

ASILI KÜTLE-YAY SİSTEMLERİNE SAHİP KOMPOZİT EĞRİ KİRİŞİN DİNAMİK KARARLILIK ANALİZİ

Seda VATAN CAN *^{ID}
Hasan ÖZTÜRK **^{ID}

Alınma: 10.09.2020; düzeltme: 19.12.2020; kabul: 20.12.2020

Öz: Bu çalışmada, asılı kütle-yay sistemine sahip tabakalı kompozit eğri bir kirişin dinamik kararlılığı araştırılmıştır. Kompozit eğri kiriş sabit kesit alana sahip Euler-Bernoulli kirişi olarak dikkate alınmış ve etkin esneklik modülü kullanılmıştır. Bolotin yaklaşımı ve enerji denklemlerine dayanan sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak eğri kiriş modeli oluşturulmuştur. MATLAB’de geliştirilen bir sonlu elemanlar kodu ile elde edilen kompozit eğri kirişe ait doğal frekanslar, ANSYS programında elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Sonuçların tutarlı olduğu görülmüştür. Tabakalı kompozit eğri kirişin farklı fiber açıları için asılı kütle-yay sisteminin sayısının ve konumunun kirişin kararsızlık bölgelerine etkileri, dinamik yük parametresi ve statik yük parametresi de dikkate alınarak incelenmiştir. Asılı kütle-yay sistemi olmayan eğri kiriş ve asılı kütle-yay sistemine sahip eğri kirişe ait dinamik kararsızlık bölgeleri şekillerle sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: eğri kiriş, asılı kütle-yay, titreşim analizi, dinamik kararlılık, sonlu elemanlar

Dynamic Stability Analysis of a Composite Curved Beam with Suspended Mass-Spring Systems

Abstract: In this study, the dynamic stability of a laminated composite curved beam with a suspended mass-spring system is investigated. The composite curved beam is considered as a uniform cross-sectional area Euler-Bernoulli beam and effective flexibility module is utilized. The curved beam model is obtained by using the Bolotin approach and the finite element model based on energy equations. The natural frequencies of the composite curved beam obtained with a finite element code developed in MATLAB are compared with the results of ANSYS model. It is found that the results are very good agreement. The effects of the number and position of the suspended mass-spring system on the instability regions of the beam are surveyed considered that also dynamic load parameter and static load parameter for different fiber orientation angles of the layered composite curved beam. The dynamic stability regions of both types of the curved beam with and without suspended spring-mass system are presented in figures.

Keywords: curved beam, suspended spring-mass, vibration analysis, dynamic stability, finite elements

* Mekatronik Mühendisliği Bölümü, Hasan Ferdi Turgutlu Teknoloji Fakültesi, Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Turgutlu, Manisa 45400, Türkiye

** Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca, İzmir 35390, Türkiye
İletişim Yazarı: Seda Vatan Can (seda.vatan@cbu.edu.tr)

1. GİRİŞ

Eğri kirişler, köprüler, uzay endüstrisi, savunma sanayi, gemiler gibi birçok mühendislik alanında kullanılan yapılardır. Bu tip mühendislik yapıları çeşitli yüklere maruz kalabilirler. Bu yüklemeler altında çalışmalarını sürdürebilmeleri ve yapı bütünlüğünü koruyabilmeleri gerekmektedir. Bu nedenledir ki bu yapıların dinamik kararlılıkları oldukça önemlidir. Kompozit teknolojisinin gelişmesi ve hafifliğin yanında getirdiği yüksek dayanım da bu yapıların kompozit olarak tercih edilmesine neden olmaktadır.

Eğri kirişler uzun yıllardır birçok çalışmada farklı açılardan ele alınmıştır. Dinamik kararlılığın yanı sıra özellikle titreşim problemleri açısından da incelenmişlerdir. Farklı özelliklere sahip eğri kirişler için yapılan dinamik kararlılık, zorlanmış titreşim ve doğal frekans analizi araştırmalarının birçoğunda sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. (Ahmed, 1971; Briseghella ve diğ., 1998; Çankaya ve diğ., 2017; Petyt ve Fleischer, 1971; Rattanawangcharoen ve diğ., 2004; Sabuncu, 1978; Thomas ve Abbas, 1975) Sabir ve Ashwell (1971) eğri kirişe ait sonlu elemanların şekil fonksiyonları açısından karşılaştırılmasını yaparak çözüm yöntemine önemli katkıda bulunmuşlardır. Eğri kiriş yapılarının titreşim problemi olarak incelendiği diğer çalışmalarda, eğri kirişlerin eğrilik yarıçapının, kesit alanının ve merkez açısının titreşim davranışlarına etkisi ve farklı sınır koşullarındaki davranışları gibi titreşim karakteristikleri ortaya konmuştur. (Chang ve Hodges, 2009; Chen ve Shen, 1998; Eisenberger ve Efraim, 2001; Eroğlu ve Tüfekçi, 2018; Huang ve diğ., 1998; Huang ve diğ., 2003; Jun ve diğ., 2014; Karami ve Malekzadeh, 2004; Kawakami ve diğ., 1995; Kiss ve Szeidl, 2015; Lee ve Wilson, 1990; Petyt ve Fleischer, 1971; Rao ve Sundararajan, 1969; Sabuncu, 1978; Tong ve diğ., 1998; Tüfekçi ve Yiğit, 2013; Wu ve diğ., 2013; Yang ve diğ., 2008; Zare, 2019) Eğri kirişler üzerinde meydana gelen yapısal çatlakların ve bu çatlakların konum ve boyutsal özelliklerinin, titreşim davranışına olan önemli etkileri de yapılan çalışmalar sayesinde belirlenmiştir. (Daş ve Yılmaz, 2018a; Eroğlu ve diğ., 2019)

Bolotin (1962), çubuk, eğri kiriş ve farklı yapıların dinamik kararlılıkları ile ilgili birçok çalışma yapmıştır. Lim ve Kang (2004) ise düzlem dışı meydana gelen burkulmalar açısından ince eğri kirişler üzerine sundukları çalışma ile eğri kirişin statik kararlılık durumunun anlaşılmasına katkı sağlamışlardır. Öztürk ve diğ. (2006) yaptığı çalışma ile değişken kesit alanına sahip eğri kirişlerin kararlılıklarının merkez açısına, kesit alanındaki değişkenliğe, statik ve dinamik yük parametresine göre nasıl değiştiğini araştırmışlardır. Eğri kirişleri kompozit yapıya sahip olarak dikkate alan çalışmalarda, eğri kiriş yapılarının titreşim davranışları ve bu davranışlarını etkileyen faktörler incelenmiştir. (Ahmed, 1971; Daş ve Yılmaz, 2018b; Günyar ve diğ., 2012a; Matsunaga, 2004; Kovács, 2013) Yine bu yapıların dinamik kararlılıkları üzerine yapılan çalışmalarda hem burkulma yönünden hem de dinamik kararlılıkları yönünden bu yapıların tabakalarının etkisi ve diğer birçok faktörün etkisi araştırılmıştır. (Chen ve diğ., 2002; Günyar ve diğ., 2012b; Kıral ve diğ., 2015; Öztürk ve Sabuncu, 2005; Sahu ve Datta, 2003; Karaağaç ve diğ., 2007, Karami ve diğ., 2019)

Eğri kirişler mühendislik yapılarında genellikle eşdeğer kütle-yay sistemleri olarak düşünülebilecek yapılar ile bulunurlar. Kompozit eğri kirişler üzerine yapılan çalışmalarda her ne kadar titreşim, burkulma ve kararlılık durumları birçok çalışmada incelenmiş olsa da bu yapılar üzerine asılan kütle-yay sistemlerinin etkileri incelenmemiştir. Vatan Can ve diğ. (2020) tarafından asılı kütle-yay sisteminin, izotropik eğri kiriş yapılarının dinamik kararlılık bölgelerine olan etkileri üzerine bir çalışma yapılmıştır. Ancak kompozit eğri kirişlerin farklı fiber açısı durumları için asılı kütle-yay sistemlerinin etkilerini inceleyen bir çalışma literatürde mevcut değildir. Asılı kütle-yay sistemlerinin kompozit yapının dinamik kararlılığına etkisi olacağı ön görülebilir. Literatürde bu konu üzerine yapılmış bir çalışma bulunmamaktadır. Bu nedenle makaledeki çalışma hem literatüre katkısı hem de mühendislik uygulamaları açısından önemlidir. Bu önemli eksikğin giderilmesi amacıyla bu çalışmada asılı kütle-yay sistemlerine sahip kompozit eğri kirişin dinamik kararlılık analizi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak araştırılmıştır. Kompozit eğri kiriş sabit kesit alanlı Euler-Bernoulli kirişi olarak dikkate alınmış ve etkin

esneklik modülü kullanılmıştır. Çalışma sonucunda, tabakalı kompozit eğri kirişin, tabakalarının fiber oryantasyon açılarının yönelimine, asılı kütle-yay sistemi sayısına ve konumuna, statik ve dinamik yük parametrelerine göre dinamik kararlılık bölgelerinin nasıl değiştiği sunulmuştur.

2. TEORİK ANALİZ

2.1. İki Boyutlu Tek Yönlü Bir Tabaka için Efektif Elastisite Modülü

Kompozitler bilindiği üzere, makro seviyede birbiri içerisinde çözünmeyen takviye fazı ve matris olarak tanımlanan iki veya daha fazla materyalden oluşur. Takviye fazı, lif, parça ya da pul gibi ayrık yapıya sahipken matris ise genellikle sürekli bir yapıya sahiptir. Bu ayrı yapılardan oluşan materyallerin bir araya gelmesi ile farklı materyal özelliklerine sahip yeni bir materyal ortaya çıkar.

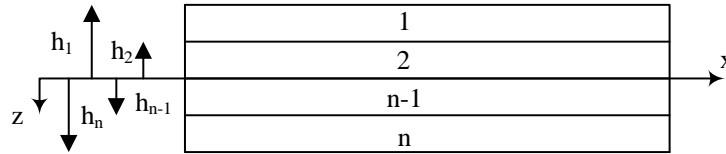
Simetrik tabakalı çubuğun düzlem içi bileşke kuvvetleri ve düzlem içi gerilmeleri sıfır kabul edildiğinde, klasik tabakalı plak teorisine göre eğilme matrisi D^* Eşitlik 1'den elde edilebilir (Kaw, 2005).

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

κ_x , κ_y ve κ_{xy} sırasıyla $-\partial^2 \omega_0 / \partial x^2$, $-\partial^2 \omega_0 / y^2$ ve $-2\partial^2 \omega_0 / \partial x \partial y$ ifadelerine karşılık gelmektedir. Ayrıca $D_{ij}^* = D^{-1}_{ij}$ ve D_{ij}

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left[(Q_{ij}^*) \right]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

olarak tanımlanmaktadır. Şekil 1'de verilen n tabakalı bir kiriş için $i=1,2,6$ ve $j=1,2,6$.



Şekil 1:
Tabakalı bir kiriş

Tabakalı plak teorisine göre $M_y = 0$ ve $M_{xy} = 0$ kabul edilir. Bu durumda Eşitlik 1

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

eşitliğine dönüşür ve bu eşitlikten kullanılarak

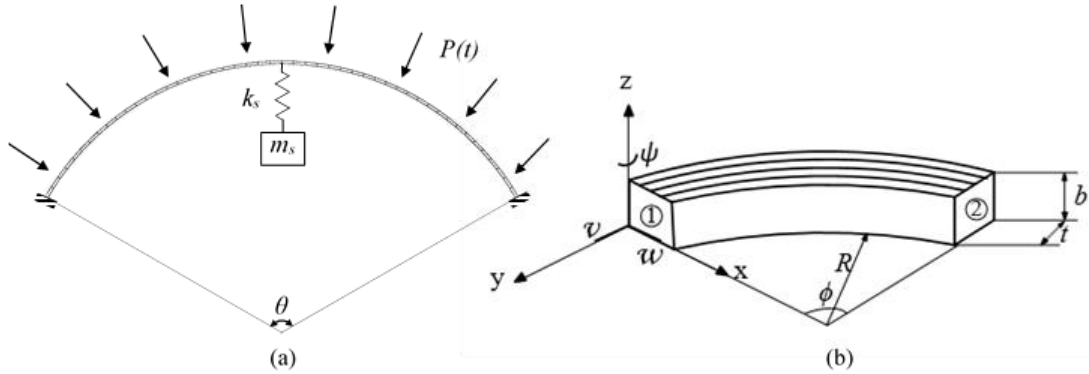
$$\kappa_x = D_{11}^* M_x$$

ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak, efektif esneklik modülü (Efektif Elastisite Modülü) E_f , Eşitlik 4 ile Euler çubuk teorisinden bilinen moment denklemi kullanılarak elde edilir.

$$E_f \equiv \frac{12M_x}{\kappa_x h^3} = \frac{12}{h^3 D_{11}^*}$$

2.2. Asılı Kütle-Yay Sistemine Sahip Eğri Kiriş Modeli

Bu çalışmada, asılı kütle-yay sistemine sahip tabakalı kompozit eğri bir kirişin dinamik kararlılığı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak araştırılmıştır. İki ucu sabit eğri kompozit kirişe ait 48 sonlu elemandan oluşan model Şekil 2 (a)'da gösterilmiştir. Şekil 2'de gösterilen b , t , R , θ ve φ sırasıyla, eğri kirişin genişliğini, kalınlığı, eğrilik yarıçapını, merkez açısını ve tek bir sonlu elemanın merkez açısını ifade etmektedir. k_s asılı kütle-yay sistemine ait direngenlik katsayısını simgelerken, m_s ise asılı kütle-yay sisteminin kütleini temsil etmektedir. Bunların yanı sıra, asılı kütle yay sistemine sahip kompozit eğri kiriş, düzgün dağılımlı $P(t)$ yayılı yüküne maruz bırakılmıştır.



Şekil 2:

a. Asılı kütle-yay sistemine sahip kompozit eğri kirişin sonlu elemanlar modeli b. Kompozit eğri bir sonlu elemanın geometrik özellikleri

Sabir ve Ashwell (1971) ile Öztürk (2006)'ün çalışmalarında Eşitlik 6-8'de görülen şekil fonksiyonlarının titreşim çalışmaları için en uygun şekil fonksiyonları olduğu gösterilmiştir. Eğri kiriş, Şekil 2 (b)'de de gösterildiği gibi v eksenel, w radyal ve ψ dönme şekil değiştirmelerine sahiptir. Dikkate alınan bu şekil değiştirmeler sayesinde modelin sadece xy düzlemlerindeki hareketleri göz önünde bulundurulmuş yani düzlem içi davranışının incelenmesi sağlanmıştır. Bir sonlu eleman parçasına ait bu şekil değiştirmeler $q^T = [v_1 w_1 \psi_1 v_2 w_2 \psi_2]$ vektörü ile gösterilir. Burada verilen koyu yazılmış semboller matris ve vektörleri göstermektedir.

$$w = a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi + a_4 - a_6 \varphi$$

$$v = -a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi + a_3 + a_5 \varphi + \frac{1}{2} a_6 \varphi^2$$

$$\psi = \frac{dw}{dy} - \frac{v}{R}$$

Eğri bir kiriş elemanının potansiyel enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \left[\int_0^l EI_{xx} \left(w'' - \frac{v'}{R} \right)^2 + EA \left(\frac{w}{R} + v' \right)^2 \right] dy$$

olarak tanımlanır. Burada l eğri kirişin uzunluğunu, E Elastisite modülünü, I_{xx} ise x eksenine göre alan atalet momentini göstermektedir. Eşitlik 9 matris formatında düzenlenirse

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_e \mathbf{q}$$

elde edilir. Eğri kiriş elemanın kinetik enerjisi ise

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) dy$$

eşitliği ile gösterilir. Burada ρ yoğunluğu temsil etmektedir. Kinetik enerji denklemi matris formunda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{q}}$$

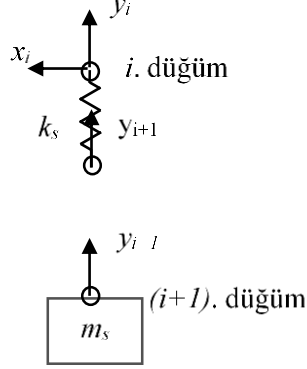
Düzgün dağılımlı $P(t)$ aksenal yükünün yaptığı iş ise

$$V = \int_0^l P(t) R \left(\frac{dw}{dy} - \frac{v}{R} \right)^2 dy$$

Eşitlik 13'in matris formunda yeniden düzenlenmesiyle

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_{ge} \mathbf{q}$$

elde edilmiş olur. Bu denklemlerin matris formları elde edilirken Eşitlikler 6-8'ten yararlanılmıştır. Elde edilen matris formundaki eşitliklerde bir sonlu elemana ait kütle matrisi \mathbf{m}_e , kütle matrisi \mathbf{k}_e ve geometrik direngenlik matrisi \mathbf{k}_{ge} ile gösterilmiştir.



Şekil 3:
Asılı kütle-yay sistemi

Şekil 3'de gösterilen asılı kütle-yay sistemi, iki yönde yer değiştirmeye sahip i düğüm noktasından eğri kirişe asılmaktadır. Asılı kütle-yay sisteminin yataydaki yer değiştirmeleri ihmal edildiğinden yay ile kütle arasındaki $(i+1)$ düğüm noktasında sadece düşey yer değiştirme dikkate alınmıştır. Bu sistemin yer değiştirme vektörü $\mathbf{q}_s^T = [x_i \ y_i \ x_{i+1} \ y_{i+1}]$ şeklinde ifade edilir. Burada i tüm sistemdeki düğüm sayısına göre numaralandırılacak düğüm noktasıdır. Bu yer değiştirmeler dikkate alınarak asılı kütle-yay sisteminin kinetik enerjisi

$$\mathbf{T}_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_s^T \mathbf{m}_s \dot{\mathbf{q}}_s$$

olarak tanımlanırken, sistemin potansiyel enerjisi ise

$$\mathbf{U}_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_s^T \mathbf{k}_s \dot{\mathbf{q}}_s$$

eşitliğinden elde edilir. Burada \mathbf{m}_s ve \mathbf{k}_s sırasıyla asılı kütle-yay sistemine ait kütle ve direngenlik matrisleridir ve Eşitlik 15-16 kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmişlerdir.

$$\mathbf{m}_s = m_i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad)$$

$$\mathbf{k}_s = k_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad)$$

Eğri kirişin düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler asılı kütle-yay sisteminin düğüm noktasındaki yer değiştirmelerden farklıdır. Bu nedenle eğri kirişin eleman matrisleri ile asılı kütle-yay sisteminin kütle ve dirençlik matrisleri, Eşitlik 19'da verilen \mathbf{L} dönüşüm matrisi kullanılarak, geleneksel sonlu elemanlar metoduna göre birleştirilmelidirler.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad)$$

Eşitliklerden elde edilen bir elemana ait kütle matrisi \mathbf{m}_e , kütle matrisi \mathbf{k}_e ve geometrik dirençlik matrisi \mathbf{k}_{ge} , geleneksel sonlu elemanlar metodu uygulanarak birleştirildiğinde, tüm sisteme ait kütle \mathbf{M} , dirençlik \mathbf{K}_e ve geometrik dirençlik \mathbf{K}_g matrisleri elde edilir. Enerji denklemleri, Lagrange denklemi içerisinde yazılarak, tüm sisteme ait Eşitlik 20'de verilen hareket denklemi elde edilir.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e \mathbf{q} - P(t) \mathbf{K}_g \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

$P(t)$ düzgün dağılımlı yayılı yükü $P(t) = P_0 + P_t \cos(\Omega t)$ ifadesi ile tanımlanmaktadır. Burada P_0 statik yükü, P_t ise zamanla değişen yükü ifade ederken, Ω zorlama frekansını göstermektedir. $P(t)$ yükü, P_{cr} statik burkulma yükü ile ilişkilendirildiğinde

$$P(t) = \alpha P_{cr} + \beta P_{cr} \cos \Omega t$$

Eşitliğine ulaşılır. Burada α statik yük parametresi P_0/P_{cr} , β dinamik yük parametresi P_t/P_{cr} ifadelerine karşılık gelmektedir. $P(t)$ dinamik yükü, Eşitlik 20'de yerine yazıldığında

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \left[\mathbf{K}_e - \alpha P_{cr} \mathbf{K}_{gs} - \beta P_{cr} \cos(\Omega t) \mathbf{K}_{gt} \right] \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

periyodik katsayılı Mathie-Hill tipi ikinci dereceden diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde yer alan \mathbf{K}_{gs} ve \mathbf{K}_{gt} ifadeleri yükün statik ve zaman bağımlı bileşenlerinin etkisine karşılık gelmektedir (Bolotin, 1962). Bu denklem T ve $2T$ periyodlarının periyodik fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Bolotin (1962) $2T$ periyodu ile çözümün büyük bir önemi olduğunu kanıtlamıştır. Ayrıca kararlılık bölgelerini Eşitlik 23'teki gibi tanımlamıştır.

$$\left[\mathbf{K}_e - \alpha P_{cr} \mathbf{K}_{gs} \pm \frac{1}{2} \beta P_{cr} \mathbf{K}_{gt} - \frac{\Omega^2}{4} \mathbf{M} \right] \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Statik ve zamana bağlı yük bileşenleri aynı biçimde uygulandığında, \mathbf{K}_{gs} ve \mathbf{K}_{gt} matrisleri özdeştir. Bu durumda bu matrislerin yerine \mathbf{K}_g eşdeğer matrisi kabul edilir ve bu matris dikkate alınarak Eşitlik 23 yeniden düzenlendiğinde

$$\left[\mathbf{K}_e - \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) P_{cr} \mathbf{K}_g - \frac{\Omega^2}{4} \mathbf{M} \right] \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

ifadesi elde edilir. Eşitlik 24 aşağıda verilen üç ilişkili problemin çözümünü sunmaktadır.

1. $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ olması durumunda, ω frekansı ile serbest titreşim.

$$\left[\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

2. $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ve $\omega = 0$ olması durumunda statik kararlılık.

$$\left[\mathbf{K}_e - P_{cr} \mathbf{K}_g \right] \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

3. Tüm terimlerin var olması durumunda ise dinamik kararlılık.

$$\left[\mathbf{K}_e - \left(\alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) P_{cr} \mathbf{K}_g - \frac{\Omega^2}{4} \mathbf{M} \right] \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

3. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Çalışmanın sonraki bölümlerinde sonuçların boyutlardan bağımsız olarak değerlendirilebilmesi için, asılı yay sertlik katsayısı k_s , eğri kirişin eşdeğer sertlik katsayısına (k_c) oranla belirlenmiştir. Eğri kirişin ANSYS programında oluşturulan modeli sayesinde eğri kirişin ilk doğal frekansı ve kütlesi elde edilir. Doğal frekans ve kütle değerleri kullanılarak, eğri kirişe ait eşdeğer sertlik katsayısı $\omega_n^2 = k_c / m_c$ denklemi ile belirlenir. Eğri kirişin sertlik katsayısı k_c 'nin bu değeri sadece yaklaşık bir değerdir. k_c kullanılarak, asılı yay sertlik katsayısı k_s , k_{oran} 'ın isteğe bağlı değerleri için $k_{oran} = k_s / k_c$ denkleminde belirlenir. Burada k_{oran} tabakalı eğri kirişten bağımsız olarak izotropik malzeme ($E = 2,069 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\rho = 7836,8 \text{ kg/m}^3$) dikkate alınarak belirlenmiştir.

3.1. Eğri Kirişin Doğal Frekansları ve Dinamik Kararlılık Bölgeleri

Çalışmanın temel amacı olan asılı kütle-yay sisteminin tabakalı eğri bir kiriş üzerine etkilerinin daha doğru değerlendirilebilmesi için tabakalı eğri kirişin asılı kütle-yay sistemi olmadığı durum için serbest titreşim analizi yapılmış ve elde edilen doğal frekans sonuçları Tablo 1'de sunulmuştur. Matlab programında yazılan sonlu elemanlar kodu yardımıyla elde edilen doğal frekans değerleri, modelin doğruluğunun sağlanması amacıyla ANSYS programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Tablo 1'den de görülebileceği üzere sonuçlar oldukça uyumludur.

Tablo 1. Mevcut model ile ANSYS modelinden elde edilen tabakalı eğri kirişe ait doğal frekans değerleri ($E_1=3.5 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $E_2=9 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $G_{12}=4.7 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $\rho=1850 \text{ kg/m}^3$, $b=0.02 \text{ m}$, $t=0.01 \text{ m}$, $R=1 \text{ m}$)

Fiber Açısı		Frekans (Hz)				
		Mod				
		1	2	3	4	5
0°/0°/0°/0°	ANSYS	23.688	47.199	85.931	128.260	185.030
	Çalışma	23.675	47.156	85.798	127.968	184.420
90°/90°/90°/90°	ANSYS	12.019	23.960	43.644	65.186	94.110
	Çalışma	12.005	23.913	43.507	64.892	93.518
0°/90°/90°/0°	ANSYS	22.601	45.017	81.970	115.310	122.260
	Çalışma	22.593	45.001	81.877	122.120	175.992
90°/0°/0°/90°	ANSYS	14.048	28.011	51.010	76.226	109.980
	Çalışma	14.033	27.953	50.858	75.855	109.317
0°/45°/-45°/0°	ANSYS	22.740	45.298	82.481	121.160	123.050
	Çalışma	22.773	45.360	82.530	123.094	177.396
0°/60°/-60°/0°	ANSYS	22.611	45.039	82.011	116.880	122.330
	Çalışma	22.603	45.021	81.912	122.174	176.069

Çalışmada tabakalı eğri kompozit kirişin altı farklı fiber açıları dikkate alınmıştır. Bu fiber açıları C1, C2, C3, C4, C5, C6 olarak gösterilmekte ve aşağıda verilen oryantasyon değerlerine karşılık gelmektedir.

$$C1=0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ$$

$$C2=90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ$$

$$C3=0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$$

$$C4=90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ$$

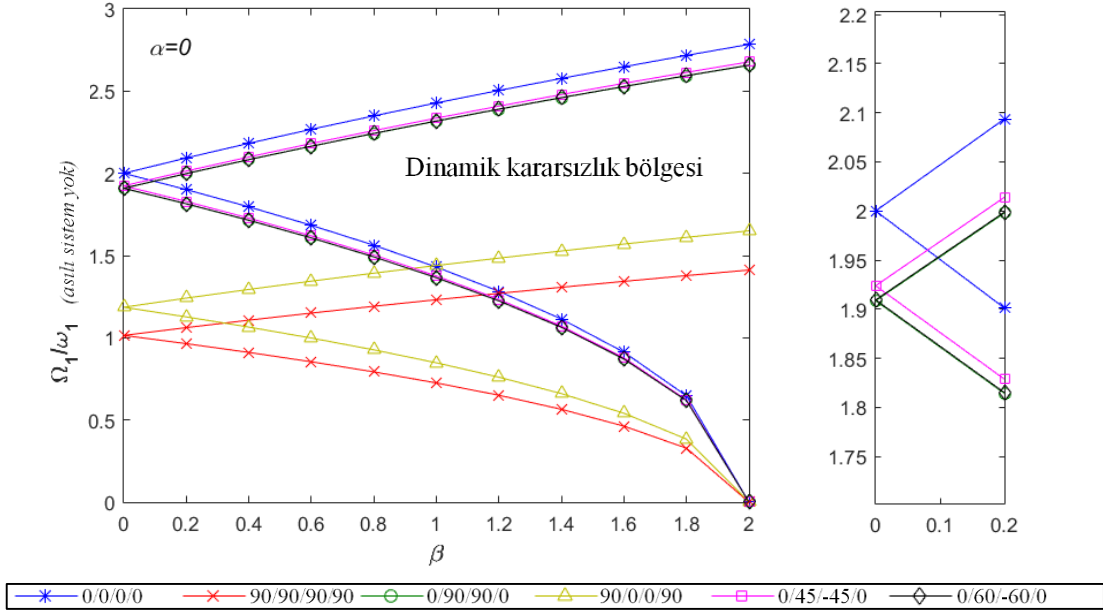
$$C5=0^\circ/45^\circ/-45^\circ/0^\circ$$

$$C6=0^\circ/60^\circ/-60^\circ/0^\circ$$

Dinamik kararsızlık bölgeleri birinci, ikinci, üçüncü olarak adlandırılır. Bu çalışmada, temel dinamik kararsızlık bölgesi olarak da adlandırılan $\Omega = 2\omega$ 'ye yakın olan ilk kararsızlık bölgesi incelenmiştir. Bu bölge pratik olarak en önemli bölgedir (Bolotin, 1962). Ω ve ω sırasıyla zorlama frekansı ve doğal frekanstır. Birincil zorlama ve ilk doğal frekansının oranı, zorlama frekans parametresi (Ω_1 / ω_1) olarak adlandırılır. Burada dikkate alınan doğal frekans değeri asılı kütle-yay sistemi olmadığı durumda eğri kirişe ait doğal frekans değeridir.

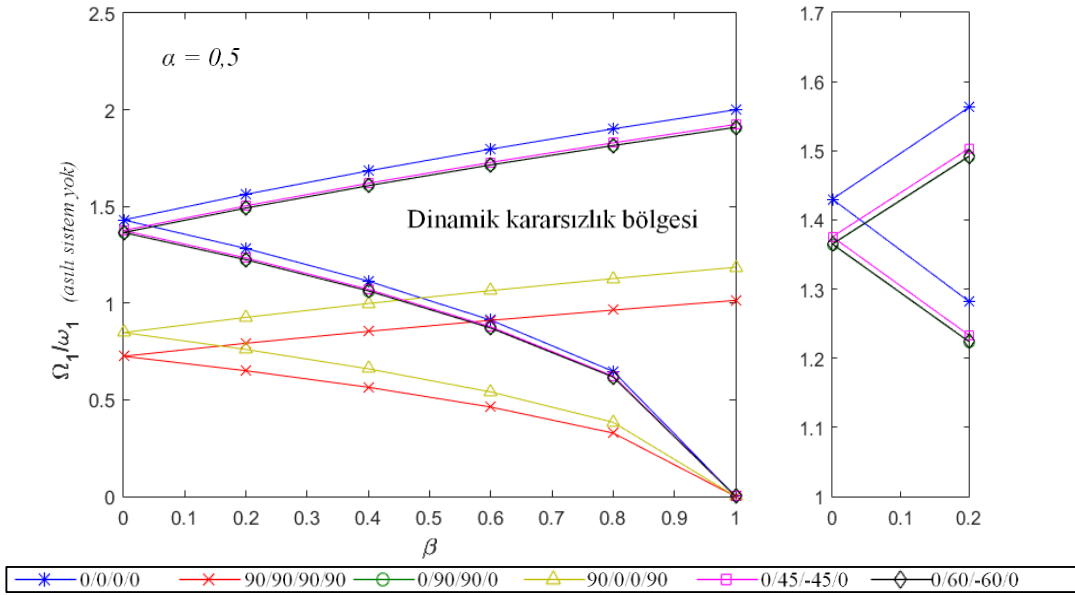
Şekil 4 ve 5'te verilen grafiklerde farklı fiber açısı yönelimleri için dinamik kararlılık parametresinin (β), kompozit eğri kirişin dinamik kararlılık bölgesine etkisini göstermektedir. Dinamik kararlılık bölgeleri, birincil zorlama frekansın asılı kütle-yay sistemi olmayan kompozit eğri kirişin doğal frekansına oranla verilmiştir. Ayrıca statik yüklemenin olmadığı ($\alpha=0$) ve statik yükleme parametresinin 0.5 olduğu iki farklı durum sunulmuştur.

Bu grafiklerden de görüldüğü üzere C2, C4, C3, C6, C5 ve C1 oryantasyon açısına sahip eğri kompozit kirişlerin dinamik kararsızlık bölgelerinin sırasıyla orijinden uzaklaştığı ve genişlediği görülmektedir. Statik yük parametresi 0.5 olduğu durumda ise kompozit eğri kirişin dinamik kararsızlık bölgeleri orijine yaklaşır ve daralır.



Şekil 4:

Farklı fiber oryantasyon açılarında eğri kirişin birinci dinamik kararlılık bölgeleri, $\alpha=0$ ($E_1=3.5 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $E_2=9 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{12}=4.7 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{23}=3.5 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $\rho=1850 \text{kg/m}^3$, $b=0.02 \text{m}$, $t=0.01 \text{m}$, $\theta=120^\circ$, $R=1 \text{m}$)

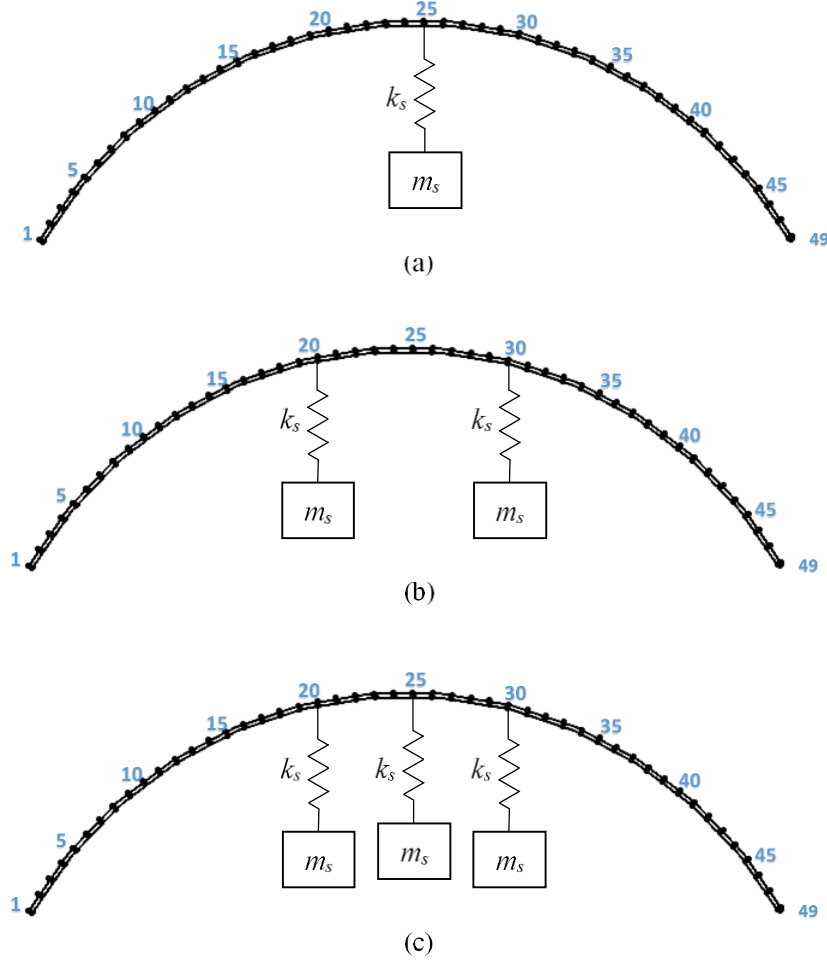


Şekil 5:

Farklı fiber oryantasyon açılarında eğri kirişin birinci dinamik kararlılık bölgeleri, $\alpha=0.5$ ($E_1=3.5 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $E_2=9 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{12}=4.7 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{23}=3.5 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $\rho=1850 \text{kg/m}^3$, $b=0.02 \text{m}$, $t=0.01 \text{m}$, $\theta=120^\circ$, $R=1 \text{m}$)

3.2. Asılı Kütle-Yay Sisteminin Sahip Eğri Kirişin Dinamik Kararlılığı

Asılı kütle-yay sisteminin sayısının ve konumunun dinamik kararsızlık bölgesine etkileri farklı fiber oryantasyonuna sahip eğri kiriş sistemleri dikkate alınarak sunulmuştur. Dinamik kararsız bölgeler zorlama frekans parametresine (Ω_1/ω_1) bağlı olarak gösterilmiştir. Zorlama frekans parametresindeki ilk doğal frekans değeri (ω_1) asılı kütle-yay sistemi olmayan C1 tipi eğri kirişe ait birinci doğal frekans değeri olarak dikkate alınmıştır.

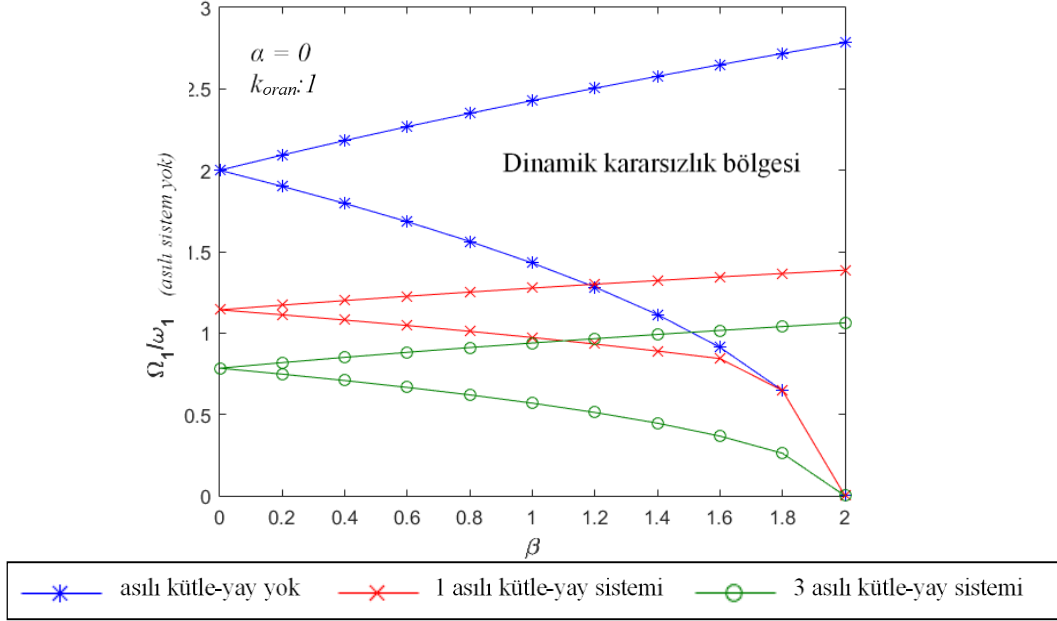


Şekil 6:

Farklı sayıda asılı kütle-yay sisteminin eğri kirişin düğüm noktalarına göre konumları; a. asılı kütle-yay sistemi yok, b. 25. düğüm noktasında 1 asılı kütle-yay sistemi, c. 13, 25 ve 36. düğüm noktalarında 3 asılı kütle-yay sistemi

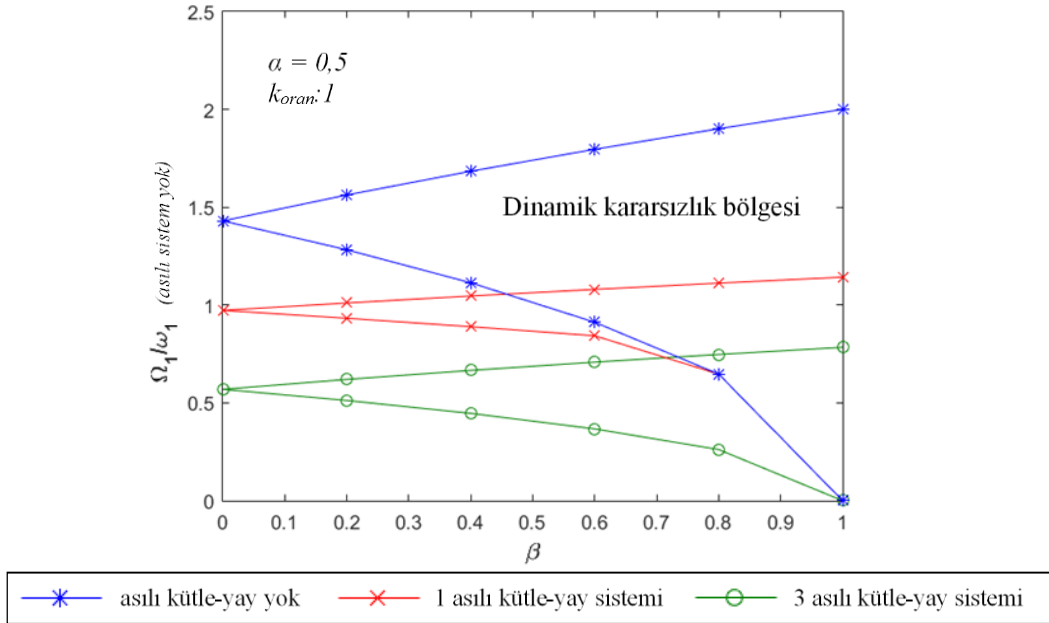
Asılı kütle-yay sistemlerinin sayısına göre eğri kiriş üzerindeki konumları Şekil 6'da gösterilmiştir. Burada üç farklı durum dikkate alınmıştır. İlk durumda sistemde asılı kütle-yay sistemi yer almazken, ikinci durumda bir, üçüncü durumda ise üç kütle-yay sistemi eğri kiriş üzerine asılmıştır. Şekil 7-8 asılı kütle-yay sistemi sayısının kompozit eğri kirişin dinamik kararlılık bölgesine etkisini farklı statik yük parametresi açısından sunmaktadır. Şekil 7 ve 8'de verilen dinamik kararlılık bölgelerinden de anlaşılacağı üzere eğri kiriş üzerine bir veya daha fazla asılı kütle-yay sistemi konumlandırıldığında dinamik kararsız bölge daralır ve başlangıç zorlama

frekansı orijine doğru yaklaşır. Yani zorlama frekans parametresi de azalır. Eğer sistemde statik yük parametresi dikkate alınırsa ($\alpha=0.5$), dinamik kararsızlık bölgeleri orijine daha fazla yaklaşır.



Şekil 7:

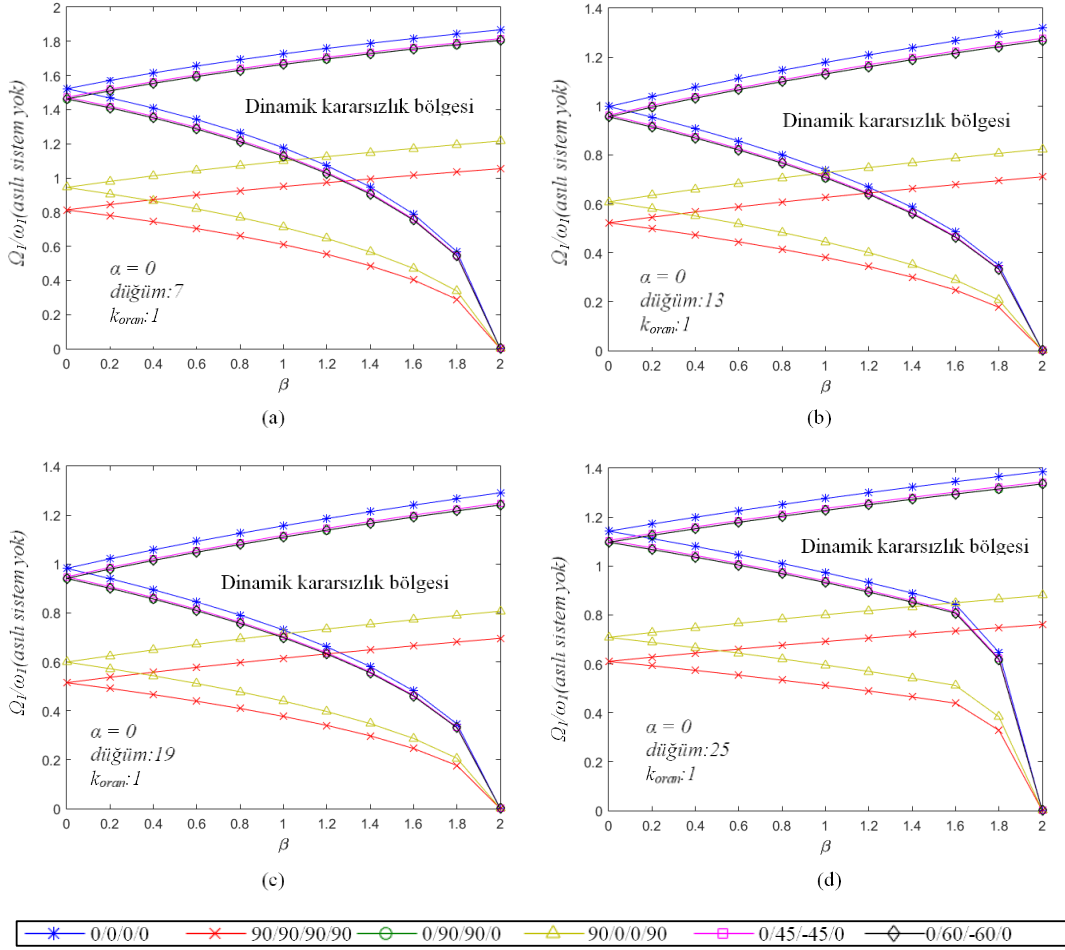
Kompozit eğri kirişin birinci dinamik kararlılık bölgelerine asılı kütle-yay sistemi sayısının etkisi, $\alpha=0$ ($E_1=3.5 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $E_2=9 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{12}=4.7 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{23}=3.5 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $\rho=1850 \text{ kg/m}^3$, $b=0.02 \text{ m}$, $t=0.01 \text{ m}$, $\theta=120^\circ$, $R=1 \text{ m}$, $m_s=2 \text{ kg}$, $k_{oran}=1$)



Şekil 8:

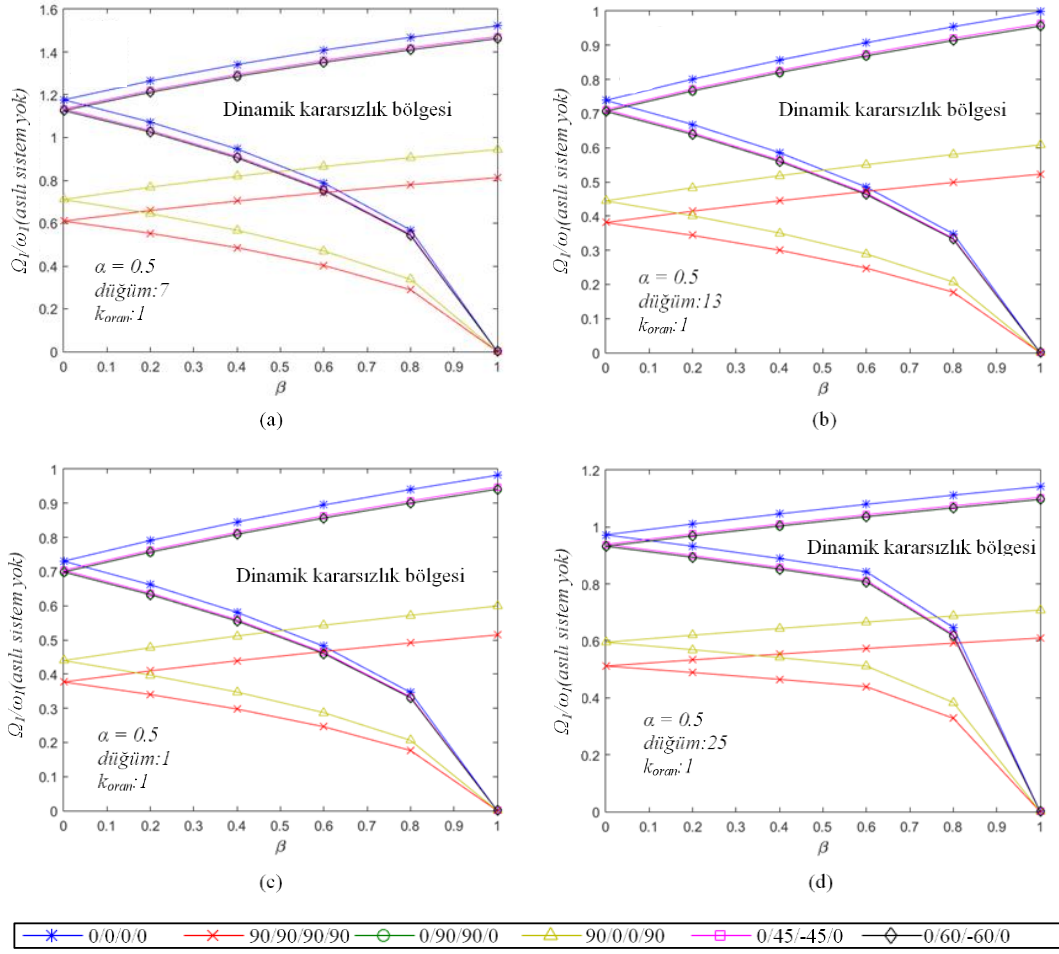
Kompozit eğri kirişin birinci dinamik kararlılık bölgelerine asılı kütle-yay sistemi sayısının etkisi, $\alpha=0.5$ ($E_1=3.5 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $E_2=9 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{12}=4.7 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{23}=3.5 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $\rho=1850 \text{ kg/m}^3$, $b=0.02 \text{ m}$, $t=0.01 \text{ m}$, $\theta=120^\circ$, $R=1 \text{ m}$, $m_s=2 \text{ kg}$, $k_{oran}=1$)

Asılı kütle-yay sisteminin konumunun, kompozit eğri kirişin dinamik kararlılık bölgeleri üzerindeki etkisi Şekil 9-10'da statik yüklerin farklı iki durumu ve farklı oryantasyon açıları için gösterilmiştir. Asılan tek bir kütle-yay sisteminin konumu Şekil 6'da belirtilen düğüm noktaları ile ifade edilmiştir. Asılı kütle-yay sistemi, kompozit eğri kirişin asılı kütle-yay systemsiz durumdaki titreşimsiz düğüm noktasından ne kadar uzağa asılırsa, dinamik kararlılık bölgesi üzerindeki etkisi o kadar artar ve dinamik kararsız bölgenin daralarak orijine yaklaşmasına neden olur.



Şekil 9:

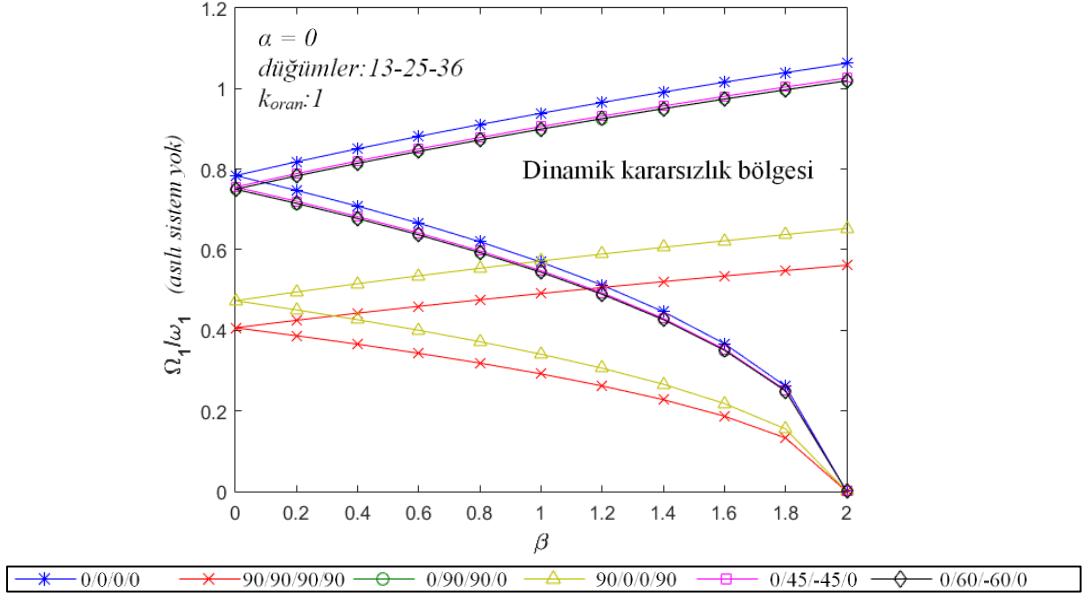
Asılı kütle-yay sisteminin konumunun, bir tane asılı kütle-yay sistemine sahip kompozit eğri kirişin dinamik kararlılık bölgelerine etkisi, $\alpha=0$ ($E_1=3.5 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $E_2=9 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{12}=4.7 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{23}=3.5 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $\rho=1850 \text{kg/m}^3$, $b=0.02 \text{m}$, $t=0.01 \text{m}$, $\theta=120^\circ$, $R=1 \text{m}$, $m_s=2 \text{kg}$, $k_{oran}=1$)



Şekil 10:

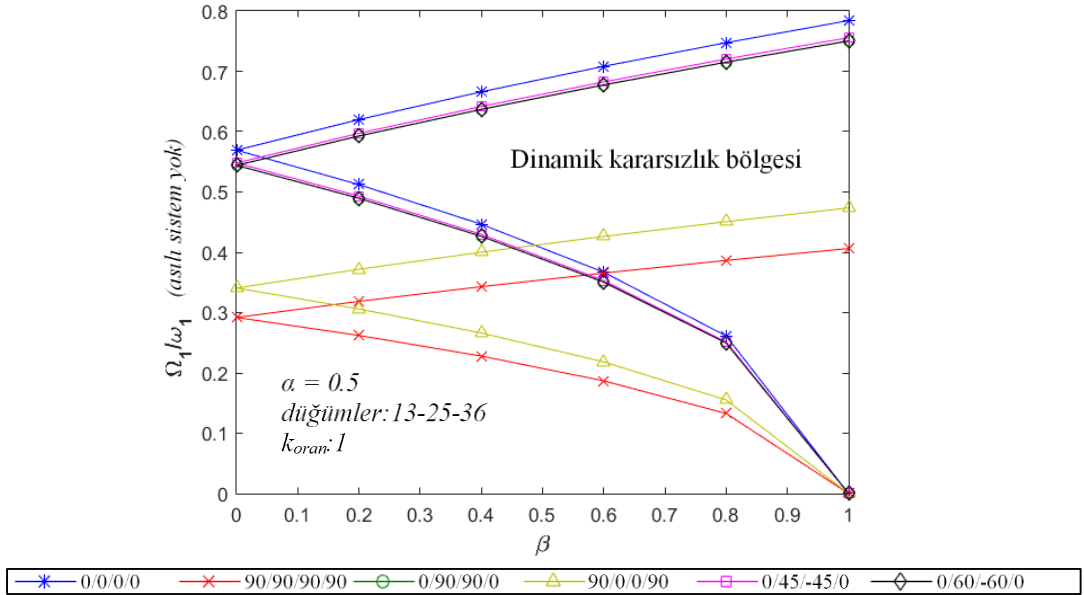
Asılı kütle-yay sisteminin konumunun, bir tane asılı kütle-yay sistemine sahip kompozit eğri kirişin dinamik kararlılık bölgelerine etkisi, $\alpha=0.5$ ($E_1=3.5 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $E_2=9 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{12}=4.7 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{23}=3.5 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $\rho=1850 \text{kg/m}^3$, $b=0.02 \text{m}$, $t=0.01 \text{m}$, $\theta=120^\circ$, $R=1 \text{m}$, $m_s=2 \text{kg}$, $k_{oran}=1$)

Şekil 6 (c)'de gösterilen üç asılı kütle-yay sistemine sahip kompozit eğri kirişin farklı fiber oryantasyon açıları için dinamik kararlılık bölgeleri Şekil 11-12'de iki farklı statik yükleme durumu için verilmiştir. Buradaki grafiklerden de anlaşılacağı gibi, üç asılı kütle-yay sistemine sahip kompozit eğri kirişin dinamik kararsız bölgenin genişliği büyükten küçüğe doğru sırasıyla C2, C4, C3, C6, C5 ve C1 fiber oryantasyon açılarına göre sıralanmaktadır.



Şekil 11:

Fiber oryantasyon açılarının, üç tane asılı kütle-yay sistemine sahip kompozit eğri kirişin dinamik kararlılık bölgesine etkisi, $\alpha=0$ ($E_1=3.5 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $E_2=9 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{12}=4.7 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{23}=3.5 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $\rho=1850 \text{ kg/m}^3$, $b=0.02 \text{ m}$, $t=0.01 \text{ m}$, $\theta=120^\circ$, $R=1 \text{ m}$, $m_s=2 \text{ kg}$, $k_{oran}=1$)



Şekil 12:

Fiber oryantasyon açılarının, üç tane asılı kütle-yay sistemine sahip kompozit eğri kirişin dinamik kararlılık bölgesine etkisi, $\alpha=0.5$ ($E_1=3.5 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $E_2=9 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{12}=4.7 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $G_{23}=3.5 \times 10^9 \text{N/m}^2$, $\nu_{12}=0.28$, $\rho=1850 \text{ kg/m}^3$, $b=0.02 \text{ m}$, $t=0.01 \text{ m}$, $\theta=120^\circ$, $R=1 \text{ m}$, $m_s=2 \text{ kg}$, $k_{oran}=1$)

4. DEĞERLENDİRME

Çalışmada asılı kütle-yay sistemine sahip tabakalı kompozit eğri kirişin dinamik kararlılık bölgeleri incelenmiştir. Euler-Bernoulli kirişi olarak dikkate alınan eğri kiriş, Bolotin yaklaşımı ve enerji denklemlerine dayanan sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak modellenmiştir. Kompozit eğri kiriş için 6 farklı fiber açısı yönelimleri dikkate alınmıştır. Çalışmada elde edilen dinamik kararlılık bölgeleri incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

- Asılı kütle-yay sisteminin konumu ve sayısı, dinamik kararlılık bölgelerini etkileyen önemli parametrelerdir. Asılı kütle-yay sistemi, eğri kirişe ait titreşimin olmadığı düğüm noktalarına yakın asıldığında, dinamik kararlılık bölgelerini hemen hemen hiç etkilemediği görülür.
- Asılan kütle-yay sistemi, kompozit eğri kiriş üzerinde kısıtlama yaratmasından dolayı, sayısı arttıkça dinamik kararsız bölgenin daralmasına ve başlangıç zorlama frekans parametresinin orijine yaklaşmasına neden olur.
- Kompozit eğri kirişin dinamik kararsız bölgeleri, sisteme statik yük parametresi eklendiğinde daralır ve başlangıç zorlama frekansı (buna bağlı zorlama frekans parametresi) orijine doğru kayar. Ancak sisteme asılı kütle-yay sistemi eklediğinde bu etki çok daha belirgindir.
- Asılı kütle-yay sistemine sahip kompozit eğri kirişin dinamik kararsız bölgeleri sırasıyla C2, C4, C3, C6, C5 ve C1 fiber oryantasyon açıları için genişliği artar.
- Asılı kütle-yay sistemine sahip kompozit eğri kirişe ait dinamik kararsız bölgelerin başlangıç zorlama frekansı (buna bağlı zorlama frekans parametresi), sırasıyla C2, C4, C3, C6, C5 ve C1 fiber oryantasyon açılarına göre orijine doğru ötelenir.
- C3, C5 ve C6 fiber oryantasyon açılarında asılı kütle-yay sistemine sahip eğri kirişin dinamik kararlılık bölgeleri birbirine çok yakın ve benzerdir.
- Statik yük parametresinin dikkate alınmadığı durumda ($\alpha=0$) dinamik kararsızlık bölgesinin alt sınırı, $\beta=2$ dinamik yük parametresinde sifıra ulaşırken; statik yük parametresi dikkate alındığında ($\alpha=0.5$) dinamik kararsızlık bölgesinin alt sınırı, $\beta=1$ dinamik yük parametresinde sifıra ulaşır.

Tablo 2. Semboller

SEMBOLLER			
A	eğri kirişin kesit alanı	P_{cr}	statik burkulma yükü
b	eğri kirişin genişliği	q	genelleştirilmiş koordinatlar
E	Elastisite modülü	R	eğri kirişin eğrilik yarıçapı
E_f	efektif esneklik modülü	t	eğri kirişin kalınlığı
I_{xx}	eğri kirişin alan atalet momenti	T	kinetik enerji
k_s	asılı kütle-yayın sertlik katsayısı	U	potansiyel enerji
k_c	eğri kirişin eşdeğer sertlik katsayısı	v	eksenel şekil değiştirme
K_e	global direngenlik matrisi	V	eksenel yükün yaptığı iş
k_e	sonlu elemanın direngenlik matrisi	w	radyal şekil değiştirme
K_g	global geometrik matrisi	α	statik yük parametresi
k_{ge}	sonlu elemanın geometrik direngenlik matrisi	β	dinamik yük parametresi
k_{ratio}	direngenlik katsayıları oranı	θ	eğri kirişin merkez açısı (açıklık açısı)
L	dönüşüm matrisi	ρ	yoğunluk

Tablo 2.(devamı)

SEMBOLLER			
l	sonlu eleman uzunluğu	φ	sonlu elemanın merkez açısı
m_s	asılı kütle-yayın kütlesi	ψ	dönme şekil değiştirmesi
M	global kütle (inertia) matrisi	Ω	zorlama frekansı
m_e	sonlu elemanın kütle matrisi	ω	doğal frekans
$P(t)$	periyodik yük		

KAYNAKLAR

1. Ahmed, K. M. (1971) Free vibration of curved sandwich beams by the method of finite elements. *Journal of Sound and Vibration*, 18(1), 61-74. doi:10.1016/0022-460X(71)90631-6
2. Bolotin, V. V. (1962) *The dynamic stability of elastic systems*. San Francisco, CA: Holden-Day, Inc.
3. Briseghella, L., Majorana, C.E. ve Pellegrino, C. (1998) Dynamic stability of elastic structures: a finite element approach. *Computers & Structures*, 69(1), 11-25. doi:10.1016/S0045-7949(98)00084-4
4. Chang, C.S. ve Hodges, D.H. (2009) Vibration characteristics of curved beams. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 4(4), 675-692. doi:10.2140/jomms.2009.4.675
5. Chen, L.W. ve Shen, G.S. (1998) Vibration and buckling of initially stressed curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, 215(3), 511-526. doi: 10.1006/jsvi.1998.1680
6. Chen, L.W., Lin, C.Y. ve Wang, C.C. (2002) Dynamic stability analysis and control of a composite beam with piezoelectric layers. *Composite Structures*, 56(1), 97-109. doi: 10.1016/S0263-8223(01)00183-0
7. Çankaya, P., Sabuncu, M. ve Öztürk, H. (2017) Asılı Kütle-Yay Sistemlerine Sahip Eğri Çubuğun Titreşim Analizi. *Sempozyum: 18. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu*, (387-391).
8. Daş, M. T. ve Yılmaz, A. (2018a). Çatlaklı dairesel eğri kompozit kirişlerin titreşim analizleri. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 33(3), 783-792. doi: 10.17341/gazimmfd.416380
9. Das, M. T., & Yılmaz, A. (2018b). Experimental modal analysis of curved composite beam with transverse open crack. *Journal of Sound and Vibration*, 436, 155-164. doi: 10.1016/j.jsv.2018.09.021
10. Eisenberger M. ve Efraim E. (2001) In-plane vibration of shear deformable curved beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(11):1221-34. doi:10.1002/nme.246
11. Eroğlu, U., Ruta, G. ve Tüfekçi, E. (2019). Natural frequencies of parabolic arches with a single crack on opposite cross-section sides. *Journal of Vibration and Control*, 25(7), 1313-1325. doi: 10.1177/1077546319825681
12. Eroğlu, U. ve Tüfekçi E. (2018) A new finite element formulation for free vibrations of planar curved beams. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 46(6):730-50. doi:10.1080/15397734.2018.1456343

13. Günyar, A., Öztürk, H. ve Sabuncu, M. (2012a) Kompozit eğri çubukların doğal frekans ve burkulma yükü analizi. *Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 14(3), 33-42. doi:20.500.12397/2461
14. Günyar, A., Öztürk, H. ve Sabuncu, M., (2012b) Dynamic stability analysis of laminated curved beams. *DEU Mühendislik Fakültesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 14(42), 43-55. doi: 20.500.12397/2458
15. Huang, C.S., Tseng Y.P., Leissa A.W. ve Nieh K.Y. (1998) An exact solution for in-plane vibrations of an arch having variable curvature and cross-section. *International Journal of Mechanical Sciences*, 40(11):1159–73. doi:10.1016/S0020-7403(98)00020-4
16. Huang, C.S., Nieh K.Y. ve Yang M.C. (2003) In-plane free vibration and stability of loaded and shear-deformable circular arches. *International Journal of Solids and Structures*, 40(22):5865–86. doi: 10.1016/S0020-7683(03)00393-7
17. Jun, L., Guangwei R., Jin P., Xiaobin L. ve Weiguo W. (2014) Free vibration analysis of a laminated shallow curved beam based on trigonometric shear deformation theory. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 42(1):111–29. doi: 10.1080/15397734.2013.846224
18. Karaağaç, C., Öztürk, H. ve Sabuncu, M. (2007) Lateral dynamic stability analysis of a cantilever laminated composite beam with an elastic support. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 7(03), 377-402. doi: 10.1142/S0219455407002320
19. Karami, G., ve Malekzadeh P. (2004) In-plane free vibration analysis of circular arches with varying cross-sections using differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 274(3–5):777–99. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00786-7
20. Karami, B., Janghorban M., Shahsavari D., Dimitri R. ve Tornabene F. (2019) Nonlocal buckling analysis of composite curved beams reinforced with functionally graded carbon nanotubes. *Molecules*, 24(15):2750. doi: 10.3390/molecules24152750
21. Kaw, A.K. (2005) *Mechanics of Composite Materials*. CRC Press.
22. Kawakami, M., Sakiyama T., Matsuda H., and Morita C. (1995) In-plane and out-of-plane free vibrations of curved beams with variable cross-sections. *Journal of Sound and Vibration*, 187 (3):381–401. doi: 10.1006/jsvi.1995.0531
23. Kırıl, B.G., Kırıl, Z. ve Öztürk, H. (2015) Stability analysis of delaminated composite beams. *Composites Part B Engineering*, 79, 406-418. doi: 10.1016/j.compositesb.2015.05.008
24. Kiss, L. ve Szeidl G. (2015) Vibrations of pinned–pinned heterogeneous circular beams subjected to a radial force at the crown point. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 43(4):424–49. doi:10.1080/15397734.2015.1022659
25. Kovács, B. (2013) Vibration analysis of layered curved arch. *Journal of Sound and Vibration*, 332(18), 4223-4240. doi:10.1016/j.jsv.2013.03.011
26. Lee, B.K., ve Wilson J.F. (1990) Free vibrations of arches with variable curvature. *Journal of Sound and Vibration*, 136(1):75–89. doi:10.1016/0022-460X(90)90939-W
27. Lim, N.H. ve Kang, Y.J. (2004) Out of plane stability of circular arches. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46(8), 1115-1137. doi:10.1016/j.ijmecsci.2004.08.008
28. Matsunaga, H. (2004) Free vibration and stability of laminated composite circular arches subjected to initial axial stress. *Journal of Sound and Vibration*, 271(3-5), 651-670. doi:10.1016/S0022-460X(03)00298-0

29. Öztürk, H. ve Sabuncu, M. (2005) Stability analysis of a cantilever composite beam on elastic supports. *Composites Science and Technology*, 65(13), 1982-1995. doi:10.1016/j.compscitech.2005.03.004
30. Öztürk, H., Yeşilyurt, İ. ve Sabuncu, M. (2006) In-plane stability analysis of non-uniform cross-sectioned curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, 296(1-2), 277-291. doi:10.1016/j.jsv.2006.03.002
31. Petyt, M. ve Fleischer, C.C. (1971) Free vibration of a curved beam. *Journal of Sound and Vibration*, 18 (1), 17-30. doi:10.1016/0022-460X(71)90627-4
32. Rao, S. S. ve Sundararajan, V. (1969) In-plane flexural vibrations of circular rings. *Journal of Applied Mechanics*, 36(3), 620-625. doi: 10.1115/1.3564726
33. Rattanawangcharoen, N., Bai, H. ve Shah, A.H. (2004) A 3D cylindrical finite element model for thick curved beam stress analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, 59(4), 511-531. doi:10.1002/nme.888
34. Sabir, A.B. ve Ashwell, D.G. (1971) A comparison of curved beam finite elements when used in vibration problems. *Journal of Sound and Vibration*, 18 (4), 555-563. doi: 10.1016/0022-460X(71)90106-4
35. Sabuncu, M. (1978) *Vibration characteristics of rotating aerofoil cross-section bladed-disc assembly*. PhD Thesis, Surrey University, Surrey.
36. Sahu, S. K. ve Datta, P.K. (2003) Dynamic stability of laminated composite curved panels with cutouts. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(11), 1245-1253. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:11(1245)
37. Thomas, J. ve Abbas, B.A.H. (1975) Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 41(3), 291-299. doi: 10.1016/S0022-460X(75)80176-3
38. Tong, X., Mrad, N. ve Tabarrok, B. (1998) In-plane vibration of circular arches with variable cross-sections. *Journal of Sound and Vibration*, 212(1), 121-140. doi:10.1006/jsvi.1997.1441
39. Tüfekçi, E. ve Yiğit, O. O. (2013). In-plane vibration of circular arches with varying cross-sections. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 13(01), 1350003. doi:10.1142/S021945541350003X
40. Vatan Can, S., Çankaya, P., Öztürk, H. ve Sabuncu, M. (2020) Vibration and dynamic stability analysis of curved beam with suspended spring-mass systems. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1-15. (basımda) doi:10.1080/15397734.2020.1737111
41. Wu, J.S., Lin, F.T. ve Shaw, H.J. (2013) Free in-plane vibration analysis of a curved beam (arch) with arbitrary various concentrated elements. *Applied Mathematical Modelling*, 37(14-15), 7588-7610. doi:10.1016/j.apm.2013.02.029
42. Yang, F., Sedaghati, R. ve Esmailzadeh, E. (2008) Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5), 850-867. doi:10.1016/j.jsv.2008.04.041
43. Zare, M. (2020) Free out-of-plane vibration of cracked curved beams on elastic foundation by estimating the stress intensity factor. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 27(14), 1238-1245. doi:10.1080/15376494.2018.1506068

