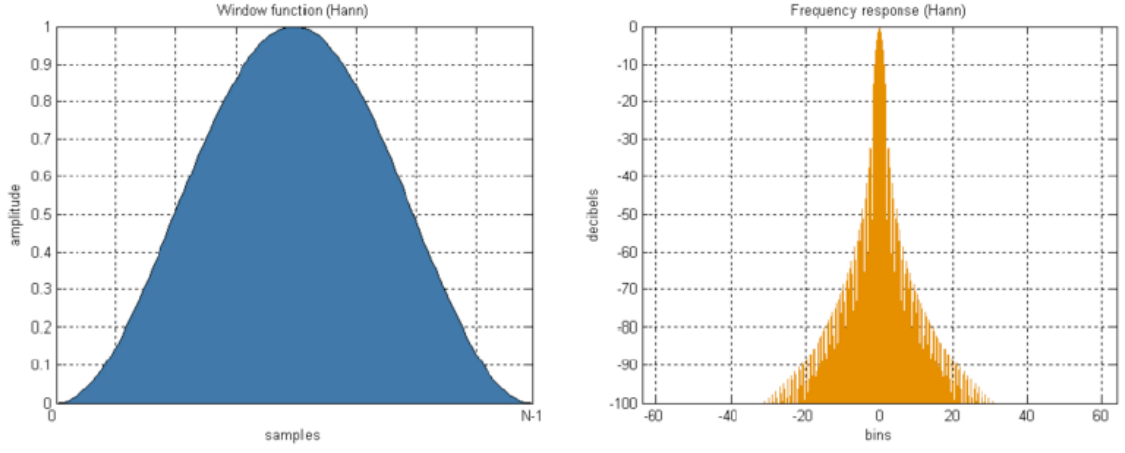
$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad (3.10.)$$



Şekil 3.7. Hamming Pencere Fonksiyonu

Hanning pencere fonksiyonunun matematiksel ifadesi ve grafiği aşağıda belirtilmiştir.

$$w(n) = 0,5 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right) \quad (3.11.)$$

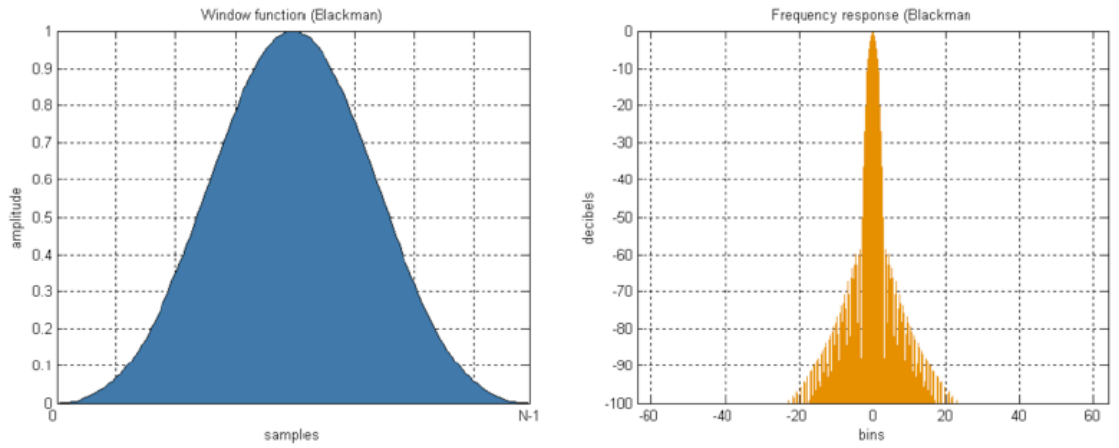


Şekil 3.8. Hanning Pencere Fonksiyonu

Blackman pencere fonksiyonunun matematiksel ifadesi ve grafiği aşağıda belirtilmiştir.

$$w(n) = \alpha_0 - \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \quad (3.12.)$$

$$\alpha_0 = \frac{1-\alpha}{2} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$$

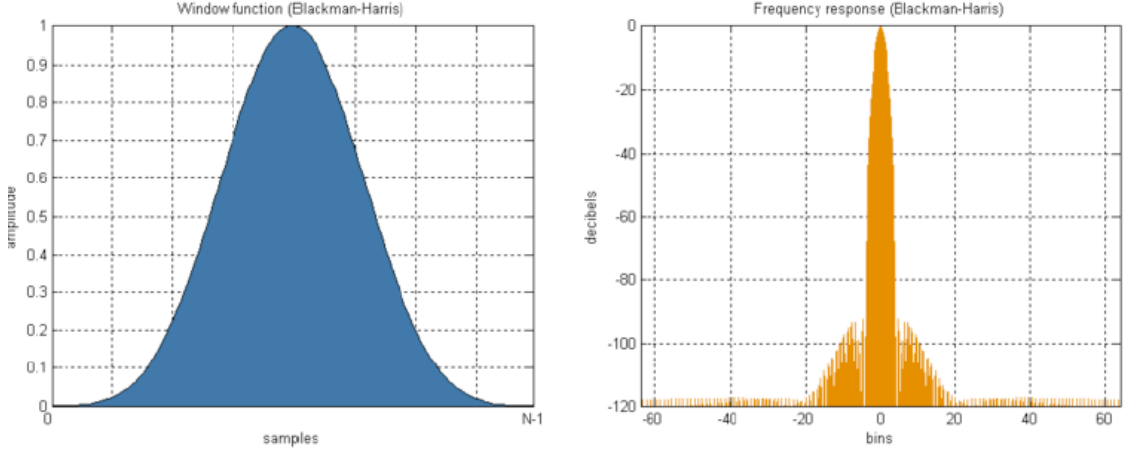


Şekil 3.9. Blackman Pencere Fonksiyonu

Blackman-Harris pencere fonksiyonunun matematiksel ifadesi ve grafiği aşağıda belirtilmiştir.

$$w(n) = \alpha_0 - \alpha_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) - \alpha_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{N-1}\right) \quad (3.13.)$$

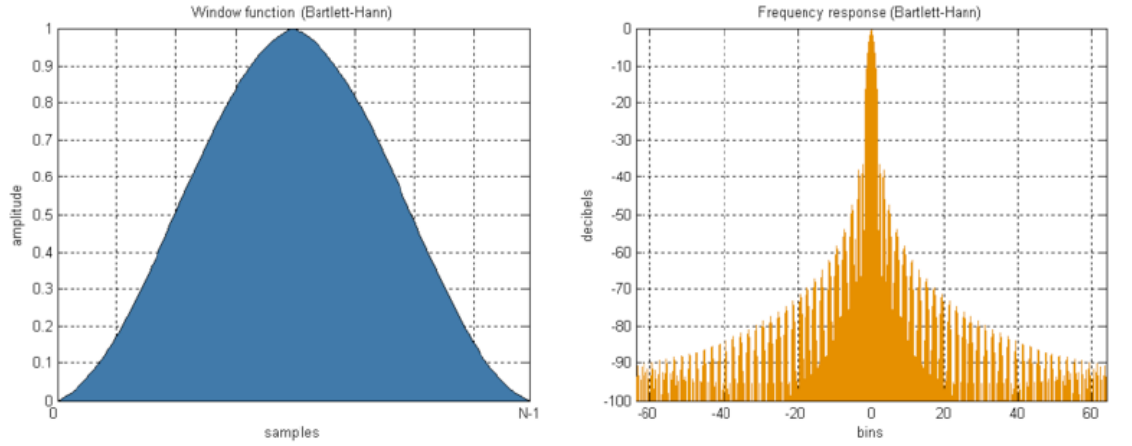
$$\alpha_0 = 0,35875 \quad ; \quad \alpha_1 = 0,48829 \quad \alpha_2 = 0,14128 \quad \alpha_3 = 0,01168$$



Şekil 3.10. Blackman-Harris Pencere Fonksiyonu

Bartlett pencere fonksiyonunun matematiksel ifadesi ve grafiği aşağıda belirtilmiştir.

$$w(n) = \alpha_0 - \alpha_1 \left| \frac{n}{N-1} - \frac{1}{2} \right| - \alpha_2 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad (3.14.)$$

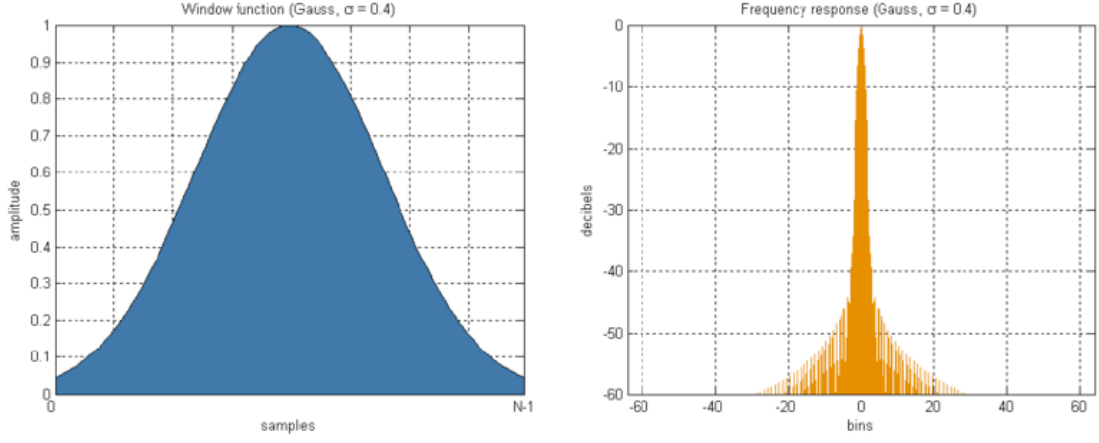


Şekil 3.11. Bartlett Pencere Fonksiyonu

Gauss pencere fonksiyonunun matematiksel ifadesi ve grafiği aşağıda belirtilmiştir.

$$w(n) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{n-(N-1)/2}{\sigma(N-1)/2} \right)^2} \quad (3.15.)$$

$$\sigma \leq 0,5$$



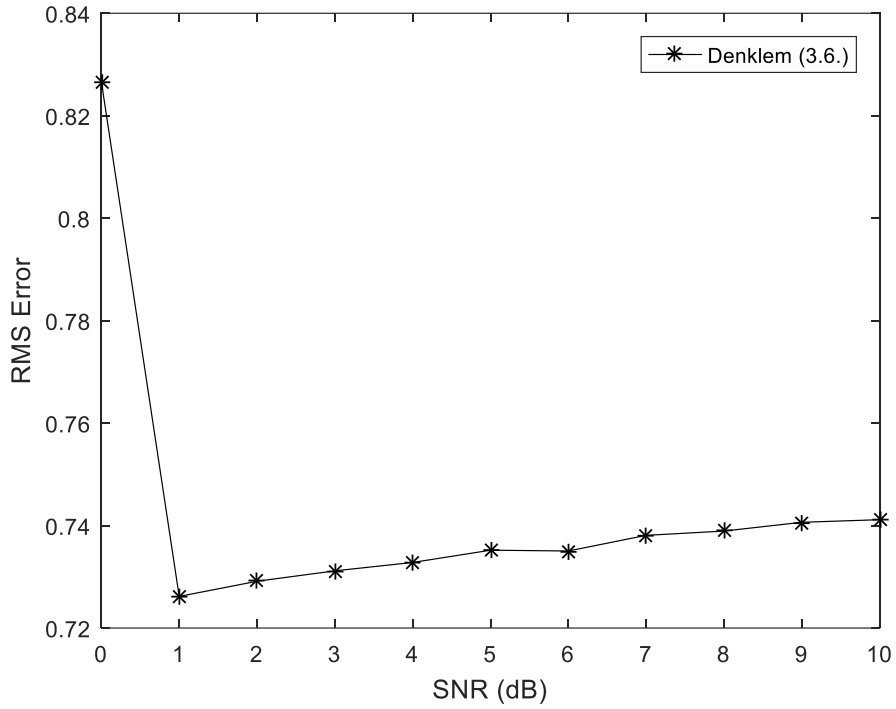
Şekil 3.12. Gauss Pencere Fonksiyonu

4. BULGULAR

Gürültülü bir sinyalin ayrık fourier dönüşümü ile frekans kestirimi farklı pencere fonksiyonları ile tahmin edilerek performans analizi yapılacaktır. Ayrık Fourier Dönüşümü ile Frekans Kestiricileri bölümde bulunan (3.6.), (3.7.) denklemleri ve (3.8.) ve (3.9.) pencere fonksiyonlu denklemleri ile kestirim performansları incelenecektir.

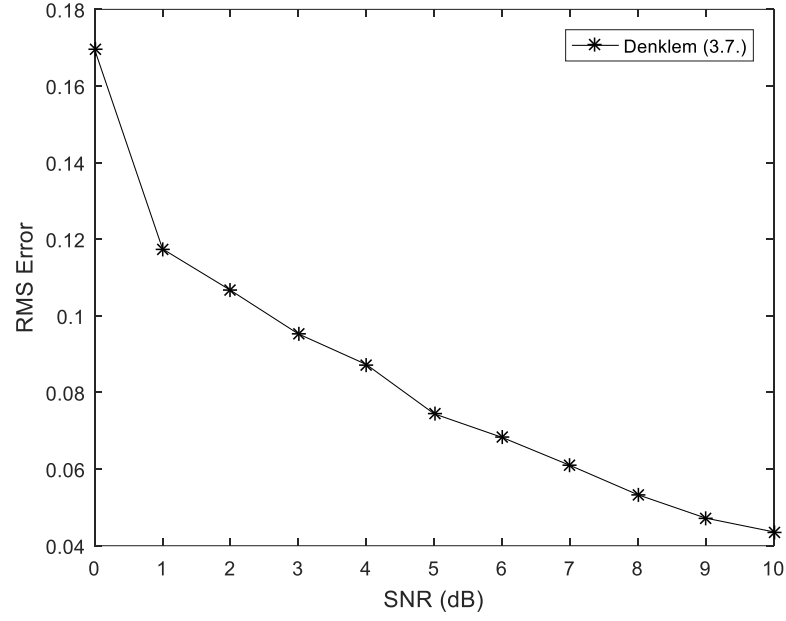
4.1 Ayrık Fourier Dönüşümü ile Frekans Kestirimi Performans Analizi

Örnek 4.1.1 : Veri modelinde (3.6.) denklemi kullanılarak ayrık fourier dönüşümü ile frekans kestiriminin farklı SNR değerleri için elde edilen RMS hata grafiği Şekil 4.1 de gösterilmiştir.



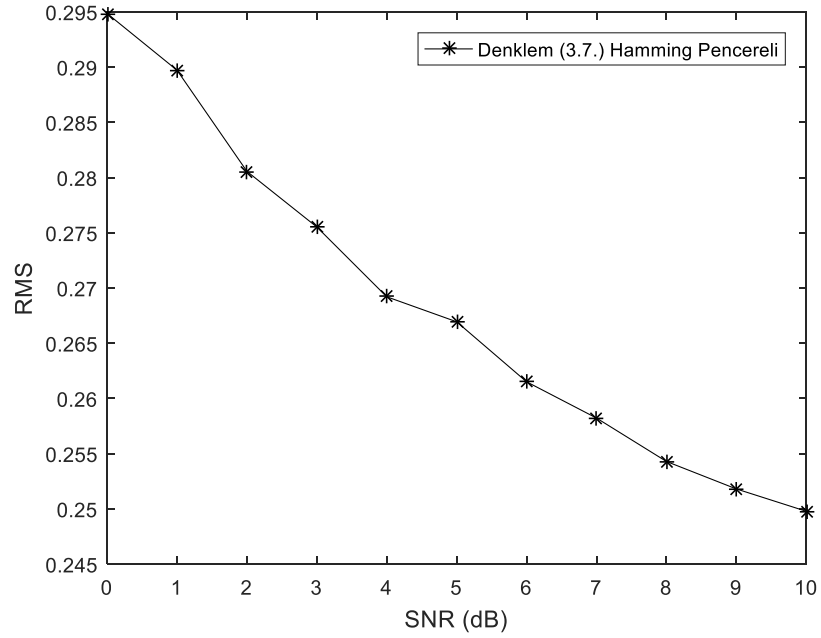
Şekil 4.1. Denklem (3.6.) ile Frekans Kestiricisinin RMS Hata Grafiği

Örnek 4.1.2 : Veri modelinde (3.7.) denklemi kullanılarak ayrık fourier dönüşümü ile frekans kestiriminin farklı SNR değerleri için elde edilen RMS hata grafiği Şekil 4.2 de gösterilmiştir.



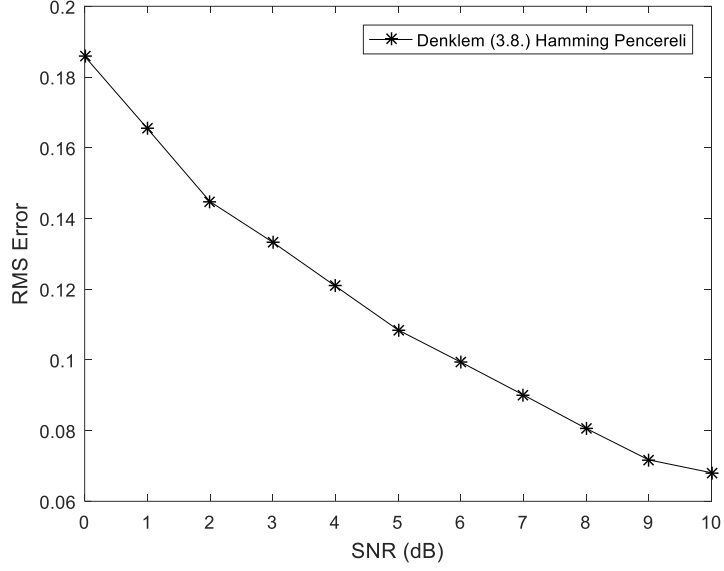
Şekil 4.2. Denklem (3.7.) ile Frekans Kestiricisinin RMS Hata Grafiği

Örnek 4.1.3 : (3.7.) denklemini kullanılarak hamming pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.3 de gösterilmiştir.



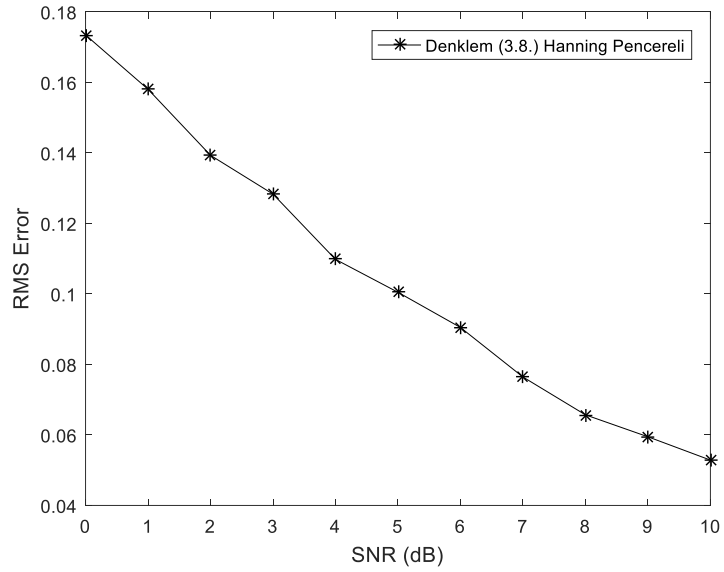
Şekil 4.3. Hamming Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.7.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,22)

Örnek 4.1.4 : (3.8.) denklemi kullanılarak **hamming** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.4. de gösterilmiştir.



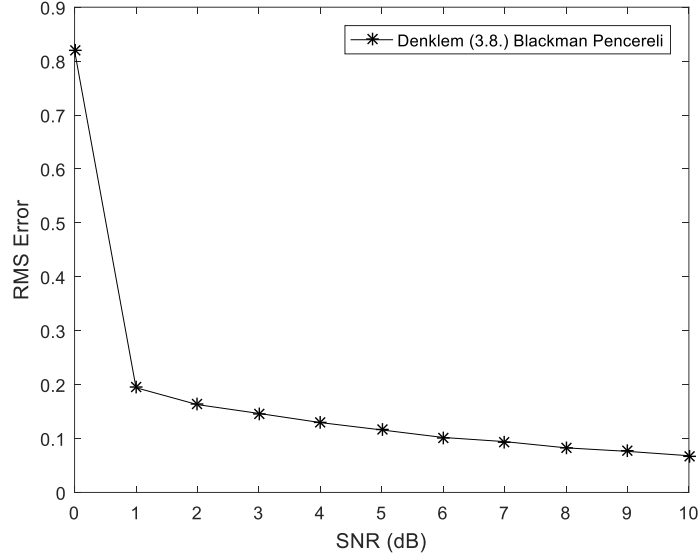
Şekil 4.4. Hamming Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,22)

Örnek 4.1.5 : (3.8.) denklemi kullanılarak **hanning** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.5 de gösterilmiştir.



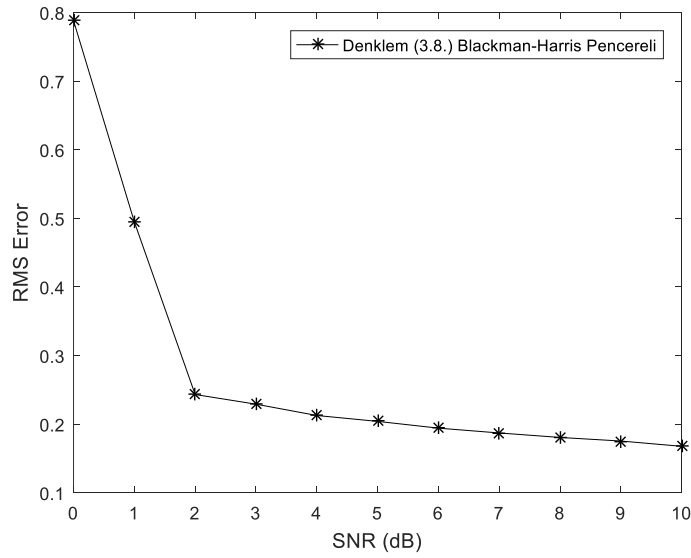
Şekil 4.5. Hanning Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,36)

Örnek 4.1.6 : (3.8.) denklemini kullanılarak **blackman** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.6 da gösterilmiştir.



Şekil 4.6. Blackman Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,75)

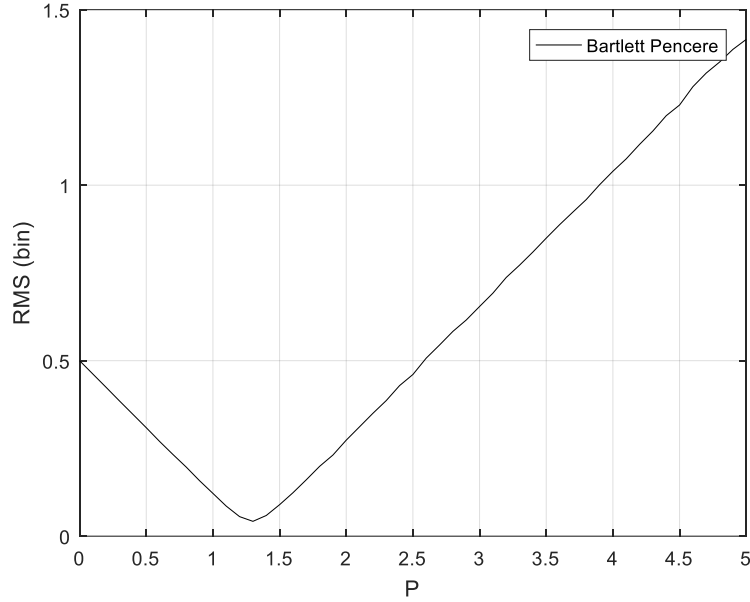
Örnek 4.1.7 : (3.8.) denklemini kullanılarak **blackman-harris** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.7 de gösterilmiştir.



Şekil 4.7. Blackman-Harris Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,72)

Deneysel çalışmaların bu aşamasında farklı pencere fonksiyonlarının frekans kestirimine etkileri incelenecektir. Bu amaçla Bartlett ve Gauss pencere fonksiyonları incelenecek olup öncelikle (3.8.) denkleminde kullanılan optimum P değeri belirlenecek ve daha sonra belirlenen optimum değerler ile farklı SNR seviyeleri için kestiricilerin performansı analiz edilecektir.

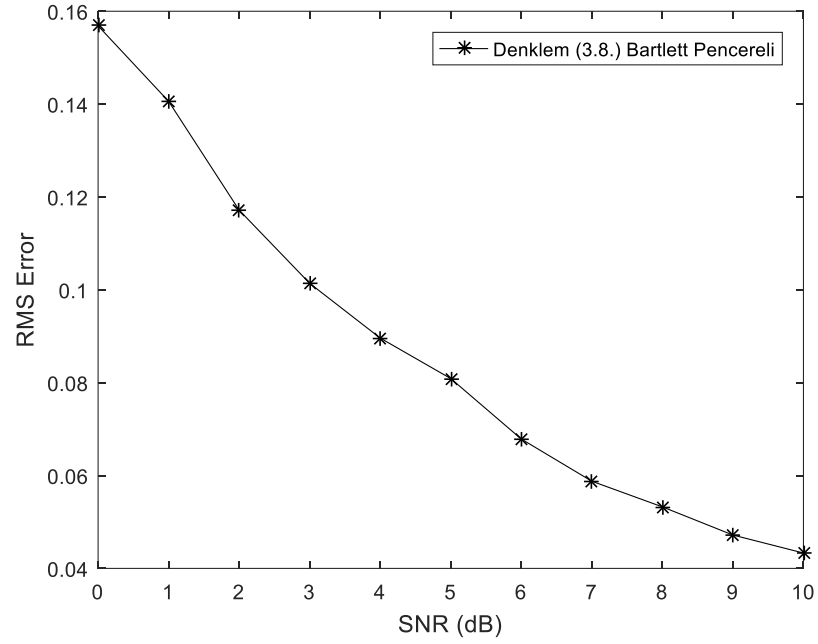
Örnek 4.1.8 : (3.8.) denklemi ile Bartlett pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyal kullanılarak frekans kestiriminin farklı P değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.8 de gösterilmiştir. Bu analizde SNR=10dB, $f=N$, $N=32$ seçilmiştir.



Şekil 4.8. Bartlett Pencere Fonksiyonu ile Denklem (3.8.) Kullanılarak Farklı P Değerleri için Frekans Kestiricisinin Performansı

Şekil 4.8 te görüldüğü gibi Bartlett pencere fonksiyonu için en iyi performans $P=1,30$ değeri ile edilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda Bartlett pencere fonksiyonu için bu değer kullanılacaktır.

Örnek 4.1.9 : (3.8.) denklemi kullanılarak **bartlett** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.9. da gösterilmiştir.



Şekil 4.9. Bartlett Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,30)

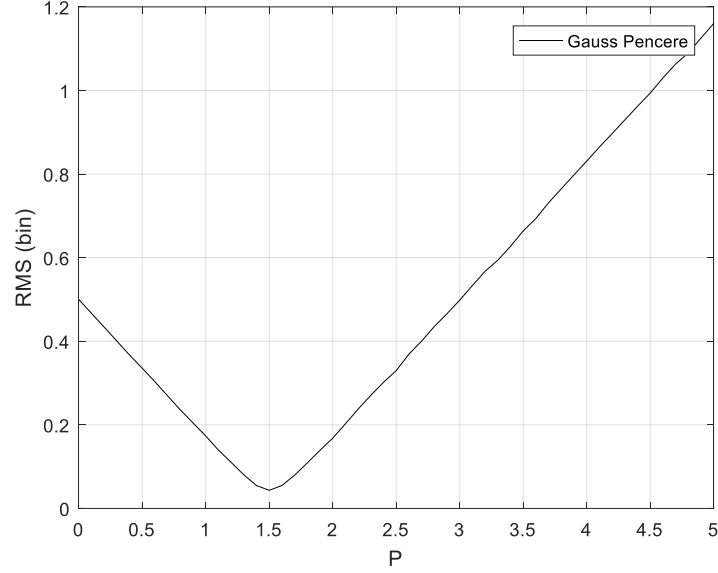
Bartlett pencere fonksiyonu ile pencerelemiş sinyalin farklı SNR, f ve N değerleri kullanılarak frekans kestiriminin farklı P değerleri aşağıdaki Çizelge 4.1’ de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1 Farklı SNR, N ve f Değerleri Kullanılarak Optimum P Değerleri

N / f	8/N			4/N			2/N		
	10	20	30	10	20	30	10	20	30
16	-	-	-	-	-	-	-	2,30	2,70
64	-	2,30	2,70	2,10	1,60	0,60	1,40	1,30	1,20
128	2,10	1,60	0,60	1,40	1,30	1,20	1,30	1,20	1,20

Tabloda görüldüğü gibi düşük SNR seviyelerinde fonksiyon sıfıra yakın olduğundan hata vererek değer bulunamamıştır. Şekil 4.8 ‘ de örnek bir SNR , N ve f değerleri alınarak P grafiği çizilmiş ve bulunan bu P değeri ile Şekil 4.9’ da frekans kestiricisinin performans grafiği elde edilmiştir.

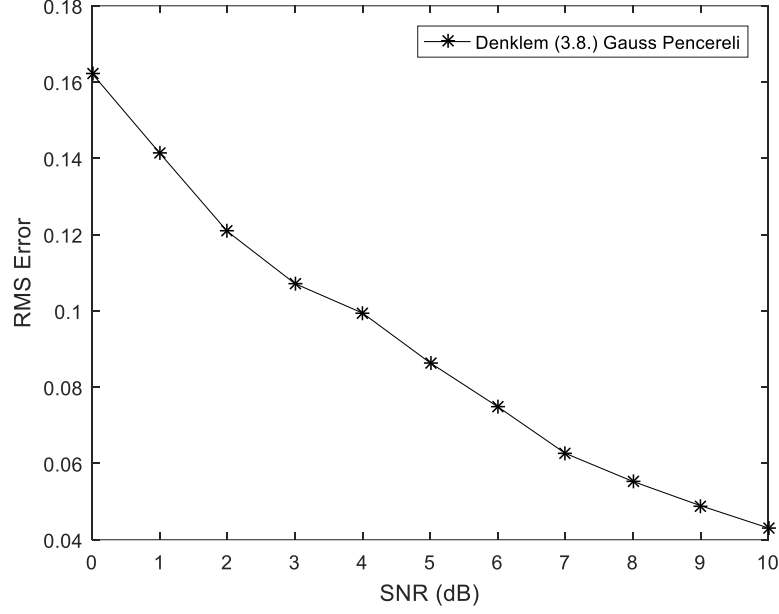
Örnek 4.1.10 : (3.8.) denklemi ile Gauss pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyal kullanılarak frekans kestiriminin farklı P değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.10 da gösterilmiştir. Bu analizde SNR=10dB seçilmiştir.



Şekil 4.10. Gauss Pencere Fonksiyonu ile Denklem (3.8.) Kullanılarak Farklı P Değerleri için Frekans Kestiricisinin Performansı

Şekil 4.10 da görüldüğü gibi Gauss pencere fonksiyonu için en iyi performans P=1,50 değeri ile edilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda Gauss pencere fonksiyonu için bu değer kullanılacaktır.

Örnek 4.1.11 : (3.8.) denklemini kullanılarak **gauss** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.11. de gösterilmiştir.



Şekil 4.11. Gauss Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.8.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (P=1,50)

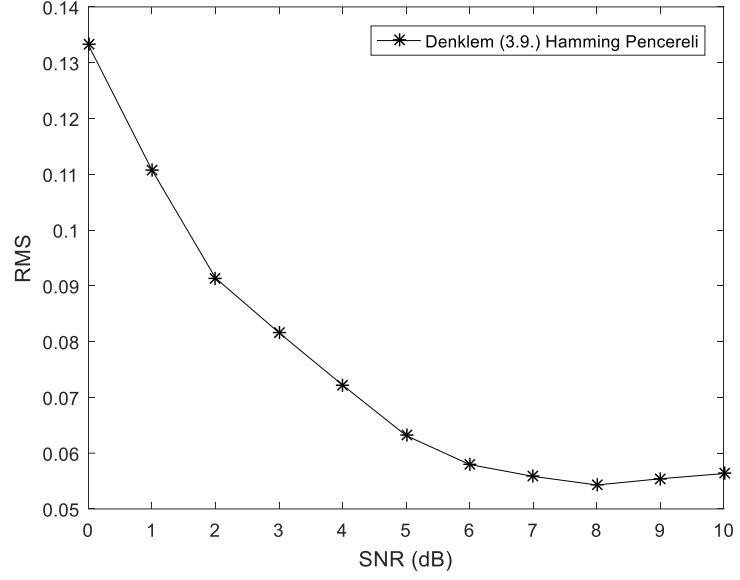
Gauss pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin farklı SNR, f ve N değerleri kullanılarak frekans kestiriminin farklı P değerleri aşağıdaki Çizelge 4.2’ de gösterilmiştir.

Çizelge 4.2 Farklı SNR, N ve f Değerleri Kullanılarak Optimum P Değerleri

N / f	8/N			4/N			2/N		
	10	20	30	10	20	30	10	20	30
16	-	-	-	-	-	-	-	0,20	0,20
64	-	0,20	0,20	3,70	4,40	4,10	1,60	1,50	1,40
128	3,70	4,40	4,10	1,60	1,50	1,40	1,50	1,40	1,40

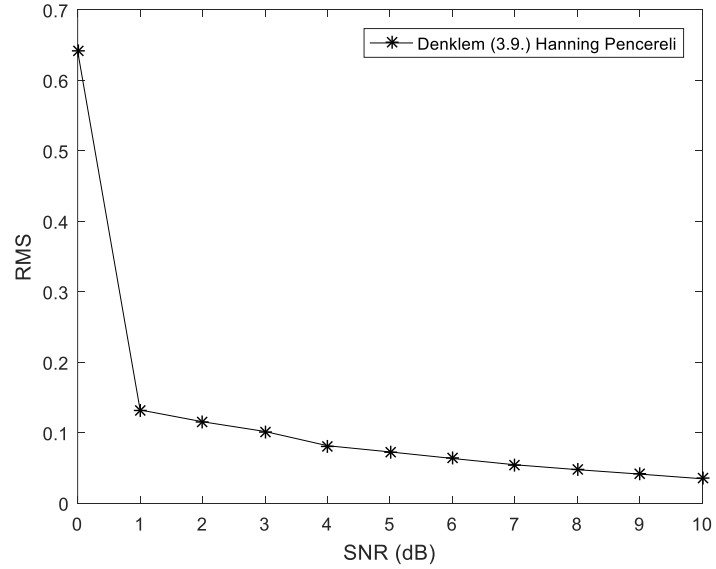
Tabloda görüldüğü gibi düşük SNR seviyelerinde fonksiyon sıfıra yakın olduğundan hata vererek değer bulunamamıştır. Şekil 4.10 ‘ da örnek bir SNR , N ve f değerleri alınarak P grafiği çizilmiş ve bulunan bu P değeri ile Şekil 4.11’de frekans kestiricisinin performans grafiği elde edilmiştir.

Örnek 4.1.12 : (3.9.) denklemini kullanılarak **hamming** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.12. de gösterilmiştir.



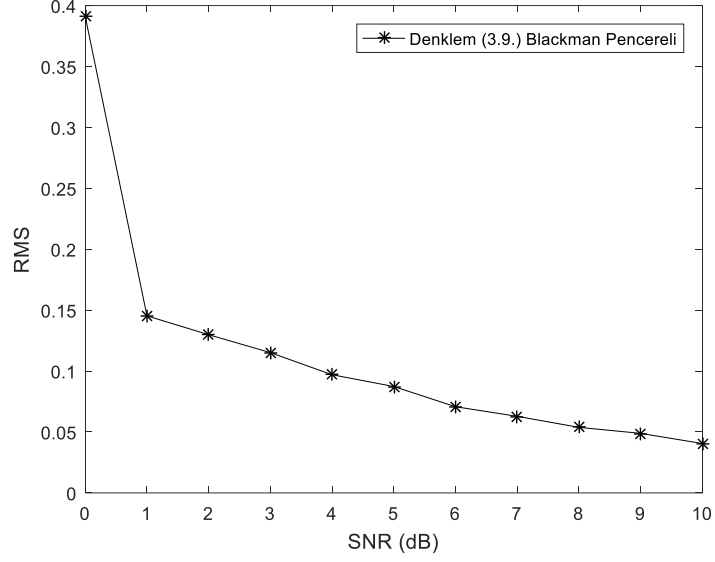
Şekil 4.12. Hamming Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (Q=0,60)

Örnek 4.1.13 : (3.9.) denklemini kullanılarak **hanning** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.13 de gösterilmiştir.



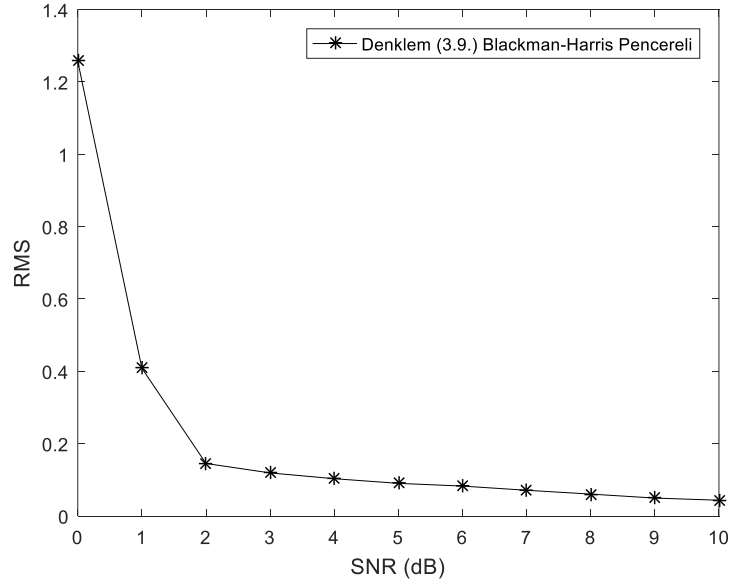
Şekil 4.13. Hanning Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (Q=0,55)

Örnek 4.1.14 : (3.9.) denklemini kullanılarak **blackman** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.14 de gösterilmiştir.



Şekil 4.14. Blackman Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (Q=0,55)

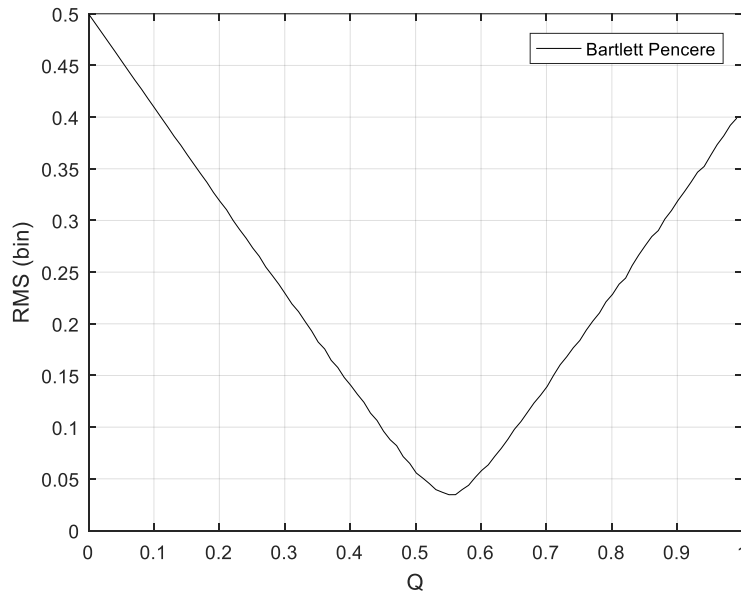
Örnek 4.1.15 : (3.9.) denklemini kullanılarak **blackman-harris** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.15 de gösterilmiştir.



Şekil 4.15. Blackman-Harris Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı (Q=0,56)

Deneysel çalışmaların bu aşamasında farklı pencere fonksiyonlarının frekans kestirimine etkileri incelenecektir. Bu amaçla Bartlett ve Gauss pencere fonksiyonları incelenecek olup öncelikle (3.9.) denkleminde kullanılan optimum Q değeri belirlenecek ve daha sonra belirlenen optimum değerler ile farklı SNR seviyeleri için kestiricilerin performansı analiz edilecektir.

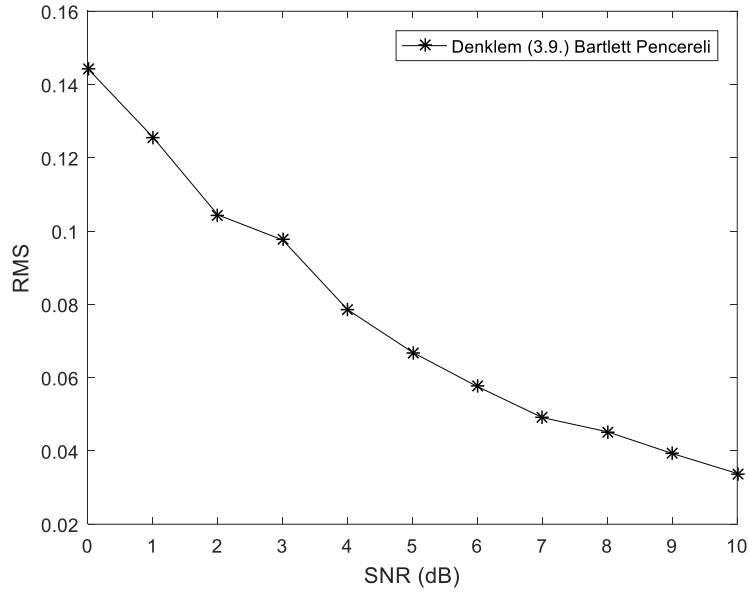
Örnek 4.1.16 : (3.9.) denklemi ile Bartlett pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyal kullanılarak frekans kestiriminin farklı Q değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.16 da gösterilmiştir. Bu analizde SNR=10dB seçilmiştir.



Şekil 4.16. Bartlett Pencere Fonksiyonu ile Denklem (3.9.) Kullanılarak Farklı Q Değerleri için Frekans Kestiricisinin Performansı

Şekil 4.16 da görüldüğü gibi Bartlett pencere fonksiyonu için en iyi performans $Q=0,55$ değeri ile edilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda Bartlett pencere fonksiyonu için bu değer kullanılacaktır.

Örnek 4.1.17 : (3.9.) denklemi kullanılarak **bartlett** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.17. da gösterilmiştir.



Şekil 4.17. Bartlett Pencere Fonksiyonu ile Pencerelemiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı ($Q=0,55$)

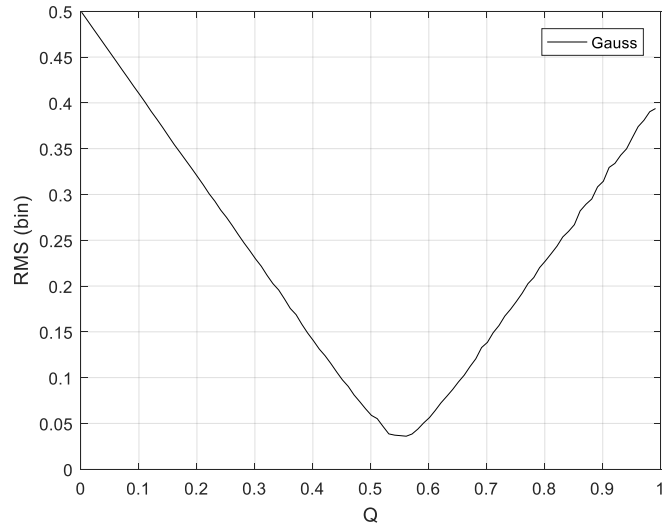
Bartlett pencere fonksiyonu ile pencerelemiş sinyalin farklı SNR, f ve N değerleri kullanılarak frekans kestiriminin farklı Q değerleri aşağıdaki Çizelge 4.3’ de gösterilmiştir.

Çizelge 4.3 Farklı SNR, N ve f Değerleri Kullanılarak Optimum Q Değerleri

N / f	8/N			4/N			2/N		
	10	20	30	10	20	30	10	20	30
16	-	-	-	-	-	-	-	0,79	0,78
64	-	0,79	0,78	0,77	0,25	0,19	0,58	0,54	0,52
128	0,77	0,25	0,19	0,58	0,54	0,52	0,55	0,52	0,51

Tabloda görüldüğü gibi düşük SNR seviyelerinde fonksiyon sifıra yakın olduğundan hata vererek değer bulunamamıştır. Şekil 4.16 ‘ da örnek bir SNR , N ve f değerleri alınarak Q grafiği çizilmiş ve bulunan bu Q değeri ile Şekil 4.17’de frekans kestiricisinin performans grafiği elde edilmiştir.

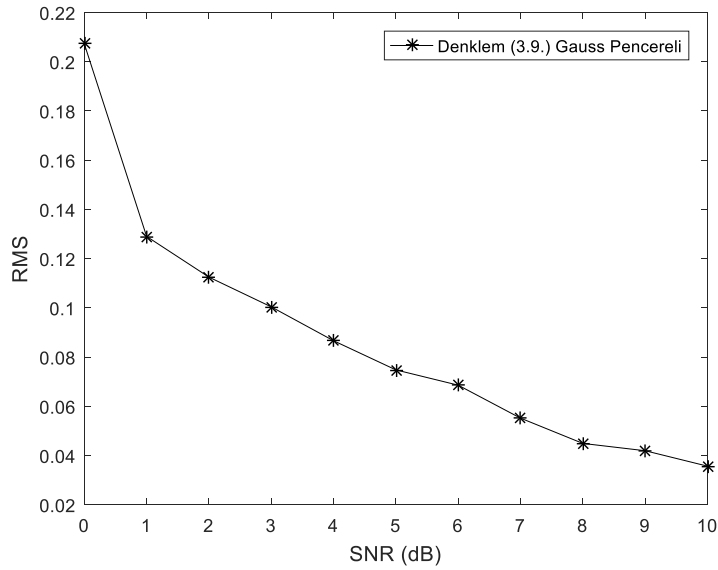
Örnek 4.1.18 : (3.9.) denklemleri ile Gauss pencere fonksiyonu ile pencerelemiş sinyal kullanılarak frekans kestiriminin farklı Q değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.18 de gösterilmiştir. Bu analizde SNR=10dB seçilmiştir.



Şekil 4.18. Gauss Pencere Fonksiyonu ile Denklemler (3.9.) Kullanılarak Farklı Q Değerleri için Frekans Kestiricisinin Performansı

Şekil 4.18 de görüldüğü gibi Gauss pencere fonksiyonu için en iyi performans $Q=0,55$ değeri ile edilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda Gauss pencere fonksiyonu için bu değer kullanılacaktır.

Örnek 4.1.19 : (3.9.) denklemi kullanılarak **gauss** pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin frekansının kestiriminin farklı SNR değerleri için RMS hata grafiği Şekil 4.19. da gösterilmiştir.



Şekil 4.19. Gauss Pencere Fonksiyonu ile Pencerelenmiş Sinyalden Denklem (3.9.) ile Frekans Kestiricisinin Performansı ($Q=0,55$)

Gauss pencere fonksiyonu ile pencerelenmiş sinyalin farklı SNR, f ve N değerleri kullanılarak frekans kestiriminin farklı Q değerleri aşağıdaki Çizelge 4.4' de gösterilmiştir.

Çizelge 4.4 Farklı SNR, N ve f Değerleri Kullanılarak Optimum Q Değerleri

N / f	8/N			4/N			2/N		
	10	20	30	10	20	30	10	20	30
16	-	-	-	-	-	-	-	0,08	0,29
64	-	0,08	0,29	0,90	0,79	0,39	0,59	0,54	0,53
128	0,90	0,79	0,39	0,59	0,54	0,53	0,55	0,52	0,51

Tabloda görüldüğü gibi düşük SNR seviyelerinde fonksiyon sıfıra yakın olduğundan hata vererek değer bulunamamıştır. Şekil 4.18 ' de örnek bir SNR , N ve f değerleri alınarak Q grafiği çizilmiş ve bulunan bu Q değeri ile Şekil 4.19'da frekans kestiricisinin performans grafiği elde edilmiştir.

Yapılan çalışmalarda kullanılan ve optimum olarak belirlenen P ve Q değerleri farklı pencere fonksiyonları için Çizelge 4.5 de özetlenmiştir.

Çizelge 4.5 Farklı Pencere Fonksiyonları için Optimum P ve Q Değerleri

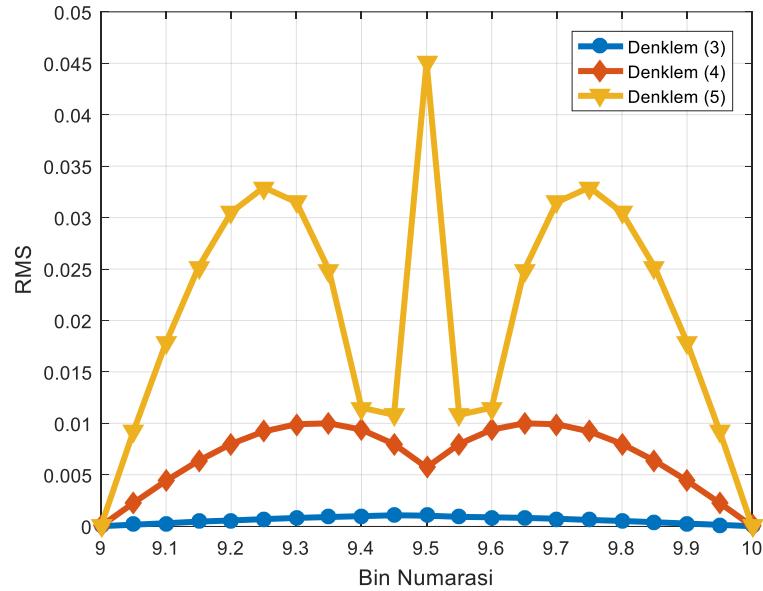
Pencere Fonksiyonu	P Değeri	Q Değeri
Hamming	1,22	0,60
Hanning	1,36	0,55
Blackman	1,75	0,55
Blackman-Harris	1,72	0,56
Bartlett	1,30	0,55
Gauss	1,50	0,55

Deneysel çalışmaların bir sonraki aşamasında farklı frekans kestiricilerin performans analizi gürültünün olmadığı durumda incelenmiştir. Bu amaçla spektral tepe noktası 9 ile 10 arasında küçük artış miktarları ile değişen tek tonlu bir sinüzoidal sinyalin frekansının kestirimi problemi ele alınmıştır. Performans analizi, karesel ortalama hatanın karekökü (RMS) ve yanlışlık (BIAS) metrikleri ile incelenmiştir.

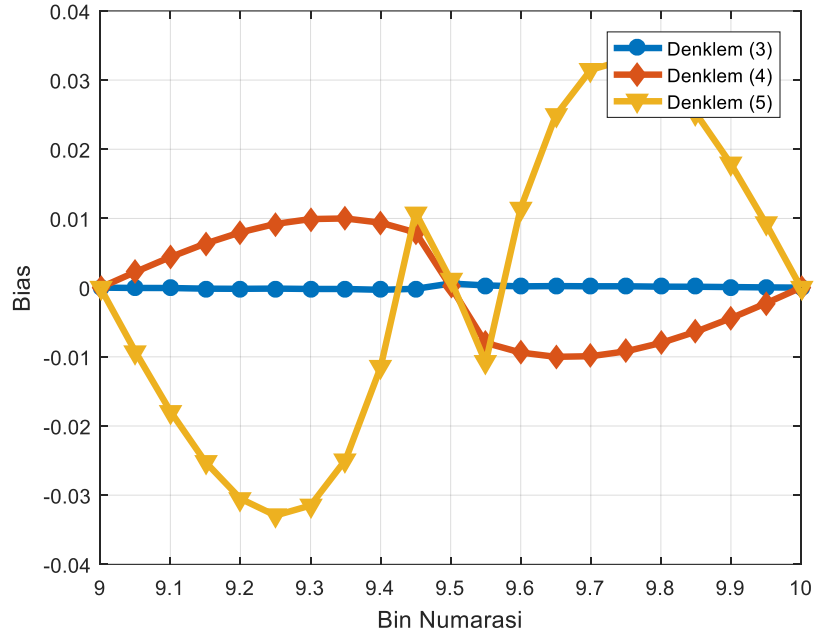
Denklem (3.7.),(3.8.) ve (3.9.) kestiricilerinin performansları sırası ile Şekil 4.20 ve 4.21 de gösterilmiştir.

Şekillerden görüldüğü üzere her bir frekans kestiricisinin performansı BİN lokasyonuna göre değişmektedir.

Örneğin; $k=9.2$ bin numarası için RMS metriğine göre en iyi performansı Denklem (3.7.) kestiricisi gösterirken Denklem (3.9.) çok daha zayıf performans göstermektedir. Yanlılık metriğine göre de benzer sonuçlar görülmektedir. Fakat $k=9.5$ ve daha büyük değerlerde yanlışlık metriği dikkate alındığında (3.9.) kestiricisi daha iyi performans göstermektedir.



Şekil 4.20. Gürültünün olmadığı durumda farklı BİN lokasyonlarına göre Frekans kestiricilerinin RMS Performansının Karşılaştırması



Şekil 4.21. Gürültünün olmadığı durumda farklı BİN lokasyonlarına göre Frekans kestiricilerinin BİAS(Yanlılık) Performansının Karşılaştırması

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında; gürültülü reel sinüs sinyalinin dört farklı kestirici kullanılarak performans analizleri yapılmıştır. Dört farklı kestirici ile Hamming, Hanning, Blackman, Blackman-Harris, Bartlett ve Gauss pencere fonksiyonları uygulanarak karşılaştırmaları yapılmıştır. Farklı pencere fonksiyonları ile pencerelenmiş sinyalin farklı sinyal gürültü oranı (SNR), frekans (f) ve sinyal örnek uzunluğu (N) değerleri kullanılarak frekans kestiricisinin optimum P ve Q değerleri hesaplanarak bu değerler için frekans kestiricilerinin performansları analiz edilmiştir. Deneysel çalışmalardan elde edilen bulgulara göre, toplamsal gürültü durumunda frekans kestiricinin performansı ciddi anlamda düşmektedir. Bu durumda en iyi performans Bartlett pencere fonksiyonunun kullanılması ile elde edilmiştir. Gürültünün olmadığı durumda ise pencere fonksiyonunun kullanılmasının kestirici performansını olumsuz anlamda etkilediği gözlenmiştir. Gürültüsüz durumda pencere fonksiyonunun kullanılmadığı kestiriciler en düşük bias (yanlılık) ve hatanın karelerinin ortalamasının karekökü (RMS) değerlerini vermiştir. Pencere fonksiyonları kullanıldığında ise bias ve RMS değerlerinde ciddi artışlar gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

Jacobsen, E., Kootsookos, P. 2007. Fast, Accurate Frequency Estimators, *IEEE Signal Processing Magazine* [123] MAY 2007

Kay, S. M. 1993. Fundamentals of statistical signal processing Estimation theory. Prentice-Hall, New Jersey, 595pp.

Moeneclaey, M. 1998. On the true and the modified cramer-rao bounds for the estimation of a scalar parameter in the presence of nuisance parameters. *IEEE Transactions on Communications* ,46(11) : 1536-1544.

So, H., Chan, Y., Ho, K., Chen, Y. 2013. Simple Formulas for Bias and Mean Square Error Computation. *IEEE Signal Processing Magazine*, 30(4): 162-165.

Ksibi, R.E., Besbes, H., Valcarce, R.L., Cherif, S. 2010. Frequency Estimation of real-valued single-tone in colored noise using multiple autocorrelation lags. *Signal Processing*, 90(2010): 2303-2307.

V. Vetterling, W. Press, S. Teukolsky, and B. Flannery. 1992. Numerical Recipes in C. Cambridge, United Kingdom: Cambridge Univ. Press, 1992, Chapter 10.

Voglewede, P. 2004. "Parabola approximation for peak determination," *Global DSP Mag.*, vol. 3, no. 5, pp.13-17, May 2004.

Quinn, B.G. 1994. "Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 5, pp. 1264–1268, May 1994.

Macleod, M. 1998. "Fast nearly ML estimation of the parameters of real or complex single tones or resolved multiple tones," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, no. 1, pp. 141–148, Jan. 1998.

Jacobsen, E. "On local interpolation of DFT outputs" [Online]. Available: <http://www.ericjacobsen.org/FTinterp.pdf>

Rife, D. and Boorstyn, R. 1974. "Single-tone parameter estimation from discrete-time observations," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 591–598, Sept. 1974.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ahmet HANİLÇİ
Doğum Yeri ve Tarihi : Malatya 11.11.1988
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu
Lise : Ulubatlı Hasan Anadolu Lisesi (2002)
Lisans : Sakarya Üniversitesi (2006)

Çalıştığı Kurum : HANEL MÜHENDİSLİK

İletişim (e-posta) : hanilciahmet@hotmail.com

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ

TEZ ÇOĞALTMA VE ELEKTRONİK YAYIMLAMA İZİN FORMU

Yazar Adı Soyadı	AHMET HANILÇI
Tez Adı	BAZI TEK FREKANS KESTİRİCİLERİNİN PERFORMANS ANALİZİ
Enstitü	FEN BİLİMLERİ
Anabilim Dalı	ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
Tez Türü	YÜKSEK LİSANS
Tez Danışman(lar)ı	PROF.DR.ERDOĞAN DİLAVEROĞLU
Çoğaltma (Fotokopi Çekim) izni	<input type="checkbox"/> Tezimden fotokopi çekilmesine izin veriyorum <input type="checkbox"/> Tezimin sadece içindekiler, özet, kaynakça ve içeriğinin % 10 bölümünün fotokopi çekilmesine izin veriyorum <input checked="" type="checkbox"/> Tezimden fotokopi çekilmesine izin vermiyorum
Yayımlama izni	<input checked="" type="checkbox"/> Tezimin elektronik ortamda yayımlanmasına izin Veriyorum

Hazırlamış olduğum tezimin belirttiğim hususlar dikkate alınarak, fikri mülkiyet haklarım saklı kalmak üzere Uludağ Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı tarafından hizmete sunulmasına izin verdiğimi beyan ederim.

Tarih : 31.07.2019

İmza :