

**MANYETO-ELEKTRO-ELASTİK DAİRASEL ÇUBUKTA
YALNIZ GEZEN DALGA MODELİ: ANALİTİK VE
NÜMERİK ÇÖZÜMLER**

Mehmet Samir ÖZCAN



T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MANYETO-ELEKTRO-ELASTİK DAİRASEL ÇUBUKTA YALNIZ GEZEN
DALGA MODELİ: ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER**

Mehmet Samir ÖZCAN
0000-0002-4835-6765

Dr. Öğr.Üye. Nisa ÇELİK
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2021
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MANYETO-ELEKTRO-ELASTİK DAİRASEL ÇUBUKTA YALNIZ GEZEN
DALGA MODELİ: ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLER

Mehmet Samir ÖZCAN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr.Üye. Nisa ÇELİK

Bu tez çalışmasında dördüncü mertebeden EE ve MEE lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem modelleri için çeşitli çözüm yöntemleri ele alındı. EE denkleminin Lie grup dönüşümleri altında uzanımları hesaplanarak sonsuz küçük simetri üreteçleri bulundu. Bulunan sonsuz küçük simetri üreteçleri yardımıyla adi diferensiyel denklemlere indirgemeleri yapıldı. Aynı denkleme $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yöntemi uygulanarak gezen dalga çözümleri hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyonlar olarak ifade edildi. EE denklemine son olarak F -açılım yöntemi uygulanarak Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri ve buradan da trigonometrik, hiperbolik çözümler elde edildi. Daha sonra MEE denklemine, bir diferensiyel denklemin tam çözümünün integrasyon işlemi ile elde edilebileceği, düşüncesine dayanan deneme denklem yöntemi ve yine aynı denkleme $\tan(\varphi(\xi)/2)$ yöntemi uygulanarak çözümler elde edildi. Ayrıca, Maple programı kullanılarak, bulunan çözümlerin davranışını görmek için bazı grafik simülasyonlar verildi.

Anahtar Kelimeler: Elektro-elastik, Jacobi eliptik, Lie simetri, Magneto elektro elastik.

2021, vii + 82 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

A MODEL OF SOLITARY WAVES IN A MAGNETIC-ELECTRIC-ELASTIC
CIRCULAR ROD : ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS

Mehmet Samir ÖZCAN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Nisa ÇELİK

In this thesis, various solution methods for fourth order EE and MEE nonlinear partial differential equation modeling were discussed. Infinitesimal symmetry generators were found by calculating the elongations of the EE equation by Lie group transformations. With the help of the found infinitesimal symmetry generators, it was made reductions to the ordinary differential equations. Traveling wave solutions were expressed as hyperbolic, trigonometric and rational functions by applying the (G'/G) method to the same equation. Finally, we obtained the trigonometric and hyperbolic solutions from Jacobi elliptic function solutions were obtained by applying the F - expansion method to the EE equation. Then based on the trial equation method apply on the MEE equation, the exact solution of a differential equation can be obtained by the process of integration and solutions were obtained by applying $\tan(\varphi(\xi)/2)$ method to the same equation. In addition, some graphical simulations were made using the Maple program to see the behavior of the found solutions.

Key words: Electric-elastic, Jacobi elliptic, Lie symmetry, Magnetic-electric-elastic.

2021, vii + 82 pages.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın bütün aşamalarında bana desteklerini esirgemeyen, sabırla ve özveriyle bana sürekli yardımcı olan, bilgi deneyim ve tecrübelerinden yararlandığım ve manevi desteklerinden dolayı güler yüzlü, değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Nisa ÇELİK' e şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez konusunu bana teklif eden ve çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgilerinden faydalanma imkanını veren hocam sayın Prof. Dr. Emrullah YAŞAR' a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans yaptığım süreçte manevi desteklerini daima hissettiğim annem, babam ve bu çalışmamda beni motive eden ağabeyim Ahmet Özcan'a teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet Samir ÖZCAN

.../.../.....

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	4
2.1. Kısmi Diferensiyel Denklemler.....	4
2.2. Lie Simetriteri.....	6
2.1.1. Dönüşüm grupları.....	7
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	14
3.1. Lie Simetri Yöntemi.....	14
3.2. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ – Açılım Yöntemi.....	18
3.3. F – Açılım Yöntemi.....	22
3.4. Genişletilmiş Deneme Denklem Yöntemi.....	25
3.5. $Tan(\varphi(\xi)/2)$ Açılım Yöntemi.....	27
4. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	31
4.1. EE denkleminin Lie Simetri Analizi.....	31
4.2. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ – Açılım Yönteminin EE Çubuk Denklemine Uygulanması.....	38
4.3. F – Açılım Yönteminin EE Denklemine Uygulanması.....	45
4.4. MEE denkleminin Genişletilmiş Deneme Denklem Yönteminin Uygulanması.....	61
4.5. MEE Dairesel Çubukta Uzunlamasına Dalga Denkleminin $\tan(\varphi(\xi)/2)$ – Açılım Yönteminin Uygulanması.....	68
5. SONUÇ.....	78
KAYNAKLAR.....	80
ÖZGEÇMİŞ.....	82

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
ξ^i	Bağımsız değişkenlerin sonsuz küçük dönüşümü
η^j	Bağımlı değişkenlerin sonsuz küçük dönüşümü
u^1, u^2, \dots, u^m	m tane bağımlı değişken
x^1, x^2, \dots, x^n	n tane bağımsız değişken
\tanh	Tanjant hiperbolik fonksiyonu
D_i	Total türev operatörü
u_{nx}	u' nun x' e göre n . mertebeden türevi
u_i^α	u^α ' nın x^i bağımsız değişkenine göre türevi
$X^{(k)}$	X üreticinin k . mertebe uzanımıdır

Kısaltmalar	Açıklama
KDD	Kısmi Diferensiyel Denklem
ADD	Adi Diferensiyel Denklem
EE	Elektro Elastik
MEE	Magneto Elektro Elastik

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

- Şekil 4.1. (4.51) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $J_p = 1, v = 1, s = 5, c_0 = 1, b = 1$ 60
- Şekil 4.2. (4.54) denkleminin Peakons çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $J_p = 3, v = 2, s = -2, c_0 = 2, b = -3$ 60
- Şekil 4.3. (4.57) denkleminin kink çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $J_p = 1,6, v = 1,1, s = 2, c_0 = 1,4, b = 0,2$ 60
- Şekil 4.4. (4.58) denkleminin Peakons çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $J_p = 1, v = 0,5, s = 1, c_0 = 5, b = 0,5$ 61
- Şekil 4.5. (4.112) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $b = 1, C = 0, c_0 = 1, c_1 = 2, k = 2, z = 0,$
 $N = 0,0001735$ 72
- Şekil 4.6. (4.113) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $b = 2, C = 0, c_0 = c_1 = k = 1, z = 0, N = 0,3$..72
- Şekil 4.7. (4.114) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $b = 2, C = z = 0, c_0 = c_1 = k = 1, N = 0,001$ 72
- Şekil 4.8. (4.115) denkleminin Cuspons çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $C = 0, b = c_0 = c_1 = 1, k = 1, z = 0, N = 5$73
- Şekil 4.9. (4.116) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $b = c_0 = k = 1, C = c_1 = 0, N = 0,0005$ 73
- Şekil 4.10. (4.117) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $b = C = z = 0, c_0 = k = 1, c_1 = 3, N = 0,5$73
- Şekil 4.11. (4.120) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $k = c = b = 1, c_1 = c_0 = 2, z = C = 0, N = 1$ 76
- Şekil 4.12. (4.121) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $k = b = c_0 = 1, c = c_1 = 4, z = C = 0, N = 3$ 76
- Şekil 4.13. (4.122) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $k = c_0 = 1, b = 4, c = 2, c_1 = z = C = 0,$
 $N = 0,003$ 77
- Şekil 4.14. (4.123) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
burada parametre değerleri $k = 1, c = c_1 = 2, b = z = C = 0, c_0 = N = 3$ 77

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Tablo 3.1. (3.21) ile verilen yardımcı denklem için P, Q ve R özel seçilmiş değerlerde $F(\zeta)$ çözümleri göstermektedir.....	24
Tablo 4.1. (1.1) denkleminin vektör alanları arasındaki kamütatör bağıntılarını göstermektedir.....	34

1. GİRİŞ

Fen bilimleri ve mühendislikte, birçok olayın açıklanmasına yardımcı olmak üzere, matematiksel formüller veya matematiksel modeller geliştirilir. Bu modeller genellikle bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun bazı türevlerini içeren bir denklem olarak ortaya çıkar. Eğer bilinmeyen fonksiyon bir tek değişkene bağımlı ise, diferensiyel denkleme adi diferensiyel denklem; bilinmeyen fonksiyon iki veya daha çok değişkene bağımlı ise, diferensiyel denkleme kısmi diferensiyel denklem denir.

Matematiksel modeller, açıklanacak olayla ilgili, fiziğin kanunları ve matematiğin kurallarının birlikte kullanılmasıyla oluşturulur. Teknolojinin gelişmesi ile matematiksel modelleme artık sadece matematik alanında değil, teknoloji, ekonomi, mühendislik, mimarlık, tıp ve daha birçok alanda kullanılmaktadır. Matematiksel modellemenin farklı alanlarda kullanılması, bu kavramın ne kadar önemli olduğunu ortaya koymaktadır.

Kısmi diferensiyel denklemler de, birçok fiziksel olayın incelenmesi sonucunda elde edilen modellerdir. Bu denklemlerin analitik ve bazı durumlarda sayısal çözümleri, somut matematiksel formülasyonları nedeniyle önemli bir yere sahiptir. Bu tür modellerle doğrusal olmayan optik, kuantum mekaniği, akışkanlar mekaniği, nükleer fizik, sıg su dalgası teorisi gibi birçok bilim dalında karşılaşılmaktadır. Yukarıda bahsedilen kısmi diferensiyel denklemlerden biri, tek boyutlu dairesel çubuğa karşılık gelen yalnız gezen dalga dalgaları modelleyen dördüncü mertebeden lineer olmayan kısmi türevli dalga denklemidir. 1986 da a yarıçaplı ve yanal ataletli doğrusal olmayan elastik dairesel bir çubuğun uzunlamasına salınımının doğrusal olmayan dalga denklemini modellemek için Z.Weı ve Y.Gui bazı fiziksel koşullar altında, fiziğin temel hipotezlerini kullanarak sırasıyla

$$T = \frac{1}{2}pw \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4}\rho a^2 v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2$$
$$W = \frac{1}{2}wE \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{n+1}wE a_n \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n+1}$$

eşitliklerini ve bu eşitlikler için Hamilton prensibini kullanarak elektro elastik dairesel çubuk (EE)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \left[1 + n a_n \left(\frac{\partial u^{n-1}}{\partial x} \right) \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{v^2 a^2}{2} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \right) = 0$$

kısmi diferensiyel denklemini elde ettiler (Wei ve Tong 1986). Burada $\frac{E}{\rho}$ doğrusal elastik uzunlamasına dalga hızının karesini temsil eder ve genellikle c_0^2 ile gösterilir. a_n materyal sabitidir ve ν , Poisson sabitidir. Yi Tian, 2019 yılındaki çalışmasında denklemini $n = 2$ için

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(1 + 2a_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{v^2 J_p}{s} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \right) = 0 \quad (1.1)$$

biçiminde kullanmıştır. Burada s çubuğun enine kesit alanıdır, J_p polar atalet momenti, $\frac{E}{\rho} = c_0^2$ doğrusal uzunlamasına dalga hızı, ν Poisson oranı, E Young modülü ve a_n materyal sabitidir. Yian makalesinde denkleme modified extended tanh-function metodu ve exp-function metodunu uygulayarak denklemin çeşitli çözümlerini elde etmiştir. Manyeto-elektro-elastik (MEE) kullanımının artmasıyla çeşitli mühendislik alanlarındaki yapılar (sensörler, aktüatörler, vb.), MEE ortamındaki dalga yayılımı da birçok araştırmacının ilgisini çekti. C.X.Xue ve ark. 2011 yılında yaptıkları çalışmada MEE malzemeleri için temel denklemleri gözden geçirmiş ve aşağıda verilen MEE çubuk daireselindeki uzunlamasına dalga denklemini modellemişlerdir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{c_0^2}{2} u^2 + N \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1.2)$$

burada c_0 uzunlamasına dalga hızı, N dağılım parametresidir.

Bu parametreler çubuğun malzeme özelliklerine ve geometrisine bağlıdır. Aynı çalışmada Xue ve ark. denklemin Jakobi eliptik fonksiyon çözümlerini elde etmişlerdir.

Tez beş bölüm halinde düzenlenmiştir. İkinci bölümünde tezin içinde geçen tam çözüm yöntemleri ile ilgili temel tanım ve ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde EE denkleminde uygulanacak olan Lie simetri grupları yaklaşımı, $(\frac{G'}{G})$ -açılım yöntemi, F -açılım yöntemi ve MEE denkleminde uygulanacak olan genişletilmiş deneme denklemler yöntemi ve $Tan(\varphi(\xi)/2)$ yöntemlerinin genel teorisi verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ise üçüncü bölümde tanıtılan yöntemler EE ve MEE denklemlerine uygulanmış elde edilen çözümlerin özel değerlerinde Maple programı yardımıyla, çeşitli nümerik simülasyonları görüntülenmiştir.

Tezin beşinci ve son bölümünde ise uygulanan yöntemlerin karşılaştırmaları yapılmış ve sonuçları yazılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, ele alınan modellere çözüm yöntemlerinin uygulanabilmesi için gereken ve ele alınacak yöntemlerde kullanılan temel tanımlar ve ön bilgiler verilecektir.

2.1 Kısmi Diferensiyel Denklemler

Bilimin hemen her dalında birçok olayın açıklanmasına yardımcı olmak üzere, matematiksel modeller kurulması gerekmektedir. Bu modeller çoğunlukla bilinmeyen fonksiyon ya da fonksiyonlarla, bu fonksiyonların türevlerini bulunduran denklemler olarak karşımıza çıkar. Böyle denklemlere diferensiyel denklem denir. Diferensiyel denklemler ikiye ayrılır. Tek değişkenli bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun kendi değişkenine göre türevlerini bulunduran denklemlere adi diferensiyel denklem denir. Bağımlı değişkeni y , bağımsız değişkeni x olan n . mertebeden bir adi diferensiyel denklem

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

biçiminde gösterilir. İki veya daha çok değişkenli bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun bağlı bulunduğu değişkenlere göre kısmi türevlerini bulunduran denklemlere de kısmi diferensiyel denklem denir. Bağımlı değişkeni u , bağımsız değişkenleri x ve t olan bir kısmi diferensiyel denklem

$$F(x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0$$

biçiminde gösterilir. Bu tezde kısmi diferensiyel denklemler ele alınacaktır.

Tanım 2.1 Bir kısmi diferensiyel denklemin *mertebesi*, denklemde görülen en yüksek mertebeden kısmi türevin mertebesi olarak tanımlanır. Örneğin;

$$u_{xx} + u_{tt} + u_{zz} = 0$$

denklemini ikinci mertebededir.

Tanım 2.2 Bir kısmi diferensiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun bütün türevlerine göre birinci dereceden ise, denkleme *lineer* kısmi diferensiyel denklem denir. Bir kısmi diferensiyel denklem lineer değilse ona lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem denir. Örneğin;

$$(z_x)^3 + z_t = 0$$

denklemini lineer olmayan denklemdir.

Bir kısmi diferensiyel denklemdeki bağımsız değişken sayısı ve denklemin mertebesi gibi özelliklerin çözüm üzerinde önemli etkileri olacaktır. Bu yüzden kısmi diferensiyel denklemlerde çözüm kavramının tanım ve izahı, sadece bir bağımsız değişken olan adi diferensiyel denklemdeki çözüm kadar basit değildir. Şimdilik çözüm veya integral denildiğinde, kendisi ve kısmi türevleri denklemde yerine yazıldığında bir özdeşlik veren fonksiyon anlaşılacaktır.

Bir kısmi diferensiyel denklemin pek çok çözümü mevcut olabilir. Kısmi diferensiyel denklemlerde de, adi diferensiyel denklemlerde olduğu gibi, belki bazı çözümler hariç tüm çözümleri içeren bir çözüm aranabilir. Böyle bir çözüme genel çözüm veya genel integral denir. Genel çözüm, bağımsız değişkenlerin keyfi fonksiyonlarını ihtiva eder. Genel çözümdeki keyfi fonksiyon sayısı denklemin mertebesi ile yakından alakalıdır. (Çağlıyan ve Çelebi 2013)

Tanım 2.3 Toplam şeklinde verilen tam çözüm fonksiyonunun üst sınırını temsil etmektedir. Lineer olmayan herhangi bir ADD de, en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasında elde edilen en küçük pozitif değerli tam sayıdır. Herhangi bir ADD de en yüksek mertebeden lineer terim

$$\frac{d^\alpha F(z)}{dz^\alpha} \quad (2.1)$$

ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim

$$F(z)^\beta \left(\frac{d^\gamma F(z)}{dz^\gamma} \right)^\theta \quad (2.2)$$

ile verilsin. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ pozitif tam sayılardır. M dengelenme terimi olmak üzere

$$F(z) = \frac{a}{z^M} \quad (2.3)$$

dönüşümünün ($\alpha \in \mathcal{R}$), sırasıyla (2.1) ve (2.2) terimlerinde yerine yazılıp birbirlerine eşitlendiğinde

$$M + \alpha = M\beta + \theta(M + \gamma) \quad (2.4)$$

dengeleme bağıntısı bulunur (Güner 2014, Yıldırım 2019).

2.2. Lie Simetrileri

19. yüzyılda Norveçli matematikçi Sophus Lie diferansiyel denklemleri değişmez bırakan sürekli dönüşüm gruplarını incelemeye başlayıp, diferansiyel denklemlerin simetri analizi olarak bilinen teoriyi ele aldı. Lie'nin amacı adi diferansiyel denklemlerin integralinin alınması için E. Galois e N. Abel'in cebirsel denklemlere yaptığı gibi genel bir teori oluşturmaktı. Sürekli bir parametrelili dönüşüm grupları olarak bilinen cebirsel yapılarla, grup teorisi kullanarak, bazı diferansiyel denklemlerin integre edilebileceğini dolayısıyla mertebesinin düşürülebileceğini gösterdi. Bu özelliğe rağmen, Lie'nin diferansiyel denklemlere yaklaşımından yarım yüzyıl boyunca faydalanılmadı ve sadece Lie gruplarının soyut teorisi geliştirildi. 1940'larda, G Birkhoff'un ve I. Sedov'un boyutsal analiz üzerindeki çalışmalarıyla, katı uygulama problemlerinde teori işe yarar sonuçlar verdi. Birkhoff grup metodları kullanılarak K.D.D lerin bağımsız değişken sayısını azaltılarak bir A.D.D e indirgemenin mümkün olduğunu sonucuna vardı.

Lie grup teorisi diferensiyel denklemler açısından güçlü ve çok yönlü bir metoddur. Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini belirlemek için nokta dönüşümlerinin bir parametrelili Lie grupları altında onların değişmezlerini çalışmaya dayanır. Bu kısımda bu konu ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

Tanım 2.4 G boş olmayan herhangi bir küme ve $*$ da bu kümenin elemanları üzerinde tanımlanmış bir ikili işlem olsun. Eğer G aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa G ye *grup* denir.

i) G deki herhangi x, y, z elemanları için

$$*(x, *(y, z)) = *(*(x, y), z)$$

ii) G deki herhangi bir x elemanı için

$$*(x, e) = *(e, x) = x$$

olacak biçimde G nin tek bir e elemanı vardır.

iii) G deki herhangi bir x elemanı için

$$*(x, x^{-1}) = *(x^{-1}, x) = e$$

olacak biçimde G nin tek bir x^{-1} elemanı vardır.

2.2.1 Dönüşüm grupları

n - boyutlu Öklid uzayı \mathcal{R}^n de kendisi ve türevleri sürekli olan bir f fonksiyonu, keyfi bir $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ elemanının görüntüsü her i için tersi var olan $\bar{x}^i = f^i(x)$ fonksiyonları yardımıyla

$$\bar{x} = f(x) = (f^1(x), f^2(x), f^3(x), \dots, f^n(x)) = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \dots, \bar{x}^n)$$

olarak tanımlansın. Yani f tersi var olan

$$\bar{x}^i = f^i(x) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

formundaki fonksiyonlar yardımıyla vektörel olarak $f = (f^1, \dots, f^n)$ biçiminde gösterilsin. (2.5) dönüşümü tersinebilir olduğundan ters fonksiyonu da

$$x^i = (f^{-1})^i(\bar{x}), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

biçimindedir. (2.5) dönüşümlerini T ile (2.6) dönüşümlerini de T^{-1} ile gösterelim. Bu durumda T herhangi bir

$$x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{R}^n$$

noktasını

$$\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \in \mathcal{R}^n$$

gibi bir noktaya resmeder. T^{-1} ise \bar{x} noktasını x in orjinal konumuna, yani tekrar x e resmeder. Özel olarak

$$\bar{x}^i = x^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

İle verilen özdeşlik dönüşümü I ile gösterilecektir.

T_1 ve T_2 sırasıyla i . koordinat fonksiyonu f_1^i ve f_2^i olan (2.5) formunda iki dönüşüm olsun. Bu dönüşümlerin $T_2 T_1$ çarpımı,

$$\bar{\bar{x}}^i = f_2^i(\bar{x}) = f_2^i(f_1^i(x)) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

biçiminde, dönüşümlerin ardışık uygulanması olarak tanımlanır. (Yani dönüşümler söz konusu olduğundan $T_2 T_1$ çarpımı ifadesi aslında $T_2 \circ T_1$ bileşkesi anlamında kullanılmaktadır). Sembollerle ifade edecek olunursa $\bar{\bar{x}} = T_2(T_1(x))$ olduğundan

$$\bar{x} = T_2(T_1(x)) = T_2T_1(x) \quad (2.9)$$

olur. Bu notasyona göre (2.6) nın ters dönüşüm olması

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I \quad (2.10)$$

eşitliğinin sağlandığı anlamına gelir.

Tanım 2.5 I özdeşliğini bulunduran \mathcal{R}^n nin (2.5) formundaki dönüşümlerinin oluşturduğu G kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa *dönüşüm grubu* olarak adlandırılır:

- I) $\forall T \in G$ için $T^{-1} \in G$ dir.
- II) $\forall T_1, T_2 \in G$ için $T_1T_2 \in G$ dir.

Yani yukarıda bahsedilen G kümesinin dönüşüm grubu olarak adlandırılabilmesi için G nin her T, T_1, T_2 elemanları için

$$I \in G, \quad T^{-1} \in G, \quad T_1T_2 \in G$$

olmalıdır.

Tanım 2.6 U bir reel sayı aralığı olmak üzere

$$G = \{T_a | a \in U\}$$

dönüşüm kümesi için

1. $a_0 \in U$ $T_{a_0} = I$ olacak biçimde bir tek a_0 elemanı vardır.
2. $\forall a_0 \in U$ için $T_{a_0}^{-1} = T_{a_0^{-1}}$ dir.
3. $\forall a, b \in U$ için $T_aT_b = T_c \in G$ olur ve $c = \varphi(a, b)$ özelliğinde sürekli bir φ fonksiyonu vardır,

şartları sağlanıyorsa G ye *bir parametrelili grup* denir.

Tanım 2.7

$$x^* = X(x, \varepsilon) \quad (2.11)$$

bir parametrelili Lie grup dönüşümünün sonsuz küçük üretici

$$X = X(x) = \xi(x)\nabla = \sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.12)$$

operatörü ile tanımlanır. Buradaki ∇ gradient operatörüdür ve

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (2.13)$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 2.8 $F(x)$ sürekli ve her mertebeden türevlenebilir fonksiyon olmak üzere (2.11) ile verilen Lie grup dönüşümünün değişmez (invariant) fonksiyonu olması için gerek ve yeter şartı herhangi (2.11) ile verilen grup dönüşümü için

$$F(x^*) = F(x)$$

olmasıdır. (Bluman ve Anco 2002)

Teorem 2.1 $F(x)$ fonksiyonunun, $x^* = X(x, \varepsilon)$ Lie grup dönüşümü altında değişmez olması için gerek ve yeter şart $XF(x) = 0$ olmasıdır. (Bluman ve Kumei 1989).

Tanım 2.9 n-parametrelili Lie grup dönüşümü sonsuz küçük simetri üretici V_i ve $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ parametresine göre verilsin. Herhangi iki simetri üretici V_i ve V_j olmak üzere $[,]$ kamütatörü

$$[V_i, V_j] = V_i V_j - V_j V_i \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır. K bir cisim ve L bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. L vektör uzayı yukarıda tanımlı ikili işleme göre kapalı ise n -boyutlu Lie cebiri denir ve L_n ile gösterilir (Olver 1986).

Tanım 2.10 k . mertebe lineer olmayan oluşum türü denklem sistemi

$$E_\sigma(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, N \quad (2.15)$$

şeklinde ele alalım (Olver 1986, Bluman ve Kumei 1989, Ibragimov 1995, Naz ve ark. 2008). Burada

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathcal{R} \quad (2.16)$$

n tane bağımsız değişken,

$$u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$$

m tane bağımlı değişken ve $u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(k)}$ ifadeleri sırasıyla birinci, ikinci, ... , k inci mertebeden kısmi türevleri temsil eder. u^α nın x^i bağımsız değişkenine göre türevi

$$\begin{aligned} u_i^\sigma &= D_i(u^\sigma), \\ u_{ij}^\sigma &= D_j D_i(u^\sigma) \end{aligned} \quad (2.17)$$

olarak alınır. Total türev operatörü

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\sigma \frac{\partial}{\partial u^\sigma} + u_{ij}^\sigma \frac{\partial}{\partial u_j^\sigma} + \dots + u_{i i_1 i_2 \dots i_n}^\sigma \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_n}^\sigma} + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

biçiminde tanımlanır. (Bluman ve Kumei 1989).

(2.15) sisteminin hem bağımsız hem de bağımlı değişkenler için bir parametrelili sonsuz

küçüklükteki Lie dönüşüm grubu

$$\begin{aligned}\tilde{x}^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \tilde{u}^i &= u^i + \varepsilon \eta^j(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, 2, \dots, n\end{aligned}\quad (2.19)$$

olarak verilir. Burada $\varepsilon \ll 1$ dönüşümün küçük bir parametresidir. ξ^i ve η^j sırasıyla bağımsız ve bağımlı değişkenlerin sonsuz küçük dönüşümleridir. (2.19) dönüşüm grubuna karşılık gelen sonsuz küçüklükteki X üretici

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\sigma \frac{\partial}{\partial u^\sigma} \quad (2.20)$$

olarak verilir.

(2.15) sisteminin sonsuz küçük dönüşümleri altında değişmezlik koşulu veya başka bir değişle (2.20) üretici belirleyici denklem

$$X^{(k)}[E_\sigma] \Big|_{E_\sigma(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)})=0} = 0 \quad (2.21)$$

olarak verilir. Burada $X^{(k)}$ ifadesi (2.19) üreticinin k . merteye uzanımıdır ve bu operatör

$$X^{(k)} = X + \sum_{s \geq 1} \zeta_{i_1, \dots, i_s}^\sigma \frac{\partial}{\partial u_{i_1, \dots, i_s}^\sigma}$$

veya

$$X^{(k)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\sigma \frac{\partial}{\partial u^\sigma} + \sum_{s \geq 1} \zeta_{i_1, \dots, i_s}^\sigma \frac{\partial}{\partial u_{i_1, \dots, i_s}^\sigma} \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned}\zeta_i^\sigma &= D_i(\eta^\sigma) - (D_i \xi^j) u_j^\sigma \\ \zeta_{i_1 i_2 \dots i_s}^\sigma &= D_{i_s}(\zeta_{i_1 i_2 \dots i_{s-1}}^\sigma) - u_{i_1 i_2 \dots i_{(s-1)j}}^\sigma D_{i_s}(\xi^j) \quad s > 1\end{aligned}\quad (2.23)$$

Örneğin 2. mertebeden (1+1) boyutlu

$$E(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}) = 0$$

denkleminin karşılık Lie simetri üretici (2.20) denkleminin

$$X = \xi^x(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

ifadesine karşılık gelirken bu üreticinin 2. uzanımını (2.22) denkleminin

$$X^{(2)} = \xi^x \frac{\partial}{\partial x} + \xi^t \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \zeta_{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \zeta_{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}}$$

ifadesine karşılık gelir. Burada ζ_x , ζ_t , ζ_{xx} , ζ_{tt} ve ζ_{xt} terimleri (2.23) denkleminin

$$\begin{aligned} \zeta_x &= D_x(\eta) - u_x D_x(\xi^x) - u_t D_x(\xi^t), \\ \zeta_t &= D_t(\eta) - u_x D_t(\xi^x) - u_t D_t(\xi^t), \\ \zeta_{xx} &= D_x(\zeta_x) - u_{xx} D_x(\xi^x) - u_{tx} D_x(\xi^t), \\ \zeta_{tt} &= D_t(\zeta_t) - u_{xt} D_t(\xi^x) - u_{tt} D_t(\xi^t), \\ \zeta_{xt} &= D_t(\zeta_x) - u_{xt} D_t(\xi^x) - u_{tt} D_t(\xi^t), \end{aligned} \quad (2.24)$$

olarak verilir. (2.24) denklemindeki D_x ve D_t terimleri (2.18) denkleminin

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t}, \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu kısımda ele alınan modellere uygulanacak yöntemlerin temel teorileri adım adım verilecektir. EE denkleminde uygulanacak olan Lie simetri yöntemi ve F –açılım yöntemi literatürde var olan yöntemlerdir ancak $\left(\frac{G'}{G}\right)$ –Açılım Yöntemi orijinal bir çalışmadır. Ayrıca MEE denkleminde uygulanacak olan Genişletilmiş Deneme Denklem Yöntemi literatürde var olan bir yöntemdir ancak $Tan(\varphi(\xi)/2)$ -Açılım Yöntemi orijinal bir çalışmadır.

Tezde ele alınan yöntemler sırasıyla

- i) Lie Simetri Yöntemi
- ii) $\left(\frac{G'}{G}\right)$ –Açılım Yöntemi
- iii) F – Açılım Yöntemi
- iv) Genişletilmiş Deneme Denklem Yöntemi
- v) $Tan(\varphi(\xi)/2)$ – Açılım Yöntemi

biçimindedir.

3.1. Lie Simetri Yöntemi

Diferensiyel denklemlerin Lie simetri analizi teorisinin esası, bağımsız ve bağımlı değişkenlerin bir dönüşümü altında denklemin değişmezliğine dayanmaktadır. Göz önüne alınan denklemin çözümlerini başka çözümlere resmeden bağımsız ve bağımlı değişkenler uzayı üzerinde bir difeomorfizm kuran bu dönüşüm, nokta dönüşümlerinin bir yerel grubunu oluşturur (Yaşar 2009). Lie simetri yöntemi bir çok denklemin analizinde çeşitli yazarlar tarafından kullanılmıştır (Liu ve ark. 2010, Giresunlu ve ark. 2017, Sağlam ve Yaşar 2020).

u bağımlı değişken, x ve t ise bağımsız değişkenler olsun. n . mertebeden

$$F(x, t, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}) \quad (3.1)$$

KDD ini göz önüne alalım. Bu KDD in Lie simetri analizi ile tam çözümlerine ulaşma süreci adımlar biçiminde verilmiştir. (Olver 1986, Ibragimov ve Kovalev 2009, San 2011).

1. Adım: (3.1) denklemini değişmez bırakan

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \epsilon\xi(x, t, u) + O(\epsilon^2) \\ \bar{t} &= t + \epsilon\tau(x, t, u) + O(\epsilon^2) \\ \bar{u} &= u + \epsilon\phi(x, t, u) + O(\epsilon^2)\end{aligned}\quad (3.2)$$

bir parametrelili Lie grup dönüşümleri verilsin. Buradaki ξ , τ ve ϕ sonsuz küçük fonksiyonları, bağımsız değişkenler olan x , t ve bağımlı değişken olan u ya bağımlıdır. $O(\epsilon^2)$ terimi ise nokta dönüşümündeki sonsuz küçük kaymayı ifade eder. Her dönüşüm grubuna bir vektör alanı karşılık geleceğinden. (3.2) dönüşüm grubu ile ilişkili (x, t, u) uzayındaki vektör alanı

$$V = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (3.3)$$

biçimindedir.

2. Adım: (3.1) denkleminin mertebesi n olduğundan (3.1) in n . uzanımı

$$pr^{(n)}V = V + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \dots + \phi^{x_k x_m} \frac{\partial}{\partial u_{x_k x_m}} \quad (3.4)$$

biçimindedir. Burada $k + m = n$ ($1 < k, m < n$) olup $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}, \phi^{tt}, \phi^{xt}, \dots, \phi^{x_k x_m}$ ler (3.3) ün uzatılmış sonsuz küçük katsayı fonksiyonlarıdır. Bunlar,

$$\begin{aligned}\phi^x &= D_x(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} = D_x \phi - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau \\ &= \phi_x + (\phi_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^t &= D_t(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = D_t\phi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau \\
&= \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \xi_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \\
\phi^{xx} &= D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} \\
&= D_x^2\phi - u_x D_x^2\xi - u_t D_x^2\tau - 2u_{xx}D_x\xi - 2u_{xt}D_x\tau \\
\phi^{xx} &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 \\
&\quad - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt} \\
&\quad \dots
\end{aligned} \tag{3.5}$$

biçiminde verilir (Olver 1986).

3. Adım: (3.1) denklemi için değişmezlik koşulu

$$pr^{(n)}V\{F\}|_{F=0} = 0 \tag{3.6}$$

biçimindedir. (3.6) eşitliğinde (uzanımın H denklemine uygulanıp), (3.5) de verilen uzatılmış sonsuz küçük fonksiyonlarının (3.6) da yerine yazılmasıyla u nun x e, t ye ve xt ye göre $1,2,\dots,n$. mertebe kısmi türevlerini bulunduran bir eşitlik ortaya çıkar. Bu eşitlik u nun kısmi türevlerine göre düzenlenir.

4. Adım: Bir önceki adımda elde edilen eşitlikte yer alan u bütün kısmi türevlerinin katsayıları sıfıra eşitlendiğinde, aşırı belirleyici denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sistemi ξ , τ ve ϕ bilinmeyenlerine göre çözülür ve böylece ξ , τ ve ϕ sonsuz küçük fonksiyonları elde edilmiş olur.

5. Adım: Bir önceki adımda bulunan sonsuz küçük fonksiyonları V vektör alanında yerine yazılarak V_i ($i=1,2,\dots$) simetri üreteçleri bulunur. Dolayısıyla (3.1) denkleminin simetri gruplarının Lie cebri, V_i simetri üreteçleri ile gerilir. V_i üreteçlerinin kamütatör tablosunu oluşturmak için (2.14) eşitliği kullanılarak $[V_i, V_j]$ değerleri hesaplanır. Bu değerler yardımı ile kamütatör tablosu oluşturulur ve ikili işleme göre kapalı olduğu görülür.

6. Adım: Bir önceki adımda elde edilen her bir simetri üreticine, denk gelen bir dönüşüm grubu mevcuttur. Bu dönüşüm grupları (Olver 1986, Ibragimov ve Kovalev 2009, San 2012) çalışmalarında olduğu gibi elde edilir. V_i simetri üreticinin dönüşüm grupları (her bir bileşen için):

$$\begin{aligned}\xi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) &= \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \epsilon} \\ \tau(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) &= \frac{\partial \tilde{t}_i}{\partial \epsilon} \\ \phi(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) &= \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \epsilon}\end{aligned}\quad (3.7)$$

İfadelerine

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i|_{\epsilon=0} &= x_i \\ \tilde{t}_i|_{\epsilon=0} &= t_i \\ \tilde{u}_i|_{\epsilon=0} &= u_i\end{aligned}\quad (3.8)$$

başlangıç şartlarının uygulanması ile elde edilir. (San 2012)

7. Adım: Son adım olarak; (3.1) de verilen denklemin, simetri üreticileri yardımıyla dönüşüm grupları (denklemini değişmez bırakan) bulunur ve böylece ele alınan denklemin farklı tam çözümleri elde edilir. Ayrıca bulunan Lie dönüşüm gruplarıyla (3.1) de verilen KDD in, tek bağımsız değişken içeren KDD e ya da ADD e indirgenmesi sağlanır. Bu indirgeme nihayetinde vektör alanına bağlı yazılan

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\phi}\quad (3.9)$$

karakteristik denklemin çözülmesiyle mümkündür. Buradan da invaryantlar kullanılarak kısmi değişken sayısı azaltılır. Bulunan ADD in çözülmesiyle de (3.1) denkleminin farklı çözümleri elde edilmiş olur.

3.2. $(\frac{G'}{G})$ – Açılım Yöntemi

Yöntem ilk olarak 2007 yılında yaptıkları çalışmada Mingliang Wang ve arkadaşları tarafından KdV denklemi, mKdV denklemi, Variant Boussinesq denklemleri ve Hiroto-Satsuma denklemlerine uygulanmıştır. 2008 yılında Ahmet Bekir tarafından Boussinesq denklemine ve Modified Zakharov-Kuznetsov denklemine uygulanmıştır. Daha sonra birçok yazar tarafından, kaynaklarda verilen farklı modellere uygulanmıştır (Wang ve ark. 2008, Zhang ve ark. 2008, Zayed E.M.E. 2009, Guo ve Zhou 2010, Liu ve ark. 2015).

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için $(\frac{G'}{G})$ – açılım metodu, verilen kısmi diferansiyel denklemi değişken değişimi yardımı ile adi diferansiyel denkleme dönüştürdükten sonra denklemin çözümlerinin $(\frac{G'}{G})$ nin polinomu biçiminde ifade edilmesine dayanır. Bu polinomun derecesi ikinci bölümde tanımı verilen ve (2.4) bağıntısı ile ifade edilen dengeleme prensibi ile bulunur. Bu metodun diğer metotlardan farkı, Riccati denklemi yerine ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklemin kullanılmasıdır.

Bu kısımda yöntemin bir kısmi diferansiyel denkleme uygulanması ile ilgili temel teorisi verilecektir.

$$\psi(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (3.10)$$

kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada x, t bağımsız değişkenler ve $u = u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyondur. $\xi = x - ct$ dalga değişkeni kullanılarak (3.10) denklemi,

$$Q(U, U', U'', U''' \dots) = 0 \quad (3.11)$$

adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Burada $u(x, t) = U(\xi)$, c solitonun hızıdır. Denklem (3.11) olabildiğince integre edilerek denklemin mertebesi düşürülür. Burada integral sabitleri sıfır olarak kabul edilir. (3.11) adi diferansiyel denklemin çözümünün

$$U = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \quad (3.12)$$

biçiminde ifade edilebileceğini varsayalım. Burada $G = G(\xi)$ ikinci mertebeden lineer

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \quad (3.13)$$

adi diferansiyel denklemi sağlar. Burada $G' = \frac{dG(\xi)}{d\xi}$, $G'' = \frac{d^2G(\xi)}{d\xi^2}$ dir ve a_1, a_2, \dots, a_m , λ, μ daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir. m pozitif tamsayısı yukarıda bahsedildiği gibi, (3.11) denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında kurulacak olan dengeleme prensibinden elde edilir.

(3.13) denkleminin karakteristik denklemi

$$v^2 + \lambda v + \mu = 0$$

biçiminde yazılabilir. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$v_1 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}, \quad v_2 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}$$

dir. (3.13) denklemi

i) $\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0$ ise

$$G(\xi) = c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi},$$

genel çözümüne sahiptir. Genel çözümde ξ ye göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$G'(\xi) = v_1 c_1 e^{v_1 \xi} + v_2 c_2 e^{v_2 \xi},$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{v_1 c_1 e^{v_1 \xi} + v_2 c_2 e^{v_2 \xi}}{c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi}},$$

ve v_1, v_2 yerine yazılarak

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_1 \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{v_1 \xi} + c_2 \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{v_2 \xi}}{c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi}},$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-c_1 \frac{\lambda}{2} e^{v_1 \xi} - c_1 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{v_1 \xi} - c_2 \frac{\lambda}{2} e^{v_2 \xi} + c_2 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{v_2 \xi}}{c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi}},$$

ve ortak parantezler düzenlenerek

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\frac{\lambda}{2} [c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi}] + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} [-c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi}]}{c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi}},$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{-c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi}}{c_1 e^{v_1 \xi} + c_2 e^{v_2 \xi}} \right],$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[\frac{-c_1 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}}{c_1 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}} \right],$$

elde edilir. Üstel fonksiyonlar ile hiperbolik fonksiyonlar arasındaki bağıntıdan

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \cdot \left[\frac{-c_1 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi \right)}{c_1 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left(\cosh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi \right)} \right]$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \left[\frac{(-c_1+c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi + (c_1+c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi}{(-c_1+c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi + (c_1+c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi} \right],$$

bulunur. Bu son ifade

$$(-c_1 + c_2) = A, \quad (c_1 + c_2) = B,$$

alınırsa

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \left[\frac{A \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi + B \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi}{A \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi + B \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2} \xi} \right] \quad (3.14)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\lambda^2 - 4\mu < 0$ ise

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \left[\frac{-A \sin \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \xi}{A \cos \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2} \xi} \right] \quad (3.15)$$

ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ durumunda ise

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{A}{A\xi+B} - \frac{\lambda}{2} \quad (3.16)$$

elde edilir.

(3.11) denkleminin çözümünü elde etmek için, denklemde $U(\xi)$ yerine (3.12) ifadesi ve türevleri yerine yazılır. Elde edilen ifade (3.13) denklemi yardımıyla $\left(\frac{G'}{G}\right)$ nin polinomları biçimine getirilir. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ nin polinomunun katsayıları sıfıra eşitlenerek elde

edilen cebirsel denklem sisteminden a_i, c, λ, μ çözülür. Sistemin a_i, c, λ, μ değerleri (3.12) de yerine yazılır. (3.13) den elde edilen (3.14) - (3.16) çözümleri $(\lambda^2 - 4\mu)$ nün durumlarına göre (3.12) de yerine yazılarak (3.11) adi diferansiyel denkleminin çözümleri bulunur. Bu çözümlerde $\xi = x - ct$ yazılarak (3.10) lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin çözümleri elde edilir.

3.3. F- Açılım Yöntemi

Bu kısımda Abdelhalim Ebaid ve Emad H Aly nin 2012 yılında yaptığı çalışma baz alınmıştır. Yöntemde Jacobi eliptik fonksiyonlar kullanılmaktadır. Bu yöntem farklı yazarlar tarafından kaynaklarda verilen çalışmalarda farklı modellere uygulanmıştır (Liu ve ark 2001, Shen ve Pan 2003, Ebaid ve Aly 2012, Çelik ve ark. 2021).

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem kapalı formda

$$\Omega(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (3.17)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $u = u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyondur. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleme

$$u(x, t) = U(\zeta), \quad \zeta = x - ct \quad (3.18)$$

dalga dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki gibi lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüşür.

$$\Omega(U, -cU', U', c^2U'', U'', \dots) = 0 \quad (3.19)$$

(3.19) denkleminin çözümünün

$$U(\zeta) = \sum_{i=0}^n A_i F^i(\zeta) \quad (3.20)$$

biçiminde olduğunu varsayalım. n pozitif tamsayısı (3.19) denklemindeki en yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında kurulan (2.4) bağıntısı ile tanımlanan dengeleme prensibinden elde edilir. Burada $F(\zeta)$

$$F' = \sqrt{PF^4(\zeta) + QF^2(\zeta) + R}, \quad (3.21)$$

yardımcı denklemini sağlar, burada P, Q ve R sabitlerdir. (3.21) denkleminde türev alınarak $F(\zeta)$ için

$$\begin{aligned} F'' &= 2PF^3 + QF \\ F''' &= (6PF^2 + Q)F' \\ F^{(4)} &= 24P^2F^5 + 20PQF^3 + (12PR + Q^2)F \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.22)$$

eşitlikleri yazılabilir. (3.20) fonksiyonu, (3.21) denklemini ve (3.22) eşitlikleri kullanılarak (3.19) denkleminde yerine yazılır. Elde edilen ifade $F^i(F')^j$ ($j = 0, 1, \dots$, $i = 0, 1, 2, \dots$) kuvvetlerine göre düzenlenir ve F^i katsayılarının her biri sıfıra eşitlenir. Böylece bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Maple kullanılarak elde edilen cebirsel denklem sistemi A_i ($i = 0, 1, \dots, n$) ve c ye göre çözülür. Elde edilen katsayılar (3.20) fonksiyonunda yerine yazılır, çözüm fonksiyonundaki P, Q, R fonksiyonları aşağıdaki bir kısmı alınan tablodan seçilerek (3.20) fonksiyonu oluşturulur.

Tablo 3.1. (3.21) ile verilen yardımcı denklem için P, Q ve R özel seçilmiş değerlerde $F(\zeta)$ çözümleri göstermektedir.

Durum	P	Q	R	$F(\zeta)$
1	m^2	$-(1 + m^2)$	1	$sn \zeta$
2	$-m^2$	$2m^2 - 1$	$1 - m^2$	$cn \zeta$
3	1	$-(1 + m^2)$	m^2	$ns \zeta$
4	1	$2 - m^2$	$1 - m^2$	$cs \zeta$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1 - 2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$ns \zeta + cs \zeta$
6	$\frac{1}{4}$	$\frac{1 - 2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$ns \zeta - cs \zeta$
7	$\frac{1}{4}$	$\frac{1 - 2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{sn \zeta}{1 + cn \zeta}$
8	$\frac{1}{4}$	$\frac{1 - 2m^2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{sn \zeta}{1 - cn \zeta}$
9	1	$-(1 + m^2)$	m^2	$dc \zeta$
10	1	$2 - m^2$	1	$sc \zeta$
11	$-(m^2 + 2m + 1)B^2$	$2m^2 + 2$	$\frac{-m^2 + 2m - 1}{B^2}$	$\frac{m sn^2 \zeta - 1}{B(m sn^2 \zeta + 1)}$
12	$\frac{1 - m^2}{4}$	$\frac{1 + m^2}{2}$	$\frac{1 - m^2}{4}$	$nc \zeta + sc \zeta$
13	$\frac{1 - m^2}{4}$	$\frac{1 + m^2}{2}$	$\frac{1 - m^2}{4}$	$nc \zeta - sc \zeta$

Bu fonksiyon Jakobi eliptik fonksiyonları bulundurur. Jakobi eliptik fonksiyonlar $sn\zeta, cn\zeta, dn\zeta$ olup sırasıyla Jacobian eliptik sinüs fonksiyonu, Jacobian eliptik kosinüs fonksiyonu ve Jacobian eliptik delta fonksiyonu olarak isimlendirilirler. Diğer Jacobian fonksiyonları bu üç tür fonksiyon yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$ns\zeta = \frac{1}{sn\zeta}, \quad nc\zeta = \frac{1}{cn\zeta}, \quad nd\zeta = \frac{1}{dn\zeta}$$

$$sc\zeta = \frac{cn\zeta}{sn\zeta}, \quad cs\zeta = \frac{sn\zeta}{cn\zeta}, \quad ds\zeta = \frac{dn\zeta}{sn\zeta}, \quad sd\zeta = \frac{sn\zeta}{dn\zeta}$$

Ayrıca, bu fonksiyonlar aşağıdaki formülleri sağlar.

$$\begin{aligned} sn^2\zeta + cn^2\zeta &= 1, \quad dn^2\zeta + m^2 sn^2\zeta = 1, \quad ns^2\zeta = 1 + cn^2\zeta, \\ ns^2\zeta &= m^2 + m^2 ds^2\zeta, \quad sc^2\zeta + 1 = nc^2\zeta, \quad m^2 sd^2\zeta + 1 = nd^2\zeta, \end{aligned}$$

Jacobian-eliptik fonksiyonlar, $m \rightarrow 1$ için limit alındığında aşağıdaki gibi hiperbolik fonksiyonlara dönüşür.

$$\begin{aligned} sn\zeta &\rightarrow \tanh \zeta, \quad \{cn\zeta, dn\zeta\} \rightarrow \operatorname{sech} \zeta, \quad \{sc\zeta, sd\zeta\} \rightarrow \sinh \zeta \\ \{ds\zeta, cs\zeta\} &\rightarrow \operatorname{csch} \zeta, \quad \{nc\zeta, nd\zeta\} \rightarrow \operatorname{cosh} \zeta, \quad ns\zeta \rightarrow \operatorname{coth} \zeta, \quad \{cd\zeta, sd\zeta\} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Jacobian-eliptik fonksiyonlar, $m \rightarrow 0$ için limit alındığında aşağıdaki gibi trigonometrik fonksiyonlara dönüşür.

$$\begin{aligned} \{sn\zeta, sd\zeta\} &\rightarrow \sin \zeta, \quad \{cn\zeta, cd\zeta\} \rightarrow \cos \zeta, \quad sc\zeta \rightarrow \tan \zeta \\ \{ds\zeta, ns\zeta\} &\rightarrow \operatorname{csc} \zeta, \quad \{nc\zeta, dc\zeta\} \rightarrow \operatorname{sec} \zeta, \quad cs\zeta \rightarrow \cot \zeta, \quad \{dn\zeta, nd\zeta\} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

(3.20) yardımıyla oluşturulan fonksiyonlarda bu veriler kullanılarak (3.19) adi diferensiyel denkleminin ve bu denklemde $\zeta = x - ct$ yazılarak da (3.17) kısmi diferensiyel denkleminin çözümlerine ulaşılır.

3.4. Genişletilmiş Deneme Denklem Yöntemi

Bu bölümde, A. Seadawy ve J. Manafian'ın 2018 yılında yaptıkları çalışma temel alınacaktır. Genişletilmiş Deneme Denklem Yöntemi daha önce 2010 yılında S. Guo ve Y. Zhou tarafından Whitham-Broer-Koupp-Like denklemine ve Coupled Hirota-Satsuma KdV denklemine uygulanmış ve daha sonra çeşitli yazarlar tarafından farklı denklemler için çalışılmıştır (Seadawy ve Manafian 2018, Guo ve Zhou 2010, Gurefe ve ark. 2012, Pandir ve ark 2012, Gurefe ve ark. 2013).

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemini ele alalım.

$$\chi(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (3.23)$$

burada u bağımlı değişken, x ve t bağımsız değişkenlerdir. (3.23) denkleminde

$$u(x, t) = u(\eta) \quad , \quad \eta = k(x - \lambda t) \quad (3.24)$$

(burada k , c sabit ve $c \neq 0$ dır) değişken değişimi yapalım. Böylece (3.23) kısmi diferansiyel denkleminin

$$\chi(u, ku', -k\lambda u', k^2 u'', k^2 \lambda^2 u'', \dots) = 0 \quad (3.25)$$

biçiminde lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. (3.25) adi diferansiyel denklem için deneme denklem fonksiyonu

$$u(\eta) = \sum_{i=0}^{\delta} \tau_i \Gamma^i \quad (3.26)$$

olmak üzere;

$$(\Gamma')^2 = \Omega(\Gamma) = \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} = \frac{\sum_{i=0}^{\theta} \xi_i \Gamma^i}{\sum_{i=0}^{\epsilon} \zeta_i \Gamma^i} = \frac{\xi_{\theta} \Gamma^{\theta} + \dots + \xi_1 \Gamma + \xi_0}{\zeta_{\epsilon} \Gamma^{\epsilon} + \dots + \zeta_1 \Gamma + \zeta_0} \quad (3.27)$$

biçimindedir. Buradan da (3.26) ve (3.27) denklemlerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir;

$$(u')^2 = \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i \Gamma^{i-1} \right)^2 \quad (3.28)$$

$$u'' = \frac{\Phi'(\Gamma)\Psi(\Gamma) - \Phi(\Gamma)\Psi'(\Gamma)}{2\Psi^2(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i \Gamma^{i-1} \right) + \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i(i-1) \tau_i \Gamma^{i-2} \right) \quad (3.29)$$

burada $\Phi(\Gamma)$ ve $\Psi(\Gamma)$ polinomlardır. (3.26)- (3.29) ifadeleri (3.25) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Lambda(\Gamma) = \varrho_s \Gamma^s + \dots + \varrho_1 \Gamma + \varrho_0 \quad (3.30)$$

biçiminde Γ ya bağlı olan $\Lambda(\Gamma)$ polinomu elde edilir.

θ , ϵ ve δ arasındaki matematiksel bağıntı bulmak için dengeleme prensibi uygulanır ve böylece θ , ϵ ve δ 'nın bazı değerleri de buna göre hesaplanabilir. (3.30) denklemindeki $\Lambda(\Gamma)$ polinomunun tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki biçimde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\varrho_i = 0, \quad i = 0, \dots, s. \quad (3.31)$$

biçiminde oluşturulan cebirsel denklem sistemi Maple programı yardımıyla çözüldüğünde, bulunması gereken ξ_0, \dots, ξ_θ , $\zeta_0, \dots, \zeta_\epsilon$ ve $\tau_0, \dots, \tau_\delta$ katsayıları elde edilir. Elde edilen katsayılar (3.27) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{\Lambda(\Gamma)}} = \int \frac{\Phi(\Gamma)}{\Psi(\Gamma)} d\Gamma \quad (3.32)$$

bulunur. Burada η_0 keyfi bir sabittir. (3.32) eşitliğindeki integralin hesaplanmasıyla $\Gamma(\eta)$ fonksiyonları elde edilir. $\Gamma(\eta)$ fonksiyonları (3.26) çözüm fonksiyonunda yerine yazılır. Böylece elde edilen $u(\eta)$ biçimindeki fonksiyonlar (3.25) adi diferensiyel denkleminin çözümleridir. (3.24) dönüşümü kullanılarak, (3.23) denkleminin tam çözümleri elde edilir.

3.5 *Tan* ($\varphi(\xi)/2$) –Açılım Yöntemi

2016 yılında Jalil Manafian ve Mehrdad Lakestani bu yöntemi The modified Formbeg-Whitham denkleminde uygulamışlardır. Daha sonra 2018 yılında Sendi C. ve arkadaşları akışkanlar mekaniğinde modellenen Vakhnenko–Parkes denkleminde (VP), Generalized regularized long wave denkleminde (GRLW) ve symmetric regularized long wave denkleminde (SRLW) bu yöntemi uygulamışlardır. Daha sonra da birçok araştırmacı tarafından KDD e ve sistemlerine uygulanmıştır (Manafian ve Lakestani 2015, Manafian 2016, Manafian ve ark. 2016, Sendi ve ark 2018).

Bu yöntemin temel adımları aşağıda verilmiştir:

$$N(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, u_{xxx}, \dots) = 0 \quad (3.33)$$

lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Burada u bağımlı değişken, x ve t bağımsız değişkenlerdir. (3.33) denkleminde

$$u(x, t) = u(\xi) \quad , \quad \xi = kx + \omega t \quad (3.34)$$

değişken değişimi yapılırsa

$$N(u, ku', \omega u', k^2 u'', \omega^2 u'', \dots) = 0 \quad (3.35)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüşür. (3.35) denkleminin hareketli dalga çözümünün

$$u(\xi) = S(\phi) = \sum_{k=-m}^m A_k \left[p + \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \right]^k \quad (3.36)$$

biçiminde ifade edebileceğini varsayalım. Burada A_k ($0 \leq k \leq m$) ve $A_{-k} = B_k$ ($1 \leq k \leq m$), $A_m \neq 0$, $B_m \neq 0$ dır ve $\phi = \phi(\xi)$ aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlar

$$\phi'(\xi) = a \sin(\phi(\xi)) + b \cos(\phi(\xi)) + c \quad (3.37)$$

ve m sayısı (2.4) eşitliği ile verilen dengeleme prensibi yardımıyla elde edilir. (3.37) denklemi aşağıdaki gibi özel çözüm ailelerine sahiptir (Sendi 2018):

1.Aile $\Delta = a^2 + b^2 - c^2 < 0$ ve $b - c \neq 0$ olmak üzere

$$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{a}{b-c} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{b-c} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \xi\right) \right]$$

2.Aile $\Delta = a^2 + b^2 - c^2 > 0$ ve $b - c \neq 0$ olmak üzere

- $$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{a}{b-c} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{b-c} \tanh \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2} \bar{\xi} \right) \right]$$
- 3.Aile $\Delta = a^2 + b^2 - c^2 > 0$ ve $b \neq 0$ ve $c = 0$ olmak üzere
- $$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} \tanh \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} \bar{\xi} \right) \right]$$
- 4.Aile $\Delta = a^2 + b^2 - c^2 < 0$ ve $c \neq 0$ ve $b = 0$ olmak üzere
- $$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{-a}{c} + \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{b} \tanh \left(\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{2} \bar{\xi} \right) \right]$$
- 5.Aile $\Delta = a^2 + b^2 - c^2 > 0$ ve $b - c \neq 0$ ve $a = 0$ olmak üzere
- $$\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{b+c}{b-c}} \tanh \left(\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{2} \bar{\xi} \right) \right]$$
- 6.Aile $a = 0$ ve $c = 0$ olmak üzere, $\phi(\xi) = \tan^{-1} \left[\frac{e^{2b\bar{\xi}}-1}{e^{2b\bar{\xi}}+1}, \frac{2e^{b\bar{\xi}}}{e^{2b\bar{\xi}}+1} \right]$
- 7.Aile $b = 0$ ve $c = 0$ olmak üzere, $\phi(\xi) = \tan^{-1} \left[\frac{2e^{a\bar{\xi}}}{e^{2a\bar{\xi}}+1}, \frac{e^{2a\bar{\xi}}-1}{e^{2a\bar{\xi}}+1} \right]$
- 8.Aile $a^2 + b^2 = c^2$ olmak üzere, $\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{a\bar{\xi}+2}{(b-c)\bar{\xi}} \right]$
- 9.Aile $a = b = c = ka$ olmak üzere, $\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} [e^{ka\bar{\xi}} - 1]$
- 10.Aile $a = c = ka$ ve $b = -ka$ olmak üzere, $\phi(\xi) = -2 \tan^{-1} \left[\frac{e^{ka\bar{\xi}}}{-1+e^{ka\bar{\xi}}} \right]$
- 11.Aile $c = a$ olmak üzere, $\phi(\xi) = -2 \tan^{-1} \left[\frac{(a+b)e^{b\bar{\xi}}-1}{(a-b)e^{b\bar{\xi}}-1} \right]$
- 12.Aile $c = a$ olmak üzere, $\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{(b+c)e^{b\bar{\xi}}+1}{(b-c)e^{b\bar{\xi}}-1} \right]$
- 13.Aile $c = -a$ olmak üzere, $\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{e^{b\bar{\xi}}+b-a}{e^{b\bar{\xi}}-b-a} \right]$
- 14.Aile $b = -c$ olmak üzere, $\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{ae^{a\bar{\xi}}}{1-ce^{a\bar{\xi}}} \right]$
- 15.Aile $b = 0$ ve $c = a$ olmak üzere, $\phi(\xi) = -2 \tan^{-1} \left[\frac{c\bar{\xi}+2}{c\bar{\xi}} \right]$
- 16.Aile $a = 0$ ve $b = c$ olmak üzere, $\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} [c\bar{\xi}]$
- 17.Aile $a = 0$ ve $b = -c$ olmak üzere, $\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{1}{c\bar{\xi}} \right]$.
- 18.Aile $a = 0$ ve $b = 0$ olmak üzere, $\phi(\xi) = 2\xi + C$
- 19.Aile $b = c$ olmak üzere, $\phi(\xi) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{e^{a\bar{\xi}}-c}{a} \right]$.

Burada $\bar{\xi} = \xi + C, p, A_0, A_k, B_k (k = 1, 2, \dots, m), a, b$ ve c daha sonra belirlenecek sabitlerdir. (3.36) ifadesi (3.35) denkleminde yerine yazılır ve

$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)^k, \cot\left(\frac{\phi}{2}\right)^k (k = 1, 2, \dots, m)$ katsayılarına göre düzenlenir. Elde edilen katsayıların her biri sıfıra eşitlenir, böylece cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Maple yardımı ile $p, A_0, A_k, B_k (k = 1, 2, \dots, m), a, b$ ve c bilinmeyen katsayılarına göre çözülür. Daha sonra elde edilen $A_0, A_k, B_k (k = 0, 1, \dots, m)$ ve a, b, c ve p değerleri (3.36) ifadesinde yerine yazılır ve yukarıda verilen ailelerdeki durumlara göre çözümler elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 EE denkleminin Lie Simetri Analizi

Kısım (3.1) de teorik olarak verilen, bir KDD in Lie simetri analizini (1.1) kısmi diferensiyel denklemini için uygulayalım:

1. Adım: (1.1) denklemini değişmez bırakan

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \epsilon \xi(x, t, u) + O(\epsilon^2) \\ \bar{t} &= t + \epsilon \tau(x, t, u) + O(\epsilon^2) \\ \bar{u} &= u + \epsilon \phi(x, t, u) + O(\epsilon^2)\end{aligned}\tag{4.1}$$

bir parametrelili Lie grup dönüşümleri verilsin. Her dönüşüm grubuna bir vektör alanı karşılık geleceğinden (4.1) dönüşüm grubuna karşılık gelen vektör alanı (x, t, u) uzayında

$$V = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}\tag{4.2}$$

biçimindedir.

2. Adım: Denklemin mertebesi dört olduğundan (4.2) üreticinin dördüncü uzanımını (2.22) formülü kullanılarak

$$pr^{(4)}V = V + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \dots + \phi^{ttxx} \frac{\partial}{\partial u_{ttxx}}\tag{4.3}$$

biçiminde elde edilir. Burada $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}, \dots, \phi^{ttxx}$ fonksiyonları (4.2) nin uzatılmış sonsuz küçük katsayı fonksiyonlarıdır. Bunlar (3.5) formülleri yardımıyla hesaplanır.

3. Adım: (3.6) dan denklemin değişmezlik koşulu

$$pr^{(4)}V(u_{tt} - c_0^2(1 + 2a_2u_x)u_{xx} - \left(\frac{v^2J_p}{s}\right)u_{ttxx})\Big|_{(4.1)} = 0 \quad (4.4)$$

biçiminde elde edilir ki bu

$$\phi^{tt} - (2a_2c_0^2u_{xx}\phi^x + c_0^2(1 + 2a_2u_x)\phi^{xx} + \frac{v^2J_p}{s}\phi^{xxtt}) = 0 \quad (4.5)$$

verir.

4. Adım: Uzatılmış sonsuz küçük katsayı fonksiyonları (4.5) de yerine yazılır ve

$u_{tt} = c_0^2(1 + 2a_2u_x)(u_{xx}) + \frac{v^2J_p}{s}(u_{xxtt})$ olarak alınırsa u nun kısmi türevlerini bulduran bir denklem elde edilir. Bu denklem u nun kısmi türevlerine göre düzenlenip her katsayı sıfıra eşitlenirse (1.1) denkleminin simetri grubunun aşırı belirleyici denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \xi_t &= 0 \\ \xi_u &= 0 \\ \xi_x &= 0 \\ \tau_u &= 0 \\ \tau_x &= 0 \\ \tau_{tt} &= 0 \\ \phi_u &= -2\tau_t \\ \phi_u &= \frac{\tau_t}{a_2} \\ \phi_{tt} &= 0 \end{aligned}$$

Denklem sistemi çözülerek, (1.1) denkleminin en genel sonsuz küçük üreticinin

$$\begin{aligned} \xi(x, t, u) &= k_4 \\ \tau(x, t, u) &= -k_2a_2t + k_5 \\ \phi(x, t, u) &= k_1t + (2a_2u + x)k_2 + k_3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

katsayı fonksiyonlarına bağlı olduğu görülür. Burada k_j ($1 \leq j \leq 5$) keyfi sabitlerdir.

5. Adım: Bir önceki adımda bulunan sonsuz küçük katsayı fonksiyonları (4.2) de yerine yazılır. k_j ($1 \leq j \leq 5$)' lerin farklı değerlerine karşılık farklı simetri üreteçleri elde edilir.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial u} \\ V_4 &= t \frac{\partial}{\partial u}, \quad V_5 = ta_2 \frac{\partial}{\partial t} - (2a_2u + x) \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned} \quad (4.7)$$

V_i üreteçlerinin ikili işleme göre kapalı olduğunu görmek için komütatör tablosu oluşturulur. Bunun için (2.14) deki bağıntı kullanılarak $[V_i, V_j]$ değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} [V_1, V_1] &= [V_2, V_2] = [V_3, V_3] = [V_4, V_4] = [V_5, V_5] = 0 \\ [V_1, V_2] &= -[V_2, V_1] = [V_3, V_1] = -[V_3, V_1] = 0 \\ [V_1, V_4] &= -[V_4, V_1] = 0, \quad [V_1, V_5] = -[V_5, V_1] = V_3, \\ [V_2, V_3] &= -[V_3, V_2] = 0, [V_2, V_4] = -[V_4, V_2] = V_3, [V_2, V_5] = -[V_5, V_2] = -a_2V_2 \\ [V_3, V_4] &= -[V_4, V_3] = 0, [V_3, V_5] = -[V_5, V_3] = 2a_2V_3 \\ [V_4, V_5] &= -[V_5, V_4] = -3a_2V_4 \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.8) eşitlikleri yardımıyla komütatör tablosu aşağıdaki gibi düzenlenir:

Tablo 4.1. (1.1) denkleminin vektör alanları arasındaki kamütatör bağıntılarını göstermektedir

$[V_i, V_j]$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	0	0	0	0	$-V_3$
V_2	0	0	0	V_3	$a_2 V_2$
V_3	0	0	0	0	$-2a_2 V_3$
V_4	0	$-V_3$	0	0	$-3a_2 V_4$
V_5	V_3	$-a_2 V_2$	$2a_2 V_3$	$3a_2 V_4$	0

Düzenlenen kamütatör tablosundan $V_i (i = 1 \dots 5)$ üreteçlerinin ikili işleme göre kapalı olduğu görülür, böylece (1.1) denkleminde ait simetri gruplarının Lie cebri, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 simetri üreteçleri tarafından gerilmektedir.

6. Adım: Herbir simetri üreteci karşılık gelen dönüşüm grubu (3.7) ve (3.8) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$G_1: (\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) \rightarrow (x + \epsilon, t, u) \quad (4.9)$$

$$G_2: (\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) \rightarrow (x, t + \epsilon, u) \quad (4.10)$$

$$G_3: (\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) \rightarrow (x, t, u + \epsilon) \quad (4.11)$$

$$G_4: (\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) \rightarrow (x, t, t\epsilon + u) \quad (4.12)$$

$$G_5: (\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}) \rightarrow \left(x, te^{a_2\epsilon}, -\frac{x}{a_2} + \left(u + \frac{x}{a_2}\right)e^{-2a_2\epsilon} \right) \quad (4.13)$$

Buradan G_1 in uzay dönüşümü, G_2 nin zaman dönüşümü ve G_3 ün de bir bağımlı değişken dönüşümü olarak elde edildiği görülür (Liu ve ark. 2009). G_4 ve G_5 dönüşüm grupları bilinen geometrik dönüşümler olmamakla birlikte söz konusu modelin bu dönüşümleri kullanarak değişmez çözümler elde etmek mümkündür.

7. Adım: Her $G_i (1 \leq i \leq 5)$ (1.1) denkleminin simetri grubu olduğundan, eğer $u = f(x, t)$ denklemin bir çözümü ise

$$u^{(1)} = f(x - \epsilon, t)$$

$$\begin{aligned}
u^{(2)} &= f(x, t - \epsilon) \\
u^{(3)} &= f(x, t) + \epsilon \\
u^{(4)} &= f(x, t) + \epsilon t \\
u^{(5)} &= \left(f(x, t e^{-a_2 \epsilon}) + \frac{x}{2a_2} \right) e^{-a_2 \epsilon} - \frac{x}{2a_2}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

de (1.1) denkleminin çözümleridir. Burada ϵ bir reel sayıdır.(Çelik ve ark.2021)

Simetri Üretici Altında İndirgeme

i) $V_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ üreticinin karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{0}$$

biçimindedir. Buradan

$$u = f(\zeta), \quad \zeta = t \tag{4.15}$$

olduğu kullanılarak (1.1) denklemi

$$f''(t) = 0 \tag{4.16}$$

denkleminde indirgenir. Burada $f'' = \frac{d^2}{d\zeta^2}$ dir. (4.16) çözümlenerek $f(\zeta) = C_1 \zeta + C_2$ elde edilir. Dolayısıyla, (1.1) denkleminin çözümü $u(x, t) = C_1 t + C_2$ olarak elde edilir. Burada C_1, C_2 keyfi sabitlerdir.

ii) $V_2 = \frac{\partial}{\partial t}$ üreticinin karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}$$

biçimindedir. Buradan

$$u = f(\zeta), \quad \zeta = x, \quad (4.17)$$

olduğu kullanılarak (1.1) denklemi

$$f''(x) = 0 \quad (4.18)$$

denkleme indirgenir. Burada $f'' = \frac{d^2}{d\zeta^2}$ dir. (4.18) çözülerek $f(\zeta) = C_1\zeta + C_2$ elde edilir. Dolayısıyla, (1.1) denkleminin çözümü $u(x, t) = C_1x + C_2$ olarak elde edilir. Burada C_1, C_2 keyfi sabitlerdir.

iii) V_5 üreticinin karakteristik denklemi

$$\frac{dx}{0} = \frac{dt}{a_2t} = \frac{du}{-(2a_2u + x)}$$

biçimindedir ve buradan

$$u(\zeta) = \frac{-\zeta t^2 + f(\zeta)}{2a_2t^2} \quad (4.19)$$

olarak elde edilir. Burada $\zeta = x$ dir ve buradan

$$u(x, t) = -\frac{x}{2a_2} + \frac{f(x)}{2a_2t^2} \quad (4.20)$$

olarak elde edilir. Böylece (1.1) denklemi

$$c_0^2 f' f'' + 6v^2 J_p f'' - 6sf = 0 \quad (4.21)$$

biçiminde bir adi diferensiyel denkleme dönüşür. Seri çözüm yöntemi son denklemi çözmek için kullanalım. Denklemin

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi^n = c_0 + c_1 \varphi + c_2 \varphi^2 + c_3 \varphi^3 + \dots + c_n \varphi^n + \dots \quad (4.22)$$

biçiminde bir çözümü olduğunu varsayalım. (4.22) serisi ve türevleri (4.21) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& 12v^2 J_p c_2 + 6v^2 J_p \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} \lambda^n + 2c_0^2 c_1 c_2 \\
& + c_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^n (n+1)(n-j+2)(n-j+1) \lambda^n c_{n+1} c_{n-j+2} - 6s c_0 - 6s \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda^n = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ve (4.23) yardımıyla $n = 0$ için,

$$c_2 = \frac{6c_0}{12v^2 J_p + 2c_0^2 c_1} \tag{4.24}$$

elde edilir. $n \geq 1$ için indirgeme bağıntısı

$$c_{n+2} = \frac{1}{6v^2 J_p (n+2)(n+1)} \left(6s c_n + c_0^2 \sum_{j=0}^n (n+1)(n-j+2)(n-j+1) c_{n+1} c_{n-j+2} \right) \tag{4.25}$$

biçimindedir. Böylece (4.22) kuvvet serisi

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+2} \lambda^{n+2} \\
f(\lambda) &= c_0 + c_1 \lambda + \frac{6s c_0}{12v^2 J_p + 2c_0^2 c_1} \lambda^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6v^2 J_p (n+2)(n+1)} \right) \\
&\quad \cdot \left(6s c_n + c_0^2 \sum_{j=0}^n (n+1)(n-j+2)(n-j+1) c_{n+1} c_{n-j+2} \right) \lambda^{n+2}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak (4.21) denkleminin seri çözümü aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$f(x) = c_0 + c_1x + \frac{6sc_0}{12v^2J_p+2c_0^2c_1}x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6sc_n+c_0^2\sum_{j=0}^n(n+1)(n-j+2)(n-j+1)c_{n+1}c_{n-j+2}}{6v^2J_p(n+2)(n+1)}x^{n+2} \quad (4.27)$$

Böylece (4.19) den

$$u(x, t) = \frac{-xt^2}{2a_2t^2} + \frac{1}{2a_2t^2} \left[c_0 + c_1x + \frac{6sc_0}{12v^2J_p+2c_0^2c_1}x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6sc_n+c_0^2\sum_{j=0}^n(n+1)(n-j+2)(n-j+1)c_{n+1}c_{n-j+2}}{6v^2J_p(n+2)(n+1)}x^{n+2} \right]$$

elde edilir. Bu, denklem (1.1) denkleminin kuvvet serisi biçimindeki çözümüdür.(Çelik ve ark.2021)

4.2. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ Açılım Yönteminin EE Çubuk Denklemine Uygulanması

Kısım (3.2) de teorisi verilen $\left(\frac{G'}{G}\right)$ açılım yöntemi (1.1) denkleme uygulanacaktır. Denklemden $\xi = x - ct$ dönüşümü yapılırsa, $u(x, t) = U(\xi)$ için (1.1) denkleminin

$$(c^2 - c_0^2)sU'' - 2c_0^2sa_2U''U' - v^2J_p c^2U'''' = 0 \quad (4.28)$$

adi diferansiyel denkleme dönüşür. Bu denklemin her iki tarafı ξ e göre integre edilirse

$$(c^2 - c_0^2)sU' - c_0^2sa_2U'^2 - v^2J_p c^2U''' = 0 \quad (4.29)$$

denkleminin ve bu denklemden $U' = \Phi(\xi)$ dönüşümü yapılırsa

$$(c^2 - c_0^2)s\Phi - c_0^2sa_2\Phi^2 - v^2J_p c^2\Phi'' = 0 \quad (4.30)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin elde edilir. Φ'' ile Φ^2 terimleri arasında Tanım 3.2 de (2.4) bağıntısı ile verilen dengeleme prensibi kullanılırsa

$m + 2 = 2m$ eşitliği ve buradan da $m = 2$ bulunur. Böylece (3.12) de U yerine $\Phi(\xi)$ kullanılır ve $m=2$ alınır (4.30) denkleminin çözümlerinin

$$\Phi(\xi) = A_0 + A_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + A_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (4.31)$$

biçiminde olacağı tahmin edilir. Burada $G = G(\xi)$ daha önce Kısım (3.2) de verilen (3.31) numaralı aşağıdaki ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemini sağlar.

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0$$

Denkleminin her iki tarafı $G \neq 0$ olmak üzere G ile bölünürse

$$\frac{G''}{G} = -\lambda \frac{G'}{G} - \mu \quad (4.32)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\left(\frac{G'}{G}\right)' = \frac{G''}{G} - \left(\frac{G'}{G}\right)^2$$

olduğundan son eşitlik, (4.32) eşitliği ile birlikte kullanılırsa

$$\left(\frac{G'}{G}\right)' = -\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \lambda \frac{G'}{G} - \mu \quad (4.33)$$

elde edilir. (4.31) ve (4.33) kullanarak Φ'' , Φ^2 aşağıda olduğu gibi elde edilebilir.

$$\Phi^2(\xi) = A_2^2 \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + 2A_2A_1 \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (A_1^2 + 2A_2A_0) \left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2A_1A_0 \left(\frac{G'}{G}\right) + A_0^2$$

$$\Phi''(\xi) = 6A_2 \left(\frac{G'}{G}\right)^4 + (2A_1 + 10A_2\lambda) \left(\frac{G'}{G}\right)^3 + (8A_2\mu + 3A_1\lambda + 4A_2\lambda^2) \left(\frac{G'}{G}\right)^2$$

$$+(6A_2\lambda\mu + 2A_1\mu + A_1\lambda^2) \left(\frac{G'}{G}\right) + 2A_1\mu^2 + A_1\lambda\mu \quad (4.34)$$

(4.31) ve (4.34) , (4.30) de yerine yazılırsa $\left(\frac{G'}{G}\right)$ nin bir polinomu elde edilir. Bu polinomun bütün katsayıları sıfıra eşitlendiğinde aşağıdaki gibi bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} -6v^2J_p c^2 A_2 - c_0^2 s a_2 A_2^2 &= 0 \\ -2v^2J_p c^2 A_1 - 10v^2J_p c^2 A_2 \lambda - 2c_0^2 s a_2 A_1 A_2 &= 0 \\ -c_0^2 s a_2 A_1^2 - 2c_0^2 s a_2 A_0 A_2 - 3v^2J_p c^2 A_1 \lambda - c_0^2 s A_2 - 8v^2J_p c^2 A_2 \mu \\ + c^2 s A_2 - 4v^2J_p c^2 A_2^2 \lambda^2 &= 0 \\ -2v^2J_p^2 A_1 \mu - v^2J_p c^2 A_1 \lambda^2 + c^2 s A_1 - c_0^2 s A_1 - 6v^2J_p c^2 A_2 \lambda \mu - 2c_0^2 s a_2 A_0 A_1 &= 0 \\ -2v^2J_p c^2 A_2 \mu^2 + c^2 s A_0 - v^2J_p c^2 A_1 \lambda \mu - c_0^2 s a_2 A_0^2 - c_0^2 s A_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

(4.35) denklem sistemi Maple programı kullanılarak A_0, A_1, A_2, c ye göre çözdürülürse aşağıdaki çözüm gruplarına ulaşılır.

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{6v^2J_p\mu}{(4v^2J_p\mu + s - v^2J_p\lambda^2)a_2}, & A_1 &= -\frac{6v^2J_p\lambda}{(4v^2J_p\mu + s - v^2J_p\lambda^2)a_2}, \\ A_2 &= -\frac{6v^2J_p}{(4v^2J_p\mu + s - v^2J_p\lambda^2)a_2}, & c &= \sqrt{\frac{s}{4v^2J_p\mu + s - v^2J_p\lambda^2}} c_0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{6v^2J_p\mu}{(4v^2J_p\mu + s - v^2J_p\lambda^2)a_2}, & A_1 &= -\frac{6v^2J_p\lambda}{(4v^2J_p\mu + s - v^2J_p\lambda^2)a_2}, \\ A_2 &= -\frac{6v^2J_p}{(4v^2J_p\mu + s - v^2J_p\lambda^2)a_2}, & c &= -\sqrt{\frac{s}{4v^2J_p\mu + s - v^2J_p\lambda^2}} c_0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

ya da

$$A_0 = \frac{v^2J_p(2\mu + \lambda^2)}{(4v^2J_p\mu - s - v^2J_p\lambda^2)a_2}, \quad A_1 = \frac{6v^2J_p\lambda}{(4v^2J_p\mu - s - v^2J_p\lambda^2)a_2},$$

$$A_2 = \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, \quad c = \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 i \quad (4.38)$$

$$A_0 = \frac{v^2 J_p (2\mu + \lambda^2)}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, \quad A_1 = -\frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2},$$

$$A_2 = \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}, \quad c = -\sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 i \quad (4.39)$$

Sistemin (4.36) ve (4.37) çözüm takımı kullanılarak (4.31) den

$$\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t \text{ olmak üzere,}$$

$$\Phi_1(\xi) = -\frac{6v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} - \frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right) - \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (4.40)$$

$$\text{ve } \xi = x + \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t \text{ olmak üzere,}$$

$$\Phi_2(\xi) = -\frac{6v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} - \frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right) - \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (4.41)$$

elde edilir. Sistemin (4.38) ve (4.39) çözüm takımı kullanılarak (4.31) den

$$\xi = x - \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t \text{ olmak üzere,}$$

$$\Phi_3(\xi) = \frac{v^2 J_p (2\mu + \lambda^2)}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} + \frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right) + \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \quad (4.42)$$

$$\text{ve } \xi = x + \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t \text{ olmak üzere,}$$

$$\Phi_4(\xi) = \frac{v^2 J_p (2\mu + \lambda^2)}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} + \frac{6v^2 J_p \lambda}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right) + \frac{6v^2 J_p}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{G'}{G}\right)^2$$

(4.43)

elde edilir. (4.30) denkleminin genel çözümlerini elde etmek için Kısım (3.2) de $(\lambda^2 - 4\mu)$ nün durumlarına bağlı olarak, (3.14), (3.15) ve (3.16) eşitlikleri ile verilen $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadeleri (4.40)-(4.43) ifadelerinde yerine yazılır. ($\Phi_{\text{çözüm adı, durum adı}}$)

Durum (1): $\lambda^2 - 4\mu > 0$ için (4.30) denkleminin aşağıdaki çözümleri elde edilir:

$$\Phi_{11}(\xi) = -\frac{3}{2} \frac{v^2 J_p(\lambda^2 - 4\mu)}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{c_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{c_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi} \right)^2 \\ + \frac{3v^2 J_p \lambda^2}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} - \frac{6v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}$$

burada $\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} C_0 t$,

$$\Phi_{21}(\xi) = -\frac{3}{2} \frac{v^2 J_p(\lambda^2 - 4\mu)}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{c_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{c_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi} \right)^2 \\ + \frac{3v^2 J_p \lambda^2}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} - \frac{6v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}$$

burada $\xi = x + \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} C_0 t$,

$$\Phi_{31}(\xi) = \frac{3v^2 J_p(\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{c_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{c_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi} \right)^2 \\ - \frac{v^2 J_p \lambda^2}{2(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} + \frac{2v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}$$

burada $\xi = x - \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} C_0 t$,

$$\Phi_{41}(\xi) = \frac{3v^2 J_p(\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{c_1 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi}{c_1 \cosh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi + c_2 \sinh \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \xi} \right)^2$$

$$-\frac{v^2 J_p \lambda^2}{2(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} + \frac{2v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}$$

burada $\xi = x + \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} C_0 t$ dir.

Durum (2): $\lambda^2 - 4\mu < 0$ için (4.30) denkleminin aşağıdaki çözümleri elde edilir:

$$\begin{aligned} \Phi_{12}(\xi) &= \frac{3v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{-c_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi}{c_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi} \right)^2 \\ &+ \frac{3v^2 J_p \lambda^2}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} - \frac{6v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \end{aligned}$$

burada $\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} C_0 t$,

$$\begin{aligned} \Phi_{22}(\xi) &= \frac{3v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{-c_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi}{c_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi} \right)^2 \\ &+ \frac{3v^2 J_p \lambda^2}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} - \frac{6v^2 J_p \mu}{(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \end{aligned}$$

burada $\xi = x + \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} C_0 t$,

$$\begin{aligned} \Phi_{32}(\xi) &= \frac{3v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{-c_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi}{c_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi} \right)^2 \\ &- \frac{v^2 J_p \lambda^2}{2(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} + \frac{2\mu v^2 J_p}{4(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \end{aligned}$$

burada $\xi = x - \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} C_0 t$,

$$\Phi_{42}(\xi) = \frac{3v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} \left(\frac{-c_1 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi}{c_1 \cos \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi + c_2 \sin \frac{1}{2} \sqrt{4\mu - \lambda^2} \xi} \right)^2$$

$$-\frac{v^2 J_p \lambda^2}{2(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2} + \frac{2\mu v^2 J_p}{4(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}$$

burada $\xi = x + \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$ dir.

Durum (3): $\lambda^2 - 4\mu = 0$ için (4.30) denkleminin aşağıdaki çözümleri elde edilir:

$$\Phi_{13}(\xi) = -\frac{6v^2 J_p c_2^2}{a_2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2)(c_1 + c_2 \xi)^2} + \frac{3v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}$$

burada $\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$,

$\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğundan son ifade sadeleştirilirse

$$\Phi_{13}(\xi) = \frac{6v^2 J_p c_2^2}{2s a_2 (c_1 + c_2 \xi)^2}$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin ξ ya göre integrali (4.28) denkleminin aşağıdaki $U(\xi)$ çözümünü verir.

$$U(\xi) = \frac{6v^2 J_p c_2}{s a_2 (c_1 + c_2 \xi)}$$

Son ifadede $\xi = x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$ yazılırsa

$$u_{13}(x, t) = \frac{6v^2 J_p c_2}{s a_2 (c_1 + c_2 \left(x - \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t \right))}$$

EE denkleminin çözümü elde edilir. Diğer çözümler benzer biçimde elde edilebilir.

$$\Phi_{23}(\xi) = -\frac{6v^2 J_p c_1^2}{a_2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2)(c_1 + c_2 \xi)^2} + \frac{3v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2) a_2}$$

burada $\xi = x + \sqrt{\frac{s}{4v^2 J_p \mu + s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$,

$$\Phi_{33}(\xi) = \frac{6v^2 J_p c_1^2}{a_2(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2)(c_1 + c_2 \xi)^2} + \frac{v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(-4v^2 J_p \mu + s + v^2 J_p \lambda^2) a_2}$$

burada $\xi = x - \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$,

$$\Phi_{43}(\xi) = \frac{6v^2 J_p c_1^2}{a_2(4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2)(c_1 + c_2 \xi)^2} + \frac{v^2 J_p (\lambda^2 - 4\mu)}{2(-4v^2 J_p \mu + s + v^2 J_p \lambda^2) a_2}$$

burada $\xi = x + \sqrt{-\frac{s}{4v^2 J_p \mu - s - v^2 J_p \lambda^2}} c_0 t$ dir.

4.3. F- Açılım Yönteminin EE Denklemine Uygulanması

Bu kısımda (1.1) denklemine, Kısım (3.3) de teorik olarak verilen, F- açılım yöntemi uygulanacaktır. Denklemden

$$u(x, t) = U(\zeta), \quad \zeta = x - ct$$

dönüşümü yapılırsa, (1.1) denklemi

$$(c^2 - c_0^2) s U'' - 2c_0^2 s a_2 U'' U' - v^2 J_p c^2 U'''' = 0 \quad (4.44)$$

biçiminde lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. (4.44) denklemi integre edilerek

$$(c^2 - c_0^2) s U' - c_0^2 s a_2 U'^2 - v^2 J_p c^2 U''' = 0 \quad (4.45)$$

denklemini elde edilir. (4.45) denkleminde $U' = \Phi(\zeta)$ dönüşümü yapılırsa

$$(c^2 - c_0^2)s\Phi - c_0^2sa_2\Phi^2 - v^2J_p c^2\Phi'' = 0 \quad (4.46)$$

denklemini elde edilir. (4.46) denkleminde Φ'' terimi ile Φ^2 terimi arasında Tanım 3.2 de (2.4) bağıntısı ile verilen dengeleme prensibi kullanılırsa $m + 2 = 2m$ eşitliğinden $m = 2$ elde edilir. Böylece (4.46) denkleminin çözümlerinin, (3.47) biçiminde olduğu varsayılarak

$$\Phi(\zeta) = A_0 + A_1F(\zeta) + A_2F^2(\zeta) \quad (4.47)$$

biçiminde yazılabilir. Burada A_0, A_1 ve A_2 sabitlerdir ve $F(\zeta)$

$$F'(\zeta) = \sqrt{PF^4(\zeta) + QF^2(\zeta) + R} \quad (4.48)$$

denklemini sağlar. (4.47), (4.48) eşitlikleri kullanılarak $\Phi(\zeta)$ ve $F'(\zeta)$, (4.47) denkleminde yerine yazılırsa $F^i(F')^j$ ($j = 0,1, \dots$, $i = 0,1,2, \dots$) kuvvetlerini bulunduran bir ifade elde edilir. $F^i(F')^j$ lerin katsayıların her biri sıfıra eşitlenir ve aşağıdaki gibi bir denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} c^2sA_0 - c_0^2sa_2A_0^2 - c_0^2sA_0 - 2v^2J_p c^2A_2R &= 0 \\ -2c_0^2sa_2A_1A_2 - 2v^2J_p c^2A_1P &= 0 \\ c^2sA_1 - v^2J_p c^2A_1Q - 2c_0^2sa_2A_0A_1 - c_0^2sA_1 &= 0 \\ -c_0^2sa_2 + c^2sA_2 - 2c_0^2sa_2A_0A_2 - c_0^2sa_2A_1^2 - 4v^2J_p c^2A_2Q &= 0 \\ -6v^2J_p c^2A_2P - c_0^2sa_2A_2^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Yukarıdaki lineer olmayan cebirsel denklem sistemi Maple programı kullanılarak A_0, A_1, A_2 ve c' ye göre çözümlürse

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{-1}{2} \left(s - \frac{(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 Q^2 - 3v^4 J_p^2 PR}) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 Q^2 + 48v^4 J_p^2 PR} + 4 \frac{v^2 J_p (s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 Q^2 - 3v^4 J_p^2 PR}) s Q}{s^2 - 16v^4 J_p^2 Q^2 + 48v^4 J_p^2 PR} \right) s^{-1} a_2^{-1}, \\
A_1 &= 0, \\
A_2 &= -6 \frac{v^2 J_p (s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 Q^2 - 3v^4 J_p^2 PR}) P}{(s^2 - 16v^4 J_p^2 Q^2 + 48v^4 J_p^2 PR) a_2}, \\
c &= \frac{\sqrt{(s^2 - 16v^4 J_p^2 Q^2 + 48v^4 J_p^2 PR)(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 Q^2 - 3v^4 J_p^2 PR}) s c_0}}{s^2 - 16v^4 J_p^2 Q^2 + 48v^4 J_p^2 PR} \quad (4.50)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sonuçlar (4.47) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Phi(\zeta) &= \frac{-1}{2} \left(s - \frac{(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 Q^2 - 3v^4 J_p^2 PR}) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 Q^2 + 48v^4 J_p^2 PR} + \frac{4v^2 J_p (s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 Q^2 - 3v^4 J_p^2 PR}) s Q}{s^2 - 16v^4 J_p^2 Q^2 + 48v^4 J_p^2 PR} \right) s^{-1} a_2^{-1} \\
&\quad - \left(\frac{6v^2 J_p (s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 Q^2 - 3v^4 J_p^2 PR}) P}{(s^2 - 16v^4 J_p^2 Q^2 + 48v^4 J_p^2 PR) a_2} \right) F^2(\zeta)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada P , Q ve R Tablo 3.1. deki gibi seçilerek (4.47) denkleminin Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri elde edilir. (Çelik ve ark.2021)

Durum 1: $P = m^2$, $Q = -(1 + m^2)$, $R = 1$, $F(\zeta) = sn \zeta$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,m}(\zeta) &= \frac{-1}{2} \left(s - \frac{(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 m^2}) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 m^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4v^2 J_p (s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 m^2}) s (-1-m^2)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 m^2} \right) \cdot s^{-1} a_2^{-1} \\
&\quad - \left(\frac{6v^2 J_p (s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 m^2}) m^2}{(s^2 - 16v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 m^2) a_2} \right) sn^2(\zeta)
\end{aligned}$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınırsa, (4.46) denkleminin aşağıdaki soliton çözümü elde edilebilir.

$$\Phi_1(\zeta) = -2 \frac{4v^4 J_p^2 + s\sqrt{v^4 J_p^2 + 2v^2 J_p s + 8v^2 J_p} \sqrt{v^4 J_p^2} - 3v^2 J_p (\tanh(\zeta))^2 s - 12v^2 J_p (\tanh(\zeta))^2 \sqrt{v^4 J_p^2}}{(-s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2}$$

son ifadenin ζ ya göre integrali alınır, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümlerini

$$U_1(\zeta) = - \frac{8v^4 J_p^2 \zeta + 2s\sqrt{v^4 J_p^2} \zeta + 4v^2 J_p s \zeta + 16v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} \zeta + 6sv^2 J_p \tanh(\zeta) + 3v^2 J_p s \ln(\tanh(\zeta) - 1) - 3v^2 J_p s \ln(\tanh(\zeta) + 1) + 24v^2 J_p (\tanh(\zeta))^2 \sqrt{v^4 J_p^2} + 12v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} \ln(\tanh(\zeta) - 1) - 12v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} \ln(\tanh(\zeta) + 1)}{(-s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2} \quad (4.51)$$

biçiminde ve burada $c = \frac{\sqrt{(s^2 - 16v^4 J_p^2)(s + 4\sqrt{v^4 J_p^2})} s c_0}{s^2 - 16v^4 J_p^2}$ olmak üzere $\zeta = x - ct$

yazılarak (1.1) denkleminin çözümü elde edilir.

Durum 2: $P = -m^2$, $Q = 2m^2 - 1$, $R = 1 - m^2$, $F(\zeta) = cn \zeta$ alınır

$$\Phi_{2,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{aligned} & S - \frac{(s + 4\sqrt{v^4 J_p^2 (2m^2 - 1)^2 + 3m^2 (1 - m^2) v^4 J_p^2}) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (2m^2 - 1)^2 - 48v^4 J_p^2 m^2 (1 - m^2)} \\ & + \frac{4v^2 J_p (s + 4\sqrt{v^4 J_p^2 (2m^2 - 1)^2 + 3m^2 (1 - m^2) v^4 J_p^2}) s (2m^2 - 1)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (2m^2 - 1)^2 - 48v^4 J_p^2 m^2 (1 - m^2)} \end{aligned} \right) s^{-1} a_2^{-1} - \left(\frac{6v^2 J_p (s + 4\sqrt{v^4 J_p^2 (2m^2 - 1)^2 + 3m^2 (1 - m^2) v^4 J_p^2}) m^2}{(s^2 - 16v^4 J_p^2 (2m^2 - 1)^2 - 48v^4 J_p^2 m^2 (1 - m^2)) a_2} \right) cn^2(\zeta)$$

elde edilir. $m \rightarrow 1$ için limit alınır (4.46) denkleminin aşağıdaki soliton çözümü elde edilebilir.

$$\Phi_2(\zeta) = -2 \frac{4v^4 J_p^2 + s\sqrt{v^4 J_p^2 - v^2 J_p s - 4v^2 J_p} \sqrt{v^4 J_p^2} + 3v^2 J_p (\operatorname{sech}(\zeta))^2 s + 12v^2 J_p (\operatorname{sech}(\zeta))^2 \sqrt{v^4 J_p^2}}{(-s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2}$$

Son ifadenin ζ ye göre integrali alırsa, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümü

$$U_2(\zeta) = -2 \frac{4v^4 J_p^2 \zeta + s \sqrt{v^4 J_p^2 \zeta - v^2 J_p s \zeta - 4v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 \zeta + 3v^2 J_p \tanh(\zeta) + 12v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 \tanh(\zeta)}}}{(-s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2} \quad (4.52)$$

biçiminde elde edilir. Burada $c = \frac{\sqrt{(s^2 - 16v^4 J_p^2) \left(s + 4 \sqrt{v^4 J_p^2} \right) s c_0}}{s^2 - 16v^4 J_p^2}$ olmak üzere $\zeta = x - ct$ yazılırsa elde edilen çözüm (1.1) denkleminin çözümü olur.

Durum 3: $P = 1$, $Q = -(1 + m^2)$, $R = m^2$, $F(\zeta) = ns \zeta$ alınır

$$\Phi_{3,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{array}{l} S - \frac{\left(s + 4 \sqrt{v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 m^2} \right) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 m^2} \\ + \frac{4v^2 J_p \left(s + 4 \sqrt{v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 m^2} \right) s (-1-m^2)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 m^2} \end{array} \right) s^{-1} a_2^{-1} \\ - \left(\frac{6 v^2 J_p \left(s + 4 \sqrt{v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 m^2} \right)}{(s^2 - 16v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 m^2) a_2} \right) ns^2(\zeta)$$

olarak elde edilir. $m \rightarrow 1$ için limit alınır (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_3(\zeta) = -2 \frac{4v^4 J_p^2 + s \sqrt{v^4 J_p^2 + 2v^2 J_p s + 8v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2}}}{(-s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2} - \frac{3v^2 J_p (\coth(\zeta))^2 s - 12v^2 J_p (\coth(\zeta))^2 \sqrt{v^4 J_p^2}}{(-s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2}$$

Son ifade ζ göre integre edilirse, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümleri aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$U_3(\zeta) = - \frac{8v^4 J_p^2 \zeta + 2s \sqrt{v^4 J_p^2 \zeta} + 4v^2 J_p s \zeta + 16v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 \zeta} + 6sv^2 J_p \coth \zeta + 3v^2 J_p s \ln(\coth(\zeta)-1) - 3v^2 J_p s \ln(\coth(\zeta)+1) + 24v^2 J_p (\coth(\zeta)) \sqrt{v^4 J_p^2} + 12v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} \ln(\coth(\zeta)-1) - 12v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} \ln(\coth(\zeta)+1)}{(-s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2} \quad (4.53)$$

biçiminde ve burada $c = \frac{\sqrt{(s^2 - 16v^4 J_p^2) \left(s + 4 \sqrt{v^4 J_p^2} \right) s c_0}}{s^2 - 16v^4 J_p^2}$ olmak üzere $\zeta = x - ct$ yazılarak

(1.1) denkleminin çözümü elde edilir.

Durum 4: $P = 1, Q = (2 - m^2), R = (1 - m^2), F(\zeta) = cs \zeta$ alınırsa

$$\Phi_{4,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{aligned} & s - \frac{\left(s + 4 \sqrt{v^4 J_p^2 (2 - m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 (1 - m^2)} \right) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (2 - m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 (1 - m^2)} \\ & + \frac{4v^2 J_p \left(s + 4 \sqrt{v^4 J_p^2 (2 - m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 (1 - m^2)} \right) s (2 - m^2)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (2 - m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 (1 - m^2)} \end{aligned} \right) s^{-1} a_2^{-1} - \left(\frac{6v^2 J_p \left(s + 4 \sqrt{v^4 J_p^2 (2 - m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 (1 - m^2)} \right)}{(s^2 - 16v^4 J_p^2 (2 - m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 (1 - m^2)) a_2} \right) cs^2(\zeta)$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınırsa (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilebilir.

$$\Phi_4(\zeta) = -2 \frac{4v^4 J_p^2 + s \sqrt{v^4 J_p^2} - v^2 J_p s - 4v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} - 3v^2 J_p (\operatorname{csch}(\zeta))^2 s - 12v^2 J_p (\operatorname{csch}(\zeta))^2 \sqrt{v^4 J_p^2}}{(-s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2}$$

son ifade ζ göre integre edilirse, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümleri aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$U_4(\zeta) = - \frac{8v^4 J_p^2 \zeta + 2s \sqrt{v^4 J_p^2 \zeta} - 2v^2 J_p s \zeta - 8v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 \zeta} + 6sv^2 J_p \coth(\zeta) + 24v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} \coth(\zeta)}{(-s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2} \quad (4.54)$$

biçiminde ve burada $c = \frac{\sqrt{(s^2-16v^4J_p^2)(s+4\sqrt{v^4J_p^2})}sc_0}{s^2-16v^4J_p^2}$ olmak üzere $\zeta = x - ct$ yazılırsa

(1.1) denkleminin çözümü elde edilir.

Durum 5: $P = \frac{1}{4}$, $Q = \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)$, $R = \frac{1}{4}$, $F(\zeta) = ns\zeta + cs\zeta$ alınır

$$\Phi_{5,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{array}{l} S - \frac{\left(s+4\sqrt{v^4J_p^2\left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{16}v^4J_p^2}\right)s^2}{s^2-16v^4J_p^2\left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 + 3v^4J_p^2} \\ + \frac{4v^2J_p\left(s+4\sqrt{v^4J_p^2\left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{16}v^4J_p^2}\right)s\left(\frac{1-2m^2}{2}\right)}{s^2-16v^4J_p^2\left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 + 3v^4J_p^2} \end{array} \right) s^{-1}a_2^{-1} \\ - \frac{3}{2} \left(\frac{v^2J_p\left(s+4\sqrt{v^4J_p^2\left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{16}v^4J_p^2}\right)}{\left(s^2-16v^4J_p^2\left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 + 3v^4J_p^2\right)a_2} \right) (ns\zeta + cs\zeta)^2$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınır, (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_5(\zeta) = -\frac{1}{2} \frac{\begin{array}{l} v^4J_p^2 + s\sqrt{v^4J_p^2 + 2v^2J_p s + 2v^2J_p\sqrt{v^4J_p^2 - 3v^2J_p(\coth(\zeta))^2} s} \\ - 6v^2J_p s \operatorname{csch}(\zeta) \coth(\zeta) - 3v^2J_p s (\operatorname{csch}(\zeta))^2 - 3v^2J_p (\coth(\zeta))^2 \sqrt{v^4J_p^2} \\ - 6v^2J_p \sqrt{v^4J_p^2} \operatorname{csch}(\zeta) \coth(\zeta) - 3v^2J_p \sqrt{v^4J_p^2} (\operatorname{csch}(\zeta))^2 \end{array}}{(-s^2 + 16v^4J_p^2)a_2}$$

son ifadenin ζ ya göre integrali alırsa, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümünü

$$U_5(\zeta) = -\frac{3}{4} \frac{(2\zeta + 4 \coth(\zeta) + \ln(\cosh(\zeta) - \sinh(\zeta)) - \ln(\cosh(\zeta) + \sinh(\zeta)) + 4 \operatorname{csch}(\zeta))v^2J_p}{a_2(v^2J_p - s)} \quad (4.55)$$

biçiminde ve burada $c = \frac{\sqrt{(s^2-16v^4J_p^2)(s+4\sqrt{v^4J_p^2})}sc_0}{s^2-16v^4J_p^2}$ olmak üzere $\zeta = x - ct$ yazılarak

(1.1) denkleminin çözümü elde edilir.

Durum 6: $P = \frac{1}{4}$, $Q = \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)$, $R = \frac{1}{4}$, $F(\zeta) = ns \zeta - cs \zeta$ alınırsa

$$\Phi_{6,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{array}{l} S - \frac{\left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{16} v^4 J_p^2} \right) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 + 3v^4 J_p^2} \\ + \frac{4v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{16} v^4 J_p^2} \right) s \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 + 3v^4 J_p^2} \end{array} \right) s^{-1} a_2^{-1} \\ - \frac{3}{2} \left(\frac{v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{16} v^4 J_p^2} \right)}{\left(s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 + 3v^4 J_p^2 \right) a_2} \right) (ns \zeta - cs \zeta)^2$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınırsa (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_6(\zeta) = -\frac{1}{2} \frac{\begin{array}{l} v^4 J_p^2 + s \sqrt{v^4 J_p^2 + 2v^2 J_p s + 2v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 - 3v^2 J_p (\coth(\zeta))^2} s} \\ + 6v^2 J_p \operatorname{csch}(\zeta) \coth(\zeta) - 3v^2 J_p s (\operatorname{csch}(\zeta))^2 - 3v^2 J_p (\coth(\zeta))^2 \sqrt{v^4 J_p^2} \\ + 6v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} \operatorname{csch}(\zeta) \coth(\zeta) - 3v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} (\operatorname{csch}(\zeta))^2 \end{array}}{(-s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2}$$

son ifadenin ζ ya göre integrali alınırsa, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümü

$$U_6(\zeta) = -\frac{3}{4} \frac{(2\zeta + 4 \coth(\zeta) + \ln(\cosh(\zeta) - \sinh(\zeta)) - \ln(\cosh(\zeta) + \sinh(\zeta)) - 4 \operatorname{csch}(\zeta)) v^2 J_p}{a_2 (v^2 J_p - s)} \quad (4.56)$$

elde edilir. Burada $c = \frac{\sqrt{(s^2 - 16v^4 J_p^2) \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2} \right) s c_0}}{s^2 - 16v^4 J_p^2}$ olmak üzere $\zeta = x - ct$ yazılarak

(1.1) denkleminin çözümü bulunur.

Durum 7: $P = \frac{1}{4}$, $Q = \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)$, $R = \frac{1}{4}$, $F(\zeta) = \frac{sn \zeta}{1+cn \zeta}$ alınırsa

$$\Phi_{7,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{array}{l} S - \frac{\left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{16} v^4 J_p^2}\right) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 + 3v^4 J_p^2} \\ + \frac{4v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{16} v^4 J_p^2}\right) s \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 + 3v^4 J_p^2} \end{array} \right) s^{-1} a_2^{-1} \\ - \frac{3}{2} \left(\frac{v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 - \frac{3}{16} v^4 J_p^2}\right)}{\left(s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)^2 + 3v^4 J_p^2\right) a_2} \right) \left(\frac{sn \zeta}{1+cn \zeta}\right)^2$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınırsa (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_7(\zeta) = \frac{-v^4 J_p^2 - 5v^2 J_p s - 5v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 - v^4 J_p^2} \cosh(\zeta) + v^2 J_p s \cosh(\zeta)}{-2a_2 s^2 \cosh(\zeta) + 2a_2 s^2 \cosh(\zeta) v^4 J_p^2 - 2a_2 s^2 + 2a_2 v^4 J_p^2} \\ - \frac{-s \sqrt{v^4 J_p^2 + v^2 J_p} \sqrt{v^4 J_p^2} \cosh(\zeta) - s \sqrt{v^4 J_p^2} \cosh(\zeta)}{-2a_2 s^2 \cosh(\zeta) + 2a_2 s^2 \cosh(\zeta) v^4 J_p^2 - 2a_2 s^2 + 2a_2 v^4 J_p^2}$$

son ifadede ζ göre integral alırsa, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümleri elde edilir.

$$U_7(\zeta) = -3 \frac{v^2 J_p \tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right)}{a_2 (v^2 J_p - s)} \quad (4.57)$$

biçiminde ve burada $c = \frac{\sqrt{(s^2 - 16v^4 J_p^2) \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2}\right) s c_0}}{s^2 - 16v^4 J_p^2}$ olmak üzere $\zeta = x - ct$ yazılarak

(1.1) denkleminin çözümü elde edilir.

Durum 8: $P = \frac{1}{4}$, $Q = \left(\frac{1-2m^2}{2}\right)$, $R = \frac{1}{4}$, $F(\zeta) = \frac{sn \zeta}{1-cn \zeta}$ alınırsa

$$\Phi_{8,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{array}{l} S - \frac{\left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2} \right)^2 - \frac{3}{16} v^4 J_p^2} \right) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2} \right)^2 + 3v^4 J_p^2} \\ + \frac{4v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2} \right)^2 - \frac{3}{16} v^4 J_p^2} \right) s \left(\frac{1-2m^2}{2} \right)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2} \right)^2 + 3v^4 J_p^2} \end{array} \right) s^{-1} a_2^{-1} \\ - \left(\frac{3v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2} \right)^2 - \frac{3}{16} v^4 J_p^2} \right)}{2 \left(s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1-2m^2}{2} \right)^2 + 3v^4 J_p^2 \right) a_2} \right) \left(\frac{sn \zeta}{1-cn \zeta} \right)^2$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınırsa (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_8(\zeta) = \frac{+v^4 J_p^2 + 5v^2 J_p s + 5v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 - v^4 J_p^2 \cosh(\zeta)} + v^2 J_p s \cosh(\zeta) + s \sqrt{v^4 J_p^2 + v^2 J_p} \sqrt{v^4 J_p^2 \cosh(\zeta)} - s \sqrt{v^4 J_p^2 \cosh(\zeta)}}{-2a_2 s^2 \cosh(\zeta) + 2a_2 s^2 \cosh(\zeta) v^4 J_p^2 + 2a_2 s^2 - 2a_2 v^4 J_p^2}$$

Son ifadede ζ ya göre integral alınırsa, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümünü

$$U_8(\zeta) = \frac{-3v^2 J_p}{\tanh\left(\frac{\zeta}{2}\right) a_2 (v^2 J_p - s)} \quad (4.58)$$

biçimde elde edilir. Burada $c = \frac{\sqrt{(s^2 - 16v^4 J_p^2) \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2} \right) s c_0}}{s^2 - 16v^4 J_p^2}$ olmak üzere $\zeta = x - ct$ yazılarak (1.1) denkleminin çözümü bulunur.

Durum 9: $P = 1$, $Q = -(1 + m^2)$, $R = m^2$, $F(\zeta) = dc \zeta$ alınırsa

$$\Phi_{9,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{array}{l} S - \frac{\left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 m^2} \right) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 m^2} \\ + \frac{4v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 m^2} \right) s (-1-m^2)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 m^2} \end{array} \right) s^{-1} a_2^{-1}$$

$$- \left(\frac{6 v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 m^2} \right)}{(s^2 - 16v^4 J_p^2 (1+m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 m^2) a_2} \right) dc^2(\zeta)$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınır, (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_{9,1}(\zeta) = 2 \frac{\left(v^2 J_p - \sqrt{v^4 J_p^2} \right)}{(s + 4v^2 J_p) a_2}$$

Son ifadede ζ ya göre integral alınır, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümünü

$$U_{9,1}(\zeta) = -2 \frac{\left(v^2 J_p - \sqrt{v^4 J_p^2} \right) \zeta}{(s + 4v^2 J_p) a_2} \quad (4.59)$$

biçimde elde edilir.

$m \rightarrow 0$ için limit alınır, (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_{9,0}(\zeta) = -2 \frac{\left(4v^4 J_p^2 + s \sqrt{v^4 J_p^2 - 2v^2 J_p s - 8v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 - 3v^2 J_p (\tan(\zeta))^2 s - 12v^2 J_p (\tan(\zeta))^2 \sqrt{v^4 J_p^2}} \right)}{(s^2 + 16v^4 J_p^2) a_2}$$

Son ifadede ζ ya göre integral alınır, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümü

$$U_{9,0}(\zeta) = 2 \frac{(-2\zeta + 3 \tan(\zeta)) v^2 J_p}{(4v^2 J_p - s) a_2} \quad (4.60)$$

biçimde elde edilir. Burada $c = \frac{\sqrt{s^4 + 4s^3 \sqrt{v^4 J_p^2 - 16v^4 J_p^2 s^2 - 64sv^4 J_p^2 \sqrt{v^4 J_p^2} c_0}}{s^2 - 16v^4 J_p^2}$ olmak üzere

$\zeta = x - ct$ yazılarak (1.1) denkleminin çözümü bulunur.

Durum 10: $P = 1 - m^2$, $Q = 2 - m^2$, $R = 1$, $F(\zeta) = sc \zeta$ alınır

$$\Phi_{10,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{array}{l} S - \frac{\left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (2-m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 (1-m^2)} \right) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (2-m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 (1-m^2)} \\ + \frac{4v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (2-m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 (1-m^2)} \right) s(2-m^2)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (2-m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 (1-m^2)} \end{array} \right) s^{-1} a_2^{-1} \\ - \left(\frac{6v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (2-m^2)^2 - 3v^4 J_p^2 (1-m^2)} \right) (1-m^2)}{(s^2 - 16v^4 J_p^2 (2-m^2)^2 + 48v^4 J_p^2 (1-m^2)) a_2} \right) s c^2(\zeta)$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınırsa, (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_{10}(\zeta) = -2 \frac{v^2 J_p - \sqrt{v^4 J_p^2}}{(s^2 + 4v^2 J_p) a_2}$$

Son ifade ζ ya göre integre edilirse, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümünü

$$U_{10}(\zeta) = -2 \frac{v^2 J_p - \sqrt{v^4 J_p^2}}{(s^2 + 4v^2 J_p) a_2} \zeta \quad (4.61)$$

biçimde elde edilir. Burada $c = \frac{\sqrt{s^4 + 4s^3 \sqrt{v^4 J_p^2} - 16v^4 J_p^2 s^2 - 64sv^4 J_p^2 \sqrt{v^4 J_p^2} c_0}}{s^2 - 16v^4 J_p^2}$ olmak üzere

$\zeta = x - ct$ yazılarak (1.1) denkleminin çözümü bulunur.

Durum 11: $P = -(m^2 + 2m + 1)B^2$, $Q = (2 + 2m^2)$, $R = \frac{(2m - m^2 - 1)}{B^2}$,

$F(\zeta) = \left(\frac{m \operatorname{sn}^2(\zeta) - 1}{B(m \operatorname{sn}^2(\zeta) + 1)} \right)$ alınırsa

$$\Phi_{11,m} = \frac{-1}{2 s a_2} \left(\begin{array}{l} S - \frac{\left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (2+2m^2)^2 + 3v^4 J_p^2 (m^2+2m+1)(2m-m^2-1)} \right) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (2+2m^2)^2 - 48v^4 J_p^2 (m^2+2m+1)(2m-m^2-1)} \\ + \frac{4v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 (2+2m^2)^2 + 3v^4 J_p^2 (m^2+2m+1)(2m-m^2-1)} \right) s(2+2m^2)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 (2+2m^2)^2 - 48v^4 J_p^2 (m^2+2m+1)(2m-m^2-1)} \end{array} \right)$$

$$+ \left(\frac{6v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{\frac{v^4 J_p^2 (2+2m^2)^2}{+3v^4 J_p^2 (m^2+2m+1)(2m-m^2-1)}} \right) (m^2+2m+1)(m \operatorname{sn}^2(\zeta)-1)^2}{(s^2-16v^4 J_p^2 (2+2m^2)^2-48v^4 J_p^2 (m^2+2m+1)(2m-m^2-1)) a_2 (m \operatorname{sn}^2(\zeta)+1)^2} \right)$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınır, (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_{11} = \frac{\left(\begin{array}{l} 32s \sqrt{v^4 J_p^2 \cosh^2(\zeta)} - 16sv^2 J_p + 32v^2 J_p s \cosh^4(\zeta) + 512v^4 J_p^2 \cosh^2(\zeta) \\ + 512 \cosh^4(\zeta) v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} - 32v^2 J_p s \cosh^2(\zeta) - 32 \cosh^4(\zeta) s \sqrt{v^4 J_p^2} - 512v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} \cosh^2(\zeta) \\ - 8s \sqrt{v^4 J_p^2} - 512v^4 J_p^2 \cosh^4(\zeta) - 256v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2} - 128v^4 J_p^2 \end{array} \right)}{a_2 s^2 - 256a_2 v^4 J_p^2}$$

Son ifadenin ζ ya göre integrali alınır, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümlerini elde edilir.

$$U_{11}(\zeta) = 12 \frac{v^2 J_p \tanh(2\zeta)}{(s-16v^2 J_p) a_2} \quad (4.62)$$

Burada

$$c = \frac{\sqrt{s^4 + 16s^3 \sqrt{v^4 J_p^2} - 256v^4 J_p^2 s^2 - 4096sv^4 J_p^2 \sqrt{v^4 J_p^2} c_0}}{s^2 - 256v^4 J_p^2}$$

olmak üzere $\zeta = x - ct$ yazılarak (1.1) denkleminin çözümü bulunur.

Durum 12: $P = \left(\frac{1-m^2}{4}\right)$, $Q = \left(\frac{1+m^2}{2}\right)$, $R = \left(\frac{1-m^2}{4}\right)$, $F(\zeta) = nc\zeta + sc\zeta$ alınır

$$\Phi_{12,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{array}{l} s - \frac{\left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2} - 3v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4}\right)^2 \right) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2 + 48v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4}\right)^2} \\ + \frac{4v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2} - 3v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4}\right)^2 \right) s \left(\frac{1+m^2}{4}\right)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2 + 48v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4}\right)^2} \end{array} \right) s^{-1} a_2^{-1}$$

$$- \left(\frac{6v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2} \right)^2 - 3v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4} \right)^2} \right) \left(\frac{1-m^2}{4} \right)}{\left(s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2} \right)^2 + 48v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4} \right)^2 \right) a_2} \right) (nc\zeta + sc\zeta)^2$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınır, (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_{12,1}(\zeta) = -2 \frac{v^2 J_p - \sqrt{v^4 J_p^2}}{(s+4v^2 J_p) a_2}$$

son ifadenin ζ ya göre integrali alırsa, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümünü

$$U_{12,1}(\zeta) = -2 \frac{v^2 J_p - \sqrt{v^4 J_p^2}}{(s+4v^2 J_p) a_2} \zeta \quad (4.63)$$

biçimde elde edilir.

$m \rightarrow 0$ için limit alınır, (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilir.

$$\Phi_{12,0}(\zeta) = \frac{v^4 J_p^2 + s \sqrt{v^4 J_p^2 - 2v^2 J_p s - 2v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 - 3v^2 J_p s} (\sec \zeta)^2} - 6v^2 J_p s \sqrt{v^4 J_p^2 (\sec \zeta) (\tan \zeta) - 3v^2 J_p s (\tan \zeta)^2 - 3v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 (\sec \zeta)^2}} - 3v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 (\sec \zeta)^2 - 6v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 (\sec \zeta) (\tan \zeta) - 3v^2 J_p \sqrt{v^4 J_p^2 (\tan \zeta)^2}}}{-2(s+4v^2 J_p) a_2}$$

son ifadenin ζ ya göre integrali alırsa, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümünü

$$U_{12,0}(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{\left(\zeta \cos \zeta + 6 \sin \zeta + 6 - \arctan \left(\frac{\sin \zeta}{\cos \zeta} \right) \cos \zeta \right) v^2 J_p}{(\cos \zeta) (v^2 J_p - s) a_2} \quad (4.64)$$

biçimde elde edilir. Burada $c = \frac{\sqrt{s^4 + 4s^3 \sqrt{v^4 J_p^2 - 16v^4 J_p^2 s^2 - 64sv^4 J_p^2 \sqrt{v^4 J_p^2} c_0}}{s^2 - 16v^4 J_p^2}$ olmak

üzere $\zeta = x - ct$ yazılarak (1.1) denkleminin çözümü bulunur.

Durum 13: $P = \left(\frac{1-m^2}{4}\right)$, $Q = \left(\frac{1+m^2}{2}\right)$, $R = \left(\frac{1-m^2}{4}\right)$, $F(\zeta) = nc\zeta - sc\zeta$ alınırsa

$$\Phi_{13,m}(\zeta) = \frac{-1}{2} \left(\begin{aligned} & S - \frac{\left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2 - 3v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4}\right)^2} \right) s^2}{s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2 + 48v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4}\right)^2} \\ & + \frac{4v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2 - 3v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4}\right)^2} \right) s \left(\frac{1+m^2}{4}\right)}{s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2 + 48v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4}\right)^2} \end{aligned} \right) s^{-1} a_2^{-1} \\ - \left(\frac{6v^2 J_p \left(s+4 \sqrt{v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2 - 3v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4}\right)^2} \right) \left(\frac{1-m^2}{4}\right)}{\left(s^2 - 16v^4 J_p^2 \left(\frac{1+m^2}{2}\right)^2 + 48v^4 J_p^2 \left(\frac{1-m^2}{4}\right)^2 \right) a_2} \right) (nc\zeta - sc\zeta)^2$$

$m \rightarrow 1$ için limit alınırsa (4.46) denkleminin soliton çözümü elde edilebilir.

$$\Phi_{13}(\zeta) = -2 \frac{v^2 J_p - \sqrt{v^4 J_p^2}}{(s + 4v^2 J_p) a_2}$$

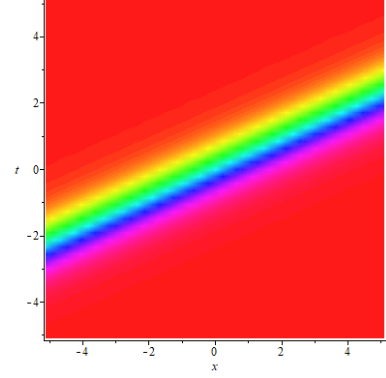
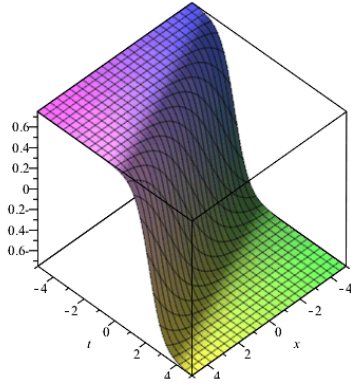
son ifadede ζ göre integral alırsa, (4.44) denkleminin soliton benzeri çözümleri

$$U_{13}(\zeta) = -2 \frac{v^2 J_p - \sqrt{v^4 J_p^2}}{(s + 4v^2 J_p) a_2} \zeta \quad (4.65)$$

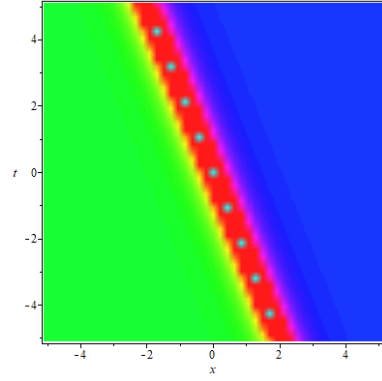
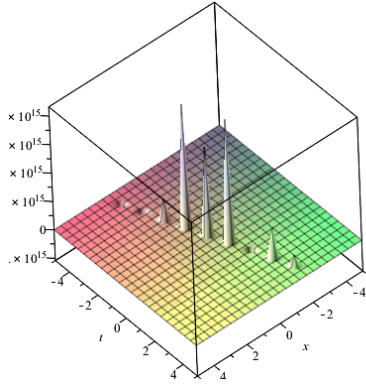
biçimde elde edilir. Burada $c = \frac{\sqrt{s^4 + 4s^3 \sqrt{v^4 J_p^2 - 16v^4 J_p^2 s^2 - 64sv^4 J_p^2} \sqrt{v^4 J_p^2 c_0}}{s^2 - 16v^4 J_p^2}$ olmak üzere

$\zeta = x - ct$ yazılarak (1.1) denkleminin çözümü bulunur.

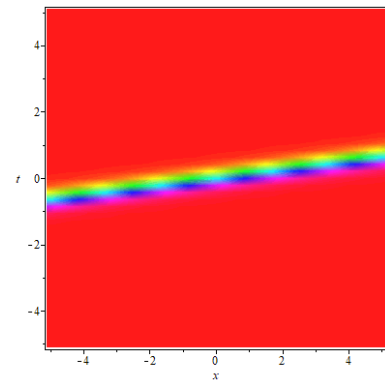
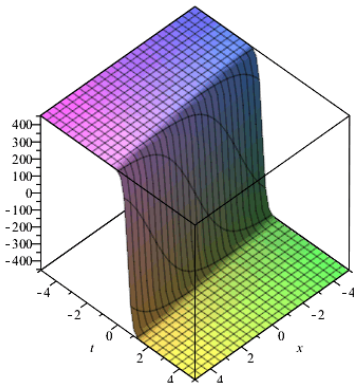
Denklem (1.1) in (4.51), (4.54), (4.57) ve (4.58) çözümüne ait grafikleri şekil 4.1, şekil 4.2, şekil 4.3, ve şekil 4.4, sırasıyla verilmiştir.



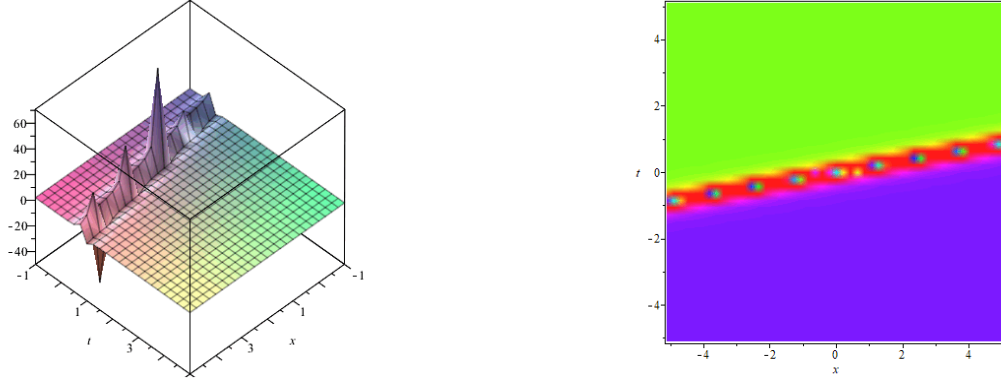
Şekil 4.1. (4.51) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $J_p = 1, v = 1, s = 5, c_0 = 1, b = 1$.



Şekil 4.2. (4.54) denkleminin Peakons (Wazwaz 2009) çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $J_p = 3, v = 2, s = -2, c_0 = 2, b = -3$.



Şekil 4.3. (4.57) denkleminin kink çözümünün (Wazwaz 2009) iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $J_p = 1,6, v = 1,1, s = 2, c_0 = 1,4, b = 0,2$



Şekil 4.4. (4.58) denkleminin Peakons çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $J_p = 1$, $v = 0,5$, $s = 1$, $c_0 = 5$, $b = 0,5$.

4.4. MEE denklemine Genişletilmiş Deneme Denklemler Yönteminin Uygulanması

(1.2) denklemini aşağıdaki katsayılarla kullanalım:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{v_0}{2} u^2 + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (4.66)$$

Denklemden $\zeta = \mu(x - kt)$ dönüşümü yapılırsa, $u(x, t) = u(\zeta)$ için (4.66) denklemini aşağıdaki adi diferansiyel denkleme dönüştür.

$$\mu^2(k^2 - v_0^2)u'' - \frac{1}{2}v_0^2\mu^2(u^2)'' - k^2\mu^4mu'''' = 0 \quad (4.67)$$

Her iki taraf μ^2 ile bölünürse

$$(k^2 - v_0^2)u'' - \frac{1}{2}v_0^2(u^2)'' - k^2\mu^2mu'''' = 0 \quad (4.68)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin ζ ye göre iki defa integre edilirse

$$(k^2 - v_0^2)u - \frac{1}{2}v_0^2u^2 - k^2\mu^2mu'' = 0 \quad (4.69)$$

denkleme ulaşılır. u'' ve u^2 terimleri arasında Tanım 3.2 de (2.4) bağıntısı ile verilen dengeleme prensibi kullanılırsa θ , ϵ ve δ arasındaki matematiksel bağıntı ile $\delta = \theta - \epsilon - 2$ elde edilir. Farklı θ , ϵ ve δ değerleri için, aşağıdaki durumlar incelenir.

Durum 1: $\delta = 1$, $\theta = 3$, $\epsilon = 0$ alınarak, (3.26) denklemi (3.29) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(\eta) = \sum_{i=0}^1 \tau_i \Gamma^i = \tau_0 + \tau_1 \Gamma \quad (4.70)$$

$$u'' = \frac{\tau_1(3\xi_3 \Gamma^2 + \xi_2 \Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0} \quad (4.71)$$

elde edilir. Burada $\xi_3 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ ve $\tau_1 \neq 0$ dır. (3.31) cebirsel denklem sistemi Maple programıyla yardımıyla çözüldüğünde

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau_0, \quad \tau_1 = \tau_1, \quad \xi_0 = \xi_0, \quad \xi_1 = -\frac{3\xi_3 \tau_0(-v_0^2 \tau_0 - 2v_0^2 + 2k^2)}{\tau_1^2 v_0^2}, \quad \xi_2 = \xi_2, \\ \xi_3 &= \xi_3, \quad \zeta_0 = -\frac{3\xi_3(-v_0^2 \tau_0 - v_0^2 + k^2)}{\tau_1 v_0^2}, \quad \zeta_1 = -\frac{3mk^2 \mu^2 \xi_3}{\tau_1 v_0^2}, \quad k = k, \quad \mu = \mu. \end{aligned} \quad (4.72)$$

katsayıları bulunur. Bulunan bu katsayılar (3.27) ve (3.32) ifadelerinde yerine

yazıldığında, $\Pi = \sqrt{-\frac{3mk^2 \mu^2}{\tau_1 v_0^2}}$, olmak üzere

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{\Pi d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^3 + \frac{3(-v_0^2 \tau_0 - v_0^2 + k^2)}{\tau_1 v_0^2} \Gamma^2 + \frac{3\tau_0(-v_0^2 \tau_0 - 2v_0^2 + 2k^2)}{\tau_1^2 v_0^2} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3}}}, \quad (4.73)$$

integrali elde edilir. . Integrali hesaplamak için α_1, α_2 ve α_3 'ler

$$\Gamma^3 - \frac{3(-v_0^2 \tau_0 - v_0^2 + k^2)}{\tau_1 v_0^2} \Gamma^2 - \frac{3\tau_0(-v_0^2 \tau_0 - 2v_0^2 + 2k^2)}{\tau_1^2 v_0^2} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_3}$$

polinom denkleminin köklerini belirtmektedir. Maple programı kullanılarak (4.73) integrali hesaplanırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2\Pi}{\sqrt{\Gamma - \alpha_1}}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \quad (4.74)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2\Pi}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}} \arctan \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}}, \quad \alpha_2 > \alpha_1 \quad (4.75)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{\Pi}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\Gamma - \alpha_2 - \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}}{\sqrt{\Gamma - \alpha_2 + \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}} \right|, \quad \alpha_1 > \alpha_2 \quad (4.76)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2\Pi}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3}} F(\varphi, \iota), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \quad (4.77)$$

elde edilir. Burada

$$F(\varphi, \iota) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \iota^2 \sin^2 \psi}}, \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}}, \quad \iota^2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2}. \quad (4.78)$$

dır. (4.74)-(4.77) denklemleri Γ fonksiyonuna göre çözümlüp (3.26) denkleminde yerine yazıldığında tam hareketli dalga çözümleri yani sırasıyla rasyonel fonksiyon çözümü, hiperbolik fonksiyon çözümleri ve Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 - \frac{12mk^2 \mu^2}{v_0^2 (\mu(x-kt) - \eta_0)^2}, \quad (4.79)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_2 + \tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{2\Pi} (\mu(x-kt) - \eta_0) \right), \quad (4.80)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_2 + \tau_1 (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{2\Pi} (\mu(x-kt) - \eta_0) \right), \quad (4.81)$$

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_3 + \tau_1 (\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sn}^2 \left(\mp \frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3}}{2\Pi} (\mu(x-kt) - \eta_0), \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \right), \quad (4.82)$$

Eğer $\tau_0 = -\tau_1 \alpha_2$ ve $\eta_0 = 0$ olarak alınırsa (4.79) - (4.82) denklemleri sırasıyla rasyonel fonksiyon çözümü, 1.soliton çözümü ve tekil soliton çözümü verir.

$$u(x, t) = -\frac{12mk^2}{v_0^2 (x-kt)^2}, \quad (4.83)$$

$$u(x, t) = -\frac{\tau_1 (\alpha_2 - \alpha_1)}{\cosh^2 \left(\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{2\Pi} (\mu(x-kt)) \right)}, \quad (4.84)$$

$$u(x, t) = -\frac{\tau_1(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sinh^2\left(\frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}}{2\Pi}(\mu(x - kt))\right)}, \quad (4.85)$$

Ayrıca (4.82) jakobi eliptik çözümünde modülü $\iota \rightarrow 1$ olarak alırsak, bu takdirde (4.69) çözümü $\alpha_1 = \alpha_2$ olmak üzere aşağıdaki hiperbolik fonksiyon çözümüne

$$u(x, t) = \tau_1(\alpha_2 - \alpha_3) \tanh^2\left(\mp \frac{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_3}}{2\Pi}(\mu(x - kt))\right), \quad (4.86)$$

ulaşılır. (4.86) çözümü, MEE dairesel çubukta uzunlamasına dalga denkleminin dark soliton çözümlerine dönüştürülebilir.

Durum 2: $\delta = 2$, $\theta = 4$, $\epsilon = 0$ alınarak, (3.26) denklemi (3.29) denkleminde yeniden yazılırsa

$$u(\eta) = \sum_{i=0}^2 \tau_i \Gamma^i = \tau_0 + \tau_1 \Gamma + \tau_2 \Gamma^2 \quad (4.87)$$

$$u'' = \frac{\tau_1(4\xi_4 \Gamma^3 + 3\xi_3 \Gamma^2 + 2\xi_2 \Gamma + \xi_1)}{2\zeta_0} (\tau_1 + \tau_2 \Gamma) + \frac{2\tau_2(\xi_4 \Gamma^4 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_1 \Gamma + \xi_0)}{\zeta_0} \quad (4.88)$$

olarak elde edilir. Burada $\xi_4 \neq 0$, $\zeta_0 \neq 0$ dır. (3.31) cebirsel sistemi Maple programıyla yardımıyla çözüldüğünde

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau_0, \quad \tau_1 = \tau_1, \quad \tau_2 = \tau_2, \quad \xi_4 = \xi_4, \\ \xi_0 &= -\frac{\xi_4[12k^2\tau_2(-\tau_1^2 + 8\tau_0\tau_1) - v_0^2(\tau_1^4 - 12\tau_1^2\tau_2 - 12\tau_1^2\tau_0\tau_2 + 96\tau_0\tau_2^2 + 48\tau_0^2\tau_2^2)]}{16\tau_2^4v_0^2}, \\ \xi_1 &= -\frac{\xi_4\tau_1(v_0^2\tau_1 + 12k^2\tau_2 - 4v_0^2\tau_2 - 12v_0^2\tau_0\tau_2)}{4\tau_2^3v_0^2}, \quad \xi_2 = -\frac{3\xi_4(-v_0^2\tau_1^2 - 4v_0^2\tau_2 + 4k^2\tau_2 - 4v_0^2\tau_2\tau_0)}{4\tau_2^2v_0^2}, \\ \xi_3 &= \frac{2\tau_1\xi_4}{\tau_2}, \quad \zeta_0 = -\frac{12mk^2\mu^2\xi_4}{\tau_2v_0^2}, \quad k = k, \quad \mu = \mu. \end{aligned} \quad (4.89)$$

katsayıları bulunur. Bulunan bu katsayılar (3.27) ve (3.32) ifadelerinde yerine

yazıldığında, $\Pi = \sqrt{-\frac{12mk^2\mu^2}{\tau_2v_0^2}}$, olmak üzere

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{\Pi d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4}\Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4}\Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4}\Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4}}}, \quad (4.90)$$

integrali elde edilir. Integral hesaplamak için $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 'ler

$$\begin{aligned} \Gamma^4 + \frac{2\tau_1}{\tau_2}\Gamma^3 - \frac{3(-v_0^2\tau_1^2 - 4v_0^2\tau_2 + 4k^2\tau_2 - 4v_0^2\tau_2\tau_0)}{4\tau_2^2v_0^2}\Gamma^2 - \frac{\tau_1(v_0^2\tau_1 + 12k^2\tau_2 - 4v_0^2\tau_2 - 12v_0^2\tau_0\tau_2)}{4\tau_2^3v_0^2}\Gamma \\ - \frac{[12k^2\tau_2(-\tau_1^2 + 8\tau_0\tau_1) - v_0^2(\tau_1^4 - 12\tau_1^2\tau_2 - 12\tau_1^2\tau_0\tau_2 + 96\tau_0\tau_2^2 + 48\tau_0^2\tau_2^2)]}{16\tau_2^4v_0^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

polinom denkleminin köklerini belirtmektedir. Maple programı kullanılarak (4.90) integrali hesaplanırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = \frac{2\Pi}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}} F(\varphi, \iota), \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4,$$

elde edilir. Burada

$$F(\varphi, \iota) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \iota^2 \sin^2 \psi}}, \quad \varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(\alpha_2 - \alpha_4)(\Gamma - \alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_4)(\Gamma - \alpha_2)}}, \quad \iota^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}. \quad (4.92)$$

dır. Maple programı kullanılarak (4.91) denklemi çözümlürse $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4v_0\tau_2} \left\{ -2\tau_1v_0 + \sqrt{6\tau_1^2v_0^2 + 24k^2\tau_2 - 24v_0^2\tau_2 - 24v_0^2\tau_0\tau_2 + 2\sqrt{\Omega}} \right\} \quad (4.93)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4v_0\tau_2} \left\{ -2\tau_1v_0 + \sqrt{6\tau_1^2v_0^2 + 24k^2\tau_2 - 24v_0^2\tau_2 - 24v_0^2\tau_0\tau_2 - 2\sqrt{\Omega}} \right\} \quad (4.94)$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{4v_0\tau_2} \left\{ 2\tau_1v_0 + \sqrt{6\tau_1^2v_0^2 + 24k^2\tau_2 - 24v_0^2\tau_2 - 24v_0^2\tau_0\tau_2 - 2\sqrt{\Omega}} \right\} \quad (4.95)$$

$$\alpha_4 = \frac{-1}{4v_0\tau_2} \left\{ -2\tau_1v_0 + \sqrt{6\tau_1^2v_0^2 + 24k^2\tau_2 - 24v_0^2\tau_2 - 24v_0^2\tau_0\tau_2 + 2\sqrt{\Omega}} \right\} \quad (4.96)$$

elde edilir. Burada

$$\Omega = 48\tau_2^2(-v_0^2\tau_0 + 3k^2 - 3v_0^2)(v_0^2\tau_0 + k^2 - v_0^2)$$

$$-3v_0^2\tau_1^2(\tau_1^2v_0^2 - 8v_0^2\tau_2\tau_0 - 8v_0^2\tau_2 + 8k^2\tau_2)$$

dır. (4.93)-(4.96) kullanılarak, (4.66) denkleminin aşağıdaki gibi gerçek çözümleri bulunabilir.

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1\alpha_1 + \frac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4)sn^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2\Pi}(\mu(x - kt) - \eta_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}\right)} + \tau_2 \left\{ \alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4)sn^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2\Pi}(\mu(x - kt) - \eta_0), \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}\right)} \right\}^2 \quad (4.97)$$

Ayrıca (4.97) jakobi eliptik çözümünde modülü $\iota \rightarrow 1$ olarak alırsak, bu takdirde (4.69) çözümü $\alpha_3 = \alpha_4$ olmak üzere aşağıdaki hiperbolik fonksiyon çözümüne

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1\alpha_1 + \frac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4)tanh^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2\Pi}(\mu(x - kt))\right)} + \tau_2 \left\{ \alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4)tanh^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2\Pi}(\mu(x - kt))\right)} \right\}^2 \quad (4.98)$$

dönüşür. Üstelik (4.97) jakobi eliptik çözümünde modülü $\iota \rightarrow 0$ olarak alırsak, bu takdirde (4.69) çözümü $\alpha_3 = \alpha_2$ olmak üzere aşağıdaki trigonometrik fonksiyon çözümüne

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1\alpha_1 + \frac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4)sin^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2\Pi}(\mu(x - kt))\right)} + \tau_2 \left\{ \alpha_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2)}{\alpha_4 - \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_4)sin^2\left(\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}}{2\Pi}(\mu(x - kt))\right)} \right\}^2$$

(4.99)

dönüşür.

Durum 3: $\delta = 1$, $\theta = 4$, $\epsilon = 1$ alınarak, (3.26) denklemi (3.29) denkleminde yeniden yazılırsa

$$u(\eta) = \sum_{i=0}^1 \tau_i \Gamma^i = \tau_0 + \tau_1 \Gamma \quad (4.100)$$

$$u'' = \tau_1 \left[\frac{(4\xi_4 \Gamma^3 + 3\xi_3 \Gamma^2 + 2\xi_2 \Gamma + \xi_1)(\zeta_0 + \zeta_1 \Gamma) - (\xi_4 \Gamma^4 + \xi_3 \Gamma^3 + \xi_2 \Gamma^2 + \xi_1 \Gamma + \xi_0)\zeta_1}{2(\zeta_0 + \zeta_1 \Gamma)} \right] \quad (4.101)$$

elde edilir. Burada $\xi_4 \neq 0$, $\zeta_1 \neq 0$ dır. (3.31) cebirsel denklem sistemi Maple programı yardımıyla çözüldüğünde

$$\begin{aligned} \tau_0 = \tau_0, \quad \tau_1 = -\frac{3mk^2\mu^2\xi_4}{\zeta_1 v_0^2}, \quad \xi_0 = -\frac{\zeta_0(3m^2k^4\mu^4\xi_1\xi_4 - v_0^4\tau_0^2\zeta_0\zeta_1 + 2v_0^2\tau_0\zeta_0\zeta_1 - 2v_0^4\tau_0\zeta_0\zeta_1)}{3m^2k^4\mu^4\xi_1\xi_4}, \\ \xi_1 = \xi_1, \\ \xi_2 = \frac{v_0^4\tau_0^2\zeta_1^2 - 2k^2\zeta_1^2v_0^2\tau_0 + 2v_0^4\tau_0\zeta_1^2 - 3\tau_0mk^2\mu^2\xi_4\zeta_0v_0^2 - 3mk^2\mu^2\xi_4\zeta_0v_0^2 + 3m^2k^4\mu^4}{3m^2k^4\mu^4\xi_4}, \quad \xi_4 = \xi_4, \\ \xi_3 = \frac{mk^2\mu^2\xi_4\zeta_0 - \zeta_1^2v_0^2 - \zeta_1^2v_0^2\tau_0 + k^2\zeta_1^2}{mk^2\mu^2\zeta_1}, \quad \zeta_0 = \zeta_0, \quad k = k, \quad \mu = \mu. \end{aligned} \quad (4.102)$$

katsayıları bulunur. Bulunan bu katsayılar (3.27) ve (3.32) ifadelerinde yerine yazıldığında,

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{\sqrt{\frac{\zeta_0 + \zeta_1 \Gamma}{\xi_4 + \xi_4}} d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4} \Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4} \Gamma^2 + \frac{\xi_1 \Gamma + \xi_0}{\xi_4}}}, \quad (4.103)$$

integrali elde edilir. (4.103) integrali hesaplanırsa (4.69) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Birinci çözüm: $\frac{\zeta_0}{\xi_4} + \frac{\zeta_1}{\xi_4} \Gamma = \Gamma - \alpha_1$, $\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4} \Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4} = (\Gamma - \alpha_1)^4$ alınır

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{2}{\sqrt{\Gamma - \alpha_1}} \Rightarrow \Gamma = \alpha_1 + \frac{4}{(\eta - \eta_0)^2}$$

$$u(x, t) = \tau_0 - \frac{3mk^2\mu^2\xi_4}{\zeta_1 v_0^2} \alpha_1 - \frac{12mk^2\mu^2\xi_4}{\zeta_1 v_0^2} \frac{1}{(\mu(x - kt) - \eta_0)^2}$$

çözümü elde edilir.

İkinci çözüm: $\frac{\zeta_0}{\xi_4} + \frac{\zeta_1}{\xi_4} \Gamma = \Gamma - \alpha_1$, $\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4} \Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4} = (\Gamma - \alpha_1)^2(\Gamma - \alpha_1)^2$

alınırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{2}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Gamma = \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) \tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}(\mu(x - kt) - \eta_0)\right),$$

$$u(x, t) = \tau_0 - \frac{3mk^2\mu^2\xi_4}{\zeta_1 v_0^2} \alpha_1 - \frac{3mk^2\mu^2\xi_4}{\zeta_1 v_0^2} (\alpha_1 - \alpha_2) \tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}(\mu(x - kt) - \eta_0)\right)$$

çözümü elde edilir.

Üçüncü çözüm:

$$\frac{\zeta_0}{\xi_4} + \frac{\zeta_1}{\xi_4} \Gamma = \Gamma - \alpha_1$$
 , $\Gamma^4 + \frac{\xi_3}{\xi_4} \Gamma^3 + \frac{\xi_2}{\xi_4} \Gamma^2 + \frac{\xi_1}{\xi_4} \Gamma + \frac{\xi_0}{\xi_4} = (\Gamma - \alpha_1)^2(\Gamma - \alpha_2)(\Gamma - \alpha_3)$

alınırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = -\frac{2}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\Gamma - \alpha_3}{\alpha_3 - \alpha_1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Gamma = \alpha_3 + (\alpha_3 - \alpha_1) \tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}(\mu(x - kt) - \eta_0)\right)$$

$$u(x, t) = \tau_0 - \frac{3mk^2\mu^2\xi_4}{\zeta_1 v_0^2} \alpha_3 - \frac{3mk^2\mu^2\xi_4}{\zeta_1 v_0^2} (\alpha_3 - \alpha_1) \tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha_3 - \alpha_1}(\mu(x - kt) - \eta_0)\right)$$

çözümü elde edilir. (Seadawy ve Manafian 2018).

4.5. MEE Dairesel Çubukta Uzunlamasına Dalga Denklemine $\tan(\varphi(\xi)/2)$ -Açılım Yönteminin Uygulanması

MEE dairesel çubukta uzunlamasına dalga denklemi (1.2) de verildiği üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{c_0}{2} u^2 + N \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{4.104}$$

biçimindedir. Denklemde $\xi = k(z - ct)$ dönüşümü yapılırsa, $u(z, t) = u(\xi)$ için denklem aşağıda verilen adi diferansiyel denkleme dönüşür.

$$k^2(c^2 - c_0^2)u'' - \frac{1}{2}c_0^2k^2(u^2)'' - Nc^2k^4u'''' = 0 \quad (4.105)$$

(4.105) de iki tarafı k^2 ile bölünürse,

$$(c^2 - c_0^2)u'' - \frac{1}{2}c_0^2(u^2)'' - Nc^2k^2u'''' = 0 \quad (4.106)$$

denklemini elde edilir. Denklem ξ ye göre iki defa integre edilirse

$$(c^2 - c_0^2)u - \frac{1}{2}c_0^2u^2 - Nc^2k^2u'' = 0 \quad (4.107)$$

denklemini elde edilir. (4.107) denkleminin (3.36) biçiminde bir çözümünün olduğunu varsayalım. u'' ve u^2 terimleri arasında Tanım (3.2) de (2.4) bağıntısı ile verilen dengeleme prensibi kullanılırsa $m = 2$ bulunur. (3.36) denkleminin hareketli dalga çözümünün aşağıdaki gibi ifade edilebileceğini varsayalım.

$$u(\xi) = A_0 + A_1 \tan(\phi(\xi)/2) + A_2 \tan^2(\phi(\xi)/2) \\ + B_1 \cot(\phi(\xi)/2) + B_2 \cot^2(\phi(\xi)/2) \quad (4.108)$$

Burada A_0, A_1, A_2, B_1 ve B_2 daha sonra belirlenecek olan sabitlerdir, $A_2 \neq 0, B_2 \neq 0$ ve $\phi = \phi(\xi)$ aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlar

$$\phi'(\xi) = a \sin(\phi(\xi)) + b \cos(\phi(\xi)) + c_1 \quad (4.109)$$

Burada a, b ve c_1 sabitlerdir. Maple programı yardımı ile (4.108) ve (4.109) ifadeleri (4.107) denkleminde yerine yazılırsa, $\tan\left(\frac{\phi}{2}\right)^k, \cot\left(\frac{\phi}{2}\right)^k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) terimlerini bulunduran bir eşitlik elde edilir. Aynı dereceli terimler ortak parantezlere alınır ve elde

edilen katsayıların her biri sıfıra eşitlenirse cebirsel bir denklem sistem elde edilir. Maple yardımı ile cebirsel denklem sistemi $A_0, A_1, A_2, B_1, B_2, a, b, c_1, c$ ve k ya göre çözümlerse

$$\begin{aligned} \text{Durum 1: } a = 0, b = b, c = \sqrt{-\frac{1}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1}} c_0, c_1 = c_1, k = k, B_1 = 0, \\ B_2 = 0, A_0 = -\frac{3Nk^2(b^2 - c_1^2)}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1}, A_1 = 0, A_2 = \frac{3(b - c_1)^2 Nk^2}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1}, \bar{\xi} = \xi + C \end{aligned} \quad (4.110)$$

elde edilir. Elde edilen değerler (4.108) ifadesinde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = -\frac{3Nk^2(b^2 - c_1^2)}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1} + \frac{3(b - c_1)^2 Nk^2}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1} \tan^2\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right) \quad (4.111)$$

elde edilir. $\xi = k(z - ct)$ olmak üzere (4.111) kullanılarak (1.2) denkleminin çözümleri aşağıda verildiği biçimde elde edilir.

Kısım 3.5 de verilen 1. Aile kullanılırsa

$$u_1(z, t) = -\frac{3Nk^2(b^2 - c_1^2)}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1} + \frac{3(c_1^2 - b^2)Nk^2}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1} \tan^2\left(\frac{\sqrt{c_1^2 - b^2} \left(k \left(z - \sqrt{-\frac{1}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1}} c_0 t\right) + C\right)}{2}\right) \quad (4.112)$$

çözümü, 2. Aile kullanılırsa

$$u_2(z, t) = \frac{3(c_1^2 - b^2)Nk^2}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1} + \frac{3(b^2 - c_1^2)Nk^2}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1} \tanh^2\left(\frac{\sqrt{b^2 - c_1^2} \left(k \left(z - \sqrt{-\frac{1}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1}} c_0 t\right) + C\right)}{2}\right) \quad (4.113)$$

çözümü, 5. Aile kullanılırsa

$$u_3(z, t) = \frac{-3Nk^2(b^2 - c_1^2)}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1} + \frac{3(b^2 - c_1^2)Nk^2}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1} \tanh^2\left(\frac{\sqrt{b^2 - c_1^2} \left(k \left(z - \sqrt{-\frac{1}{Nk^2b^2 - Nk^2c_1^2 - 1}} c_0 t\right) + C\right)}{2}\right) \quad (4.114)$$

çözümü, 8. Aile kullanılırsa

$$u_4(z, t) = \frac{3Nk^2 \left(\begin{array}{l} (c_1^2 - b^2)k^2 \left(z - \sqrt{\frac{1}{Nk^2 b^2 - Nk^2 c_1^2 - 1}} c_0 t \right)^2 \\ + 2(c_1^2 - b^2)k \left(z - \sqrt{\frac{1}{Nk^2 b^2 - Nk^2 c_1^2 - 1}} c_0 t \right) C + (c_1^2 - b^2)C^2 + 4 \end{array} \right)}{\left(k \left(z - \sqrt{\frac{1}{Nk^2 b^2 - Nk^2 c_1^2 - 1}} c_0 t \right) + C \right)^2 (Nk^2 b^2 - Nk^2 c_1^2 - 1)} \quad (4.115)$$

çözümü, 11. Aile kullanılırsa

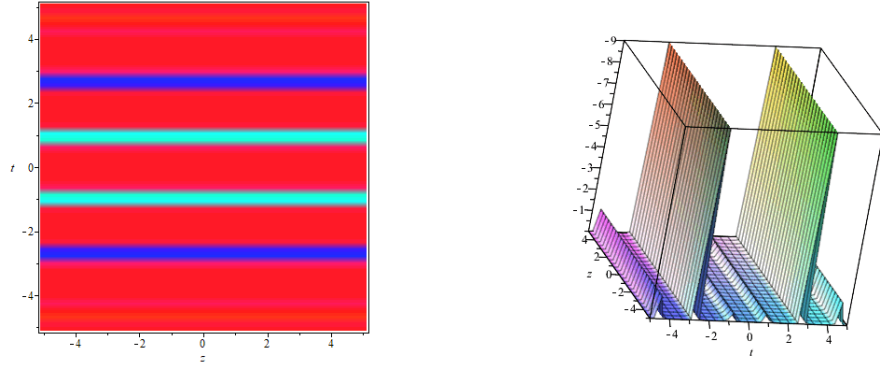
$$u_5(z, t) = \frac{-3Nk^2}{Nk^2 b^2 - Nk^2 c_1^2 - 1} \left((b^2 - c_1^2) - \frac{(b - c_1)^2 \left(b e^{\left(k \left(z - \sqrt{\frac{1}{Nk^2 b^2 - Nk^2 c_1^2 - 1}} c_0 t \right) + C \right)_{-1}} \right)^2}{\left(-b e^{\left(k \left(z - \sqrt{\frac{1}{Nk^2 b^2 - Nk^2 c_1^2 - 1}} c_0 t \right) + C \right)_{-1}} \right)^2} \right) \quad (4.116)$$

çözümü ve 18. Aile kullanılırsa

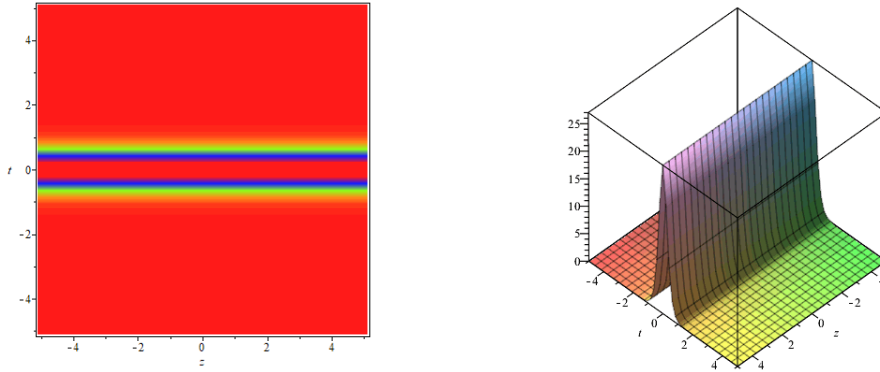
$$u_6(z, t) = \frac{3Nk^2 c_1^2}{-Nk^2 c_1^2 - 1} \left(1 + \tan^2 \left(\frac{c_1 k \left(z - \sqrt{\frac{1}{Nk^2 c_1^2 + 1}} c_0 t \right)}{2} + \frac{C}{2} \right) \right) \quad (4.117)$$

çözümleri elde edilir.

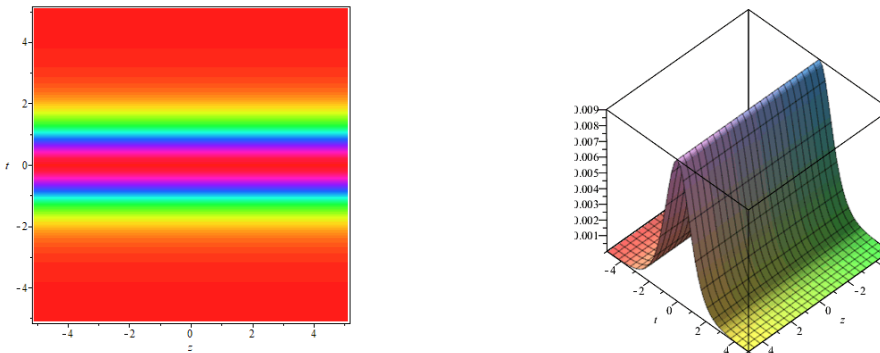
Denklem (1.2) in (4.112), (4.113), (4.114), (4.115), (4.116) ve (4.117) çözümüne ait grafikleri şekil 4.5., şekil 4.6., şekil 4.7., şekil 4.8., şekil 4.9., ve şekil 4.10. sırasıyla verilmiştir.



Şekil 4.5. (4.112) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $b = 1, C = 0, c_0 = 1, c_1 = 2, k = 2, z = 0, N = 0,0001735$
 $u_1(z, t) = -0,006233022846 - 0,006233022846 \tan^2(-0,9989606225\sqrt{3}t)$

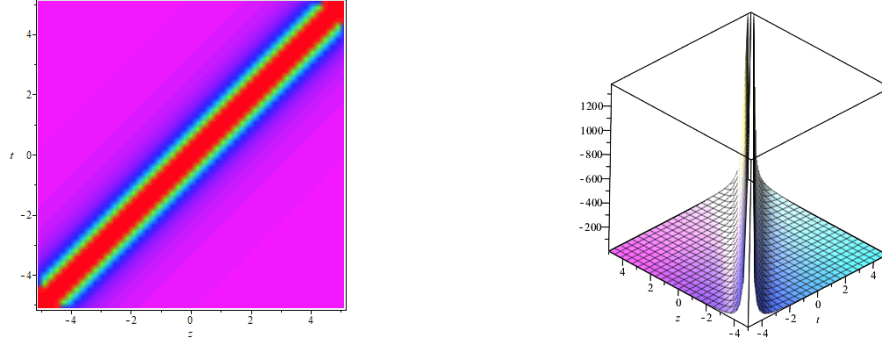


Şekil 4.6. (4.113) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $b = 2, C = 0, c_0 = 1, c_1 = 1, k = 1, z = 0, N = 0,3$
 $u_2(z, t) = 27 - 27 \tanh^2(-1,581138830\sqrt{3}t)$

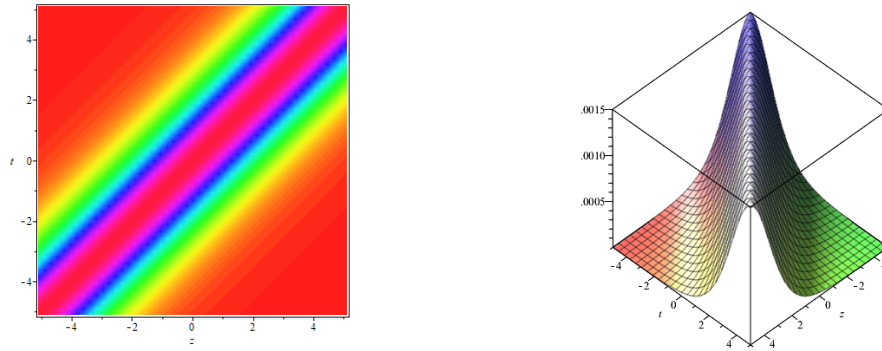


Şekil 4.7. (4.114) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;

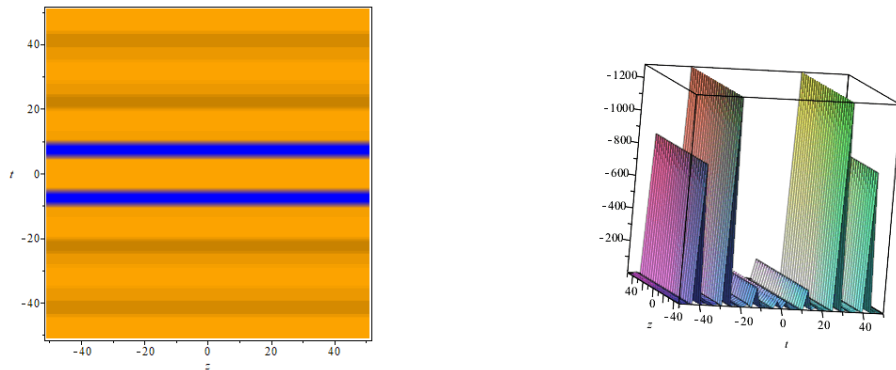
burada parametre değerleri $b = 2, C = 0, c_0 = 1, c_1 = 1, k = 1, z = 0, N = 0,001$
 $u_3(z, t) = 0,009027081243 - 0,009027081243 \tanh^2(0,500756915\sqrt{3}t)$



Şekil 4.8. (4.115) denkleminin Cuspons çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
 burada parametre değerleri $b = 1, C = 0, c_0 = 1, c_1 = 1, k = 1, z = 0, N = 5$
 $u_4(z, t) = -\frac{60}{(z-t)^2}$



Şekil 4.9. (4.116) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri;
 burada parametre değerleri $b = 1, C = 0, c_0 = 1, c_1 = 0, k = 1, N = 0,0005$
 $u_5(z, t) = 0,001500750375 - \frac{0,001500750375(e^{z-1,000250094 t-1})^2}{(-e^{z-1,000250094 t-1})^2}$



Şekil 4.10. (4.117) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $b = 0$, $C = 0$, $c_0 = 1$, $c_1 = 3$, $k = 1$, $z = 0$, $N = 0,5$
 $u_6(z, t) = -2,4545455 - 2,4545455 \tan^2(-0,639602490 t)$

Durum 2:

$$a = \sqrt{\frac{Nk^2b^2c^2 - Nk^2c_1^2c^2 - c^2 + c_0^2}{N}}, \quad b = b, \quad c = c, \quad c_1 = c_1, \quad k = k,$$

$$B_1 = \frac{-6Nkc \sqrt{\frac{Nk^2b^2c^2 - Nk^2c_1^2c^2 - c^2 + c_0^2}{N}}(b+c_1)}{c_0^2}, \quad B_2 = -\frac{3Nk^2c^2(b^2+2bc_1+c_1^2)}{c_0^2},$$

$$A_0 = \frac{3Nk^2c^2(b^2-c_1^2)}{c_0^2}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \bar{\xi} = \xi + C \quad (4.118)$$

elde edilir. Elde edilen değerler (4.108) ifadesinde yerine yazılırsa

$$u(\xi) = \frac{3Nk^2c^2(b^2-c_1^2)}{c_0^2} - \frac{6Nkc \sqrt{\frac{Nk^2b^2c^2 - Nk^2c_1^2c^2 - c^2 + c_0^2}{N}}(b+c_1)}{c_0^2} \cot\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right) - \frac{3Nk^2c^2(b^2+2bc_1+c_1^2)}{c_0^2} \cot^2\left(\frac{\phi(\xi)}{2}\right) \quad (4.119)$$

elde edilir. $\xi = k(z - ct)$ olmak üzere (4.111) kullanılarak (1.2) denkleminin çözümleri aşağıda verildiği biçimde elde edilir.

Kısım 3.5 de verilen 1. Aile kullanılırsa c yerine c_1 alınarak ve

$$P = \frac{1}{2}(-ckt + kz + C) \sqrt{-\frac{(c^2-c_0^2)}{Nk^2c^2}},$$

olmak üzere

$$u_7(z, t) = -\frac{3k^2c^2(c^2-c_0^2)(b^2-c_1^2)(\tan^2(P)+1)}{c_0^2 \left(-\sqrt{-\frac{(c^2-c_0^2)}{Nk^2c^2}} \tan(P) kc + \sqrt{-\frac{Nk^2b^2c^2 - Nk^2c_1^2c^2 - c^2 + c_0^2}{N}} \right)^2} \quad (4.120)$$

çözümü, 2. Aile kullanılırsa c yerine c_1 alınarak ve

$$\Lambda = \frac{1}{2}(-ckt + kz + C) \sqrt{\frac{(c^2-c_0^2)}{Nk^2c^2}},$$

olmak üzere

$$u_8(z, t) = - \frac{3k^2 c^2 (b^2 c^2 - c_1^2 c^2 - b^2 c_0^2 + c_1^2 c_0^2)}{c_0^2 \left(\sqrt{\frac{c^2 - c_0^2}{Nk^2 c^2}} \sinh(\Lambda) kc + \left(\sqrt{-\frac{Nk^2 b^2 c^2 - Nk^2 c_1^2 c^2 - c^2 + c_0^2}{N}} \cosh(\Lambda) \right) \right)^2} \quad (4.121)$$

çözümü, 3. Aile kullanılırsa c yerine c_1 alınarak ve

$$\Omega = \frac{1}{2} (-ckt + kz + C) \sqrt{\frac{Nk^2 c_1^2 c^2 + c^2 - c_0^2}{Nk^2 c^2}},$$

olmak üzere

$$u_9(z, t) = \frac{- \left(3k^2 c^2 (b + c_1) \left(\begin{aligned} & -N \tanh^2(\Omega) b k^2 c_1^2 c^2 + N \tanh^2(\Omega) k^2 c_1^3 c^2 + N b k^2 c_1^2 c^2 + N k^2 c_1^3 c^2 \\ & + 2 \sqrt{\frac{Nk^2 c_1^2 c^2 + c^2 - c_0^2}{Nk^2 c^2}} \sqrt{-\frac{Nk^2 b^2 c^2 - Nk^2 c_1^2 c^2 - c^2 + c_0^2}{N}} c_1 \tanh(\Omega) kcN \\ & + (-bc^2 + bc_0^2 + c^2 c_1 - c_0^2 c_1) \tanh^2(\Omega) + bc^2 - bc_0^2 + c^2 c_1 - c_0^2 c_1 \end{aligned} \right) \right)}{c_0^2 \left(\sqrt{\frac{Nk^2 c_1^2 c^2 + c^2 - c_0^2}{Nk^2 c^2}} \tanh(\Omega) kc + \sqrt{-\frac{Nk^2 b^2 c^2 - Nk^2 c_1^2 c^2 - c^2 + c_0^2}{N}} \right)^2} \quad (4.122)$$

çözümü, 4. Aile kullanılırsa c yerine c_1 alınarak ve

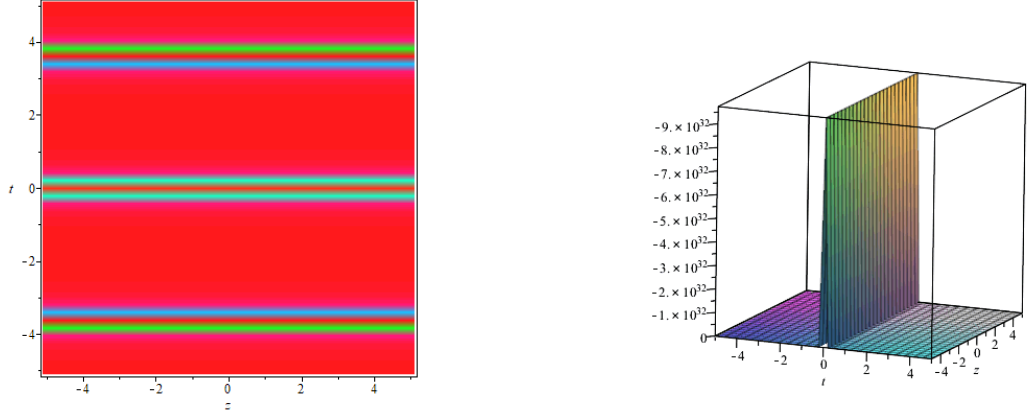
$$\Pi = \frac{1}{2} (-ckt + kz + C) \sqrt{\frac{Nk^2 c_1^2 c^2 - c^2 + c_0^2}{Nk^2 c^2}},$$

olmak üzere

$$u_{10}(z, t) = \frac{- \left(3k^2 c^2 (b + c_1) \left(\begin{aligned} & -N \tan^2(\Pi) b^3 k^2 c^2 + N \tan^2(\Pi) c_1 k^2 b^2 c^2 + N b^3 k^2 c^2 + N k^2 b^2 c_1 c^2 \\ & + 2N \sqrt{\frac{Nk^2 c_1^2 c^2 - c^2 + c_0^2}{Nk^2 c^2}} \sqrt{-\frac{Nk^2 b^2 c^2 - Nk^2 c_1^2 c^2 - c^2 + c_0^2}{N}} c_1 \tan(\Pi) kcb \\ & + (bc^2 - bc_0^2 - c^2 c_1 + c_0^2 c_1) \tan^2(\Pi) - bc^2 + bc_0^2 - c^2 c_1 + c_0^2 c_1 \end{aligned} \right) \right)}{c_0^2 \left(\sqrt{\frac{Nk^2 c_1^2 c^2 - c^2 + c_0^2}{Nk^2 c^2}} \tan(\Pi) kc - \sqrt{-\frac{Nk^2 b^2 c^2 - Nk^2 c_1^2 c^2 - c^2 + c_0^2}{N}} \right)^2} \quad (4.123)$$

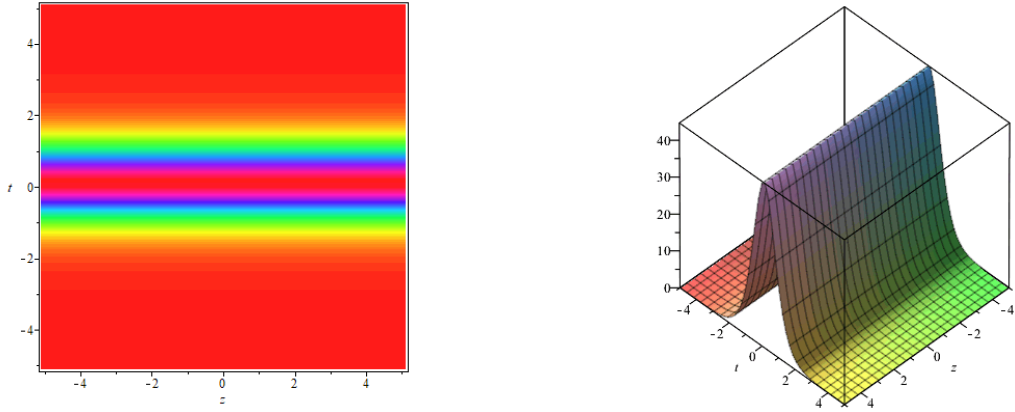
çözümleri elde edilir.

Denklem (1.2) in (4.120) , (4.121) , (4.122) ve (4.123) çözümüne ait grafikleri şekil 4.11. , şekil 4.12. , şekil 4.13. , ve şekil 4.14. sırasıyla verilmiştir.



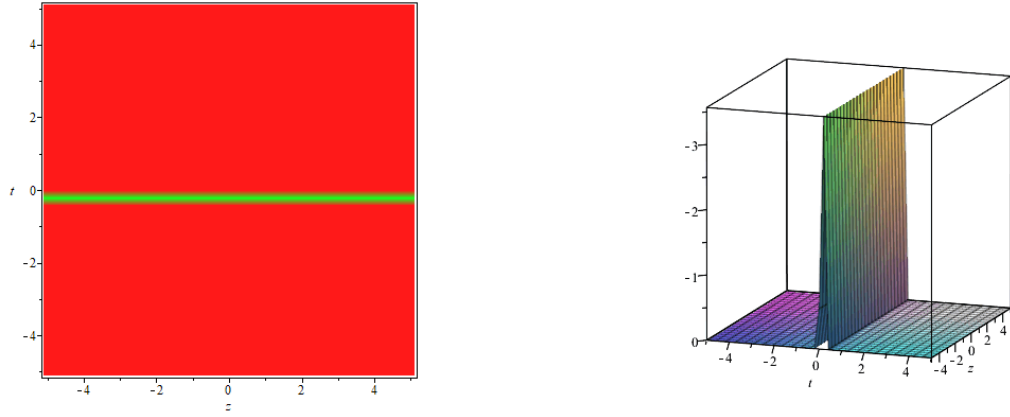
Şekil 4.11. (4.120) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $k = 1, c = 1, b = 1, c_1 = 2, c_0 = 2, z = 0, C = 0, N = 1$

$$u_7(z, t) = -\frac{9}{4} \frac{\tan^2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}t\right)+1}{\tan^2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}t\right)}$$



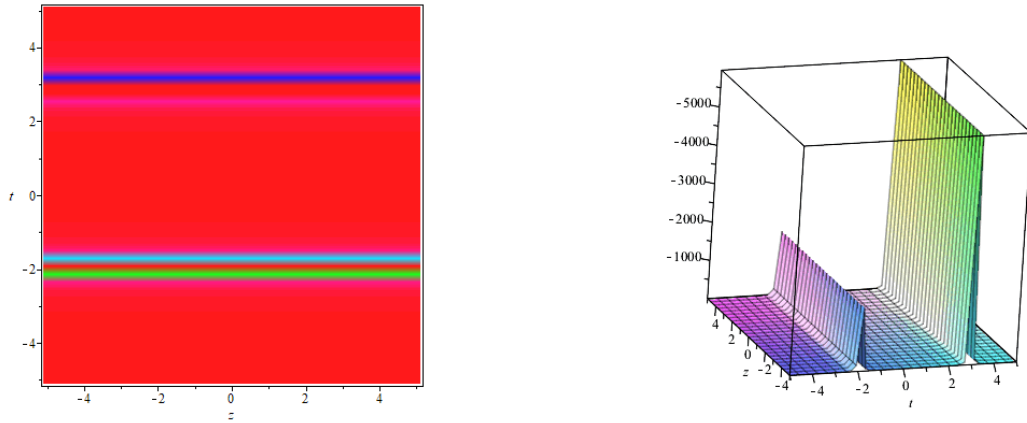
Şekil 4.12. (4.121) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $k = 1, c = 4, b = 1, c_1 = 4, c_0 = 1, z = 0, C = 0, N = 3$

$$u_8(z, t) = \frac{2160}{\left(\sinh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)-7 \cosh\left(\frac{\sqrt{5}}{2}t\right)\right)^2}$$



Şekil 4.13. (4.122) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $k = 1, c = 2, b = 4, c_1 = 0, c_0 = 1, z = 0, C = 0, N = 0,003$

$$u_9(z, t) = \frac{14400}{(158,1138830 \sinh(15,81138830t) - 152,9705854 \cosh(15,81138830t))^2}$$



Şekil 4.14. (4.123) denkleminin soliton çözümünün iki boyutlu ve üç boyutlu grafikleri; burada parametre değerleri $k = 1, c = 2, b = 0, c_1 = 2, c_0 = 3, z = 0, C = 0, N = 3$

$$u_{10}(z, t) = - \frac{80 \tan^2\left(\frac{\sqrt{15}}{6}t\right) + 1}{\left(\sqrt{5} \tan\left(\frac{\sqrt{15}}{6}t\right) + \sqrt{43}\right)^2}$$

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan elastik dairesel çubuktaki tek dalgaların modellenmesi ile elde edilen dördüncü mertebeden lineer olmayan EE ve MEE kısmi diferensiyel denklemleri ele alındı.

EE denklemine literatürde daha önce çalışılmış olan Lie simetri analizi yöntemi uygulandı. Denklemi değişmez bırakan Lie grup dönüşümleri yardımı ile vektör alanı belirlenerek, dördüncü uzanım (prolongation) kullanıldı. Denklemde değişmezlik koşulu ve bu koşul yardımıyla aşırı belirleyici denklem sistemi elde edildi. Bu sistem çözülerek en genel sonsuz küçük üreticinin katsayı fonksiyonları elde edildi. Bu fonksiyonlar yardımı ile beş üreteç elde edilerek komütatör tabloları yapıldı. Her bir simetri üreticisine karşılık gelen dönüşüm grupları elde edilerek invariantlar bulundu ve simetri üretici altında adi diferensiyel denklem indirgemeleri yapıldı. Bulunan beşinci üreteç ile yapılan indirgemede elde edilen diferensiyel denklemin çözümünü elde etmek için seri çözüm yöntemi kullanıldı. Aynı denkleme literatürde var olmayan (G'/G) yöntemi uygulanıp bu yöntem için bilinen üç durum incelenerek denklemin çözümleri elde edildi. Bazı durumlarda indirgenmiş üçüncü mertebeli adi diferensiyel denklemin çözümünden dördüncü mertebeli denklemin çözümüne geçişte, bazı çözümlerin integrallenebilir olmaması, bu yöntemin bu denkleme uygulanmasının olumsuz yönü olarak belirtilebilir.

Tezdeki EE denklemine uygulanan literatürde var olan üçüncü yöntem, gezen dalga çözümlerini araştırmak için uygulanan, F açılım yöntemidir. Bu yöntem ile farklı durumlar için kesin çözümler oluşturuldu. $m \rightarrow 0$ için trigonometrik, $m \rightarrow 1$ için hiperbolik fonksiyonları içeren bu çözümler fiziksel bazı problemlerin açıklanmasında önemli rol oynar. Elde edilen bu çözümler parlak, koyu, aykırı solitonları ve bunların kombinasyonlarını bulundurur.

Literatürde var olan, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için geliştirilen ve genişletilmiş deneme denklem yöntemi adı verilen bir integrasyon yönteminin MEE denklemindeki etkinliği araştırılmıştır.

Daha sonra, $\tan(\varphi(\xi)/2)$ - açılım yönteminin MEE denklemine uygulanması yapılmıştır ki tezin bu kısmı literatürde var olmayan bir çalışmadır. Farklı durumlar incelenerek denklemin \tan , \tanh , rasyonel, çözümleri elde edilmiştir. Tezde son olarak ele alınan yöntemlerde ortaya çıkan çözümlerin, parametrelere özel değerler verilerek nümerik simülasyonları yapılmıştır.

Tam çözümler kısmi diferensiyel denklemler için büyük önem taşımaktadır. Elde edilen tam çözümler, başlangıç-sınır değer problemlerinde başlangıç değeri olarak ve nümerik şemalar için başlangıç verisi olarak kullanılabilir. Ayrıca elde edilen tam çözümler kararlılık analizinde de kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Anco, S.C., Bluman, G. 2002.** Direct construction method for conservation laws of partial differential equations Part I: Examples of conservation laws classifications. Cambridge University Press, United Kingdom ,566 pp.
- Bekir, A. 2008** Application of the (G'/G) - expansion method for nonlinear evolution equation. *Physics Letters A*, 372(7): 3400-3406.
- Bluman, G., Kumei, S. 1989.** Symmetries and Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 81, *Springer-Verlag*, New York, USA, 425 pp.
- Çağlıyan, M., Çelebi, O.S. 2013.** Kısmi diferensiyel denklemler. Dora Yayıncılık, Bursa,276 s.
- Çelik, N. , Seadawy, A. Sağlam Özkan, Y. , Yaşar, E. 2021.** A model of solitary waves in a nonlinear elastic circular rod: Abundant different type exact solutions and conservation laws. *Chaos, Solitons and Fractals.*,143(19):1-19
- Doğan Çankal, P. 2020.** Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemler ve Tam Çözümleri *Yüksek Lisans Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.
- Ebaid, A., Aly, E.H. 2012.** Exact solutions for the transformed reduced Ostrovsky equation via the F-expansion method in terms of Weierstrass-elliptic and Jacobian-elliptic functions,49(13):296-308
- Giresunlu İ.B., Özkan, Y.S., Yaşar, E.2017** On the exact solutions lie symmetry analysis and conservation laws of Schamel-Korteweg-de- Vries equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (40) 3927-3936
- Guo, S., Zhou, Y. 2010.** The Extended (G'/G) -Expansion Method and its Applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like Equations and Coupled Hirota–Satsuma KdV Equations. *Appl. Math. Comput.*, 215 (8) : 3214-3221
- Gurefe, Y., et al. 2012.** Application of an Irrational Trial Equation Method to High Dimensional Nonlinear Evolution Equations. *J. Adv. Math. Stud.* 5(8), 41-47,
- Gurefe, Y., et al. 2013.** Extended Trial Equation Method to Generalized Nonlinear Partial Differential Equations, *Appl. Math. Comput.* 219(10), 5253-5260
- Güner, Ö. 2014.** Kesirli Mertebeli Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri. *Doktora Tezi*, ESOGÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Eskişehir.
- Ibragimov, N. H. 1995.** CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol 1-3, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA 209 PP.
- Ibragimov, N.H., Kovalev, V.F. 2009.** Approximate and Renormgroup Symmetries. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 145 pp.
- Liu, S., Fu, Z., Zhao, Q.2001.** Jacobi elliptic function method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. *Phys. Lett. A*, 289: 69-74.
- Liu, X., Zhang, W., Li, Z.2015.** Application of improved (G' /G) -expansion method to travelling wave solutions of two nonlinear evolution equations, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics Vol. 4*, (9):122-130.
- Liu, CS.2019.** Trial equation method to nonlinear evolution equations with rank inhomogeneous: mathematical discussions and its applications. *Shi 2006 Commun. Theor. Phys.*, 219(45):1- 45
- Manafian, J., Lakestani,M.2015.** New improvement of the expansion methods for solving the generalized Fitzhugh–Nagumo equationwith time-dependent coefficients. *Int. J. Eng. Math*,107978 (35):1–35.

- Manafian, J., Aghdaei, M.F., Zadahmad, M. 2016.** Analytic study of sixth-order thin-film equation by $\tan(\varphi/2)$ -expansion method. *Opt. Quantum Electron*, 48(16): 1–16.
- Manafian, J. 2016.** Optical soliton solutions for Schrödinger type nonlinear evolution equations by the $\tan(\varphi/2)$ -expansion method. *Optik Int. J. Electron Opt*, 127 (23): 4222–4245.
- Naz, R., Mahomed, F.M., Mason, D.P. 2008.** Comparison of different approaches to conservation laws for some partial differential equations in fluid mechanics. *Applied Mathematics and Computation*, 205(1):212-230.
- Olver, P.J. 1986.** Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer-Verlang, New York, USA, 167 pp.
- Olver, P.J. 1993.** Application of lie groups to differential equations .Springer-Verlang, New York, USA, 259 pp.
- Pandir, Y., et al. 2012.** Classifications of Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations with Generalized Evolution, *Abstr. Appl. Anal.*, (16):1-16.
- Sağlam, Y.S., Yaşar, E. 2020** Multiwave and interaction solutions and Lie symmetry analysis to a new $(2+ 1)$ -dimensional Sakovich equation, *Alexandria Engineering Journal* (59) 5285-5293
- San, S. 2011.** Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Simetrisi ve Çözümleri. *Yüksek Lisans Tezi*, EOÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Eskişehir.
- Shen, S., Pan, Z., A. 2003.** Note on the Jacobi Elliptic Function Expansion Method, *Phys. Lett. A*, 308(6): 143-148.
- Sendi, C.T., Manafian, J., Mobasser, H., Mirzazadeh, Q., Zhou, M., Bekir, A. 2018.** Application of the ITEM for solving three nonlinear evolution equations arising in fluid mechanics, *Springer Nature B.V.* 95(16):1-16
- Seadawy, A., Manafian, J. 2018.** New soliton solution to the longitudinal wave equation in a magneto-electro-elastic circular rod, *Results Phys* 8 (10):1158-1167
- Tian, Yi.** Quasi hyperbolic function expansion method and tanh-function method for solving vibrating string equation and elastic rod equation. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control* (38):3–4
- Yaşar, E. 2009.** Oluşum Türü Denklemlerin Yerel ve Yerel Olmayan Yeni Korunum Kanunları, *Doktora Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.
- Yıldırım, Y. 2019.** Oluşum Tipi Lineer Olmayan Parça Türevli Diferensiyel Denklemlerin Tam Çözümleri. *Doktora Tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.
- Wazwaz, A. 2009.** Partial differential equations and solitary waves theory, Springer, Chicago, USA, 471 pp.
- Wang, M.L., Li, X., Zhang, J. 2008.** The (G' / G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letter A*, 372(7): 417-423.
- Wei Z , Gui-tong Y. 1986.** The propagation of solitary waves in a nonlinear elastic rod, *Appl Math Mech* ,(7):615-626.
- Zayed, E.M.E. 2009.** The (G' / G) -expansion method and its application to some nonlinear evolution equations. *J. Appl. Math. Comp.* 30:89-103, (2009).
- Zhang, J., Wei, X., Lu, Y. 2008.** A Generalized (G' / G) -Expansion Method and its Applications, *Phys. Lett. A*, 372(6): 3653-3658.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet Samir ÖZCAN
Doğum Yeri ve Tarihi : ŞAM 12.03.1987
Yabancı Dil : Arapça - İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Şam - İbnü'l Esir - Fen Lisesi (2004)
Lisans : Şam Üniversitesi
Fen Fakültesi
Matematik Bölümü (2008)

Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2021)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar : Bilgisayar laboratuvarında uygulamalı Öğretim Görevlisi
/Şam Üniversitesi (2008-2011)
Uluslararası Dar Al Arqam Okulu
/ Amman,Ürdün(2012-2014)
Akdemistanbul Dil Eğitim kurumları/İstanbul(2014,...)

İletişim (e-posta) : hoca.samir.87@gmail.com

Yayımları :