LİNEER ELİPTİK KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE İNTEGRAL OPERATÖRLER

İbrahim YAĞIZ

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER ELİPTİK KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE İNTEGRAL OPERATÖRLER

İbrahim YAĞIZ
0000-0002-4249-0912

Prof. Dr. Sezayi HIZLIYEL
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2021

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…/…/………

İbrahim YAĞIZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER ELİPTİK KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERDE İNTEGRAL OPERATÖRLER

İbrahim YAĞIZ

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sezayi HIZLIYEL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm ise temel kavramlardan oluşmaktadır.

Üçüncü bölümde, ikinci mertebeden

$$\tilde{L}\left(\tilde{\tilde{U}}\right) = \tilde{\tilde{U}}_{xx} + \tilde{\tilde{U}}_{yy} + a\tilde{\tilde{U}}_x + b\tilde{\tilde{U}}_y + c\tilde{\tilde{U}} = 0 \tag{1.1}$$

lineer kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini, bir karmaşık değişkenli analitik fonksiyonları bu denklemlerin çözümlerine dönüştüren integral operatörleri tanıtacağız Burada x ve y reel değişken, a, b ve c katsayıları reel analitiktir. Bu maksat için a, b ve c katsayılarını x ve y nin karmaşık değerlerine dönüştürmek uygun olacaktır. Şimdi $z = x + iy, z^* = x - iy$ değişken dönüşümü ile (1.1) denklemi

$$LU = U_{zz^*} + AU_z + BU_{z^*} + CU = 0 \tag{1.2}$$

formundaki denkleme dönüşür. Bu bölümde (1.2) denkleminin çözümleri için ana hatları ile Stefan Bergman tarafından verilen integral operatör teori özetlenecektir.

Dördüncü bölümde üç değişkenli

$$\Delta\Psi \equiv \Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz} = 0 \tag{1.3}$$

Laplace denkleminin çözümlerinin analitik özelliklerini Bergman-Whittaker integral operatör yardımıyla inceleyeceğiz.

Beşinci bölüm sonuç bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: Bergmann-Whittaker Operatörü, Harmonik Fonksiyon, İntegral Operatör.

2021, v + 73 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

INTEGRAL OPERATORS IN LINEAR ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

İbrahim YAĞIZ

Bursa Uludağ University
Graduate Scool of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sezayi HIZLIYEL

This thesis consists of five parts.

The The first chapter is the introduction. The second part consists of basic concepsts.

In the third part, we will introduce the integral operators that convert analytical functions of a complex variable into solutions of second order linear partial differential equations

$$\tilde{L}\left(\tilde{\tilde{U}}\right) = \tilde{\tilde{U}}_{xx} + \tilde{\tilde{U}}_{yy} + a\tilde{\tilde{U}}_x + b\tilde{\tilde{U}}_y + c\tilde{\tilde{U}} = 0. \tag{1.1}$$

Integral operators that convert analytic functions of a complex variable into solutions of these equations. Here x and y are real variables, coefficients a, b and c are real analytical. For this purpose, it would be appropriate to convert the coefficients a, b and c to complex values of x and y. Now with the variable transformation $z = x + iy,\ z^* = x - iy$ transforms the equation (1.1) into the equation in the form

$$LU = U_{zz^*} + AU_z + BU_{z^*} + CU = 0 \tag{1.2}$$

In this section, the solutions of equation (1.2) will be summarized with the main lines of the integral operator theory given by Stefan Bergman.

In the fourth part ,three veriables

$$\Delta\Psi \equiv \Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz} = 0 \tag{1.3}$$

We will examine the analytical properties of the solutions of the (1.3) Laplace equation with the help of the Bergman-Whittaker integral operator. The fifth part is the conclusion part.

Key words: Bergmann-Whittaker Operator, Harmonic Function, Integral Operator.

2021, v + 73 pages

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sırasında, yaptığım çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren araştırmalarımın her aşamasında öneri, bilgi ve yardımlarını esirgemeyerek gelişimime katkıda bulunan, çalışmalarım süresince her anlamda bana destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sezayi HIZLIYEL'e saygı ve sevgilerimle teşekkür ederim.

Bana hiçbir desteğini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

İbrahim YAĞIZ

.../…/.. ..

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu tezde, lineer kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini, bir karmaşık değişkenli analitik fonksiyonları bu denklemlerin çözümlerine dönüştüren integral operatörler ile inşa edeceğiz.

İntegral operatörlerin birçok çeşidi matematik literatüründe uzun bir süredir yer almaktadır. Bu bağlamda Laplace ve Euler'i zikretmek yeterli olacaktır. Bu maksat için, analitik fonksiyonların bölgenin düzenliliği, serilerin inşasısın geçerliliği, katsayılar arasındaki ilişkiler vs. gibi analitik fonksiyon teorisi özelliklerini koruyan operatörler kullanılır.

İyi bilindiği gibi $\tilde{\tilde{U}}$; x ve y değişkenlerinin bir fonksiyonu olmak üzere

$$\tilde{\tilde{U}}_{xx} + \tilde{\tilde{U}}_{yy} = 0 \tag{1.1}$$

Homojen lineer denklemine iki boyutlu Laplace denklemi denir. z=x+iy, z^*=x−iy değişken dönüşümü ile (1.1) denklemi z ve z^* kompleks değişkenleri ile

$$U_{zz^*} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan ϕ ve ψ, kendi değişkenlerinin türetilebilir keyfi fonksiyonları olmak üzere,

$$U(z, z^*) = \phi(z) + \psi(z^*)$$

elde edilir.

Doğal olarak, daha genel kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin karmaşık analitik fonksiyonlarla ilişkisi sorgulanmalıdır. Bu durum lineer kısmi diferensiyel denklemlerin geniş ve eşsiz bir teorisine yol acar. Analitik fonksiyonları çeşitli analitik katsayılı lineer kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerine dönüştüren birçok sayıda

(Re operatörünün genellemesi) vardır. Bu operatörlerin büyük çoğunluğu oldukça karmaşıktır, fakat bu operatörlerin bazıları kısmi diferensiyel denklemlerin teorisi bazında sistematik ve derin bir teori geliştirmek için kullanılabilir. Ayrıca Dirichlet problemini çözmek için bir yada daha fazla kompleks değişkenli holomorf fonksiyonları harmonik fonksiyonlara dönüştüren integral operatörler geliştirilmiştir. Bu metot orijinal olarak ilk defa Setafan Bergman tarafından keşfedilmiştir ve bu çalışmalardan sonra üç ila elli yıl boyunca kendisi tarafından bir dizi makale ile geniş çapta geliştirilmiştir

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde ele alınacak integral operatörlerin incelenmesinde temel teşkil eden kavram ve sonuçlarla ilgili ön bilgiler verilecektir.

2.1. Gamma ve Beta Fonksiyonu

Bu kısımda çok iyi bilinen Gamma ve Beta fonksiyonlarının ve bazı özelliklerini kısaca zikredeceğiz. Gamma fonksiyonu aşağıda belirtilmiş olan ifadelerle tanımlanabilir:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 (\log 1/\mathrm{t})^{z-1} dt, \quad Rez > 0 \tag{2.1}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z(1+z)(1+z/2)\ldots(1+z/n)} \tag{2.2}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} [(1+1/n)^z (1+z/n)^{-1}]$$

(1.1)’in kısmi integral alınarak

$$\Gamma(z) = (1/z) \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \left(\frac{1}{z}\right) \Gamma(1+z),$$

ya da ;

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.3}$$

ve eğer n pozitif bir tamsayı ise

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)\Gamma(z)$$

elde edilir ve böylece aşağıda belirtilmiş olan özellikler kolayca elde edilebilir:

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)} = (z-1)(z-2)\dots(z-n) = (-1)^n\Gamma(-z+n+1)/\Gamma(-z+1) \tag{2.4}$$

$$\frac{\Gamma(-z+n)}{\Gamma(-z)} = (-1)^n z(z-1)\dots(z-n+1)$$

$$= \frac{(-1)^n\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)}$$

Ayrıca ;

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$$

olduğundan

$$\Gamma(n+1) = 1.2.3\dots n = n!$$

ve (2.4) den

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -z^{-2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1}$$

elde edilir.

$$\sin(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

Olduğundan aşağıda belirtilmiş özellikler kolayca elde edilebilir:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\pi z^{-1}\csc(\pi z),$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \csc(\pi z),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \pi\sec(\pi z)$$

Beta fonksiyonu ise

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad Rex > 0, \quad Rey > 0 \tag{2.5}$$

olarak tanımlanır. $t = \frac{v}{1+v}$ yazılması ile

$$B(x,y) = \int_0^\infty v^{x-1}(1+v)^{-x-y}dv$$

$$= \int_0^\infty (v^{x-1} + v^{y-1})\,(1+v)^{-x-y}$$

elde edilir. Buradan da $B(x,y) = B(y,x)$ olduğu anlaşılır Burada ispatına değinmeden Gamma ve Beta fonksiyonları arasındaki

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.6}$$

ilişkiyi verelim Beta fonksiyonunun diğer özellikleri için (Erdelyi 1953 ,1955) e bakılabilir.

2.2. Kompleks Legendre Fonksiyonları

İyi bilindiği gibi,

$$(1-z^2)\frac{dw}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + [v(v+1) - \mu^2(1-z^2)^{-1}]w = 0 \tag{2.7}$$

denklemine Legendre denklemi denir ve (2.7) denkleminin çözümlerine Legendre fonksiyonu denir. Burada υ, μ ve z üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur. $w = (z^2-1)^{1/2\mu}v$ değişken dönüşümü altında (2.7) denklemi

$$(1-z^2)\frac{dv}{dz^2} - 2(\mu+1)z\frac{dv}{dz} + (\upsilon-\mu)(\upsilon+\mu+1)v = 0 \qquad (2.8)$$

denklemine dönüşür. $\zeta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}$ bağımsız değişkeni ile bu difrensiyel denklemi

$$\zeta(1-\zeta)\frac{dv}{d\zeta^2} + (\mu+1)(1-\zeta)\frac{dv}{d\zeta} + (\upsilon-\mu)(\upsilon+\mu+1)v = 0$$

elde edilir. Bu $a = -\upsilon+\mu$, $b = \upsilon+\mu+1$ ve $c = (\mu+1)$ ile bir Gauss denklemidir. Yani ;

$$\zeta(1-\zeta)\frac{dv}{d\zeta^2} + [c-(a+b+1)]\frac{dv}{d\zeta} - abv = 0 \qquad (2.9)$$

denklemine dönüşür. Burada *a*, *b* ve *c* değerleri *z* den bağımsızdır. Bu bir hipergeometrik denklemdir. *a*, *b* ve *c* ye denklemin parametreleri denir. Keyfi kompleks sabitlerdir. Şimdi

$$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$$

yani;

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1), \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

yi tanımlayalım. Eğer $c \neq 0,-1,-2,\ldots$ ise bu taktirde ;

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n\zeta^n}{[(c)_n n!]} \equiv F(a,b;c;\zeta)$$

bu denkleminin bir çözümüdür. Bu iyi bilinen bir denklemdir. Bu denkleminin ayrıntılı olarak çözümlerinin nasıl elde edildiğini görmek için (Erdelyi 1953 ,1955) e bakılabilir. Buradan orijinal denklemin çözümü

$$w = P_v^{\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) F\left(-v, v+1, 1-\mu, \frac{1}{2} - \frac{1}{2z}\right), \qquad |1-z| < 2$$

dir. Eğer$\zeta = z^2$ alınırsa (1.6) denklemi

$$4\zeta(1-\zeta)\frac{d^2v}{d\zeta^2} + [2-(4\mu+6)\zeta]\frac{dv}{d\zeta} - (v-\mu)(\mu+v+1)v = 0,$$

$a = \frac{1}{2(\mu+v+1)}$,$b = \frac{1}{2(\mu-v)}$, $c = 1/2$ ile hipergometrik tipten bir denkleme dönüşür ki bu denklemin çözümü ;

$$w = Q_v^{\mu}(z) = e^{\mu i\pi} 2^{-v-1} \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\mu+v+1)}{\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)} z^{-v-\mu-1} (z^2-1)^{\frac{1}{2\mu}}$$
$$\times F\left(\frac{1}{2v} + \frac{1}{2\mu} + 1, \frac{1}{2v} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2}; v + 3/2, z^{-2}\right)$$

dir. $P_v^{\mu}(z)$ ve $Q_v^{\mu}(z)$ fonksiyonlarına sırasıyla birinci ve ikinci çeşit Legendre fonksiyonları denir. Bu fonksiyonlar tüm -1 den ∞ kadar reel eksenin çıkartılması ile tüm z- düzleminde birebir ve regülerdirler. Ayrıca $Rec > 0, Reb > 0$ ise Euler formülü ile

$$F(a,b;c;\zeta) = \Gamma(c)[\Gamma(b)\Gamma(c-b)]^{-1} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a} dt \qquad (2.10)$$

elde edilir. Burada sağ taraf $|\arg(1-z)| < \pi$ bölgesinde z nin tek değerli analitik fonksiyonudur. O halde (2.10) $F(a,b;c;\zeta)$ nin analitik devamını verir. $|z| < 1$ için (2.10) nin ispatında $(1-tz)^{-a}$ binom serisine açılır ve terim terime integrallenir. Bu, (2.5) ve (2.6) nın değerlendirilmesi ile Beta integrallerine yol açar.

$$\left\{z(1-z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left[c-(a+b+1)z\frac{\partial}{\partial z}-ab\right]\right\}\left[t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\right] \quad (1.11)$$

$$=-a\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{b}(1-t)^{c-b}(1-tz)^{-a-1}\right]$$

Eşitliğinden (2.10) nu sağ tarafı (2.9) u sağlar ve $s=-t$ ile eğer $Reb>0, Re(a+1-c)$ ve $|argz|<\pi$ ise,

$$\int_0^\infty s^{b-1}(1+s)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}ds$$

(2.9) un bir çözümüdür. $s=\tau/(1-\tau)$ ile bu

$$\int_0^1 \tau^{b-1}(1-\tau)^{a-c}[1-\tau(1-z)]^{-a}d\tau$$

olur. O halde

$$F(a,b;a+b+1;1-c;1-z)=\Gamma(a+b+1-c)[\Gamma(b)\Gamma(a+1-c)]$$
$$\times\int_0^\infty s^{b-1}(1+s)^{c-b-1}(1+sz)^{-a}ds$$

de hipergeometrik denklemin bir çözümüdür. Bundan başka, eğer C integralin Riemann yüzeyi üzerinde kapalı ya da $t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}$ nin sıfırlarından geçmeyen bir eğri ise herhangi bir

$$\int_C t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$

İntegrali de (2.9) un bir çözümüdür.

2.3. Üreteç Fonksiyonu

Eğer $n = 0,1,2 \cdots$ için $F(-n, a+n, c; z)$ polinomları Jakobi polinonlar iseler. Bu taktirde bu polinomlar ile

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n (c)_n F(-n,a+n;c;z)}{n!} = S^{-1} \left(\frac{S+s-1}{2sz}\right)^{c-1} \left(\frac{S+s+1}{2}\right)^{c-a} \tag{2.12}$$

Üreteç fonksiyonları elde edilir. Burada

$$S = [1 - 2(1-2z)s + s^2]^{1/2}$$

ve $s \to 0$ iken $S \to 1$ dir. (2.12) nin sol tarafı $|s| < 1$ ve $|1-2z| < 1$ iken yakınsaktır. $Rec > 0$ durumunda (2.10) integralinde yeni bir $u = t(1-tz)(1-t)^{-1}$ değişken değişimi yapılarak

$$F(b, a-b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^{\infty} u^{b-1} \left(\frac{1-u+U}{2}\right)^{c-a} \left(\frac{1+u-U}{2uz}\right)^{c-1} \frac{dU}{U}$$

elde edilir. Mellin dönüşüm formülünün tersi uygulanırsa

$$\left(\frac{1-u+U}{2}\right)^{c-a} \left(\frac{1+u-U}{2uz}\right)^{c-1} U^{-1} = \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} u^{-b} F(b, a-b; c; z) \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} db$$

elde edilir. Burada β uygun olarak seçilmiş bir reel sayıdır. (2.13) integralinin sağ tarafı $b = -n$ $(n = 0,1,2, \cdots)$ de kutuplara sahiptir. Rezidü teoreminin bir uygulaması ile c üzerindeki kısıtlamaların kaldırılabileceği görülebilir ve $s = -u$ ile (2.12) elde edilir. (2.13), $F(b, a-b; c; z)$ için bir sürekli lineer üreteç fonksiyonu olarak düşünebiliriz. İki lineer üreteç fonksiyonları ve birçok ilişkili sonuçlar için (Erdelyi 1941)'ye bakılabilir.

Aynı metot (2.12) nin ispatında da kullanılabilir ve

$$(1-s)^{a-c}(1-s+sz)^{-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n(c)_nF(-n,a;c;z)}{n!}, \quad |s|<1, \quad |s(1-z)|<1$$

olduğu gösterilebilir.

Dikkat edilirse $x=\pm 1$ bu denklemin aykırı noktalarıdır ve (2.5) denklemi $-1<x<1$ aralığında yakınsak çözümlere sahiptir. Özellikle $\ell=0,1,2,\cdots$ için (2.5) denklemini çözümleri sırasıyla $P_0(x)=1, P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\cdots$ dır ve önemli özelliklere sahiptir. Bu çözümlere Legendre polinomları denir. Önemli bir özelliği ise bu polinomların ortogonal yani;

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{2.14}$$

dır. burada δ_{nm} kroniker deltadır. $P_n(x)$ için üretici fonksiyon

$$g(t,x)=(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x)t^n$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.4. $f(z)$ fonksiyonu için,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

limiti sınırlı ve belirli ise, bu değere $f(z)$'nin türevi denilir. Türevin varlığı z noktasında $f(z)$'nin sürekliliğini gösterir. Eğer $f(z)$ belli B bölgesinin tüm noktalarında tanımlı belirli ve sürekli bir türeve sahip ise $f'(z)$ tek diferansiyelli denilir. Tek türeve sahip fonksiyonlara regüler fonksiyon denilir. Eğer $f(z)$, z $= z_0$ noktası hariç her yerde regüler, fakat x_0'da regüler değilse z noktasına $f(z)$'nin ayrık tekil noktası denilir.

Tanım 2.5. $z = x + iy$, $f = u + iv$ iken x'e göre türev $(\Delta y = 0, \Delta y = \Delta x)$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} f\,(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

y'ye göre türev

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} f\,(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

bu türevlerin eşit olması için

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

olmalıdır. Bu denklemler Cauchy Riemann Diferansiyel Denklemleri olarak bilinir.

Tanım 2.6. $f(z)$'nin z_0 da $f'(z_0)$ türevi mevcut ve z_0 ın bir $\mathfrak{D}_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ komşuluğundaki her noktada türevi varsa bu durumda f ye z_0 da analitiktir denir. Kompleks düzlemin tamamında analitik olan bir fonksiyona tam fonksiyon denir.

Tanım 2.7. Bir Ω bölgesinde reel değerli $\mathrm{u(z) = u(x, y)}$ fonksiyonu, $u \in C^2$ ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denklemini sağlıyorsa, harmoniktir.

Analitik bir fonksiyon için Cauchy-Riemann denklemleri açık bir şekilde analitik fonksiyonun gerçel ve sanal kısımlarının harmonik olduğunu ifade eder.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu kısımda ikinci mertebeden

$$\tilde{L}\left(\tilde{\tilde{U}}\right) = \tilde{\tilde{U}}_{xx} + \tilde{\tilde{U}}_{yy} + a\tilde{\tilde{U}}_x + b\tilde{\tilde{U}}_y + c\tilde{\tilde{U}} = 0$$

formundaki kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için analitik $g(z), z = x + iy$ fonksiyonunun verilen denkleminin çözümlerine dönüştüren ve ana hatları ile Stefan Bergman tarafından verilen integral operatör teori özetlenecektir.

3.1. Kısmi Diferensiyel Denklemin Çözümleri İçin Temsiller

İkinci mertebeden

$$\tilde{L}\left(\tilde{\tilde{U}}\right) = \tilde{\tilde{U}}_{xx} + \tilde{\tilde{U}}_{yy} + a\tilde{\tilde{U}}_x + b\tilde{\tilde{U}}_y + c\tilde{\tilde{U}} = 0 \tag{3.1}$$

formundaki kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için analitik $g(z), z = x + iy$ fonksiyonunun (3.1) denkleminin çözümlerine dönüştüren uygun bir operatör teori geliştirilebilir. Burada x ve y reel değişken, a, b ve c katsayıları reel analitiktir. Bu maksat için a, b ve c katsayılarını x ve y nin karmaşık değerlerine dönüştürmek uygun olacaktır. Şimdi

$$z = x + iy, \qquad z^* = x - iy$$

değişken dönüşümü ile (3.1) denklemi

$$LU = U_{zz^*} + AU_z + BU_{z^*} + CU = 0,\ B = \bar{A}\,, U(z, z^*) = \tilde{\tilde{U}}(x, y) \tag{3.3}$$

formundaki denkleme dönüşür. Şimdilik $g(z)$ analitik fonksiyonlarını (3.3)'ün *u(z, z*)* karmaşık çözümlerine dönüştüren bir integral operatörün mevcut olduğunu kabul edelim. Böyle bir integral operatörün varlığını ilerleyen kısımlarda ispat edeceğiz ki *u(z,z*)* fonksiyonu, $g(z)$'nin bir integral dönüşümü olarak elde edilebilir. Bu integral operatöre birinci tip integral operatör denir. (3.3)'ün çözümleri için çözüm temsilleri elde edelim. (3.3)'ün reel çözümleri aşikâr olarak

$$U(z,z^*) = \frac{1}{2}\left(u(z,z^*) + \bar{u}(z^*,z)\right) \tag{3.4}$$

dır. Burada esas önemli olan, $g\ (z)$'yi, yalnızca $\bar{A}(0,z)$*'ye* bağlı olan U cinsiden ifade eden bir ters çevirme formülü olmasıdır [(3.3) ile karşılaştırın]; yani

$$g(z) = U(z,0) - g(0)\exp\left(-\int_0^x \bar{A}\,(0,z')dz'\right) \tag{3.5}$$

dır.

Tanım 3.1.1. Denklem (3.5) tarafından tanımlanan *g(z)* fonksiyonu, *U(z, z*)*'nin birinci tür integral operatöre göre C_2-*ilişkili* (associate) fonksiyonu denir.

Not. İlerleyen kısımlarda da göreceğimiz üzere, C_2-ilişkili'nin farklı amaçlar için farklı şekillerde normalleştirilmesi uygun olacaktır. Zaman zaman *U(z,* 0) fonksiyonunu C_2-ilişkili olarak gösteriyoruz. Gereğinden fazla tanım kullanmaktan kaçınmak adına, bu tür fonksiyonların tamamına C_2-ilişkili diyeceğiz; özel *g(z)* fonksiyonu tercihi, bağlama uygun bir şekilde anlaşılır olacaktır. Analitik fonksiyonların birçok özelliğinin doğal bir biçimde (3.3)'ün çözümleriyle ilgili özelliklere karşılık geldiği gösterilecektir. Ayrıca, çeşitli özel amaçlar için ilgilendiğimiz bazı farklı integral operatörleri de ele alacağız.

Not: (3.1) denkleminin x ve y'nin karmaşık değerleri için çözümleri değerlendirildiğinde, örneğin z ve z*'nin iki bağımsız değişken olduğu varsayıldığında; hiperbolik denklemler için Riemann formülü, bir değişkenin iki fonksiyonunu kısmi diferansiyel denklem (3.1)'in bir çözümüne dönüştüren bir integral operatörü temsil eder. Farklı integral operatörler sunulmasının asıl avantajı şudur: Farklı (uygun şekilde yazılan) operatörler, ilişkili fonksiyonların çeşitli özelliklerinin, operatör tarafından oluşturulan çözüm sınıflarının benzer özellikleri olarak korunabilir veya bu özelliklere dönüştürülebilir.

Formül (3.4), (3.3) diferansiyel denklemin her U çözümüne bir karmaşık değişkenli bir analitik *g(z)* fonksiyonu ile ilişkilendirmemize olanak verir. Buna karşılık, verilen bir *g(z)* ile (3.3) denkleminin ilgili çözümünün belirlenmesi sorusu ortaya çıkar. Bu soruya cevap, (3.3) denkleminin U çözümleri bir karmaşık değişkenli keyfi bir *f(z)* fonksiyonu cinsinden ifade edilerek verilecektir.

3.1.2. Lemma. $(z, z^*) \in U^4(0,0)$ için $A \equiv A(z, z^*)$, $B \equiv B(z, z^*)$, $C \equiv C(z, z^*)$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar ve

$$D = n_z - \int_0^{z^*} A_z dz^* + B, \quad F = -A_z - AB + C \tag{3.6}$$

olsun; burada $n = n(z)$, $z \in U^2(0)$ için düzenli olan bir karmaşık değişkenli bir keyfi analitik fonksiyonudur. Burada $U^n(0, \cdots, 0)$ gösterimi ile n boyutlu $(0, \cdots, 0)$ noktasının bir komşuluğu anlaşılacaktır. $(z, z^*) \in$ ▯$^4(0,0), |t| \le 1$ için $\tilde{E}(z, z^*, t)$,

$$B(\tilde{E}) \equiv (1 - t^2)\tilde{E}_{z^*t} - \frac{1}{t}\tilde{E}_{z^*} + 2tz[\tilde{E}_{zz^*} + D\tilde{E}_{z^*} + F\tilde{E}] = 0 \tag{3.7}$$

denklemin iki kez sürekli türevlenebilir bir çözümü olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikleri sağlar: $(z, z^*) \in U^4(0,0)$ için

$$\lim_{t=\pm 1} (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} \widetilde{E_{z^*}}(z, z^*, t) = 0 \tag{3.8}$$

(t'de düzgün). Ayrıca $(z, z^*) \in$ ▯$^4(0,0)$, $|t| \le 1$ için $\frac{\widetilde{E_{z^*}}}{zt}$ süreklidir.

$$U(z, z^*) = \int_{\S 1} E(z, z^*, t) + \left(\frac{1}{2} z(1 - t^2)\right) \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.9}$$

olsun. Burada *f*, orijinde regüler olan bir karmaşık değişkenli bir analitik fonksiyonudur,

$$E(z, z^*, t) = \exp\left[-\int_0^{z^*} A dz^* + n(z)\right] \tilde{E}(z, z^*, t), \tag{3.10}$$

ve $\mathfrak{s}^1$, -1 ve 1 noktalarını bağlayan ve t = 0 noktasını dışarıda bırakan, karmaşık t-düzleminde bir yoldur (eğer $t = 0$ için $t^{-1}E_{z^*}$sürekli ise $\mathfrak{s}^1$ yolu t = 0 dan geçebilir). O halde (3.9), aşağıdaki denklemin bir çözümüdür

$$L(U) = U_{zz^*} + AU_z + BU_{z^*} + CU = 0 \tag{3.11}$$

ve ▯$^4(0,0)$ de iki kez sürekli türevlenebilirdir.

İspat: Direkt bir hesaplama ile

$$V(z, z^*) = \exp\left[\int_0^{z^*} A\, dz^* - n(z)\right] U(z, z^*) \tag{3.12}$$

nin

$$\tilde{L}(V) = V_{zz^*} + DV_{z^*} + FV = 0. \tag{3.13}$$

denkleminin bir çözümü olduğunu göstermek yeterlidir. Burada

$$V = \int_{\mathfrak{s}^2} \tilde{E} f \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.14}$$

alalım $z \neq 0, (z, z^*) \in U^4(0,0)$ olsun. Böylece,

$$V_{z^*} = \int_{\mathfrak{s}^2} \frac{\widetilde{E_{z^*}} f dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad V_{zz^*} = \int_{\mathfrak{s}^2} \left[\widetilde{E_{zz^*}} f + \widetilde{E_{z^*}} f_z\right] \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.15}$$

dir. $f_z = -f_t(1 - t^2)/2zt$ olduğundan kısmi integrasyon ile

$$V_{zz^*} = \int_{\mathfrak{s}^2} \left[\widetilde{E_{zz^*}} f - \widetilde{E_{z^*}} \frac{1-t^2}{2zt} f,\right] \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\widetilde{E_{z^*}} \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{2zt} f \,\Big|_{t}^{1} = -1 + \int_{\mathfrak{s}^2} \left[\frac{\widetilde{E_{zz^*}}}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} + \left(\widetilde{E_{z^*}} \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{2zt}\right),\right] f dt. \tag{3.16}$$

elde edilir. Böylece

$$V_{zz^*} + DV_{z^*} + FV = -\widetilde{E_{z^*}} \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{2zt} f \,|_{t\,=\,-1}^{\;1} \\ +\int_{ş^2} [\frac{\widetilde{E_{zz^*}}}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} + \left(\widetilde{E_{z^*}} \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{2zt}\right), +D \frac{\widetilde{E_{z^*}}}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} + F \frac{\tilde{E}}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.17}$$

Şimdi

$$\left(\widetilde{E_{z^*}} \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{2zt}\right), = \widetilde{E_{z^*t}} \frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{2zt} - \widetilde{E_{z^*}} \frac{1}{2zt^2(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.18}$$

ve integral işaretinin altındaki ifade

$$\frac{1}{zt(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} [\widetilde{E_{z^*t}}(1-t^2) - \frac{\widetilde{E_{z^*}}}{t} + 2tz\left(\widetilde{E_{zz^*}} + D\widetilde{E_{z^*}} + F\tilde{E}\right] \frac{f}{2} \tag{3.19}$$

olur. Dolayısıyla $\tilde{E}$, (3.7)'yi sağlar ve *f* orijinde regüler bir karmaşık değişkenli bir keyfi analitik fonksiyon ise (3.9), (3.11) denkleminin bir çözümü olacaktır. Denklem için bir çözüm oluşturacaktır.

Tanım 3.1.3. *E*'ye ((3.10)'a bakınız) (3.11) diferensiyel denklemi için orijine göre bir üreteç fonksiyonu denir.

(3.9) bağıntısı (3.11) denkleminin karmaşık çözümlerini verir. Eğer $B(z,\bar{z}) = \bar{A}(z,\bar{z})$ ve $C(z,\bar{z})$ reel ise, $z^* = \bar{z}$ için reel çözümler

$$\int_{ş^2} \left[E_1(z,\bar{z},t) f\left(\frac{z(1-t^2)}{2}\right) + E_2(z,\bar{z},t)\bar{f}\left(\frac{\bar{z}(1-t^2)}{2}\right)\right] dt/(1-t^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.20}$$

olarak yazılabilir. Burada E_1 olarak (3.10) fonksiyonu ve E_2 ile de benzer bir şekilde oluşturulmuş $\overline{E_2}(z,\bar{z},t) = \overline{E_1(z,\bar{z},t)}$ fonksiyonunu gösteriyoruz.

Verilen bir (3.11) diferansiyel denklemi için sonsuz sayıda üreten fonksiyon E bulunmaktadır. Bunların araştırılması ve içlerinden bazı ilginç özelliklere sahip olanların tespit edilmesi ilgi çekmektedir.

Harmonik fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde bir gösterimimiz bulunmaktadır;

$$\psi(z,z^*) = \frac{1}{2}[g(z) + \bar{g}(z^*)] \quad (3.21)$$

burada g, bir karmaşık değişkenli keyfi bir analitik fonksiyonudur. (3.20) de ki $E_\mu, \mu = 1,2$, üreteç fonksiyonları ufak bir değişiklik sonrasında formül (3.21)'in genelleştirilmiş bir halini temsil edecek şekilde seçilebilir.

3.2. Birinci Tür İntegral Operatörler

Bir önceki kısımda gösterildiği gibi, $L(U) = 0$ denkleminin orjinde regüler reel çözümü $U(z,\bar{z})$ ile $g(z) = U(z,0) - cs(z)$ fonksiyonunu ilişkilendirelim. Burada c, U (0,0)'a bağlı bir sabit ve s (z), yalnızca $L = 0$ denklemine bağlı bir tam fonksiyondur.

Tanım 3.2.1. $g(z)$'yi U (z, z^*)'ye dönüştüren operatör $C_2(z,z^*;g)$ 'ye **.** $L = 0$ denklemi için birinci tür integral operatör denir. Böyle bir integral operatör, aşağıdaki şekilde elde edilebilir. Burada

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Z^n \quad (3.22)$$

ve

$$f\left(\frac{z}{2}\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_{s^2} g\left(z(1-t^2)\right)\frac{dt}{t^2} = \sum \frac{\Gamma(n+1)A_n Z^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \quad (3.23)$$

olsun.

Lemma 3.2.2. Eğer $E_\mu(z,z^*,t), B(E_\mu) = 0$, $\mu = 1,2$,

$$E_1(z,z^*,t) = exp\left[-\int_0^{z^*} A(z,z^*)dz^*\right][1+tzz^*e(z,z^*,t)], \tag{3.24 a}$$

$$E_2(z,z^*,t) = exp[-\int_0^{z} \bar{A}(z^*,z)dz][1+tzz^*e(z^*,z,t)], \tag{3.24 b}$$

ise bu taktirde

$$C_2(z,z^*;g) = \int_{\mathfrak{s}^2}[E_1(z,z^*,t)f(z\left(1-\frac{t^2}{2}\right)+E_2(z,z^*,t)\bar{f}\left(z^*\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\right]\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.25}$$

birinci tür bir integral operatör olacaktır. Burada f, (3.23) ile tanımlanır.
$E(z,z^*,t)$,$z,z^*,t,(z,z^*) \in$ ⍰$^4(0,0), |t| \leq 1$ de bir analitik fonksiyondur

İspat: Hemen

$$C_2(z,0;g) = \int_{\mathfrak{s}^2}\left[f\left(\frac{z(1-t^2)}{2}\right)\exp[-\int_0^z \bar{A}(0,z)dz]\bar{f}(0)\right]\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3,26}$$

$$=\sum\frac{\Gamma(n+1)A_n}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})}z^n\ (1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}dt+\exp\left[-\int_0^z\bar{A}(0,z)dz\right]\bar{f}(0)\int_{\mathfrak{s}^2}\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\sum A_nz^n+\pi\exp\left(-\int_0^z\bar{A}(0,z)dz\right)\bar{f}(0)$$

elimizdedir.

Not. $C_2(z,z^*;g)$ sembolü, (3.11)'in

$$\int_{\mathfrak{s}^2}E_1(z,z^*,t)f(z\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

çözümü için kullanılacaktır ki bu ifade, $z^*=\bar{z}$ için karmaşıktır. Burada halen *E₁* ve *E₂*'nin birinci tür bir integral operatörü verdiğini göstermemiz gerekmektedir.

Teorem 3.2.3. Denklem (3.11) deki A, B, C katsayılarının bisilindir $\mathfrak{R}^4 = [|z| \leq r, |z^*| \leq r], r > 0$ de regüler iki karmaşık değişkenin analitik fonksiyonları olduğunu varsayalım. Bu taktirde $E_1(z, z^*, t)$, $\left[|z| < \frac{r}{3}, |z^*| < \frac{r}{3}, |t| \leq 1\right]$ de regülerdir.

İspat: Teoremimizin ispatında dominantlar metodunu kullanacağız. Varsayımlardan *D* ve *F* için

$$|D(\,|\boldsymbol{z}|, |\boldsymbol{z}^*|)| \leq M(1 - \tfrac{|z|}{r})^{-1}(1 - \tfrac{|z^*|}{r})^{-1}$$
$$|F(\,|\boldsymbol{z}|, |\boldsymbol{z}^*|)| \leq M(1 - \tfrac{z}{r})^{-1}(1 - \tfrac{z^*}{r})^{-1} \tag{3.27}$$

elde edilir. Burada *M*, uygun bir şekilde seçilmiş bir sabittir. Şimdi

$$\widetilde{E_1}(z, z^*, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} z^n \int_0^{z^*} P^{(2n)}(z, z^*) d\, z^*. \tag{3.28}$$

yazalım. Lemma 3.1.2 den $\tilde{E} = \tilde{E}_1$

$$\boldsymbol{B}(\tilde{E}) = (1 - t^2)\widetilde{E_{z^*t}} - \left(\tfrac{1}{t}\right)\widetilde{E_{z^*}} + 2tz\left(\widetilde{E_{zz^*}} + D\widetilde{E_{z^*}} + F\tilde{E}\right) = 0 \tag{3.29}$$

denklemini sağlar. (3.28) i (3.29) da yerine yazdığımızda $P^{(2n)}$için

$$P^{(2)} = -2F,\ (2n+1)P^{(2n+2)} = -2\left[P_z^{(2n)} + DP^{(2n)} + F\int_0^{z^*} P^{(2n)} dz^*\right], \tag{3.30}$$

$n = 1{,}2, ...$ elde edilir.

F ve *D*, $\mathfrak{R}^4$'teki iki karmaşık değişkenin analitik fonksiyonları olduğundan; $P^{(2n+2)}(z, z^*)$ de $\mathfrak{R}^4$'te analitik fonksiyonlardır ve yalnızca (3.28)'nin sağ tarafının yakınsadığını göstermemiz gerekmektedir. *D* ve *F* için (3.27)'de verilmiş dominantlar ile. $P^{(2n)}(z, z^*)$ için $\tilde{P}^{(2n)}(z, z^*)$ dominantı

$$\tilde{P}^{(0)} = 1, \tilde{P}^{(2)}(z, z^*) = \frac{2C}{(1-\frac{z}{r})(1-\frac{z^*}{r})}, \qquad C \geq M,$$

$$(2n+1)\tilde{P}^{(2n+2)}(z, z^*) = 2[\widetilde{P_z^{(2n)}}(z, z^*) + \frac{C}{\left(1-\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{z^*}{r}\right)}\tilde{P}^{(2n)}(z, z^*) + \cdots$$
$$+ \frac{C}{\left(1-\frac{z}{r}\right)\left(1-\frac{z^*}{r}\right)} \int_0^{z^*} \tilde{P}^{(2n)}(z, z^*) dz^*], \; n = 1,2, \ldots \tag{3.31}$$

olarak tanımlanabilir. Burada,

$$\tilde{P}^{(0)} = \tilde{Q}^{(0)} = 1, \qquad \tilde{P}^{(2)}(z, z^*) = \frac{\tilde{Q}^{(2)}(z^*)}{(1-\frac{z}{r})}$$

$$\tilde{P}^{(2n)}(z, z^*) = \frac{2^{n-1}\tilde{Q}^{(2n)}(z^*)}{(1-\frac{z}{r})^n \, 1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}, n = 2,3, \cdots \tag{3.32}$$

yazalım. Bu ifadeler (3.31) de yerine yazıldığında

$$\tilde{Q}^{(2)}(z^*) = \frac{2C}{\left(1-\frac{z^*}{r}\right)},$$

$$\tilde{Q}^{(2n+2)}(z^*) = \tilde{Q}^{(2n)}(z^*)\left[\frac{n}{r} + \frac{C}{\left(1-\frac{z^*}{r}\right)}\right] + \frac{C}{\left(1-\frac{z^*}{r}\right)} \int_0^{z^*} \tilde{Q}^{(2n)}(z^*) d\, z^* \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.33) den $\tilde{Q}^{(2n)}$ yalnızca z*'e bağlı olduğu görülür ve böylece

$$\tilde{Q}^{(2n+2)}(z^*) \ll \tilde{Q}^{(2n)}(z^*)\left[\frac{n+A}{r}\right], \;\; A = 2Cr(1+r) \tag{3.34}$$

$$\tilde{P}^{(2n)}(z, z^*) \ll \frac{2^{n+1}(n+A-1)(n+A-2)\cdots(1+A)C}{(1-\frac{z}{r})^n r^{n-1} \, 1\cdot 3 \cdots (2n-1)}. \tag{3.35}$$

elde edilir. Üst sınır dizisi

$$1+|t^2|\frac{2Cr}{(1-\frac{|z|}{r})}+2Cr^2\sum_{n=2}^{\infty}|t^{2n}|\frac{|2z|^n(n-1+A)(n-2+A)\cdots(1+A)}{(r-|z|)^n\, r^{n-1}\, 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \tag{3.36}$$

$|z|<\frac{r}{3}, |z^*|<\frac{r}{3}, |t|\leq 1$ için yakınsar ((3.36)'nin, (3.28)'deki integrasyon yoluna bağlı olmadığını unutmayınız.).

Not. Benzer şekilde E_2, $\left[\frac{|z|}{r}<\frac{1}{3}, \frac{|z^*|}{r}<\frac{1}{3}, |t|\leq 1\right]$'de regülerdir. Dolayısıyla; A, B, C tam fonksiyonlar ise; $C_2(z, z^*; g)$, $|z|<\infty, |z^*|<\infty$ için tanımlı bir operatördür.

Not 1. (3.6) ve (3.10) dan $f(\frac{z}{2})$, $\psi(z, z^*)=C_2(z, z^*; g)$ ilişkili çözümünün olsun. $f(\frac{z}{2})$ ile (3.22) ve (3.23) üzerinden bağlantılı olan g(z) için

$$g(z)=C_2(z,0,g)-\pi\exp(-\int_0^z A(0,z)dz)f(0) \tag{3.37}$$

bağıntısının geçerli olduğu anlaşılır (Bergman 1937b, Eichler 1947) birinci tür integral operatörü elde etmiştir. Ayrıca, düzenli ve tekil katsayılara sahip bazı diferansiyel denklemler (Eichler 1949a, 1949b)'de ele alınmıştır.

3.3. İntegral Operatörlerin Farklı Gösterimleri

Çeşitli uygulamalar için (3.5) integral operatörü bir miktar değiştirilmiş bir yapıda yazmak ve farklı gösterimler türetmek uygun olacaktır.

Aşağıdaki bağıntı ile

$$g(z)=\int_{t=-1}^{1} f\left(\frac{z(1-t^2)}{2}\right)\frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.38}$$

((3.23)'nin tersi olarak), *g(z)* fonksiyonunu sunalım.

Lemma 3.3.1. Eğer

$$E(z, z^*, t) = \exp\left[-\int_0^{z^*} A(z, z^*)dz^*\right][1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n} e_n(z, z^*)], \tag{3.39}$$

$$e_n(z, z^*) = z^n Q^{(n)}(z, z^*)$$

ise ((3. 28) ve (3.26)'ya bakınız.), bu durumda integral operatör

$$\int_{ş^2} E(z, z^*, t) f\left(\frac{z}{2}(1 - t^2)\right) \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.40}$$

aşağıdaki formda da yazılabilir.

$$\exp\left[-\int_0^{z^*} A(z, z^*)dz^*\right]\left[g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+1)Q^{(n)}(z,z^*)}{2^{2n}\,\Gamma(n+1)} \int_0^z \int_0^{z_2} \cdots \int_0^{z_{n-1}} g(z_n)dz_n \cdots dz_1\right] \tag{3.41}$$

$$\exp\left[-\int_0^{z^*} A(z, z^*)dz^*\right]\left[g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{(n)}(z,z^*)}{2^{2n}\,B(n,n+1)} \int_0^z (z - \zeta)^{n-1} g(\zeta)\, d\zeta\right] . \tag{3.42}$$

Burada

$$Q^{(n)}(z, z^*) = \int_0^{z^*} P^{(2n)}(z, z^*)dz^* \tag{3.43}$$

burada $P^{(2n)}$, (3.30) ile tanımlanmıştır.

Not. (3.23) e ek olarak, *f(z/2)*, g nin bir fonksiyonu olarak

$$f\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{z^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} g(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) d(z/2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\pi}\left[g(0) + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} z \sin v\ \frac{dg(z\, sin^2 v)}{d(z\, sin^2 v)} dv\right]. \tag{3.44}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

İspat: Öncelikle (3.44) bağıntısını ispatlayalım. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ olsun. (3.38) den

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}\ z^n \ \int_{t=-1}^{1} (1-t^2)^{n-1/2} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}\ z^n\ \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \tag{3.45}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{\pi} g(0) + \frac{2}{\pi}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} z\ sin\vartheta\ \frac{dg(2z\ sin^2\vartheta)}{d(z\ sin^2\vartheta)} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{\pi} a_0 \frac{\Gamma^2(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} z\ sin\vartheta\ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z\ sin\vartheta)^{n-1}\ \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} d\vartheta$$

$$= a_0 + \frac{2}{\pi}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n sin^{2\pi-1}\vartheta\ d\vartheta\ \frac{n\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}$$

$$= a_0 + \frac{2}{\pi}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(n+\frac{1}{2})} \frac{n\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}\ a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{3.46}$$

dır. Bu, (3.44) ü ispatlar.$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den

$$\int_{-1}^{1} f(\frac{1}{2} z(1-t^2) dt\ /(1-t^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} [\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}] a_n z^n,$$

$$= g(z)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^2\left(\frac{1}{2}z\left(1-t^2\right)\right)dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} [\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)}] a_n z^n \tag{3.47}$$

$$= \frac{1}{2} z^{-1} \int_0^z g(z_1) dz_1,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^2\left(\frac{1}{2}z\left(1-t^2\right)\right)dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} z^{-2} \int_0^z \int_0^{z_1} g(z_2) dz_2 dz_1.$$

bu da (3.41) gösterimini verir. g(0) =0 olduğunu varsayarsak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\int_0^z (z-z_1)^{k-1} g(z_1) dz_1 = \int_0^z (z-z_1)^{k-1} (\frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^{z_1} g(z_2) dz_2) dz_1$$

$$= (z-z_1)^{k-1} \int_0^{z_1} g(z_2) dz_2 | \begin{matrix} z_1 = z \\ z_1 = 0 \end{matrix} + (k-1) \int_0^z (z-z_1)^{k-2} (\int_0^{z_1} g(z_2) dz_2)\, dz_1$$

$$= (k-1) \int_0^z (z-z_1)^{k-2} \int_0^{z_1} g(z_2) dz_2 \, dz_1$$

$$= (k-1) \int_0^z (z-z_1)^{k-2} \frac{\partial}{\partial z_1} (\int_0^{z_1} \int_0^{z_2} g(z_3)\, dz_3 \, dz_2) dz_1$$

$$= (k-1)(z-z_1)^{k-2} \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} g(z_3)\, dz_3 \, dz_2 | \begin{matrix} z_1 = z \\ z_1 = 0 \end{matrix}$$
$$+(k-1)(k-2) \int_0^z (z-z_1)^{k-3} \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} g(z_3)\, dz_3 \, dz_2 dz_1$$

Yukarıdaki bağıntılardan hareketle, (3.41) in (3.42) cinsinden de yazılabileceği sonucuna varıyoruz.

3.4. Birinci Tip Operatörlerin İntegraller Cinsinden Temsili

Birinci tür integral operatörlerinn çeşitli amaçlar için kullanışlı olan yeni bir gösterimiyle devam ediyoruz.

Semboller: *D*(z, z*) ve *F*(z, z*), iki karmaşık değişken z ve z^* uzayının regüler bir $\mathfrak{U}^4$ bölgesinde z ve z*'nin iki karmaşık değişkeninin fonksiyonları olsunlar ve *g(z)*, $\mathfrak{U}^2 \subset \mathfrak{U}^4$ bölgesinde regüler bir z karmaşık değişkeninin bir fonksiyonu olsun. ($\mathfrak{U}^2$ ve $\mathfrak{U}^4$ orijini içerir.) Şimdi ;

$$T(F_v, D_{v-1}, D_{v-2}, \cdots, F_2, F_1; g) =$$

$$\int_0^z \int_0^{z*} F_v \int_0^v \int_0^{z_{v-j}^*} D_{v-1} \int_0^{z_{v-1}} D_{v-2} \cdots \int_0^{z_3} \int_0^{z_3^*} F_2 \int_0^{z_2} \int_0^{z_2^*} F_1 g \delta_v \tag{3.48}$$

kısalmasını önerelim. Burada $\delta_v = dz_v dz_v^* dz_{v-1} \cdots dz_{j+1} dz_{j+1}^* dz_j dz_{j-1} \cdots dz_1$, $F_v = F\big(z_v, z_{v+p}^*\big)$, $D_{v-1} = D\big(z_{v-1}, z_{v+p-1}^*\big)$ dır. (j, (2.48)'de görünen D'lerin sayısı; p, $\cdots \int_0^{z_v+1} \cdots$'lerden önceki D'lerin sayısıdır.)

T de her F_μ'den sonra $\int_0^{z_\mu} \int_0^{z_{\mu+\rho}^*}$ iki katlı integrali, her D_μ'den sonra $\int_0^{z_\mu}$ $basit$ integrali vardır. $J_v \equiv J_v(g)$ ile

$$T(F_v, D_{v-1}, \cdots, F_1; g)$$

2^{v-1} ifadelerinin toplamını göstereceğiz. Burada son sırada D_1 olanlar hariç F_μ ve D_x'nin, tüm olası kombinasyonları mümkündür. Örneğin:

$$J_2(g) = T(F_2, F_1; g) + T(D_2, F_1; g), \tag{3.49}$$

$$J_3(g) = T(F_3, F_2, F_1; g) + T(F_3, D_2, F_1; g) + T(D_3, F_2, F_1; g) + T(D_3, D_2, F_1; g) \quad (3.49)$$

vs. örnek verilebilir.

Teorem 3.4.1. F ve D, iki karmaşık değişken z, z*'nin tam fonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\widetilde{\Psi}(z, z^*) = g + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} J_{\mu}(g) \tag{3.50}$$

$\tilde{L}(V) = 0$ denkleminin bir çözümüdür (bkz. (3.13),bu çözüm

$$V(z, 0) = g(z), \;\; V(0, z^*) = g(0). \tag{3.51}$$

özelliğine sahiptir.

İspat: Eğer $\boldsymbol{\psi}$ için

$$\psi(z,z^*) = g(z) - \int_0^z \int_0^{z^*} F(z_1,z_1^*)\psi(z_1,z_1^*)dz_1dz_1^* - \int_0^z \int_0^{z^*} D(z_1,z_1^*)\frac{\partial\psi(z_1,z_1^*)}{\partial z_1^*}dz_1dz_1^* \tag{3.52}$$

denkleminde (3.50)'nin sağ tarafını yazarsak bu taktirde (3.52)'nin her iki tarafında aynı sonsuz seriyi elde ederiz.Dolayısıyla, yalnızca (3.50) serisinin ve türevlerinin , $|z| \leq N$, $|z^*| \leq N$ için düzgün bir şekilde yakınsadığını göstermemiz gerekmektedir. Burada N keyfi bir pozitif sayıdır. $|z| \leq N, |z^*| \leq N$ için

$$|g| < \hat{g}, \;\; |F| < \hat{F}, \;\; |D| < \widehat{D} \tag{3.53}$$

olsun. Burada $\hat{g}, \hat{F}, \widehat{D}$ keyfi seçilmiş sabitlerdir. Bu takdirde

$$|g| + \left|\int_0^z \int_0^{z^*} F_1 g\delta_1\right| + \left|\int_0^z \int_0^{z^*} F_2 \int_0^{z_2} \int_0^{z_2^*} F_1 g\delta_2\right| + \left|\int_0^z \int_0^{z^*} D_2 \int_0^{z_2} F_1 g\delta_2\right| + \cdots$$

$$\leq \hat{g} + \hat{F}\tau^2 + \hat{g}\left(\frac{\widehat{F_2}}{2!} + \frac{\hat{F}\widehat{D}}{2!}\right)\tau^4 + \hat{g}\left(\frac{\widehat{F^3}}{3!} + 2\frac{\widehat{F^2}\widehat{D}}{3!} + \frac{\hat{F}\widehat{D^2}}{3!}\right)\tau^6 + \cdots$$

$$\leq \hat{g} + \hat{g}\hat{F}\tau^2 \frac{(\exp[(\hat{F}+\widehat{D})\tau^2]-1)}{(\hat{F}+\widehat{D})\tau^2} \tag{3.54}$$

dır. Burada $\tau \geq \max(|z|,|z^*|,1)$ dir. Benzer şekilde, (3.50)'nin sağ tarafının türevlerinin de mutlak yakınsadığını gösterebiliriz. (3.10)'a göre

$$\psi(z,z^*) = \left(exp\left[-\int_0^{z^*} A(z,z^*)dz^*\right]\right)\tilde{\psi}(z,z^*) \tag{3.55}$$

$$= \left(exp\left[-\int_0^{z^*} A(z,z^*)dz^*\right]\right)\left[g + \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}J_{\mu}(g)\right]$$

x ve y'nin karmaşık bir fonksiyonudur, yani, x, y(veya $z^* = \bar{z}$) nin reel değerleri için karmaşık varsayılmıştır ve $z^* = \bar{z}$ için

$$\psi(z, z^*) = \frac{1}{2}[\psi(z, z^*) + \bar{\psi}(z^*, z)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\exp\left[-\int_0^{z^*} A(z, z^*)dz^*\right]\right)\left[g(z) + \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}J_{\mu}(g)\right]\right.$$
$$\left. + \left(\exp\left[-\int_0^{z} \bar{A}(z, z^*)dz\right]\right)\left[\bar{g}(z^*) + \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\,\overline{J_{\mu}(g)}\right]\right\}$$

(3.11) in bir reel çözümüdür.

3.5. Birinci Tür İntegral Operatörlerin Özellikleri

(3.25) ve (3.23) de bir karmaşık değişkenli analitik fonksiyonlarını (3.11) diferansiyel denkleminin reel çözümlerine dönüştüren bir $C_2 = Re(c_2)$ operatörü tanımlamıştık. En basit durumda yani; harmonik denklem durumunda; A = 0, ve $Q^{(n)}(z, z^*) = 0, n = 1,2, \cdots$ olduğundan, **c2** bir sabittir. Genel olarak (3.11)denklem durumunda g(z) fonksiyonunun birçok özelliğinin korunuyor olması; ve *g(z)* ile buna karşılık denklem (3.11) denkleminin (karmaşık veya gerçek) çözümünün *A, B, C* katsayılarından bağımsız olması veya bu katsayıların yalnızca bazı özellikleri için bağımlı olması önemlidir.

Pek çok durumda bu bağıntılar, bir $\psi(z, z^*)$ çözümünün regülerlik bölgesinden (yani *x, y*'nin karmaşık değerleri için) düzenlilik alanının; tamamıyla reel bölgede $\psi(z, \bar{z})$'nin regülerlik bölgesinin belirlenmesi ile elde edilir.

Teorem 3.5.1. L(U) = 0 ın katsayıları A, B, C; yeterince büyük bir bölgede, iki karmaşık z, z* değişkeninin regüler fonksiyonları olsunlar. Bu takdirde her $\psi(z, z^*) =$

$\overset{\approx}{\psi}(x, y)$ çözümü x, y-düzlemin bir $\mathfrak{P}^2$ (gerçek) düzleminde regülerdir ve, z, z* uzayının $\mathfrak{P}^4$ bölgesi içine devam ettirilebilirler. $\mathfrak{P}^4$, $\mathfrak{P}_1^2 \times \mathfrak{P}_2^2$ bölgelerinin bir çarpımıdır; burada $\mathfrak{P}_1^2$ bölgesi, z-düzlemindeki $\mathfrak{P}^2$bölgesidir; $\mathfrak{P}_2^2$ bölgesi ise z*-düzlemindeki aynı bölgedir.

İspat: Regüler $A, B = \overline{A}, C$ katsayıları ile her (3.11) kısmi diferensiyel denklemi

$$\tilde{F}(z, z^*, \zeta, \zeta^*) = \frac{1}{2}\widetilde{A}(z, z^*, \zeta, \zeta^*)[\log(z - \zeta) + \log(z^* - \zeta^*)] + \widetilde{B}(z, z^*, \zeta, \zeta^*). \tag{3.56}$$

şekilde bir temel çözüm vardır. Burada *A* ve *B; z*, z*, ζ, ζ^*'nin regüler fonksiyonlarıdır. Green teoremi kullanılarak, reel düzlemin basit bağlantılı bir $\mathfrak{D}$ bölgesinde tanımlanmış bir $\psi(\zeta, \bar{\zeta})$ çözümü;

$$\psi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{b}}\left[\psi(\zeta, \bar{\zeta})\frac{\partial \tilde{F}(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta})}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial_\psi(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial n_\zeta}\tilde{F}(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta})\right] ds_{\zeta.} \tag{3.57}$$

şekilde temsil edilebilir. Burada n_ζ iç normali, $ds_{\zeta.}$ ise$\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$ nin sınırı olan $\mathfrak{b}$'nin yay uzunluğu elemanıdır. $\bar{z}$'yi z* ile değiştirerek, *x, y* karmaşık değerlerine $\psi(z, \bar{z})$'nin $\psi(z, z^*)$ ye analitik devamını elde ederiz. *F*'nin yegâne tekillikleri

$$z = \zeta \equiv \xi + i\eta, \;\; z^* = \bar{\zeta} \equiv \xi - i\eta \tag{3.58}$$

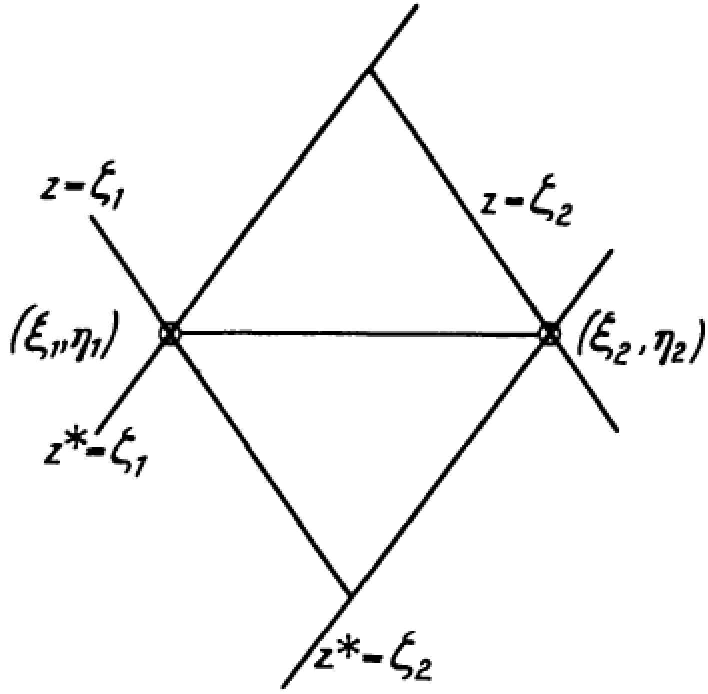
düzlemleri olduğundan, burada (ξ, η), $\mathfrak{D}$'nin sınırı $\mathfrak{b}$'ye ait noktalardır, $\psi(z, z^*)$'nin,

$$z = \zeta, \;\; \zeta \in \mathfrak{b} \tag{3.59}$$

ve

$$z^* = \bar{\zeta}, \quad \zeta \in \mathfrak{b} \tag{3.60}$$

hiperyüzeyleri (üç boyutlu) ile sınırlandırılmış (dört boyutlu) uzayın $\mathfrak{P}^4$ bölgesinde regüler olduğunu anlaşılır. Bu gerçeklerden istenilen ispatlanmış olur.



Şekil 3.1. Reel düzlemde $\mathfrak{D}$ bölgesinin şematik temsili ve z, z^* -uzayında $\mathfrak{P}^4$ bölgesinin karşılığı yukarıdaki şekil ile temsil edilebilir:

Burada ele alınan yaklaşım, $\mathfrak{D}$ bölgesinde regüler olan (2.1) in bir $\overset{\approx}{\psi}(x, y)$ çözümünün, x ve y' nin karmaşık değerlerine genişletilmesi problemini beraberinde getirir. Çözümün, denklemden bağımsız olan $\mathfrak{P}^4 = \mathfrak{P}_1^2 \times \mathfrak{P}_2^2$ dört boyutlu bir çarpım bölgesine devam ettirebiliyor olduğu, (Bergman 1937a)'da ispatlanmıştır. Ayrıca (Bergman 1937b, Vekua 1937)'de aynı sonucun farklı bir ispatı da verilmiştir.

Tanım 3.5.2. $\mathfrak{P}^4$, $\mathfrak{D}$ alanının karmaşık örtüsü olarak not edilmiştir.

3.6. Birinci Tür İntegral Operatörlerin İlave Bazı Özellikleri

Bir karmaşık değişkenli *g(z)* analitik fonksiyonu iki reel değişkenli harmonik fonksiyonlara dönüştüren "Re" operatörü, *g(z)* nin birçok özelliğini muhafaza eder. Analitik fonksiyonlar bir cebir oluşturduğundan; (harmonik fonksiyonlar yalnızca lineer bir uzay oluştururken) analitik fonksiyonların sunulması, harmonik fonksiyonların araştırılması için değerli bir araç rolü oynar.

Aşağıda da gösterileceği gibi $Re[c_2(g)] \equiv C_2(z, z^*; g) \equiv C_2(g)$ operatörü, (kısım 2'ye bakınız), uygulandığı g fonksiyonunun birçok özelliğini korur ve böylece birçok durumda harmonik fonksiyonlarda "Re"ye benzer özellikler sunar. Şimdi bu doğrultuda, bazı tipik sonuçların formüle edelim:

Birincisi, Teorem 3.5.1'de gösterdiğimiz üzere, (3.11)'in her $C_2(g)$ reel çözümü, orijini içeren $xy-$ düzleminin basit bağlantılı her bölgesinde regülerdir ve bunun tam tersi de geçerlidir. Diğer sonuçları aşağıda belirtilen teoremlerle ile yazalım:

Teorem 3.6.1. $(\boldsymbol{i})$. *Eğer* $a, a \neq 0$ noktasında g fonksiyonu, s mertebesinden bir kutba sahipse; bu takdirde **C₂** (g) = Re [**c₂** (g)], aynı mertebeden sonsuz olur ve (Harmonik fonksiyonlar durumu hariç) sonsuz mertebesinde bir dallanma noktasına sahiptir. Bu tip bir singülerlik, kutupsal singülerlik olarak adlandırılır.

$(\boldsymbol{ii})$ g, a'da sonlu mertebede bir dallanma noktasına sahipse; bu durumda $C_2(g)$ de aynı mertebede bir dallanma noktasına sahip olur.

İspat: (3.42) de

$$g(z) = (a - z)^{-1} \tag{3.61}$$

yazılırsa bu taktirde;

$$C_2\left[(a-z)^{-1}\right] = \left[\exp\left(-\int_0^{z^*} A(z,z^*)\, dz^*\right)\right] \times \\ \left[(a-z)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q(n)(z,z^*)}{2^{2n}B(n,n+1)}\left[-(z-a)^{n-1}\log\left(1-\frac{z}{a}\right) \right.\right. \\ \left.\left. + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{k}\left(\left(-1\right)^{n-k}(a-z)^{n-1} + (z-a)^{n-1-k}a^k\right)\right]\right] \tag{3.62}$$

dır. (3.62)'nin a'ya göre türevini alındığında, $c_2[(a-z)^{-m}]$ için benzer bir formül elde edilebilir, burada m, 1 den büyük bir tam sayıdır,

$(\boldsymbol{iii})$ Eğer $m = p/q$ ortak bölenleri olmayan tam sayılar ise bu takdirde

$$\int_0^z (z-\zeta)^{n-1}(a-\zeta)^{\frac{p}{q}}d\zeta = \int_0^z \left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(z-a)^{n-1-k}(a-\zeta)^k\right](a-\zeta)^{\frac{p}{q}}d\zeta$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(z-a)^{n-1-k}\int_{\eta=a-z}^{a}\eta^{k+\frac{p}{q}}\,d\eta$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(z-a)^{n-1-k}\left[a^{k+\frac{p}{q}+1}-\left(a-z\right)^{k+\frac{p}{q}+1}\right]/(k+\frac{p}{q}+1) \qquad (3.63)$$

dır. Burada $p > 0, q > 1$dir. Son ifade (3.42)'de yazılırsa, $\mathbf{C}_2$ [**g**(z)], $z = a$ noktasında, q mertebesinden bir dallanma noktasına sahip olduğu görülür.

Teorem 3.6.2. Her L = 0 her diferansiyel denklem için, ((3.11) e bkz.) karmaşık çözümlerinin bir $\approx\!\varphi_v$ kümesi mevcuttur, $\overset{\approx}{\varphi}_v(x,y) = \overset{\approx}{\phi}_v(x,y) + i\overset{\approx}{\psi}_v(x,y)$, $v = 0,1,2,\cdots$ fonksiyonlarının her biri x ve y'nin birer tam fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar $g(z) = z^*, v = 0,1,\cdots$ ile üretilmişlerdir ve L = 0 harmonik denklem durumunda elde edilen $\{(x+iy)^v\}$ setine benzer birçok özelliğe sahiptir.

Özellikle: **A**. Bir açık disk $[x^2 + y^2 < \varrho^2]$'de regüler olan $\overset{\approx}{\psi}(x,y)$'nin her reel çözümü, burada aşağıdaki şekilde gösterilebilir ;

$$\overset{\approx}{\psi}(x,y) = \mathrm{Re}\left[\sum_{v=0}^{\infty} a_v\ \overset{\approx}{\psi}_v(x,y)\right]. \qquad (3.64)$$

B. Basit bağlantılı, sınırlı bir $\overline{\mathfrak{D}}$ $(0\epsilon\mathfrak{D})$ bölgesinde regüler olan her çözüm $\overset{\approx}{\psi}(x,y)$; sonlu sayıdaki $\overset{\approx}{\psi}_v$'lerin bir kombinasyonu ile$\mathfrak{D}$'de yaklaşık olarak bulunabilir, öyleki, her alt bölgesi $\overline{\mathfrak{S}} \subset \mathfrak{D}$ için ve her $\varepsilon > 0$ için, $a_v^{(n)}$ katsayılarını aşağıdaki şekilde belirleyebiliriz;

$$\left|\overset{\approx}{\psi}(x,y) - \mathrm{Re}\left(\sum_{v=0}^{n} a_v^{(n)}\ \overset{\approx}{\psi}_v(x,y)\right)\right| \leq \varepsilon, \quad (x,y) \in \overline{\mathfrak{S}} \qquad (2.65)$$

,

(Runge teoreminin bir benzeridir.)

C. Yıldızıl bölgelerdeki analitik fonksiyonlar için çeşitli gösterimler; sadece harmonik fonksiyonlar için değil, ayrıca (3.11) denkleminin çözümleri için de ilgili gösterimleri verir. Örneğin; elemanları $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ olan bir analitik fonksiyon için

$$f(z) = \lim_{a\to 0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n^{an}}\right] \tag{3.66}$$

temsilinden (3.11) denkleminin çözümleri için aşağıdaki gösterim elde edilir.

$$\overset{\approx}{\psi}(x,y) = \mathrm{Re}\left[\lim_{a\to 0} \sum_{n}^{\infty} \frac{a_n \overset{\approx}{\varphi}_n(x,y)}{n^{an}}\right] \tag{3.67}$$

Bu temsil merkezi orijinde olan her bir yıldızıl bölgede geçerlidir ki burada $\overset{\approx}{\psi}$ regülerdir.

D. Aşağıdaki bağıntı;

$$\left|\overset{\approx}{\varphi}_v(x,y) - \exp\left(-\int_0^{z^*} A(z,z^*)dz^*\right)[x+iy]^v\right| \leq C_1(x,y)|[x+iy]^v|/2(v+1). \tag{3.68}$$

burada $C_1(x, y)$ v'den bağımsız olarak bir tam fonksiyondur ve her $\overset{\approx}{\varphi}_v(x,y)$ fonksiyonları için geçerlidir.

İspat: *A*, *B*, *C*, *D*'nin özellikleri Teorem 3.5.1 den gösterilebilirler. Gerçekten; eğer düzleminin basit bağlantılı $\mathfrak{D}$, $(0 \in \mathfrak{D})$ bölgesinde bir $\overset{\approx}{\psi}(x,y)$ reel çözümüne sahipse, bu taktirde Teorem 3.5.1'den kompleks değerlere devam ettirilebilir ve $\mathfrak{D}^4$ de aşağıdaki şekilde temsil edilebilir;

$$\overset{\approx}{\psi}(x,y) \equiv \psi(z,\bar{z})$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2}[\exp\left(-\int_0^{\bar{z}} A(z,\bar{z})d\bar{z}\right)\left(g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{(n)}(z,\bar{z})}{2^{2n}B(n,n+1)} \int_0^z (z-\zeta)^{n-1} g(\zeta)d\zeta\right) \\ + \exp\left(-\int_0^z \bar{A}(\bar{z},z)\,dz\right)\left(\bar{g}(\bar{z}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{Q}^{(n)}(\bar{z},z)}{2^{2n}B(n,n+1)} \int_0^{\bar{z}} (\bar{z}-\zeta)^{n-1} \bar{g}(\zeta)d\zeta\right) \end{aligned} \tag{3.69}$$

burada $\bar{z} = z^*$ dır.

$\mathfrak{D}^4$ ün her bir kapalı $\bar{\mathfrak{S}}$ alt bölgeside (2.69) serisi düzgün yakınsaktır. Runge teoremi ile bir $\sum_{v=0}^{N} a_v^{(N)} z^v\, \bar{\mathfrak{S}}$ polinomu ile

$$\left|g(z) - \sum_{m=0}^{N} a_m^{(N)} z^m\right| \leq \varepsilon, \quad z \in \bar{\mathfrak{S}} \tag{3.70}$$

olacak şekilde $g(z)$ ye yakınlaştırabiliriz. O halde

$$\left|g(z) - \sum_{m=0}^{N} a_m^{(N)} z^m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^{(n)}(z,\bar{z})}{2^{2n} B(n,n+1)} \int_0^z (z-\zeta)^{n-1} \left[g(\zeta) - \sum_{m=0}^{N} a_m^{(N)} \zeta^m\right] d\zeta\right|$$

$$\leq \varepsilon \left|1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|Q^{(n)}(z,\bar{z})|}{2^{2n} B(n,n+1)} \left|\int_0^{[z]} (z-\zeta)^{n-1}\, d\zeta\right|\right| \tag{3.71}$$

dır. C ve D benzer şekilde ispatlanabilir.Daha detaylı değerlendirmeler için, $g\,(0)$'ın reel olması koşuluyla birinci türden $g(z)$ ile ilişkili fonksiyonları normalleştirmek faydalıdır.

(3.11) denkleminin gerçek bir çözümünün verildiği durumda her zaman bu özelliğe sahip olacak şekilde $g(z)$ yi ilişkili seçebiliriz. Gerçekten, (3.48) ve (3.49)'a göre; $T(F_v, \cdots, F_1; g)$ fonksiyonları, $\int_0^z \int_0^{z^*} F(z_v, z_v^*) \cdots dz_v dz_v^* \cdots$ formundadır. Böylece, (3.55)'e göre aşağıdaki bağıntı

$$\psi(z,0) = \frac{1}{2}\left[\overline{a_0} g(z) + \left(\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v\right) \bar{g}(0)\right] \tag{3.72}$$

geçerlidir. Burada

$$\exp\left[-\int_0^z \bar{A}\,(0,z) dz\right] = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v = a(z). \tag{3.73}$$

((3.73) den $a_0 = 1$ olduğuna dikkat ediniz.) $\psi(z,\bar{z})$ reel çözümü

$$\psi(z,\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{m,n} z^m \bar{z}^n \ , \qquad A_{m,n} = \bar{A}_{n,m}, \quad A_{0,0}\ reel \tag{3.74}$$

şeklinde olsun. Bu taktirde z = 0 ve birinci türden g(z) ile ilişkili normalleştirilmiş bağıntı

$$g(0) = A_{0,0}, \tag{3.75}$$

geçerlidir. (3.72) ve (3.75)'dan

$$g(z) = 2\left[\psi(z,0) - \frac{A_{0,0}a(z)}{\mathbf{2}}\right]. \tag{3.76}$$

elde edilir.

Bir reel çözüm $\overset{\approx}{\psi}(x,y) \ \equiv \psi(z,\bar{z})'$nin özellikleri arasında basit bir bağıntı vardır (bkz. (3.69)) ve serinin bu $\{A_{m,0}\}$ katsayıları ;

$$\psi(z,z^*) = \sum A_{m,n} z^m z^{*n}, \qquad A_{m,n} = \bar{A}_{n,m}. \tag{3.77}$$

den inşa edilebilir.

Örneğin: **A.** $\psi(z,\bar{z})$, her basit bağlantılı $\mathfrak{D}, 0 \in \mathfrak{D}$ bölgesinde regüler olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} A_{m,0} z^m$ regülerdir. (0 orijindir.)

Sonuç olarak, $\psi(z,\bar{z})$'nin singülerlik konumları L(U)'nun A, B=$\bar{A}$ katsayılarından bağımsız olarak yalnızca $\{A_{m,0}\}$ ile belirlenebilir, (bkz. (3.11) denklemi)

B. $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^m$'nin $a_n, n = 0,1,2,\ldots$ katsayıları arasındaki ilişkilere atıfta bulunan ve $\{A_{m,0}\}$ alt dizisinin özelliklerine dair teoremlerin singülerlik karakterlerini ve L(ψ)=0 denkleminin

$$\psi(z,\bar{z}) = \frac{1}{2}[c_2(g) + \bar{c_2}(\bar{g})] \tag{3.78}$$

çözümlerine dair bir karmaşık değişkenli fonksiyon teorisindeki çeşitli sonuçları yorumlayabiliriz. Gerçekten *g(z)*'nin katsayıları $a_m$ve katsayılar $A_{m,0}$ arasındaki aşağıdaki bağıntı

$$a_m = 2\left[A_{m,0} - \frac{A_{m,0}a_m}{2}\right] \tag{3.79}$$

geçerlidir burada; a_m [bkz. (3.73)], diferansiyel denklemin yalnızca A katsayısına bağlıdır. Örneğin; eğer (3.77) den geliştirilen $\{A_{m,0}\}$ dizisi $\psi(z,0)$ fonksiyonunun $P_1, P_2 \cdots$ noktalarında kutupları olacak şekilde Hadamard koşullarını sağlıyorsa, bu taktirde $\psi(z,0)$ bazı noktalarda kutup benzeri tekilliklere sahip olacaktır.(Bkz. Teorem 3. 6.1). (Harmonik denklem durumunda, bu tekillikler kutuplar haline gelecektir.) Ayrıca $\psi(z,\bar{z})$, |z| <1 için (2.11) denkleminin bir çözümü ve (3.79)'un dizisi $\{a_m\}$ sınırlı bir varyasyona sahip ve $\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|^2$ dizisi yakınsıyor ise; bu durumda $\boldsymbol{\psi}$, muhtemelen z = 1 hariç birim çember |z| = 1'de süreklidir. Benzer koşullar, ψ'nin diğer kapalı eğrilerde de sürekli olmasını sağlar. ψ'nin |z| =1'de bir sıçrama yapması ve bu sıçramanın büyüklüğünün, alt diziler $\{A_{m,0}\}$ ve $\{A_m\}$ cinsinden verilmesi için yeterli şartlar da bilinmektedir. Son olarak, $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$dizisi toplanabilir ise $(C,a), a > -1$ ve $\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|^2$ yakınsar, bu durumda

$$\lim_{r\to 1} \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} z^m \bar{z}^n = \psi(z,\bar{z})\ |\boldsymbol{z}| = |\bar{\boldsymbol{z}}| = \boldsymbol{1}, \tag{3.80}$$

burada r(= |z|) ~>1; z = 1 noktasından geçen |z| = 1 birim çemberinin iki kirişi arasındaki herhangi bir yol üzerindedir (Mitchell 1946).
a(z) bir tam fonksiyon olduğundan; bu ifadelerin ispatı, bağıntı (3.76)'dan hemen elde edilebilir.

1. (2.74) ile verilen çözüm $\psi(z,\bar{z})$'nin değerlendirilmesine ek olarak, z'nin eşleniği $\bar{\boldsymbol{z}}$**'**nin bağımsız değişken z* ile değiştirildiği durumda göz önünde bulundurulmuştur; bu, *x* ve *y*'nin reel değişkenler yerine bağımsız karmaşık değişkenler olarak düşünülmesi ile eşdeğerdir. Çözümler, iki karmaşık değişken *z*, z^*'nin dört boyutlu uzayında değerlendirildiğinde; yukarıda açıklanan kutup benzeri tekillikler, iki boyutlu dallanma düzlemleri haline gelir. Bu gibi tekilliklerin doğasıyla ilgili detaylı bir çalışma; çözümün, birinci tür ilişkilileri, bunun gibi ifadelerin kuvvetleri *(z— a)* veya toplamları olan belirli çözümler cinsinden temsil edilmesi ile gerçekleştirilebilir.

2. $\psi(z, z^*)$'nin (3.74) de $\{A_{m,0}\}$ katsayıları üzerindeki şartlar z'nin bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde; (Bergman 1937b, Nielsen 1944, Kreyszig 1957)'da verilmiş z^* ye bağlı olan katsayılar ile bir adi diferansiyel denklemi sağlar.

Katsayıların $\{A_{m,0}\}$ alt dizisi katsayı problemleriyle ilgili olarak özel bir rol oynadığına dikkat not edelim. Bu, birinci tür integral operatörün özelliklerinin bir sonucudur. $\psi(z, z^*)$'nin davranışıyla ilgili bilgilerin herhangi bir başka $\{A_{m,0}\}$, n > 0 dizisinden veya sabitten elde edilebiliyor olduğu açıktır. $\psi(z, z^*)$'yi aşağıdaki şekilde gösterirsek

$$\psi(z, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) z^{*n}, \; a_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} z^m, \tag{3.80a}$$

$a_n(z)$ve $a_0(z)$ fonksiyonları arasındaki bağıntılar, yukarıda bahsedilen alt diziler arasındaki bağıntılarla aynıdır. Bu yolla $\{A_{m,0}\}$ koşulları, $\{A_{m,n}\}, n > 0$'daki koşullarla değiştirilebilir. $a_n(z)$ ve $a_0(z)$ arasında bağıntılar elde etmek için; (3.11) denkleminin *A*, *B*, *C* katsayılarını z^*'deki kuvvet serileri olarak gösteriyoruz,

$$A(z, z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) z^{*n} \tag{3.81}$$

olduğunu farz edelim, burada $a_n(z)$, z'nin kuvvet serileridir. Bu gösterimleri ve (3.80)'i (3.11) denklemine yerleştirdiğimizde, z*'de bir kuvvet serisi elde ederiz. (3.11) denkleminin sağlanması için, bu serinin katsayılarının sıfır olmaması gerekir. Bu, sonlu sayıda adi lineer diferansiyel denklem sistemine yol açar. İlk *n* denklemlerinin alt sistemini S_n ile gösteriyoruz. S_n sistemi, $a_0(z), a_1(z), \cdots, a_n(z)$ fonksiyonlarını ve bunların türevlerini içerir; ancak başka bir $a_v(z)\,, v > n$ fonksiyonunu içermez. S_n bağıntılarını kullanılarak, $\{A_{m0}\}$ve $\{A_{mn}\}$, n > 0 arasındaki bağıntılar elde edilmiş ve aşağıdaki ihtimallerin ortaya çıktığı gösterilmiştir.

I. Genel olarak, $a_1(z), a_2(z), \cdots, a_{n-1}(z)$ fonksiyonları ve bunların türevleri, S_n'den çıkarılabilir. Bu, mertebesi n'yi geçmeyen bir adi lineer diferansiyel denklemi beraberinde getirir. Karmaşık adi diferansiyel denklemlere ait bilinen teoremler vasıtasıyla, regülerlik bölgesi ve $\psi(z, z^*)$ nin diğer temel özellikler ile ilgili bilgiler böylece $\{A_{mn}\}$, n > 0 katsayıları ve sabitler cinsinden elde edilebilir.

II. Ancak, çıkarma metodunun uygulanamadığı veya aşırı karmaşık koşulları beraberinde getiren (2.11) kısmi diferansiyel denklemlerin önemli türleri bulunmaktadır. Bu durumlarda S_n, kendi orijinal formu ile hesaba katılabilir.

III..$\{A_{m0}\}$ ve $\{A_{mn}\}$, n > 0 arasında herhangi bir bağıntı olmama ihtimali de vardır.

Genel durum, aşağıdaki olgularla karakterize edilebilir. $a_n(z), n > 0$ belirli bir noktada tekil ise, $a_0(z)$ de aynı noktada tekildir. Bunun tersi ise geçerli olmayabilir; yani, $a_0(z)$'nin tekil noktaları $a_n(z)$'nin düzenli noktalarına karşılık gelmeyebilir. Ancak koşullar, ikinci durumun hariç tutulduğu durumlarda elde edilmiştir. (3.11) denkleminin katsayıları yalnızca bir değişkene bağlı ise, bu koşullar özellikle basittir. Örneğin; *A, B* ve *C*'nin yalnızca z'ye bağlı olduğunu varsayalım. $\mathfrak{P}_2$, orijini içersin ancak A (z)'nin sıfırları bulundurmayan basit bağlantılı bir bölge olsun . Bu taktirde $\psi(z, z^*)$, Kartezyen çarpım bölgesi $\mathfrak{P}_2 \times (|z^*| < \infty)$ de regülerdir ancak ve ancak karşılığı olan $a_n(z)$, $n > 0$, fonksiyonları $\mathfrak{P}_2$ de keyfi, regülerdir.

Bu sonuçların bir kısmı; *A, B, C*'nin tam olmadığı duruma genişletilebilir. Bu durumda $a_n(z)$ nin singülerlikleri ya ilgili fonksiyonların ya da *A, B, C'* nin singülerliklerinden elde edilebilir. Burada dikkat edilmesi gereken konu; dördüncü mertebe kısmi diferansiyel denklemleri ve ikinci mertebeden eliptik sistemler için benzer metotlarla ele alınabiliyor olduğudur (Kreyszig 1957b, 1958). Bundan dolayı yüksek mertebeden denklemler için integral operatörleri incelemeyeceğiz.

3.7. $\boldsymbol{\Delta_2 V + F(r^2)V = 0}$ Diferansiyel Denklemi

Diferansiyel denklemin aşağıdaki formda olduğu özel durumda

$$\Delta_2 V + F(r^2)V = 0 \tag{3.82}$$

ve $F\ (r^2)$, $r^2 = x^2 + y^2 = zz^*$'nin bir tam fonksiyonu olduğu durumda; birinci türden integral operatör, genel durumdan daha basit bir yapıya kavuşur. Bu sayede, bu durumdan çeşitli ilave sonuçlar türetilebilir.

Teorem 3.7.1. Diferansiyel denklem (3.82) durumunda, birinci türden integral operatörün üreten fonksiyonu E (z, z*, t), $r^2 = zz^*$ ve t'nin bir reel fonksiyonudur.

İspat: Aşağıdaki ifadeyi yazıyoruz;

$$Q^{(2n)}(z,z^*) = z^n \int_0^{z^n} P^{(2n)}(z,z^*)dz^*, \quad n = 1,2,\cdots \tag{3.83}$$

burada $\{P^{(2n)}\}$, (3.28) ve (3.30)'da sunulan fonksiyonlardır ve $\{Q^{(2n)}\}$ fonksiyonlarının yalnızca r^2*'ye* bağlı olduğunu göstereceğiz. (3.30) sisteminde$\{P^{(2n)}\}$'nin $\{Q^{(2n)}\}$ ile değiştirilmesiyle, aşağıdaki denklemler grubunu elde ediyoruz.

$$Q^{(2)}_{z^*} + 2zF(r^2) = 0 \tag{3.84a}$$

$$(2n+1)Q^{(2n+2)}_{z^*} + 2z\left[Q^{(2n)}_{zz^*} + F(r^2)Q^{(2n)} - \frac{n}{z}Q^{(2n)}_{z^*}\right] = 0,\ n = 0,1,2,\cdots \tag{3.84b}$$

$$Q^{(2n)}(z,0) = 0,\ n = 0,1,2,\cdots \tag{3.85}$$

direkt bir hesaplama ile denklem (3.84a) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{\partial Q^{(2)}}{\partial (r^2)} + 2F(r^2) = 0, \tag{3.86a}$$

Burada $Q^{(2)}$, yalnızca r^2' ye bağlıdır. $Q^{(2)}(0) = 0$ şartını koşarsak, (3.85)'i sağlayacaktır. $Q^{(2)}, n > 1$ durumunda tümevarımla devam edilir. $Q^{(2)}$'nin yalnızca r^2 ye bağlı olduğunu varsayarsak, eğer $Q^{(2n+2)}$,

$$(2n+1)\frac{\partial Q^{(2n+2)}}{\partial(r^2)}+2\left[\frac{\partial\left(\frac{r^2\partial Q^{(2n)}}{\partial(r^2)}\right)}{\partial(r^2)}+F(r^2)Q^{(2n)}-n\frac{\partial Q^{(2n)}}{\partial(r^2)}\right]=0 \tag{3.86b}$$

ve

$$Q^{(2n+2)}(r^2)_{r=0}=0. \tag{3.87}$$

denkleminin çözümü ise (2.84b) ve (2.85) denklemleri sağlanacaktır.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n}Q^{(2n)}(r^2)$$

serisinin yakınsaklığı daha önceki gösterildiği gibi gösterilebilir. Böylece, genel durumun aksine, değerlendirilen özel durum altında üreteç fonksiyonu

$$E(r^2,t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}t^{2n}Q^{(2n)}(r^2)$$

reeldir ve (3.82)'nin orijinde

$$V=\int_{-1}^{1}E(r^2,t)Re[f(u)]dt/(1-t^{2)^{\frac{1}{2}}}=Re\left\{\int_{-1}^{1}E(r^2,t)f(u)dt/(1-t^{2)^{\frac{1}{2}}}\right\}, \tag{3.88a}$$

$$W=\int_{-1}^{1}E(r^2,t)Im[f(u)]dt/(1-t^{2)^{\frac{1}{2}}}=Im\left\{\int_{-1}^{1}E(r^2,t)f(u)dt/(1-t^{2)^{\frac{1}{2}}}\right\}, \tag{3.88b}$$

$$u=z(1-t^2)/2$$

ile verilen eşlenik çözümlerinden bahsedebiliriz.Çözüm çifti *V* ve *W*, bir karmaşık değişkenin *aynı* analitik fonksiyonu *f*'nin ilişkili fonksiyon olarak kullanılmasıyla ve sonuçta elde edilen karmaşık çözümün sırasıyla reel ve sanal kısımları alınarak üretilir.

Orijinde regüler olan bir reel çözüm aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$V = \sum_{n=0}^{\infty}[a_n J^{(n)}(r)\cos n\varphi + b_n J^{(n)}(r)\sin n\varphi] \qquad (3.89a)$$

ve bu çözümün eşleniği aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$W = \sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n J^{(n)}(r)\cos n\varphi + a_n J^{(n)}(r)\sin n\varphi\right], \qquad (3.89b)$$

$$J^{(n)}(r) = 2^{-n} r^n \int_{-1}^{1} E(r^2, t)\,(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} dt. \qquad (3.90)$$

Not: $F\,(r^2) = 1, E\,(r^2, t) = cos\,(tr)$ durumunda $J^{(n)}(r)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$J^{(n)}(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^n \int_{-1}^{1}[\cos tr](1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} dt, \; n \geq 0,$$

öyleki bu özel basit durumda $J^{(n)}(r) = \sqrt{\pi}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)J^{(n)}(r)$'dir, burada *$J_n(r)$* Bessel fonksiyonudur. (Dolayısıyla $J^{(n)}(r)$ fonksiyonları, Bessel fonksiyonlarının genelleştirmeleri olarak da düşünülebilir.)

Yukarıda belirtildiği üzere, (3.82)'nin orijinde regüler olan herhangi bir reel çözümü, orijin komşuluğu civarında yakınsak olan bir seri (3.89 b) formunda genişletilebilir. Daha güçlü bir sonuç olarak, çözümün regüler olduğu en büyük dairede (merkez orijinde olacak şekilde) dizinin (3.89a) yakınsadığı ispatlanabilir. Harmonik fonksiyonların eşlenik çiftleri arasındaki bağıntıyla ilgili birçok sonuç, denklem (3.82)'nin (3.88a) ve (3.88b) çözümlerinin eşlenik çiftleri arasındaki bağıntılar olarak genelleştirilebilir.

Düzenli çözümlerle benzer olarak; ilişkili fonksiyonu için, tekilliklere sahip bir analitik fonksiyon kullanılarak elde edilen, çeşitli tekillikler içeren çözümler de hesaba katılabilir. Çözümleri, özellikle kutup benzeri tekillikler, örneğin, ilişkili fonksiyonunun kutupları olduğu fonksiyonlar ile değerlendirebiliriz. Artık teoremi, aşağıdaki teoremlerde gösterildiği üzere denklem (3.82)’nin çözümleri için belirli bir dereceye kadar genelleştirilebilir.

Teorem 3.7.2. V ve W’nin (bkz. (3.88a) ve (3.88b)) (3.82)’nin birbirinin eşleniği olan, $\{|z| \leq R\}$ dairesinde regüler olan iki çözümü olsun. Bu taktirde;

$$\int_{\mathfrak{C}} \approx{F} dz = 0,\ \mathfrak{C} = \{|z| = R\},\ R > 0, \tag{3.91}$$

dır. Burada $\overset{\approx}{\boldsymbol{F}} = \mathrm{V} + \mathrm{iW},\ \mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{iy}$ ’dir.

İspat: İspatı basit olduğundan ispatı atlanmıştır.

Teorem 3.7.3. V ve W eşlenik çözümlerinin, 2a = 2a* + 2ia** noktasında birinci mertebeden kutup benzeri bir singülerliğe sahip olduğunu varsayalım, yani, ilişkili fonksiyonu f(u)’nun $\left[|\mathrm{u}| \leq \frac{\mathrm{R}}{2}\right]$ dairesinde

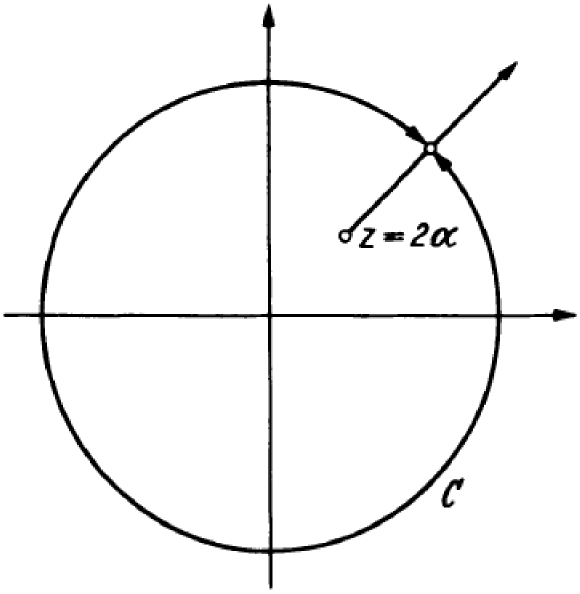
$$f(u) = f_1(u) + \frac{a_1}{(u-a)},\ 0 < |a| \leq R \tag{3.92}$$

İle temsil edildiğini varsayalım. Burada $f_1(u), \left[|u| \leq \frac{R}{2}\right]$ ’de regülerdir. Bu taktirde

$$\int_{\mathfrak{C}} \overset{\approx}{\boldsymbol{F}} dz = \int_{\mathfrak{C}} (V + iW)(\mathrm{dx} + \mathrm{idy}) = 4\pi a_1 i \int_{-t_1}^{t_1} \frac{E(R^2,t)dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.93}$$

$$t_1 = \left[1 - \frac{2|a|}{R}\right]^{\frac{1}{2}},\ \mathfrak{C} = [|\boldsymbol{z}| = R]$$

Not: 3.6’da belirttiğimiz üzere, V ve W fonksiyonları, $z = 2a$ noktasında sonsuz mertebede bir dallanma noktasına sahiptir. $\overset{\approx}{\boldsymbol{F}}$ fonksiyonunun Riemann yüzeyini, $z = 2a$’dan başlayan ve yarıçap boyunca orijinden uzaklaşan bir doğru boyunca kesersek; $\mathfrak{C}$ eğrisi, Riemann yüzeyinin farklı katmanlarında, uç noktaları birbiri üzerinde bulunan bir açık eğri haline gelir (Şekil 3.2. ile karşılaştırın.).



Şekil. 3.2. Dallanma noktaları z= 2a ve $z = \infty, z = \mathrm{R}e^{i\psi}$'de bulunan Riemann yüzeyi üzerindeki eğri

Açık olarak görülüyor ki, ifademizin ilişkili fonksiyonu $f(u) = (u — a)^{-1}$ için ispatlamamız yeterlidir. Buradaki eğri $\mathfrak{C} = [|\boldsymbol{z}| = \boldsymbol{R}]$, u-düzleminde $u = \frac{1}{2}z(1-t^2)$, $|u| = \frac{R}{2}(1-t^2)$ eğrilerine karşılık gelir. (3.88a) ve (3.88b)'den

$$\int_{\mathfrak{C}} \overset{\approx}{F} dz = 2\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} E(R^2,t)\frac{ie^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}(1-t^2)-2a}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}Rd\varphi$$

$$= 2\int_{-1}^{1} E(R^2,t)\left[\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}(1-t^2)-2a}Rd\varphi\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{3.94}$$

burada $z = Re^{i\varphi}$*'dir.* (Çift katlı integral kesin olarak yakınsak olduğundan, integrasyon mertebelerini yer değiştirebiliriz.) t'nin $|t|^2 > 1 - 2|a|/R$ olan değerleri için kutup, integrasyon eğrisinin dışında olacaktır ve dolayısıyla

$$\int_0^{2\pi} 2i\, e^{i\varphi}\left[Re^{i\varphi}(1-t^2) - 2a\right]^{-1} Rd\varphi = 0. \tag{3.95}$$

t'nin $|t|^2 > 1 - 2|a|/R$ olan değerleri için kutup, integrasyon eğrisinin içinde olacaktır ve dolayısıyla

$$\int_0^{2\pi} 2i\, e^{i\varphi}\left[Re^{i\varphi}(1-t^2) - 2a\right]^{-1} Rd\varphi = 4\pi i. \tag{3.96}$$

bu, teoremin ispatını tamamlar.

Not: $\overset{\approx}{F}$'nin a'ya göre türevi alınırken (ve t_1'in (bkz. (3.93)) a'nın bir fonksiyonu olduğu hesaba katıldığında), ilişkili fonksiyonun ϱ>1 mertebesinde bir kutba sahip olduğu duruma benzer sonuçlar elde edilir.

V ve W fonksiyonlarını analitik olarak x ve y genliklerinin karmaşık değerlerine devam ettirdiğimizde, bağıntı (3.91) ve (3.93)'ün ilginç genelleştirmelerini elde ediyoruz.

İntegrasyon eğrisi $\mathfrak{C}$'nin aşağıdaki yüzey üzerinde olduğunu varsayalım

$$zz^* = h(z),\ h(0) = 0 \tag{3.97}$$

burada *h(z)*, bir karmaşık değişken z'nin bir tam analitik fonksiyonudur. Daha sonra $E(r^2, t)$, *h(z)*'deki $r^2 = zz^*$ niceliğini değiştirebilir ve Teorem 3.7.2 ve Teorem 3.7.3'te, formülleştirilmiş olanlara benzer sonuçlar elde ederiz.

Yukarıda ele alınan yaklaşım, ilişkili *f(U)*, *U*'nun bir cebirsel fonksiyonu olduğu durum için genelleştirilebilir ve t'nin tüm değerleri için, ilişkili fonksiyon *f(U)*'nun Riemann yüzeyi üzerindeki noktalar kümesi $|z(l - t^2)| = R$ bir kapalı eğri olacak şekilde bir integrasyon eğrisidüşünülebilir. İntegrasyoneğrisi $\mathfrak{C} = \left[z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right]$ Riemann yüzeyinde açıkolabileceğinden, eğriyi $\mathfrak{C}^* = \left[z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi n\right]$ ile değiştiriyoruz; burada n, $\mathfrak{C}^*$ Riemann yüzeyi *f(U)* üzerinde bir kapalı eğri olacak şekilde seçilmiştir Bu türdeki sonuçlar (Bergman 1930)'da ele alınmaktadır.

3.8. Üstel Tip İntegral Operatörler

Bazı makalelerde gösterilmiş olduğu üzere, verilen bir diferansiyel denklem için sonsuz sayıda integral operatör vardır. Birinci türden integral operatörlerden farklı operatörleri göz önüne almak, çeşitli amaçlar için faydalıdır. Bu kısımda, üstel integral operatörler olarak adlandırılan operatörleri ele alacağız. Üreteç fonksiyon *E* aşağıdaki şekilde ise

$$E = expQ, Q = Q(z, z^*, t) = \sum_{u=0}^{m} q_u(z, z^*)t^u \qquad (3.98)$$

yani *Q*, t nin bir polinomu *ise,* operatör (3.14) bir üstel tip integral operatör olarak adlandırılır. (Bergman 1937b)'de, tip (3.98) integral operatörlerin L(*U*) =0'ın düzenli ve tekil çözümlerinin çeşitli özelliklerinin incelenmesinde faydalı bir araç olduğu gösterilmiştir.(bkz. (3.11) Bilhassa bu tipteki integral operatörler, L(*U*) =0 denkleminin belirli çözümlerini sağlayan rasyonel (veya cebirsel) katsayılı adi diferensiyel denklemlerin belirlenmesine olanak sağlar.

Bu, adi diferansiyel denklemler teorisini, üreten fonksiyon (3.98)'in uygulanmasıyla elde edilen çözümlerin özelliklerini araştırmada kullanmamızı sağlar (Bu tipteki integral operatörlere sahip çeşitli diferansiyel denklemler (Bergman 1937b, Kreyszig 1955,1957)'da gözden geçirilmiştir.

(Kreyszig 1955)'de, böyle bir üreteç fonksiyonun varlığı için (3.13) denkleminin *D, F* katsayılarının gerekli ve yeterli koşulları verilmiştir. Bu gibi üreteç fonksiyonlarla ilgili en ilginç olgulardan biri, (3.13) denkleminin çözümünün, aşağıdaki yapıda bir ilişkili fonksiyon ile elde ediliyor olmasıdır.

$$f(z) = z^n, \ n = 0,1,2,\cdots \qquad (3.99)$$

Mertebesi (3.99) da görülen n bileşeninden bağımsızdır ki mertebesi sadece Q'nun m derecesine bağlıdır.

Teorem 3.8.1. A. (3.6.a) denkleminin D ve F katsayıları aşağıdaki şekilde gösterilebiliyorsa;

$$D = -\frac{\partial q_0}{\partial z} - \frac{q_z}{z}, \tag{3.100}$$

$$F = -\frac{q_1}{2z}\frac{\partial q_1}{\partial z^*}, \tag{3.101}$$

Burada

$$q_0 = q_0(z) \tag{3.102}$$

$$\mathrm{q_1(z, z^*) = \sum_{v=0}^{\sigma(m)} a_v z^{v+\frac{1}{2}}, \quad a_0 = a_0(z^*), \ \ a_v = const.\,(1 \le v \le \sigma\,(m)), 1} \tag{3.103}$$

$$\mathrm{q_2(z) = \sum_{v=1}^{\tau(m)} d_v z^v, \quad d_v = const.\left(1 \le v \le \tau(m)\right), 1} \tag{3.104}$$

o halde; denklem (3.13) ile, (3.98) formundaki bir üreten fonksiyonu ilişkilendirebiliriz. Burada Q(z, z*> t)'nin kalan katsayıları $\mathrm{q_u}$, $\ 2 < \mathrm{u} \le \mathrm{m}$ aşağıdaki ifadelerle verilir:

$$\mathrm{q_{2\mu+1} = \frac{(-2)^{\mu}}{3{\cdot}5\cdots(2\mu+1)}\sum_{v=\mu}^{\sigma(m)} v(v-1)\cdots(v-\mu+1)a_v z^{v+\frac{1}{2}}}, \tag{3.105}$$

$$\mathrm{q_{2\mu} = -\frac{(-2)^{\mu}}{2{\cdot}4\cdots 2\mu}\sum_{v=\mu}^{\tau(m)}(v-1)(v-2)\cdots(v-\mu+1)d_v z^v}, \tag{3.106}$$

B. Aynısı; D, (3.100) formunda gösterilebildiğinde geçerlidir ve

$$\mathrm{F = -\frac{1}{2z}\frac{\partial q_2}{\partial z^*}} \tag{3.107}$$

burada q_2, (3.104) formundadır. Ancak bu durumda d_1, z*'nin bir fonksiyonu olabiliyorken, $q_1 = 0$'dır (önceki durumda olduğu gibi, bir sabit olması gerekmez).

C. Önemsiz F = 0 durumu hariç ve ayrıca (1), z*'den bağımsız olmak üzere; (a) v (b)'de gösterilenlerin ötesinde, (3.13)'nın D ve F katsayılarından hiçbiri, denklem (3.13)'nın kendisiyle ilişkili üstel tip bir üreten fonksiyona sahip olabildiği durumda var olamaz.

Teorem 2.8.2. u(z, z*), (2.13) için, (3.98) formundaki bir üreten fonksiyonun (3.99) fonksiyonuna uygulanmasıyla elde edilmiş çözüm olsun. O halde,($z = z_1 + iz_2, z^* = z_1 - iz_2$ olduğu durumda) $U(z_1, z_2) = u = (z, z^*)$ fonksiyonu; bir bayağı doğrusal diferansiyel denklemdeki herhangi bir sabit değer z_2'yi (z_{r1} değişkeninde) sağlar.

$$\sum_{x=0}^{k} B_x(z_1, z_2)\frac{d^x U}{d_{z_1}^x} = 0 \qquad (B_k = 1). \tag{3.108}$$

(3.108)'in mertebesi k, (3.99)'de görünen n değerinden bağımsızdır ve yalnızca (3.98)'deki m mertebesinden Q'ya bağlıdır. Mertebesi en fazla² m + 1 olan bir denklem (3.108) belirlemek her zaman mümkündür.

İncelenen durumda (örneğin, D ve F katsayıları, Teorem 3.8.1'de dayatılan şartları sağladığında); bayağı diferansiyel denklemlerin (3.108) (n'nin her değeri için bir tane) yardımıyla, (3.13)'nın çözümlerinin tekilliklerinin doğasıyla ilgili detaylı bir çalışma yapmak mümkündür Bu yönde elde edilen bazı sonuçlar (Bergman 1937b, Kreyszig 1955, 1957)'de verilmiştir.

3.9. $\boldsymbol{\Delta_2\psi + N(x)\psi = 0}$ Diferensiyel Denklemi

(Eichler 1949a)'da, aşağıdaki şekilde farklı tip bir diferansiyel denklemi incelemiştir,

$$\Delta_2\psi + N(x)\psi = 0 \tag{3.109}$$

burada;

$$N(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots \tag{3.110}$$

3.1'deki değerlendirmelere göre (3.109)'un çözümleri $\boldsymbol{\psi}$ integral operatörler tarafından üretilir.

$$f(z) - \int_0^z S(x,y,\zeta)\, f(\zeta) d\zeta, \quad z = x + iy \tag{3.111}$$

burada S, aşağıdaki ifadeyi sağlar;

$$S_{xx} + S_{yy} + N(x)S = 0, \quad S_x(x,y,z) + iS_y(x,y,z) = \frac{1}{2}N(x). \tag{3.112}$$

Her zaman aşağıdaki formda bir S fonksiyonu vardır

$$S(x,y,\zeta) = G(x, z - \zeta). \tag{3.113}$$

(Eichler 1949a).Bu durumda (3.112)'teki bağıntılardan ikincisi aşağıdaki hale gelir.

$$G(x,0) = \frac{1}{2}\int_0^x N(x)dx + \gamma_0. \tag{3.114}$$

(3.38) ile benzer şekilde, $\psi(z,\bar{z})$ aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\left(\sigma(m) = \left[\frac{m-1}{2}\right], \tau(m) = \left[\frac{m}{2}\right]\right)$$

$$\psi(z,\bar{z}) = e_2(z,\bar{z},g) \equiv g(z) - \rho_1(x)\int_0^z g(z_1)\, dz_1 + \rho_2(x)\int_0^z \int_0^{z_1} g(z_2) dz_2 dz_1 + \cdots \tag{3.115}$$

$$\rho_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^x N(x)dx + \gamma_1, \quad \rho_2(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \big(\rho_1'' + N(x)\rho_1(x)\big)dx \ + \gamma_2, \cdots \tag{3.116}$$

burada γ_n'ler integrasyon sabitleridir (artan diziler). $e_2(z,\bar{z},g)$ ayrıca aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$e_2(z,\bar{z},g) = q_0(x)g(z) + q_1(x)g_z(z) + q_2(x)g_{zz}(z) + \cdots, \ g_z = \frac{dg}{dz}, \cdots \tag{3.117}$$

Teorem 3.9.1. Orijine göre (3.113) formunda yalnızca bir tane kanonik üreten fonksiyon bulunmaktadır ve aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$G(x, z-\zeta) = G(x, \boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{iy}, \tag{3.118}$$

burada H, hiperbolik tip bir denklemi sağlar.

$$H_{xx} - H_{\xi\xi} + N(x)H = 0. \tag{3.119}$$

T başlangıç koşulları aşağıdaki şekildedir.

$$H(x, x) = \frac{1}{2}\int_0^x N(x)dx, \quad H(x, -x) = 0. \tag{3.120}$$

Teorem 3.9.2.

$$g(z) = \sum a^{(\lambda)} exp\,(\lambda\, z), \ \sum = \sum{}_{\lambda(v)} \tag{3.121}$$

olduğunu varsayalım, burada $\lambda(v)$, $v = 1,2,\dots$ bir dizi gerçek sayı arasında dağılır. (3.121) dizisi; yalıtık tekilliklerin en büyük sonsuz miktarı istisna olmak üzere, $x \leq c$, $c > 0$ için mutlak ve düzgün yakınsak; ve g(z), bir $\mathfrak{D}$ alanında düzenli ve $a \leq x \leq b$ şeridi dahilinde olsun. Son olarak da $h^{(\lambda)}(x)$, aşağıdaki bayağı diferansiyel denklemi

$$h^{(\lambda)\prime\prime} + (N - \boldsymbol{\lambda}^2)h^{(\lambda)} = 0 \tag{3.122}$$

ve $h^{(\lambda)}(0) = 1$, $h^{(\lambda)\prime}(0) = \boldsymbol{\lambda}$ başlangıç koşullarını sağlıyor olsun. Bu durumda

$$\psi = \sum a^{(\lambda)} h^{(\lambda)}(x) \exp(i\lambda y) \tag{3.123}$$

aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) $|x| \leq c$ 'de mutlak ve düzgün olarak yakınsar. **(2)** $\mathfrak{D}$'nin kesişimine ve y-eksenine göre $\mathfrak{D}$'ye simetrik $\overline{\mathfrak{D}}$ alanına doğru analitik olarak devam ettirilebilir. (3.111) g(z) ve g(-z) düzenli olduğunda düzenlidir. (3.112) g(z)'nin bir tekil noktasında

$$\psi = g(z) - \rho_1(x) \int_0^z g(\zeta) d\zeta + \cdots, \qquad (3.124)$$

burada noktalar, g(z) üzerindeki ilave integralleri (bkz. (3.115)) ve her iki gerçek değişken x ve y'ye analitik olarak bağlı bir fonksiyonu gösterir.

Teorem 3.9.3. Aşağıdaki bağıntının doğru olduğunu ve (3.123)'daki dizinin $-\infty \leq x \leq b$ için tam olarak ve düzgün şekilde yakınsadığını varsayalım.

$$\mathrm{N(x)} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{a}^{(\mathrm{n})} \exp(\mathrm{nx}), \qquad (3.125)$$

$\mathrm{h}^{(\lambda)}(\mathrm{x})$ fonksiyonları, $\mathrm{x} = -\infty$ için; (3.122)'in, yine başlangıç değerleri

$$\mathrm{h}^{(\lambda)}(\mathrm{x}) \exp(-\lambda \mathrm{x}) = 1\, , \mathrm{h}_{\mathrm{x}}^{(\lambda)}(\mathrm{x}) \exp(-\lambda \mathrm{x}) = \boldsymbol{\lambda} \qquad (3.126)$$

(3.126)'u içeren çözümleri olarak tanımlanır.

$g(z)$, $\lambda = 0,1,2,\cdots$ile birlikte Teorem 3.9.2'de belirtilen özelliklere sahip olsun. Bu durumda, $\boldsymbol{\psi}$'nin yalnızca g(z) tekil olduğunda tekil olması haricinde, dizi (3.124) ile ilgili aynı ifadeler geçerlidir.

Teorem 3.9.4. x_0; N (x)'in $0 < \mathrm{x} < 2\mathrm{x}_0$'de düzenli olduğu bir pozitif sabit olsun. (3.116)'deki integrasyon sabitleri y_n aşağıdaki koşulu

$$|\gamma_{\mathrm{n}}| < \gamma(\mathrm{n}-1)!\,(2\mathrm{x}_0)^{-\mathrm{n}} \qquad (3.127)$$

rastgele bir y ile sağlıyorsa, üreten fonksiyon için aşağıdaki dizi

$$\mathrm{G(x, z - \zeta)} = \rho_1(\mathrm{x}) - \rho_2(\mathrm{x})(\mathrm{z} - \zeta) + \frac{1}{2}\rho_3(\mathrm{x})(\mathrm{z} - \zeta)^2 + \cdots \qquad (3.128)$$

aşağıdaki koşul ile tam olarak yakınsaktır

$$x \neq 0, |z - \zeta| < 2|x|. \tag{3.129}$$

(Azalan) dizi (7); $x \neq 0, |z - \zeta| < 2|x|.$ geçerliyse, her düzenli analitik fonksiyon f(z) için mutlak yakınsaktır Teoremler 3.9.1 - 3.9.4 , $y_0 = 0$ koşuluyla (Eichler 1949a)'da ispatlanmıştır.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde üç değişkenli Laplace denkleminin çözümlerinin analitik özelliklerini Bergman-Whittaker integral operatör yardımıyla inceleyeceğiz.

4.1. Üç Değişkenli Harmonik Fonksiyonlar

Bu kısımda üç değişkenli

$$\Delta\Psi \equiv \Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz} = 0 \tag{4.1}$$

Laplace denkleminin çözümlerinin analitik özelliklerini inceleyeceğiz. $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ kartezyen koordinatlar ve $u = N_\mu x_\mu$ olsun. (tekrarlanan indislerde toplama kuralının uygulandığını gösterir). Burada toplama 1 den 3 e kadar alınmıştır ve $N_\mu \equiv N(\zeta), (\mu = 1,2,3)$ ise karmaşık ζ değişkeninin analitik fonksiyonlarıdır. Ayrıca $N \equiv (N_1, N_2, N_3)$ nin isotropik yani kendisine ortogonal $\sum_{\mu=1}^{3} N_\mu N_\mu = 0$ olduğunu varsayalım. u nun terimlerinde

$$f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (N_\mu x_\mu)^n \tag{4.2}$$

serisini düşünelim. Eğer (4.2) serisi yakınsak ise x_ν ye göre terim terime türetilebilir ve ardışık türev ile sırasıyla

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} f(u) = f'(u) N_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n N_\nu (N_\mu x_\mu)^{n-1},$$

$$\frac{\partial^2 f(u)}{\partial x_\nu \partial x_\nu} = f''(u) N_\nu N_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n N_\nu N_\mu u^{n-2} = 0$$

elde edilir. Bu işlemler açık olarak tüm X ve aşağıdaki özelliği sağlayan tüm ζ lar için geçerlidir

$$|N_\nu x_\mu| \leq \rho < \rho_0 = \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}\right]^{-1}.$$

N isotropik vektörünün $N_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right), N_2 = \left(\frac{i}{2}\right)\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), N_3 = 1$ seçimi ve $u = \left(\frac{\zeta}{2}\right)(x_1 + ix_2) + x_3 + (1/2\zeta)(x_1 - ix_2)$ alınması ile $N = (isin\alpha, icos\alpha, 1)$ olur, burada $\zeta = e^{i\alpha}$ alınmıştır yani ζ birim çembere sınırlandırılmıştır. u nun integral kuvvetleri tanım gereği küresel harmoniktir (Hobson 1931). Ayrıca ζ nın kuvvetlerinde u^n açılması ile ζ^m nin katsayılarında $n.$ dereceden homojen harmonik polinomlar yani;

$$u^n = \sum_{m\_-n}^{n} h_{nm}(x_1, x_2, x_3)\zeta^m$$

elde edilir. Bu $h_{nm}(X), (n = 0,1, \dots), (m = 0, \mp 1, \dots, \mp n)$ fonksiyonları ileride harmonik fonksiyonların tam bir sistemi olduğu gösterilecektir.

Eğer x_1, x_2, x_3 ü

$$x_3 = rcos\theta\,, \quad x_2 = rsin\theta cos\varphi, \;\; x_1 = rsin\theta sin\varphi \tag{4.3}$$

küresel koordinatlarla yer değiştirirsek bu taktirde üç değişkenli

$$\Delta_3 H \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial {x_3}^2}$$

Laplace denklemi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{cot\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{4.4}$$

olur. Burada $V(r, \theta, \varphi) \equiv H(rsin\theta sişn\varphi, rsin\theta cos\varphi, rcos\theta)$'dır.Küresel koordinatlardaki Laplace denkleminin çözümünü değişkenlerin ayrılması ile yani,

$$V(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

şeklinde aranırsa

$$r^n P_n^m(cos\theta)\exp(\mp Im\varphi)\,,(n=0,1,2,\dots),(m=1,2,\dots,n)$$

şeklinde çözüm kümesi bulunur ki orijin civarında regülerdirler. P_n^m,birirci çeşit Legendre polinomları ile alakalı n. derece, m. Mertebeden;

$$(1-\xi^2)\frac{d^2w}{d\xi^2}-2\xi\frac{dw}{d\xi}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\xi^2}\right]w=0,$$

adi diferensiyel denkleminin çözümleridirler, burada $w(\xi)=\Theta(cos^{-1}\xi)$ dır. m bir tamsayı olması durumunda, bu denklemin çözümleri

$$P_n^m(\xi)=\frac{(1-\xi^2)^{m/2}}{2^n n!}\frac{d^{n+m}(\xi^2-1)^n}{d\xi^{n+m}}$$

Rodrigues formülü ile de tanımlanabilir (Erdelyi 1953, 1955).

Değişkenleri ayrılmış $r^n P_n^m(cos\theta)\exp(\mp Im\varphi)$ çözümleri katı tessaral (mozaik) hormonikler olarak adlandırılır. Bu fonksiyonlar orjin civarında regüler harmonik fonksiyonlara göre tam bir sistemdir. Gerçekten Laplace denkleminin herhangi bir böyle çözümü $0\le r\le r_0,\ r_0>0$ için

$$V(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}r^n\{A_{n0}P_n(cos\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}A_{nm}cosm\varphi+B_{nm}sinm\varphi\}P_n^m(cos\theta) \tag{4.5}$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa regülerdir denir (Whittaker ve ark 1920). Burada A_{n0}, A_{nm}, B_{nm} katsayıları Fourier katsayılarıdır ve

$$A_{n0}=\frac{2n+1}{4\pi r_0^n}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta V(r_0,\theta,\varphi)P_n(cos\theta)sin\theta\,,$$

$$A_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi r_0^n (n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta V(r_0, \theta, \varphi) P_n{}^m(cos\theta) cosm\varphi sin\theta,$$

$$B_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi r_0^n (n+m)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta V(r_0, \theta, \varphi) P_n{}^m(cos\theta) sinm\varphi sin\theta, \qquad (4.6)$$

ile belirlenebilirler. Kesin olarak $V(r_0, \theta, \varphi) \equiv g(\theta, \varphi)$, $\{0 \leq \theta \leq \pi\} \times \{0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ üzerinde sürekli olduğunda $r < r_0$ küresinin içinde Laplace denkleminin bir regüler çözümünün Fourier katsayılarını belirler. Bu çözüm ayrıca

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} r_0 (r_0^2 - r^2) \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' \frac{g(\theta', \varphi\prime) sin\theta\prime}{[r^2 - 2r_0 r cos\Psi + r_0^2]^{3/2}} \qquad (4.7)$$

Poisson formülü ile de temsil edilebilir. Burada $cos\Psi = cos\theta cos\theta' + sin\theta sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')$ dir.

Şimdi küresel koordinatlarda yardımcı u değişkenini yeniden yazarsak

$$u^n = r^n \{isin\alpha sin\theta sin\varphi + icos\alpha sin\theta cos\varphi + cos\theta\}^n \qquad (4.8)$$

$$= r^n \{cos\theta + isin\theta \cos(\varphi - \alpha)\}^n$$

$$= r^n \sum_{m=-n}^{n} \frac{n! i^m}{(n+m)!} P_n^m(cos\theta) \exp[im(\varphi - \alpha)]$$

elde edilir (Courant ve ark 1953). Burada $\zeta = e^{i\alpha}$ dır. Katı harmonik mozaikler ve katı küresel harmonik u^n arasındaki ilişkiyi Legendere polinomları için Heine integral temsili göz önüne alınarak gerçekleyebiliriz (Whittaker ve ark 1920). yani; Rodrigues'in tanımladığı $P_n^m(\zeta)$ ya cau. chy formülünün uygulanması ile

$$P_n^m cos\theta e^{im\varphi} = \frac{1}{2\pi} \frac{(n+m)!}{n! i^m} \int_0^{2\pi} [cos\theta + isin\theta \cos(\varphi - \alpha)]^n e^{im\varphi} d\alpha \qquad (4.9)$$

elde edilebilir (Copson 1935)

(4.8) ve (4.9) ifadeleri Laplace denkleminin orijinde regüler çözümlerini üreten integral operatörlerin inşasına izin verir. Örneğin çekirdek olarak $|r/s| < 1, 1-\delta \leq |\zeta| \leq 1+\delta$ için

$$B^{(+)}\left(\frac{r}{s}, cos\theta, \frac{e^{i\varphi}}{\zeta}\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{n!}{(n+m)!} \left(\frac{r}{s}\right)^n P_n^m(cos\theta) \left(\frac{ie^{i\varphi}}{\zeta}\right)^m \tag{4.10}$$

toplamını önerelim, bu toplam

$$\left(\frac{r}{s} \equiv t,\ cos\theta \equiv \xi\ ,\ \frac{e^{i\varphi}}{\zeta} \equiv \eta\right),$$

$$(t, \xi, \eta) \epsilon \mathfrak{D}(\varepsilon, \delta) \equiv \{|t| < 1-\varepsilon\} \times \{-1 < \xi < 1\} \times \left\{1-\tilde{\delta} \leq |\eta| \leq 1+\tilde{\delta}\right\}$$

$0 < \varepsilon < 1$ ve yeterince küçük $\tilde{\delta}$ için düzgün yakınsaktır. Bu toplamın silindirik bölgedeki düzgün yakınsaklığı, (4.8) doğurucu fonksiyon ifadesinde yardımcı u değişkeninin

$$u = r\{cos\theta + iz(\varphi)sin\theta\}, \qquad z(\varphi) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{e^{i\varphi}} + \frac{e^{i\varphi}}{\zeta}\right)$$

olarak yeniden yazılması ve $z(\varphi)$ yi φ parametresine bağlı olarak konform dönüşüm olarak düşünülmesi ile elde edilir. Sınırlı fonksiyonlar için Hartog teoremi, $B^{(+)}$ nın kısmi toplamları ki, $(t, \xi, \eta) \epsilon \mathfrak{D}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \equiv \{|t| < 1-\varepsilon_1; \varepsilon_1 > 0\} \times \{|1-\zeta| + |1+\zeta| \leq 2+\varepsilon_2; \varepsilon_2 > 0, \xi \ngeq 1, \xi \nleq -1\} \times \{1-\varepsilon_3 \leq |\eta| \leq 1+\varepsilon_3\}$ için $t = \frac{r}{s}, \xi = cos\theta$ ve $\eta = \frac{e^{i\varphi}}{\zeta}$ değişkenlerinde Cauchy Riemann analitik olduğu ile gerçeği ile birleştirildiğinde $B^{(+)}(t, \xi, \eta)$'nun bu silindirde bir holomorf fonksiyon olduğu sonucuna varılır. Gerçekten t, ξ, η için bu bölgede

$$B^{(+)}\left(r/s, cos\theta, e^{i\varphi}/\zeta\right) = \frac{s}{s-u} \text{ ‘yı} \tag{4.11}$$

elde etmek için $B^{(+)}$ toplayabiliriz. Burada u yukarıda verilmiştir.

Eğer $f(s,\zeta)$, $(s,\zeta)\epsilon\mathfrak{B}(\rho,\delta) \equiv \{s < \rho\} \times \{1-\delta \leq |\zeta| \leq 1+\delta\}$ için s ve ζ karmaşık değişkenlerinin bir holomorf fonksiyonu ve

$$f(s,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_{nm} s^n \zeta^m \tag{4.12}$$

şeklinde Laurent seri temsiline sahipse bu taktirde aşağıda verilen

$$V(r,\theta,\varphi) \equiv H(rsin\theta sin\varphi, rsin\theta cos\varphi, rcos\theta), \tag{4.13}$$

$$V(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{a_{nm} n!}{(n+m)!} i^m r^n P_n^m(cos\theta) e^{im\varphi}$$

serisi ile ilişkili olarak

$$V(r,\theta,\varphi) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta} \int_{|s-u|=\varepsilon/2} \frac{f(s,\zeta)}{s-u} ds \tag{4.14}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} f(u,\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$(\varepsilon < \rho - |s|)$ integral temsili ile temsil edilebilir ki Bergman-Whitaker temsilidir. (Bergman 1926, 1929), yukarıda verilmiş olan $\mathfrak{B}(\rho,\delta)$ silindirinde lineer holomorf fonksiyonları oirjin civarında lineer harmonik fonksiyonlar uzayı üzerine dönüştüren bu integral operatörü düşünerek fikirlerini sunmuştur. Gerçekten, eğer (4.14)'ün integrasyon yolu $|\zeta| = 1$ ise $\{|\zeta| = 1\}$'e homolog olan, integralin singülerliğinden geçmeyen başka bir yaya deforme edilebilir ki, bu işlem

$$H(X) = B_3 f,\ B_3 f = \int_{\mathfrak{T}} f(u,\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta},\ \mathfrak{T} \sim \{|\zeta| = 1\} \tag{4.15}$$

Olarak yazılabilir. Burada yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ için $\|X - X_0\| \equiv [(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2] < \varepsilon$ dır. $X_0 \equiv (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, (3.15) integralinin tanımının mevcut olması için alınmış bir noktadır. B_3 operatörü, bu taktirde tabiri caizse, "küçük" yani; X_0 başlangıç noktasının bir komşuluğu için bir harmonik fonksiyonu tanımlar.

4.2. Bergmann-Whittaker Operatörü

Eğer $f(s,\zeta)$, $\mathfrak{B}(\rho,\delta)$ da bir Laurent serisine sahipse bu taktirde B_3bir $H(X)$ harmonik fonksiyonu üretir ki $\|X\| \leq \rho$ özelliğindeki tüm X'ler için regüler olduğu görüldü. Bu gerçek, $\mathfrak{T}$ birim çember olduğunda $|u| \leq \|X\|$ sınırlamasından elde edilir; buradan $\|X\| \leq \rho, |\zeta| = 1$ için $f(u,\zeta)$ nın seri açılımı düzgün yakınsaktır ve (4.15) temsilinde bulunan integral terim terime alınabilir. Bu durumda, $B_3 f$ ile üretilmiş [(4.12) ile verilmiş holomorf fonksiyondan] (4.13) seri temsili ile harmonik fonksiyonun $S_\rho \equiv \{X | \|X\| \leq \rho\}$ kapalı küresinde düzgün yakınsak olduğu açıktır. Diğer taraftan kapalı S_ρ küresinde regüler herhangi bir harmonik fonksiyonu (4.5) seklinde bir seri ile temsil edilebilir ki, bu seri, $m > 0$ için $C_{nm} = \frac{1}{2}[A_{nm} - iB_{nm}]$, $m < 0$ için $C_{nm} = \frac{1}{2}[A_{nm} + iB_{nm}]$ ve son olarak $m = 0$ için $C_{n0} = A_{n0}$ alınarak

$$V(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} r^n C_{nm} P_n^m(cos\theta) e^{im\varphi} \tag{4.16}$$

şeklinde yeniden yazılabilir ($r \leq \rho$).

Bergmann orijinin bir komşuluğunda her harmonik fonksiyonun, daha küçük bir komşulukta, B_3 operatörünün terimlerinde ve (4.12) holomorf fonksiyonu ile ilişkili olarak temsil edilebileceğini gösterdi (Bergman 1961). $f(u,\zeta)$ holomorf fonksiyon elemanı B_3 operatörü anlamında (4.16) ile ilişkili olarak (4.12) kuvvet serisi ile tanımlanmıştır, burada a_{nm} Laurent katsayıları $a_{nm} = [(n+m)!/n!\, i^m]C_{nm}$, $(n = 0,1,2,\cdots), (m = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm n)$ ile verilir. Legendre fonksiyonlarının ortagonallik şartı

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(\xi) P_l^m(\xi) d\xi = \delta_{nl} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{-1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{4.17}$$

ve Besel-Schwarz eşitsizliği kulanılırsa

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |V(r,\theta,\varphi)|_{r=r_0}^2 \, sin\theta d\theta d\varphi \tag{4.18}$$

$$\leq 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} |C_{nm}|^2 \, {r_0}^{2n} \int_0^{\pi} [P_n^m(cos\theta)]^2 sin\theta d\theta$$

$$\leq 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} |a_{nm}|^2 \, {r_0}^{2n} \frac{2(n!)^2}{(2n+1)(n+m)!(n-m)!}$$

$$< 4\pi M$$

elde edilir. Burada

$$M = \max_{r=r_0} |V(r,\theta,\varphi)|, \qquad r_0 < \rho$$

dır. $(n!)^2 \geq 2^{-2n}(2n!)$ olduğundan (Bergman 1961) , sayfa 40-41 izleyerek

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{|a_{nm}|^2}{2n+1} \left(\frac{r_0}{2}\right)^{2n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{|a_{nm}|^2 (2n)!}{(n+m)!(n-m)!} \left(\frac{r_0}{2}\right)^{2n} < M$$

yazılabilir . $|\zeta| = 1$ için Schwartz eşitsizliği ile

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{|a_{nm}|^2}{2n+1} \left(\frac{r_0}{2}\right)^{2n}$$

$$\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{|a_{nm}|^2}{2n+1} \left(\frac{r_0}{2}\right)^{2n}\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left|\frac{2u}{r_0}\right|^{2n} (2n+1)\right)^{1/2}$$

$$\leq M \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left(\frac{2u}{r_0}\right)^{2n} (2n+1)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buradan (4.12) temsil serisi $\{|u| < r_0/2\} \times \{|\zeta|\} = 1$ Kartezyen çarpım kümesi üzerinde düzgün ve mutlak yakınsaktır. Buradan orijin civarında regüler her $V(r,\theta,\varphi)$ harmonik fonksiyonu orijin civarında (yeterince küçük) bir komşulukta Bergmann-Whittaker B_3 operatörü ile temsil edilebileceği sonucuna ulaşılır; yani, böyle her bir $V(r,\theta,\varphi)$ çözümü için bir $f(u,\zeta)$ ile B_3 operatörü karşılık gelir. Daha sonra, analitik devam metodu ile $f(u,\rho)$ nun $\mathfrak{V}(\rho - \varepsilon, 0)$ kümesi üzerinde düzgün yakınsak olduğunu göstereceğiz, burada $\varepsilon > 0$ yeterince küçük alınmıştır. Ayrıca, düzgün yakınsak bu kümenin $\mathfrak{B}(\rho - \varepsilon, \delta(\varepsilon))$'yi içeren dairesel bölgeye genişletilebileceği görülecektir. Burada $\delta(\varepsilon)$, ε seçimine bağlıdır.

Bu noktada, integral operatörün arkasındaki motivasyonla alakalı bir şeyler zikretmek istiyoruz. Yukarıda tanımlanmış B_3 operatörü her $f(u,\zeta)$ holomorf fonksiyonu ile bir harmonik eleman $\{H(x)|\Delta_\rho\}, \Delta_\rho \equiv \{\|X\| < \rho\}$ ilişkilendirir. Analitik devam anlamında doğal olarak bu harmonik elemanın devamı araştırılabilir. Açıkça $\{H(x)|\Delta_\rho\}$ herhangi bir $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eğrisi boyunca Γ nın hiçbir noktası $|\zeta| = 1$ integral yolu üzerinde $(f(u,\zeta)\zeta^{-1})$ integralinin singülerliliğine karşılık gelmeme şartıyla devam ettirilebilir. Tüm böyle noktaların birliğine $\{H(x)|\Delta_\rho\}$ fonksiyon elemanı ile belirlenmiş $H(x)$ harmonik fonksiyonun başlangıç tanım bölgesi olarak önereceğiz. Bununla beraber bu bölge integralin sigülerliğinden geçmeme şartıyla integral yolunun sürekli olarak deforme edilmesiyle de genişletilmesi mümkündür. Bu problem ilk defa (Bergmann 1926, 1929) tarafından kurgulanmıştır. Bu araştırma ile diğer bir problem de integral yolunun bir singülerlikten geçmesi durumunda ne olduğunu belirlemektir. Polar singülerlik durumunda cevap basittir, integralin değeri kutupsal singülerite ile sunulmuş eşdeğer bir sıçramadan geçer. Bu fenomen, bununla beraber, (Bergmann 1961) tarafından ayrılabilir yüzeyler olarak adlandırılmış ki analitik fonksiyon teorideki fonksiyon dallarına benzer özelliklere sahip belirli yüzeylerin geçerliliğine yol açar.

Yukarıda zikredilen örneklerden bize integral operatör metodunun klasik fonksiyon teorinin bazı sonuçlarını üç değişkenli harmonik fonksiyonlar durumuna genişletme ya da eğilimi anlatır. Aslında bu metot, lineer kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin daha geniş bir sınıfa genişletilebileceğini gösterecektir. Bu doğrultuda orijinal çalışmalar üç değişkenli harmonik fonksiyonlar için Bergmann tarafından başarılmıştır (Bergmann 1961).

Sonsuzda regüler harmonik fonksiyonlar Kelvin dönüşümü ile orijinde regüler lineer harmonik fonksiyonlar uzayından elde edilebilirler (Courant ve ark 1953); yani eğer $H(x)$, fonksiyonu $\|X\| \leq 1$için regüler harmonik ise bu takdirde $H^{\infty}(X) =$

$\left(\frac{1}{r}\right) H\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \frac{x_3}{r^2}\right)$ fonksiyonu $\|X\| \geq 1$ için regüler harmoniktir. Sonsuzda regüler harmonik fonksiyonlar $\|X\| \geq 1$ için de regüler harmoniktirler. Sonsuzda regüler harmonik fonksiyonlar ayrıca a Bergmann-Witttaker operatörü ile de üretilebilirler; ancak bu durumda

$$\mathcal{G} \equiv \{g | g(u,\zeta) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_{nm} u^{-n-1} \zeta^m\} \tag{4.19}$$

Lineer holomorf fonksiyonlar uzayını kullanırız. Bu fonksiyonların B_3 operatörü altında dönüşümü aşağıda belirtilenden;

$$\frac{(n-m)!}{n!}(-i)^m r^{-n-1} P_n^m(cos\theta) e^{im\varphi} \equiv \frac{(n-m)!(n+m)!}{(n!)^2 2^n} \frac{1}{r} h_{n,m}\left(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \frac{x_3}{r^2}\right) \tag{4.20}$$

$$= h_{n,m}^{\infty}(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} u^{-n-1} \zeta^m \frac{d\zeta}{\zeta}$$

Heine temsilinden bir diğerine nasıl görülebilir.

Bergman B_3 operatörü ile üretilmiş harmonik fonksiyonların belirli özel bir sınıfını düşündü, örneğin $f(u,\zeta)\zeta^{-1}$ aldığında ya u,ζ nın rasyonel ya da cebirsel fonksiyon olması durumunu düşündü. Bu durumların her ikisi de analitik fonksiyonlarla alakalı özelliklerin genelleştirilmesi düşünüldüğünde ilginç sonuçlara yol açar.

$f(u,\zeta)\zeta^{-1} \equiv p(u,\zeta)/q(u,\zeta)$ durumunda harmonik fonksiyonlara ziyadesiyle daha basit temsiller karşılık gelir (Bergmann 1926, 1943, 1961). Burada p ve q polinomlardır.

$$H(X) = B_3 \frac{\zeta p}{q} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{L}} \frac{p(u,\zeta)}{q(u,\zeta)} d\zeta \tag{4.21}$$

Harmonik fonksiyonunu araştırmak için integralin singüler noktalarını yani; $(X;\zeta)\epsilon\mathfrak{Z}^{(3)\prime}$ noktalarının kümesini düşünelim, burada

$$\mathfrak{Z}^{(3)} \equiv \{Q(X;\zeta) \equiv q(u,\zeta) = 0\} \subset \mathbb{C}^{(4)} \tag{4.22}$$

dır. $\mathfrak{Z}^{(3)}$ kümesi ayrıca

$$\mathfrak{Z}^{(3)} \equiv \{\zeta = \phi_{\upsilon}; \upsilon = 1,2,\cdots,m\} \tag{4.23}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\phi_{\upsilon}(X)$, x_1, x_2, x_3 değişkenlerinin cebirsel fonksiyonudur ve $Q(X;\zeta)$ de ζ nın derecesi *m*'dir. Şimdi

$$X \notin \left\{X \middle| \prod_{0\leq\mu<\nu\leq m}\left[\phi_{\mu}(X) - \phi_{\nu}(X)\right] = 0\right\} \tag{4.24}$$

özelliğindeki tüm *X*'ler için singüler kümenin m farklı dalı vardır. Bu durumda $\mathfrak{T}$ nin $\mathfrak{T}_{\nu}$ $(\nu = 1,2,\cdots,m)$ kapalı eğrilerine aşağıda açıklanacak anlamda bir $\mathfrak{T}_0$ kapalı eğrisinin ilave edilmesi ile toplamı olarak yazmak mümkündür. $\mathfrak{T}_{\nu}$ kapalı eğrileri sırasıyla $\zeta = \phi_{\nu}(X)$ ve $\zeta = \phi_{\mu}(X)$ $(\nu \neq \mu)$ noktalarına göre 1 ve 0 sarma sayısına sahiptir. $\mathfrak{T}_0$ tüm $\zeta = \phi_{\nu}(X)$, $(\nu = 1,2,\cdots,m)$ noktalarına göre sıfır sarma sayısına sahip olarak seçilmiştir. Netice olarak, $\mathfrak{T}$ keyfi parçalı düzgün olduğunda

$$H(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{T}} \frac{P(X;\zeta)}{Q(X;\zeta)}d\zeta \tag{4.25}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\eta(\mathfrak{T};\phi_{\nu}(X))\int_{\mathfrak{T}_{\nu}} \frac{P(X;\zeta)}{Q(X;\zeta)}d\zeta$$

yazılabilir. Burada $\eta(\mathfrak{T};\phi_{\nu}(X))$, $\mathfrak{T}$ eğrisine göre $\zeta = \phi_{\nu}(X)$ nin indeksidir. Rezidü teoreminden

$$H_{\nu}(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{T}_{\nu}} \frac{P(X;\zeta)}{Q(X;\zeta)}d\zeta \tag{4.26}$$

$$= \frac{P\left([x_1+ix_2]\frac{\phi_\nu(X)}{2}+x_3-(x_1-ix_2)\frac{1}{2\phi_\nu(X)};\phi_\nu(X)\right)}{\frac{\partial}{\partial\zeta}q\left([x_1+ix_2]\frac{\zeta}{2}+x_3-(x_1-ix_2)\frac{1}{2\zeta};\zeta\right)\Big|_{\zeta=\phi_\nu(X)}}$$

elde edilir. (Bergmann 1926, 1943, 1961) den X değerleri için H(X) in singüler olmasının ki eş zamanlı olarak

$$q\left([x_1+ix_2]\frac{\zeta}{2}+x_3-(x_1-ix_2)\frac{1}{2\zeta};\zeta\right) \equiv Q(X;\zeta) = 0 \qquad (4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}q\left([x_1+ix_2]\frac{\zeta}{2}+x_3-(x_1-ix_2)\frac{1}{2\zeta};\zeta\right) \equiv \frac{\partial}{\partial\zeta}Q(X;\zeta) = 0$$

denklemlerinin sağlanması olduğuna dikkat edelim. Aslında bu tür sonuçlar $f(u,\zeta)\zeta^{-1}$ in rasyonel fonksiyon olasından daha genel şartlar altında da geçerlidir (Gilbert 1958,1960)

Teorem 4.2.1. $f(u,\zeta)\zeta^{-1}$ nin singülerlik noktalarının kümesi için tanım fonksiyonu $\mathbb{C}^2$ de genel bir tanımlayıcı fonksiyon olsun. Bu taktirde eğer $h(u,\zeta) \equiv S(X;\zeta) = 0$ ise böyle bir tanım fonksiyonu ile tüm *X* noktaları için

$$H(X) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} f(u,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

regüler olduğuna *X* (ve bundan dolayı Γ)

$$\mathfrak{S} \equiv \{X|S(X;\zeta)=0\} \cap \{X|S_\zeta(X;\zeta)=0\} \qquad (4.28)$$

kümesinin arakesitinde olmama şartı ile X^0 in tanımındaki bir başlangıç noktasından başlayan bir Γ eğrisi boyunca devam ile ulaşılabilir (Gilbert 1960).

İspat: Bu sonuç ön bilgilerde verilen teorem 4.2.1 in bir sonucudur.

(Bergman 1929, 1961) B_3 integral operatörünü tersini verdi. Yani; H(X) harmonik fonksiyonunu B_3 operatörü ile ilişkili tersine dönüştüren bir bir integral formülü verdi Bu formülü türetmeden önce $f(u,\zeta)$ holomorf fonksiyonunun $\mathfrak{B}(\rho,\delta)$ dairesel bölgesinde çoktan bire regüler dönüşümlerine dikkat etmeliyiz. Örneğin ,

$$f_1(u,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=-n}^{n}a_{nm}u^n\zeta^m \ \ ve\ f_2(u,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{nm}u^n\zeta^m$$

kuvvet serilerinin her ikisi de (3.13) ile verilmiş serileri harmonik fonksiyonlar üzerine dönüştürür. Bu rezidü teoreminin temel bir uygulamasından elde edilmiş olan

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}u^n\zeta^m\frac{d\zeta}{\zeta},\ (|m|>n \text{ için}) \tag{4.29}$$

özdeşliği düşünülerek fark edilebilir.

B_3 integral operatörünün tersini elde etmek için, (Bergman 1961) $\mathfrak{C}^2\equiv\{X|x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\}\subset\mathbb{R}^3$ uzayının karakteristiklerini sundu. Onun sonuçlarını biraz değiştirilmiş şekilde elde edeceğiz. Eğer yeni koordinatlar olarak $x=x_3, z=\frac{1}{2}(x_1+ix_2),\ z^*=-\frac{1}{2}(x_1-ix_2)$ alırsak karakteristik uzayın tanımındaki denklemi $x=2(zz^*)^{1/2}$ olarak yazabiliriz. Ayrıca $\widetilde{H}(x,z,z^*)\equiv H(z-z^*,-i(z+z^*),x)$ fonksiyonunu önerelim, burada $H(x_1,x_2,x_3)$ orijin civarında regüler harmonik alınmıştır. Yukarıdaki tartışmalardan $\mathfrak{B}(\rho,\delta)$ bölgesinde B_3- $H(x_1,x_2,x_3)$ ilişkili orijin civarında yeterince küçük çoklu silindirde $H(x_1,x_2,x_3)$'nin kompleks argümanlarının bir fonksiyonu olarak düşünülmüş bir holomorf fonksiyon vardır. Bu manada $\widetilde{H}(x,z,z^*)$, S_ρ'dan daha geniş bir bölge $\mathfrak{Q}$ ile iki karmaşık boyutlu $\mathfrak{C}^2$ nin arakesitine H(X) in analitik devamı olarak düşünülmüştür. $\widetilde{H}(x,z,z^*)$ nin $\mathfrak{Q}\cap\mathfrak{C}^2$'ye kısıtlanmasını $\chi(z,z^*)\equiv\widetilde{H}(2(zz^*)^{\frac{1}{2}},z,z^*)$ olarak alacağız. Yardımcı u değişkeni x,z,z^* koordinatları terimlerinde

$$u=z\zeta+x+z^*\zeta^{-1} \tag{4.30}$$

olarak yazılabilir ki karakteristik uzaya kısıtlandığında

$$u = z\zeta + 2(zz^*)^{1/2} + z^*\zeta^{-1} = \left[(z\zeta)^{1/2} + (z^*/\zeta)^{1/2}\right]^2$$

olur. Üretici fonksiyon u^n, mozaik hamonik fonksiyonlar için anlaşılması için

$$u^n|_{\mathfrak{C}^2} = \left[(z\zeta)^{1/2} + (z^*/\zeta)^{1/2}\right]^{2n} = \sum_{m=-n}^{n} \binom{2n}{n-m} (z)^{(n+m)/2} (z^*)^{(n-m)/2} \zeta^m$$

olarak basit yazılabilir, bundan dolayı karakteristik uzayda katı harmonik fonksiyonlar

$$h_{nm}(X) \equiv r^n \frac{n!\, i^m}{(n+m)!} P_n^m(cos\theta) e^{im\varphi}$$

basit olarak

$$\tilde{h}_{n,m}\left(2(zz^*)^{\frac{1}{2}}, z, z^*\right) \equiv \chi_{n,m}(z,z^*) = \binom{2n}{n-m} (z)^{\frac{(n+m)}{2}} (z^*)^{\frac{(n-m)}{2}}. \qquad (4.31)$$

eğer z yi $\zeta u t^2$ ve z^*ı $(u/\zeta)(1-t^2)$ ile değiştirirsek, bu taktirde;

$$\chi_{nm}\left(\zeta u t^2, \frac{u}{\zeta}[1-t^2]\right) = u^n \zeta^m \binom{2n}{n-m} t^{n-m} (1-t)^{n+m}$$

dır ve bundan dolayı basit bir

$$2\int_0^1 u^{1/2} \frac{\partial}{\partial u}\left\{u^{1/2} \chi_{nm}\left(\zeta u t^2, \frac{u}{\zeta}[1-t^2]\right)\right\} dt = u^n \zeta^m \qquad (4.32)$$

hesaplamasından

$$u^{1/2} \frac{\partial}{\partial u}\left\{u^{1/2} \chi_{nm}\left(\zeta u t^2, \frac{u}{\zeta}[1-t^2]\right)\right\} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \chi_{nm}\left(\zeta u t^2, \frac{u}{\zeta}[1-t^2]\right)$$

elde edilir. $\chi_{nm}\left(\zeta u t^2, \frac{u}{\zeta}[1-t^2]\right)$'nin t ye göre terim terime integralinin alınması ile

$$2\int_0^1 u^{1/2}\frac{\partial}{\partial u}\left\{u^{1/2}\chi_{nm}\left(\zeta u t^2, \frac{u}{\zeta}[1-t^2]\right)\right\}dt \tag{4.32}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}\int_0^1 u^{1/2}\frac{\partial}{\partial u}\left\{u^{1/2}\chi_{nm}\left(\zeta u t^2, \frac{u}{\zeta}[1-t^2]\right)\right\}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}\, u^n \zeta^m \equiv f(u,\zeta)$$

elde edilir. Açık olarak, Binom formülünü kullanarak

$$|\zeta|^m\left|\chi_{nm}\left(\zeta u t^2, \frac{u}{\zeta}[1-t^2]\right)\right| \le \left|(\zeta^2 u t^2)^{1/2} + \left(u\zeta^{-2}(1-t^2)^{1/2}\right)\right|^{2n}$$

$$\le |u|^n\left[|\zeta t| + \left|\frac{1-t}{\zeta}\right|\right]^{2n}$$

yazabiliriz. $|\zeta| = 1$ ve $t \in [0,1]$ için ayrıca

$$\left|\chi_{nm}\left(\zeta u t^2, \frac{u}{\zeta}[1-t^2]\right)\right| \le |u|^n$$

elde edilir, bu son tahmin ile

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}\,\chi_{nm}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}|a_{nm}|\,|u|^n \tag{4.33}$$

$$\le M\left(\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^2\left|\frac{u}{r_0}\right|^{2n}\right)$$

dır. Burada $r_0 < \rho$ ve ρ, *H(X)* in orijin civarında regüler harmonik olduğu kürenin çapıdır, $M = max|_{r=r_0}|H(X)|$'dır. Bu tahmin serinin mesela $|u| \le \rho/3$ için düzgün yakınsaklığını gösterir ve bundan dolayı terim terime türevlenebilir ve integrallenebilir.

Bu (4.32) integral temsilini doğrular, şimdi yapılan bu tartışmaları aşağıdaki teorem ile özetleyelim.

Teorem 4.2.2. $H(X) = B_3 f$ orijin civarında ρ yarıçaplı bir kürede harmonik fonksiyon olsun. Bu taktirde B_3- $H(X)$ ilişkisi;

$$f(u,\zeta) = B_3^{-1}\widetilde{H} \equiv 2\int_0^1 u^{1/2}\frac{\partial}{\partial u}\left\{u^{1/2}\chi_{nm}\left(\zeta u t^2, \frac{u}{\zeta}[1-t^2]\right)\right\}dt$$

İntegral temsili ile $\widetilde{H}(z,z^*) \equiv H(z - z^*, -i(z+z^*), x)$ ile bağlantılıdır. Burada $\chi(z,z^*)$ $\mathfrak{C}^2$-karakteristik uzayına $\widetilde{H}(x,z,z^*)$'ın kısatlamasıdır. B_3^{-1} integral operatörüne birinci çeşit B_3 $-$operatörünün tersi denir. Ayrıca (Kreyszig 1960) tarafından verilen bu sonucun kanıtına da bakınız.

Nadiren H(X) in argümanlarının karmaşık değişkenlerle değiştirerek düşünmek alternatif olarak uygundur. Örneğin; özel bir değişim, karmaşık küresel koordinatları

$$r = ({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)$$

$$\eta = \left(\frac{x_1 + ix_2}{x_1 - ix_2}\right)^{1/2} = \left(-\frac{z}{z^*}\right)^{1/2}$$

$$\xi = \frac{x_3}{r}$$

sunarsak x_1, x_2, x_3 reel olduğunda $\eta = e^{i\varphi}$, $\xi = cos\theta$ indirgerler ve B_3 için farklı bir ters elde etmeye imkân tanır (Gilbert 1958, 1960). Bunu sonuçlandırmak için

$$B^{(-)}\left(\frac{r}{s}, \xi, \frac{\zeta}{\eta}\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{(2n+1)n!}{(n+m)!}\left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} P_n^m(\xi)\left(\frac{i\zeta}{\eta}\right)^m \tag{4.34}$$

çekirdek toplamını sunarsak $B^{(+)}(\frac{r}{s}, \xi, \frac{e^{i\varphi}}{\zeta})$ çekirdek tartışmamızdan [(4.10), (4.11) e bakınız], $\left(\frac{r}{s}, \xi, \frac{\zeta}{\eta}\right) \in \mathfrak{D}(\varepsilon, \delta)$ için bu toplamın düzgün yakınsak olduğunu anlarız.

Gerçekten $\mathfrak{D}(\varepsilon,\delta)$ de bu çekirdek için aşağıda belirtilmiş basit bir hesaplama ile açık bir form elde edilebilir;

$$B^{(-)}\left(\frac{r}{s},\xi,\frac{\zeta}{\eta}\right)=\frac{r}{s}\left(1-2s\frac{\partial}{\partial s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u}{s}\right)^{n}=r\frac{s+u}{(s-u)^2} \tag{4.35}$$

burada u daha önceden tanımlanmış yardımcı değişkendir. Önceki gibi $B^{(-)}(t,\xi,\zeta)$'nin $\widetilde{\mathfrak{D}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\equiv\{|t|\le 1-\varepsilon_1\}\times\{|1-\xi|+|1+\xi|\le 2+\varepsilon_2;\xi\not\geq 1,\xi\not\leq -1\}\times\{1-\varepsilon_3\le|\zeta|\le 1+\varepsilon_3\}$'de holomorf olduğunu göstermek için Hartogs Teoremine başvurulabilir. Burada $\varepsilon_k>0$, $k=1,2,3$ uygun küçüklüktedir. Sonuç olarak (4.34)'ü terim terime integrallenebilir ve

$$s^{-n-1}\zeta^{m}=\frac{1}{4\pi i}\int_{-1}^{1}d\xi\int_{|\zeta|=1}\frac{d\eta}{\eta}B^{(-)}\left(\frac{r}{s},\xi,\frac{\zeta}{\eta}\right)\left\{\left(\frac{\eta}{i}\right)^{m}\frac{(n+m)!}{n!}r^{-n-1}P_n^m(\xi)\right\} \tag{4.36}$$

elde edilir.Sonsuzda regüler harmonik fonksiyonlar;

$$H^{\infty}(X)=\sum_{j,k,l=0}^{\infty}A_{jkl}x_1^{-j}x_2^{-k}x_3^{-l} \tag{4.37}$$

şeklinde bir Taylor serisi açılımına sahiptir ki tüm $X\in\{X|\|X\|\ge 1/\varepsilon_1\}\subset\mathbb{R}^3$ için yakınsaktır, burada ε_1 yeterince küçük seçilmiştir. $\mathbb{R}^3$'ün $z_k=x_k+iy_k$, $(k=1,2,3)$ koordinatları ile $\mathbb{C}^3=\mathbb{R}^3+i\mathbb{R}^3$ alarak karmaşıklaştırmasını sunalım, (4.37)'nin seri temsili $x_1^2+x_2^2+x_3^2>1/2\varepsilon_1^2$ ve $y_1^2+y_2^2+y_3^2>1/2\varepsilon_1^2$ ile $\boldsymbol{Z}\equiv(z_1,z_2,z_3)$ geçerli olduğu görülebilir. $\boldsymbol{Z}$ karmaşık değişkeninin fonksiyonu olarak düşünüldüğünde $H^{\infty}(\boldsymbol{Z})$ bir ideal nokta $\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2},\frac{1}{z_3}\right)=(0,0,0)$ komşuluğunda holomorftur ve buradan $H^{\infty}(\boldsymbol{Z})$ de

$$z_1=\frac{r}{2i}\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)(1-\xi^2)^{1/2}\,,z_2=\frac{r}{2}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)(1-\xi^2)^{1/2}\,,z_3=r\xi \tag{4.38}$$

ile $\boldsymbol{Z}$ değişkeni ile yer değiştirilmesi ile elde edilen $U(r,\xi,\eta)$ harmonik fonksiyonu

$$\mathfrak{H}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\equiv\left\{(r,\xi,\eta)\left|\begin{array}{c}|r|^2>\frac{1}{2\varepsilon_1^2};\xi\not\geq 1,\xi\not\leq -1,|1-\xi|\\+|1+\xi|\le 2+\varepsilon_2;1-\varepsilon_3\le|\eta|\le 1+\varepsilon_3\end{array}\right.\right\} \tag{4.39}$$

formundaki bir bölgede r, ξ, η nın holomorf fonksiyonudur. Burada ε_1 yukarıda verilmiştir ve $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ yeterince küçüktür. $U(r, \xi, \eta)$ sonsuzda bir regüler harmonik fonksiyon olsun ki onun

$$g(u, \zeta\ ) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_{nm} u^{-n-1} \zeta^m \tag{4.40}$$

Laurent serisi ile verilmiş $B_3 - g(u, \zeta)$ ilişkisi bu taktirde $U(r, \xi, \eta)$,

$$U(r, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_{nm} \frac{(n-m)!}{n!} (-i)^m r^{-n-1} P_n^m(\xi) \zeta^m \tag{4.41}$$

seri temsiline sahiptir.

$U(r, \xi, \eta)$ harmonik fonksiyonu $\mathfrak{H}$ bölgesinde holomorf olduğundan

$$^*B_3^{-1} U \equiv \int_{-1}^{1} d\xi \int_{|\zeta|=1} \frac{d\eta}{\eta} B^{(-)} \left(\frac{r}{s}, \xi, \frac{\zeta}{\eta} \right) U(r, \xi, \eta) \tag{4.42}$$

integrali bir Cauchy integralidir. (integral yolunun ξ −düzleminde -1 de 1 olduğuna dikkat ediniz.)

Yukarıda tartıştığımız $^*B_3^{-1} U$ integral operatörü aşağıda belirtilen teorem ile özetleyeceğiz.

Teorem 4.2.3. $U(r, cos\theta, e^{i\varphi}) \equiv H^{\infty}(X)$ sonsuzda bir harmonik fonksiyon; yani $U\big(r, cos\theta, e^{i\varphi}\big) = (1/2\pi i) \int_{|\zeta|=1} g(u, \zeta) d\zeta / \zeta$ olsun, burada $g(u, \zeta)$ yukarıda (4.37) ile verilmiştir. Bu taktirde $g(s, \zeta)$, $U(r, cos\theta, e^{i\varphi})$ dan

$$g(s, \zeta) = \ ^*B_3^{-1} U \equiv \frac{1}{4\pi i} \int_{-1}^{1} d\xi \int_{|\zeta|=1} \frac{r(s+u)}{(s-u)^2} U(r, \xi, \eta) \frac{d\eta}{\eta}$$

ters integral operatörü ile üretilmiştir. Burada u yardımcı değişkendir. ${}^{*}B_3^{-1}U$ integaral operatörüne B_3 $-$operatörünün ikinci çeşit tersi denir.

Şimdi harmonik fonksiyonların singülerlik terimlerinde B_3 $-$operatörünün singülerliklerinin lokasyonu ile alakalı bir teorem formüle edebiliriz (Gilbert 1958, 1960).

Teorem 4.2.4. $\mathfrak{S}_1 \equiv \{X | r = \Phi(\xi, \eta)\} \subset \mathbb{C}^3$, $U(r, \xi, \eta) \equiv H^{\infty}(X)$'nın singülerliklerinin bir global temsili olsun. $g(s, \zeta) = {}^{*}B_3^{-1}U$ integral temsili ile verilmiş iki değişkenli fonksiyonu $(s, \zeta) \in \mathbb{C}^2$ nin herhangi bir noktasında ki bu noktanın

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}_{2,0} \cap \mathfrak{S}_{2,1} \cap \mathfrak{S}_{2,2}$$

arakesitinde olmama yada $s = s_n$ $(n = 1,2, \cdots)$, $s_{k_\mu} = \pm\Phi(\pm 1, \eta_k)$ ve η_k, $\pm\Phi(\pm 1, \eta) = 0$' ın bir kökü ile düzleminde olmama şartı ile regülerdir. Burada;

$$\mathfrak{S}_{2,0} \equiv \left\{(s, \zeta) \middle| S(s, \zeta; \xi, \eta) \equiv \Phi(\xi, \eta)\left[\xi + \frac{i}{2}(1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\zeta}{\eta} + \frac{\eta}{\zeta}\right)\right] - s = 0\right\}$$

$$\mathfrak{S}_{2,1} \equiv \left\{(s, \zeta) \middle| \frac{\partial S}{\partial \xi} = 0\right\}, \qquad \mathfrak{S}_{2,2} \equiv \left\{(s, \zeta) \middle| \frac{\partial S}{\partial \eta} = 0\right\}$$

dır.

$U(r, \xi, \eta) \equiv H^{\infty}(X)$ ile

$$U(r, \xi, \eta) = H^{\infty}\left(-\frac{1}{2} ir\left[\eta - \frac{1}{\eta}\right](1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} r\left[\eta + \frac{1}{\eta}\right](1 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}, r\xi\right)$$

yı anlayacağız.

5. SONUÇ

Stefan Bergman tarafından 1926, 1928 ve 1930 yıllarında yapmış olduğu çalışmalarda ikinci mertebeden (1.1) lineer kısmi diferensiyel çözümlerini, bir karmaşık değişkenli analitik fonksiyonları bu denklemlerin çözümlerine dönüştüren integral operatörleri tanıtmıştır.

Bu U = u (z, z^*) = $C_2(z, z^*; g)$ integral opetatör (1.1) denkleminin çözümünün analitik özellikleri, holomorf $f = f\ (z)$ fonksiyonunun analitik özellikleriyle, örneğin tekilliklerin yeri ve türü ile yakından ilişkilidir. Ayrıca, tam çözüm kümeleri $C_2(z, z^*; g)$, $\{z_n\}$ n = 0,1,... gibi holomorfik fonksiyonların tam kümelerinin dönüşümleri olarak bulunabilir. Bu (ve benzer) özellikler matematiksel fizikteki uygulamaların temelini oluşturur. Bununla birlikte, g'nin sınır değerleri ile u'nun sınır değerleri arasında önceden belirlenmiş bir sınır üzerinde basit bir ilişki yoktur. Bu yüksek lisans tezinde, ikinci bölümde (1.1) lineer kısmi diferensiyel çözümlerine dönüştüren bu tipten integral operatörler ve özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise, üç değişkenli Laplace denkleminin çözümlerinin analitik özelliklerini Bergman-Whittaker integral operatör yardımıyla incelenmiştir.

Bu tezde verilen yöntemler temel teşkil eder ve geniş ölçüde daha yüksek boyutlu, daha yüksek mertebeli ve diğer (parabolik, hiperbolik ve karışık) tipteki denklemlere genelleştirilmiştir. Bu tezde, iki (veya daha fazla) karmaşık değişkenin holomorf fonksiyonları, integral dönüşümler kullanılarak çözümlere eşlenir. Örneğin, iki uzaysal değişken z, z^* ve zaman τ içindeki bir parabolik denklemin çözümleri, integral dönüşümlerle bulunabilir ve üzerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Bergman, S. 1926. Zur Theorie der ein- und mehrwertigen harmonischen funktionen der dreidimensionalen Raumes. *Math. Z.* 24: 641-669.

Bergman, S. 1929. Zur Theorie der Algebraischen Potential funktionen des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, 101: 534-558.

Bergman, S. 1930. Über Kurvenintegrale von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen.die die Differentialgleichungen $\Delta V + V = 0$ befriedigen. *Math. Zeitschrift,* 32: 386-406.

Bergman, S. 1937a. Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen. *C.R. Acad. Sci. URSS N.S*: 15, 227-230.

Bergman, S. 1937b. Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen. *Математический Сборник,* 44(2): 1169-1198.

Bergman, S. 1943. Residue theorems of harmonic functions of theree variables. *Bull. Amer. Math.Soc.,* 49: 163-174.

Bergman, S. 1961. Integral Operators in the theory of Linear Partial Differential Equations. (Ergeb. Math. N.S., Vol. 23,).*Springer*: Berlin.

Copson, E.T. 1935. Theory of Functions of a Complex Variable. Oxford Univ. Press, London, 448.

Courant, R, Hilbert, D 1953, 1962. Methods of Mathematical Physics. Vols. I and II Wiley (Interscience), New York, 575.

Eichler, M. M. E. 1947. Allgemeine Integration linearer partieller Difierentialgleichungen von elliptischem Typ bei zwei Grundvariablen. Abh .Math. Seminar Hamburg University 15, 179-210, Hamburg.

Eichler. M. M. E. 1949a. On the differential equation $u_{xx} + u_{yy} + N\,(x)u = 0$. Trans. *Amer. Math. Soc.* 65: 259-278.

Eichler. M. M. E. 1949b. Analytic funetions in three-dimensional Riemannian spaces. *Duke Math. J.*, 16: 339-349.

Erdelyi, A. 1941. Integration of the Differential Equations of Appell's Functions F_4. *Quart. J. Math.*, Oxford, Series 12: 68-77.

Erdelyi, A. 1953-1955. Et al., Higher Transcendental Functions. Vols. I,II and III. McGrawHill, New York.

Gilbert, R. P. 1958. Singularities o theree-dimensional harmonic functions. Thesis,Carnegie Inst. Technol,1243-1255.

Gilbert, R. P. 1960. Singularities o theree-dimensional harmonic functions. *Pacific J. Math.,* 10: 1243-1255.

Gilbert, R. P. 1964. Operators which generate harmonic functionsin theree-variables. *Scripta Math.*, 27: 141-152.

Hobson, E.W. 1931. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge Univ. Press, London.

Kreyszig, E. 1955. On a class of partial differential equations. *J.Rational Mech. Anal.*, 4: 907-923.

Kreyszig, E. 1957a. Relations between properties of solutions of partial differentialequations and the coefficients of their power series development. *J.Math. Mech.*, 6: 361-382.

Kreyszig, E. 1957b. On coefficient problems of solutions of partial differential equationsof the fourth order. *J. Math. Mech.*, 6: 811-822.

Kreyszig, E. 1958. Coefficient problems in systems of partial differential equations. Arch . *Rational Mech. Anal.*, 1: 283-294.
Kreyszig, E. 1960. On regular and singular harmonic function of theree variables. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 4: 353-370.
Mitchell, J. 1946. Some properties of solutions of partial differential equations given by their series development. *Duke Math. J*.,13:87-104.
Nielsen. K. L 1944. On Bergman operators for linear partial differentialequations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50: 156-162.
Vekua, I.N. 1937. Sur la répresentation générate des solutions des équations auxderiveés partielles du second ordre. C. R. *Accad . Sci. URSS.N. S.*, 17: 295-299.
Whittaker,E.T., Watson, G.N. 1920. A Course of Modern Analysis. Cambridge Univ. Press, London and New York, 608.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: İbrahim YAĞIZ
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa, 10/12/1994
Yabancı Dil	: İngilizce
Eğitim Durumu	
Lise	: Kırcılar Ticaret Meslek Lisesi,2008-2012
Lisans	: Uludağ Üniversitesi, 2013-2017
Çalıştığı Kurum/Kurumlar	: Bursa Uzman Kareiyer Eğitim Kurumları, 2017-2021
İletişim (e-posta)	: yagiz.16.26@gmail.com