Uludağ Üniversitesi
İktisat ve İdari Bilimler Dergisi
Cilt VII, Sayı 2, Kasım 1986

MARKOV SÜREÇLERİ VE KUYRUK SİSTEMİNE UYGULANIŞI

İsmail İLHAN*

ÖZET

Bir markov zincirinin temel özelliği şudur: Sistemin t_{r+1} anında belirlenen bir durumda olması olasılığı onun geçmişinden tamamen bağımsız olup, yalnızca t_r anındaki durumuna ve geçişim olasılığına bağlıdır. Eğer bir t_0 anında (i) durumlarının $P_0(i)$ olasılıklarını ve a_{ij} geçişim olasılıklarını biliyorsak sistemin t_r anlarında (j) durumunda olma olasılığını hesaplıyabiliriz.

Bu çalışmamızda markov zincirleri teorisini açıkladıktan sonra onun bir kuyruk sistemine uygulanmasını gösterdik.

RESUME

La propriété caractéristique d'une chaine de Markov est la suivante; la probabilité pour que le systéme soit dans un état donné a l'instant t_{r+1} ne dépand que de son état à l'instant t_r, de la probabilité de transition et est independante de tout le passé du systéme. Si nous connaissons les probabilités $P_0(i)$ des états (i) à l'instant t_0 et les probabilités de transition a_{ij}, il est alorr possible de calculer les probabilités que le systéme soit à l'état (j) aux instants t_r. Dans cette ouvrage après avoir expliqué la théorie de Markov chaine, nous essaions l'appliquer au systéme de service (file attente).

Bağımsız deneyimler veya olaylar durumunda bir denemenin veya olayın belli bir biçimde gerçekleşmesi olasılığının ondan önceki döneme ve olaylara ilişkin bilgilerle değişmeyeceği varsayılır. Markov zincirleri kuramı ise bir olayın belli bir biçimde gerçekleşmesi olasılığının ondan önce gelen olayın sonucuna bağlı olduğu varsayımından hareket etmektedir. Dolayısıyla bir markov zinciri bilinen bir durumdan veya durumlardan belli olasılıklarla bir başka durum veya durumlarda geçen (dönüşen) olay ya da olayların ilk adımı (veya dönemi) izleyen adımlar sonunda erişecekleri durumların olasılıklarını adım adım takip etme olanağı vermektedir[1].

---

* Doç. Dr.; U.Ü.İ.İ.B.F. Öğretim Üyesi.

1 İlhan, İsmail; Leontief Modelinin Bir Markov Zinciri İçinde İncelenmesi, BİTİA İktisat Fakültesi Dergisi, Cilt 2, Sayı 1, s. 126, 1981, Bursa.

Olanaklı bağımsız $e_1, e_2, ..., e_n$ sonuçlar grubu ve bunlara atanmış olasılıklar düşünülsün. Sonuçlar dizisinin olasılığı çarpım kuralına uyar[2].

$$P(e_{i_0}, e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = a_{i_0} \cdot a_{i_1} \cdot ...... a_{i_n} \tag{1.1}$$

Markov zinciri kuramına göre (1.1) genelleştirilmesinde her denemenin sonucu ancak ve ancak bir önceki denemenin sonucuna bağlıdır. Bu nedenle her (e_i, e_j) çiftine a_{ij} koşullu olasılığı verilir. Bunun anlamı, "e_i meydana gelmişse e_j nin olması olasılığı a_{ij} dir" olmaktadır.

1- ZAMAN VE MEKANDA KESİKLİ (SÜREKSİZ) MARKOV SÜRECİ

Birbirinden farklı $t_0, t_1, ..., t_r$ anlarda gözlemlediğimiz bir sistem gözönüne alalım (burada $t_r = t_{r-1} + \Delta t, \Delta t > 0$ olan bir sabittir). Sistemin birbirinden bağımsız, gerçekleşebilir durumlarının kümesi, $[e_1, e_2, ..., e_n]$ olsun. Bu kümede eleman sayısı (olası durumların sayısı) sonlu ya da sonsuz olabilir. Herhangi bir (t_r) anında sistem n sayıdaki durumlardan birinde bulunacaktır. t_r anında (e_i) durumunda bulunan sistemin t_{r+1} anında e_j durumunda bulunması olasılığını a_{ij} ile göstereceğiz. Ayrıca a_{ij} nin zamandan (t_r)[3] ve sistemin geçmişte bulunduğu durumdan bağımsız olduğunu kabul ediyoruz. Şu halde a_{ij} ler sabittirler. e_i durumlarının herbirinde sistem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \tag{1.1}$$

eşitliğini sağlar. Yani t_r anında bir e_i durumu ile başlayan sistemin t_{r+1} anında e_j $(j = 1, 2, ... n)$ durumlarının herbirinde bulunma olasılıkları toplamı daima 1'dir.

a_{ij} lere sistemin geçişim (transition) olasılıkları adı verilir. a_{ij} ler birer koşullu olasılıktır.

Eğer sistem t_r anında e_i durumunda ise t_{r+2} anında e_j durumunda olması olasılığı, olasılıkların çarpımı özelliği gereğince[4],

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj} \tag{1.2}$$

dır. Çünkü, t_r ve t_{r+1} arasında a_{ik} olasılığı ile e_i durumundan herhangi bir e_k durumuna ve t_{r+1} ile t_{r+2} arasında bir a_{kj} olasılığı ile e_k durumundan e_j durumuna geçilebilir. Böylece e_i den e_k ye ve e_k den e_j ye geçişimin olasılığı $a_{ik} \cdot a_{kj}$ olmaktadır. t_r ile t_{r+2} arasında e_i den e_j ye geçiş de tüm (k) lar için $a_{ik} \cdot a_{kj}$ lerin toplamı olacağı açıktır. t_r anında sistemin e_i konumunda olma olasılığı P_r (i) olsun.

2 Akalın, Sedat; Yöneylem Araştırması, s. 28, Ege Üniversitesi Matbaası, 1979, İzmir.

3 a_{ij} olasılığının zamandan bağımsız olması, deneyin ne zaman yapılırsa yapılsın (1 saat sonra, 1 ay ya da 1 yıl sonra) hep aynı olasılık kuramına tabi olması demektir.

4 Kaufmann, A. - Méthodes et Modélés de la Recherche opérationelle; tom 1 s. 369, Dunot, Paris, 1972.

$P_r(i)$, başlangıç durum vektörü elemanlarını tanımlamaktadır. Buna göre $P_{r+1}(j)$ olasılığı,

$$P_{r+1}(j) = \sum_{i=1}^{n} P_r(i) \, . \, a_{ij} \tag{1.3}$$

olüp (1.2) yardımı ile

$$P_{r+2}(j) = \sum_{i=1}^{n} P_r(i) \, . \, a_{ij}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} P_r(i) \, . \, a_{ik} \, . \, a_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_{r+1}(k) \, . \, a_{kj} \tag{1.4}$$

olur.

t_0 anında (i) durumlarının $P_0(i)$ olasılıklarını ve a_{ij} geçişim olasılıklarını biliyorsak, t_r anlarında sistemin (j) durumunda olması olasılığı hesaplanabilir. Tanımlamaya çalıştığımız bu süreç zaman ve mekân içinde kesikli (süreksiz) markov süreci ya da markov zinciri olarak bilinir. Zaman yönünden sistemin süreksizliği, belli t_0, t_1, t_2 ... anları dışında yer alan anlar için sürecin incelenmemiş olmasından, mekân yönünden ise sistemin durumlarının (mekân değişkenleri) sadece tam değerler olarak ele alınmasından ileri gelmektedir. Bir markov zincirinde sistemin t_{r+1} anında belirlenen bir durumda olması olasılığı yalnızca t_r anındaki durumuna bağlıdır. Sistemin geçmişinden bağımsızdır. Yani t_r anında bulunduğu duruma kadar nasıl varıldığının hiç önemi yoktur. Bu özellik bir markov sürecinin karakteristik özelliğidir[5].

Akıp giden zamanla birlikte $P_r(j)$ olasılıklarının $P_0(j)$ başlangıç olasılıkları vasıtasıyla giderek azar azar etkileneceği düşünülebilir. Eğer $P_r(j)$ olasılıkları r ile birlikte değişmiyorsa sistem sürekli (kararlı) bir duruma (régime permanent) ulaşmıştır denir. Bu durum $\forall j$ için,

$$P_{r+1}(j) = P_r(j)$$

olarak gösterilir.

2- SÜREKLİ DURUMDA OLASILIK HESABI

Sürekli bir durumda (j) konumunda olma olasılığını P (j) olarak tanımlıyoruz. Bu olasılık (1.3) eşitliğinde

$$P_r(j) = P_{r+1}(j) = P(j)$$

yazılarak hesaplanır. Bu eşitlik bize (n) bilinmiyenli (n) denklemden oluşan aşağıdaki lineer homogen sistemi verir.

$$P(j) = \sum_{i=1}^{n} P(i) \, . \, a_{ij} \tag{1.5}$$

---

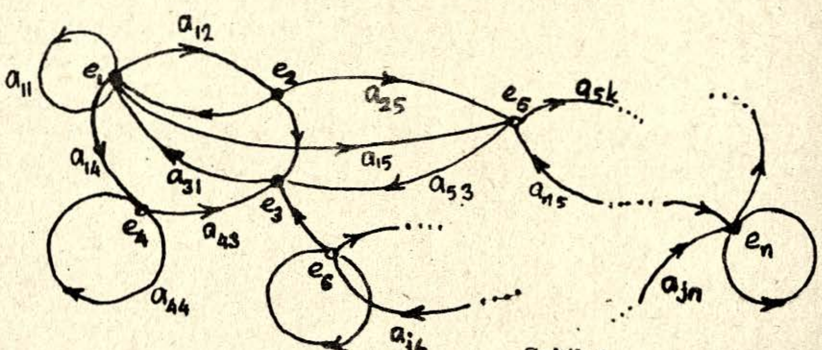
5 G. Hadley, T.M. Whitin; Etude et pratique des Modéles de Stocks, s. 123, Dunod, Paris 1966.

(1.5) denklem sistemi tek başına P(j) leri belirlemek için yeterli değildir. Ancak sistem her zaman (j) durumlarından birinde bulunmak zorunda olduğundan P(j) lerin toplamı daima 1'dir.

$$\sum_{j=1}^{n} P(j) = 1 \qquad (1.6)$$

Bu ilave denklemle ilgilendiğimiz tüm P (j) leri ayrı ayrı hesaplıyabiliriz. Bu aşamada hesaplanan P (j) ler, belirli başlangıç koşullarına bağlı sistemin geçici davranışlarının olasılıkları olmayıp artık sürekli durumdaki (j) konumunun olasılıkları olmaktadır. Burada P (j) olasılıklarının belirlenmesi yanında belli sayıda adım (etap) sonunda, bir durumdan başlayan olayın, her duruma erişebilme olasılığı da incelenecektir. Bir adımda belli bir durumdan herhangi bir duruma geçilebilmesi mümkün olmayabilir. Ancak bir durumdan her duruma geçişin mümkün olmasını sağlayacak ölçüde adım sayısını çoğaltabileceğimizi varsayıyoruz. Böyle bir süreç "indirgenemez (irreductible) markov süreci" adını alır. Bu tip bir süreçte her i, j indis çifti için $a_{ij}^{N} > 0$ olan bir N tamsayısı vardır. a_{ij}^{N}, t_r anında e_i durumundan t_{r+N} anında e_j durumuna geçişin olasılığıdır[6].

Aşağıda n durumlu bir sistemin geçiş olasılıkları grafiği ve ona uygun olarak belirlenmiş geçiş olasılıkları matrisi görülmektedir.



Şekil: 1

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{i_1} & a_{i_2} \cdots & a_{ij} \cdots & a_{in} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nj} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \forall i \text{ için}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

Geçiş Olasılıkları Matrisi

6 İlhan, İ.; Donatımın Yenilenmesi ve Tesadüfi Bozulma Problemine Markov Zincirleri Uygulaması; s. 68, B.Ü. Basımevi, 1982, Bursa.

Sonlu sayıda durum içeren indirgenemez bir markov zinciri için (1.5) ve (1.6) ile tanımlanmış P (j) ler tektirler ve pozitiftirler. Markoviyen süreçler kuramının önemli bir özelliği olan bu özelliğin kanıtını aşağıdaki şekilde verebiliriz:

Geçişim olasılıklarını içeren nxn boyutlu $A = \| a_{ij} \|$ matrisini ve P (j) leri içeren

$$P = [P (1), P (2), ..., P (n)]$$

satır vektörünü gözönüne alalım. (1.5) denklemi $P (I_n - A) = 0$ olarak yazılabilir. Burada I_n, nxn boyutlu birim matristir. (1.1) e göre A matrisinin her satırı elemanları toplamı 1'e eşittir. $I_n - A$ nın her satır toplamı ise 0 (sıfır)dır. Şu halde $I_n - A$ nın sütun vektörleri lineer bağımlıdır ve $|I_n - A| = D = 0$'dır. Öyleyse $P (I_n - A) = 0$'ı sağlayan hepsi birden sıfır olmayan P (j) değerleri vardır. (1.5) denklem sisteminde (n) inci denklemi elimine ederek, (n) bilinmeyenli (n − 1) denklemden oluşan,

$$P_{n-1} (I_{n-1} - A_{n-1}) = P (n) . a_n \tag{1.7}$$

denklemi yazılabilir. Burada P_{n-1}, P nin ilk (n − 1) bileşenini içeren bir vektör, I_{n-1}, (n − 1) boyutlu birim matris, A_{n-1}, A matrisinden son satır ve son sütun elimine edilerek belirlenen kare matris ve $a_n = [a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{n,n-1}]$ dir. a_n vektörünün en azından bir tane pozitif bileşeni vardır. Aksi halde (n) durumunu terketmek olanaksız olur. A_{n-1} matrisinin en azından bir satırında elemanlar toplamı 0 ile 1 arasında bir değere sahiptir. Leontief matris kuramına göre $[I_{n-1} - A_{n-1}]$ matrisinin ters matrisi vardır ve bu bir tamsayılı seri olarak gösterilebilir[7]. O halde (1.7) denklemi

$$P_{n-1} = P(n) . a_n . [I_{n-1} - A_{n-1}]^{-1}$$

bu da

$$P_{n-1} = P(n) a_n [I_{n-1} + A_{n-1} + A^2_{n-1} + ...] \tag{1.8}$$

olur. P(n) verildiği zaman P_{n-1} vektörü tek bir biçimde belirlenir. Eğer P(n) = 0 ise tüm P(j) ler sıfır olur ve satır toplamları artık 1'e eşit olmaz. Bu nedenle $P(n) > 0$ dır. A^N nin a^n_{ij} elemanı pozitif olmak üzere mademki her i, j çifti için bir (N) sayısı vardır, o halde P_{n-1} in her bileşeni için de bu aynı olacaktır. (1.6) eşitliğini uygulayarak P(j) lerin varlığını, tek olduklarını ve herbirinin pozitif olduklarını görürüz.

2.1. Zaman Boyutunda Sürekli, Mekân Boyutunda Kesikli Markov Süreçleri

Yukarıda, gözlem anlarından herhangi birinde sistemin, sonlu sayıda durumlardan birinde bulunması olasılığını araştırdık. Bu başlık altında durumu her an bilinen ve devamlı olarak gözlemlenen bir sistemi inceliyeceğiz. Bir tam sayılar kümesi olarak tanımlanacak (kesikli) olan olası durumların kümesi sonsuz olabilir. Biz, sistemin verilmiş bir anda ve belli bir durumda bulunması olasılığını belirleyeceğiz.

---

7 İlhan, İsmail; a.g.k. (1 nolu dipnotta), s. 134.

Bir sistem t anında (i) durumunda bulunuyorsa $\tau > t$ anında (j) durumuna geçişin olasılığını f (i, t; j, τ) olarak tanımlıyoruz. Gözönüne alınan süreç markoviyen ise τ anında (j) durumunda olmanın P (j, τ) olasılığı sadece t anında (i) durumunda olmanın P (i, t) olasılığı ve f (i, t; j, τ) geçişim olasılığına bağlıdır. P (i, t) ile bağlılığı dışında hiçbir biçimde (t) anından önceki geçmişine bağlı değildir. Buna göre τ anında j durumunda olma olasılığı,

$$P(j;\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} P(i;t) \, . \, f(i,t;j,\tau) \tag{2.1}$$

olur. Olası durumların sayısının sonsuz olduğunu varsaydık.

Eğer sistem t anında (i) durumunda ise τ anında (j) durumlarından birinde olmalıdır. Böylece,

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(i,t;j,\tau) = 1 \tag{2.2}$$

yazılır.

Eğer $t < \tau_1 < \tau_2$ zamanları ve,

$$f(i,t;j,\tau_2), \quad f(i,t;j,\tau_1) \quad \text{ve} \quad f(i,\tau_1;j,\tau_2)$$

geçiş olasılıkları verilirse,

$$P(j;\tau_2) = \sum_{i=0}^{\infty} P(i;t) \, . \, f(i,t;j,\tau_2) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k;\tau_1) \, . \, f(k,\tau_1;j,\tau_2)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(i;t) \, . \, \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(i,t;k,\tau_1) \, . \, f(k,\tau_1;j,\tau_2) \right]$$

yazılabilir. Şu halde $t < \tau_1 < \tau_2$ anlarından (zamanları) herhangi biri için köşeli parantezin içini kullanırız.

$$f(i,t;j,\tau_2) = \sum_{k=0}^{\infty} f(i,t;k,\tau_1) \, . \, f(k,\tau_1;j,\tau_2) \tag{2.3}$$

Genellikle, τ, (t) ye yaklaşırken ($\tau \to t$) $i \neq j$ için f (i, t; j, τ) sıfıra, $i = j$ için ise 1'e yaklaşır. Bu, $\tau \to t$ için durumun bir değişmeye sahip olma olasılığının ihmal edilebilir derecede küçük olduğunu ve aynı durumda kalma olasılığının hemen hemen kesin olduğunu ifade eder. $\tau \to t$ olduğunda $i \neq j$ için f (i, t; j, τ) $\to$ 0'a yaklaştığı halde,

$$f(i,t;j,\tau) \, / \, \tau - t$$

oranı sıfırdan farklı sonlu bir değere yaklaşır. Bu değer,

$$\lim_{\tau \to t} \left(\frac{f(i,t;j,\tau)}{\tau - t} \right) = a_{ij}(t) \quad (i \neq j) \tag{2.4}$$

olarak tanımlanır. Bu limit değere geçişim yoğunluğu denir[8]. (τ — t) farkı sonsuz

8 G. Hadley, T.M. Whitin; a.g.k., s. 124-125.

küçük olduğu zaman, yani $\tau = t + dt$ iken

$$f(i,t;j,t+dt) = \frac{f(i,t;j,t+dt)}{dt} . dt = a_{ij}(t)\,dt \quad (i \neq j)$$

olur. $a_{ij}(t)\,dt$ diferansiyellerine geçişimin sonsuz küçük olasılıkları gözüyle bakılır. (2.2)'ye göre;

$$f(i,t;i,t+dt) = 1 - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij}(t)\,dt \tag{2.5}$$

yazılır.

Geçişimin sonsuz küçük olasılıkları $[a_{ij}(t)\,dt]$ nı kullanarak P (i; t) olasılıklarını belirleyecek bir dif. denklem sistemi elde etmek mümkündür. (2.1), (2.4) ve (2.5) bağıntılarına göre,

$$P(i;t+dt) = P(i;t).\,[1 - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij}(t)\,dt] + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} P(i;t)\,a_{ij}(t)\,dt$$

ya da,

$$\frac{P(i;t+dt) - P(i;t)}{dt} = -P(i;t) . \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij}(t) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} P(j;t) . a_{ji}(t)$$

yazılır. dt → 0'a giderken limit durumda bu denklemin birinci tarafı,

$$\lim_{dt \to 0} \frac{P(i;t+dt) - P(i;t)}{dt} = \frac{dP(i;t)}{dt}$$

olur. Buna göre de yukarıdaki denklemi,

$$\frac{dP(i;t)}{dt} = -P(i;t) . \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij}(t) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} P(i;t)\,a_{ji}(t)$$

olarak yazabiliriz.

Durumların sayısı sonsuz olduğunda diferansiyel denklem sayısı da sonsuzdur. t_0 anında P (j; t_0) olasılığı biliniyorsa tüm gelecek anlar için (2.6) denklemlerinin P (j; t) leri tek bir biçimde belirleyebileceği sezgisel olarak düşünülebilir. Gerçek hayatta daha kolay olan durumlar incelenir. Gerekli olan da zaten budur. Bu duruma uyan gerçek bir problemde durumlar arasında geçişim poissoniyen niteliklidir. Örneğin, bir stok sistemi için talebin varışı ya da bir poisson süreci ile tanımlanmış bir siparişin tedariki sırasında durumlar arasında geçişim böyledir. (i) durumundan (j) durumuna geçiş bir ya da daha çok adım (etap) gerektirir. f (i, t; j, τ) değerleri poisson yoğunlukları olacaktır.

(2.6) denklemleri bize durum olasılıklarının zamanla nasıl değiştiklerini gösterir. Ancak burada P (i; t) lerin kararlı bir duruma (regime permanent) eriştikleri ve artık (t) ye bağlı olmadıkları durumlara da değinelim. Kararlı bir durumda durum olasılıklarını P (i) olarak isimlendirelim. P (i) ler zamandan bağımsız [d P (i; t)/dt =

0] olduğundan ve (2.6)yı sağlamak zorunda olduğundan, (2.6) yı,

$$P(i) . \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} a_{ij} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} P(j)\, a_{ji}, \quad (i = 0, 1, 2, ..., j); \quad \sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1 \tag{2.7}$$

yazabiliriz.

Geçişimler poissoniyen oldukları zaman a_{ij} ler (2.6) ile verilmiş olur. Bu taktirde durum olasılıkları belirleyecek denklemlerin bir kümesini (2.6) ve (2.7) yardımı ile elde edebiliriz.

(2.7) denklemleri şöyle yorumlanabilir: Zamanın akışı içinde (i) durumunun olasılığı sabit kalıyorsa dt zaman aralığında sistemin (i) durumunu terketmesi olasılığı, bir başka durumdan (i) durumuna geçiş olasılığına eşittir. O halde,

$$P(i) \sum_{j \neq i}^{\infty} a_{ij}\, dt = \sum_{j \neq i}^{\infty} P(j)\, a_{ij}\, dt$$

yazabiliriz. İki taraf dt ile sadeleştirilirse (2.7) denklemi elde edilir. Bu eşitlikte birinci taraf (i) konumundan başlayan durumun değişmesinin bir ölçüsü olarak yorumlanabilir. İkinci terim ise durumun (i) ye doğru değişmesinin bir ölçüsü olmaktadır. Bu ikisi birbirine eşit olmalıdır.

Gelişigüzel istemli sistemlerde oluşan zaman boyutu sürekli ve mekân boyutu süreksiz markov süreçleri ekseriya bekleme hattı problemleri olarak bilinir. Durumların, negatif olmayan birden çok tamsayı değişkenlerle açıklandığı bu sistemler için önceki sonuçlar kolayca genelleştirilebilir. Örneğin, negatif olmayan iki tamsayı değişkene bağlı durumlar gözönüne alalım. t anında (i, j) durumunun olasılığını P (i, j; t) ile, daha önce (t) anında (i, j) durumunda olduğu bilinen olgunun t + dt anında (m, n) durumunda olması olasılığını da $a_{ij;\,mn}(t)$ ile tanımlayalım. Bu taktirde bu yeni tanımlama ile (2.6) sistemi:

$$\frac{dP(i,j;t)}{dt} = -P(i,j;t) . \sum_{\substack{m=0 \\ ij \neq mn}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{ij;mn}(t) + \sum_{\substack{m=0 \\ ij \neq mn}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P(m,n;t)\, a_{mn;ij}(t)$$

olarak yazılabilir.

3- SÜRECİN BEKLEME HATTI PROBLEMİNE UYGULANMASI

Markov sürecini basit bir bekleme hattı probleminin çözümüne uygulamayı deneyeceğiz. Bekleme hattı problemlerinin en basit örneğini tek bir gişenin bulunduğu ve servis zamanı t değişkeninin bir üstel dağılım gösterdiği durum oluşturur. Buna göre servis zamanının t'den daha uzun sürmesi olasılığının ve gişeye varışların bir poisson dağılımı çerçevesinde ($e^{-\mu t}$) gerçekleştiğini varsayacağız. Varışların ortalama oranı λ dır. Müşteriler varış sıralarına göre hizmet göreceklerdir. Sisteme bir müşteri girdiğinde gişe meşgul değilse gişeye gitmekte, meşgul ise kuyrukta yerini almaktadır. Markov sürecinin durumları sistemdeki (gişede* ya da kuyrukta)

* Gişede ancak bir müşteri bulunabilir.

müşterilerin sayısıdır. Olası durumların sayısı sonsuzdur. Ayrıca müşterilerin sisteme birer birer vardıklarını varsayıyoruz.

Sistem (t) anında (i) durumunda ise (yani sistemde i müşteri varsa) τ anında j durumunda ($j > i$) bulunabilir. Eğer aşağıdaki durumlardan biri gerçekleşirse;

a) Servis sonlu olmaksızın $(\tau - t)$ aralığında $(j - i)$ varış gerçekleşmiştir.

b) Tek servis tamamlama ve $j - i + 1$ varış vardır.

c) İki servis tamamlama ve $j - i + 2$ varış vardır.

d) Üç servis tamamlama ve $j - i + 3$ varış .... v.b.

.

.

.

$$f(i,t;j,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} P[j-i+k;\lambda(\tau-t)] . P[k \mid j-i+k, i, \mu, \tau-t] \quad (j>i)$$

yazabiliriz. Burada $P(k \mid j-i+k, i, \mu, \tau-t)$ çarpanı, sistem i durumunda ortalama servis oranı ve varışlar $j - i + k$ olduğunda $(\tau - t)$ zaman aralığında k sayıda müşterinin serviste olmasının koşullu olasılığıdır. Böylece, $j > i$, $a_{ij} = 0$ ($j = i + 1$ hariç) için

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(x; \lambda \Delta t)}{\Delta t} = \begin{cases} \lambda, & x = 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots \text{ ise} \end{cases}$$

yazılır. Burada da,

$$a_{i,i-1} = \lambda P(0 \mid 1, i, \mu, 0)$$

dır.

Sıfır zaman aralığında bir servis olması olasılığı (0), ya da olmaması olasılığı (1) dir. Gişede daha önceden bir müşteri olsa bile servisi sonuna kadar t'den uzun bir sürenin geçmesi olasılığı $e^{-\mu t}$ dir. Buna göre,

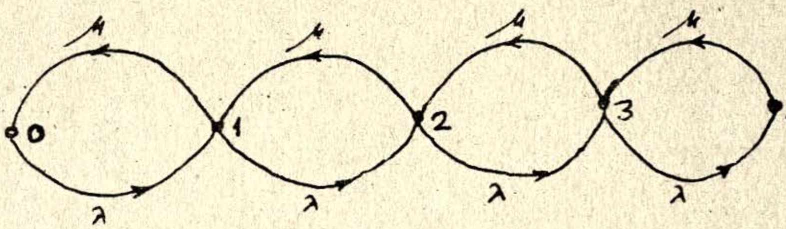
$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1 \quad \text{ise} \\ 0, & j > i \quad (i + 1 \text{ hariç}) \text{ ise} \end{cases}$$

Benzer biçimde,

$j < i$ ise

$$a_{ij} = \begin{cases} \mu, & j = i - 1 \quad \text{için} \\ 0, & j < i \quad \text{için } (i - 1 \text{ hariç}) \end{cases}$$

yazarız. Böylece, varış ya da servis tamamlama olaylarından sadece birinin poissoniyen olarak gerçekleşmesini sağlayan geçişimlere ilişkin olanı dışında ($j = i + 1$ ya da $j = i - 1$) a_{ij} lerin sıfır olduğu gösterilmiş olur. Sistemin durumları ve olası geçişimler aşağıdaki şemada olduğu gibidir.



Şekil: 2

Sistemin faaliyetleri zamana bağlı olmadığı durumda denge durumu (régime permanent) koşulları geçerlidir[9]. Bu koşullar

$$P(0) = \quad P(1);$$
$$P(0) + \quad P(2) = \quad (+)\ P(1),$$
$$P(1) + \quad P(3) = \quad (+)\ P(2),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$P(n-1) + P(n+1) = (+)\ P(n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

olmaktadır.

Bu denge denklemlerinin çözümü $\lambda/\mu = \rho$ yazarak,

$$P(1) = \rho \,.\, P(0), \quad P(2) = \rho^2 \,.\, P(0), \ldots, P(n) = \rho^n \,.\, P(0)$$

bulunur.

Durumların olasılıkları toplamı 1'e eşit olacağından,

$$P(0) \,.\, \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = P(0) \,.\, \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^* = 1, \qquad 0 < \rho < 1$$

dir. Eğer $\rho \geqslant 1$ ise ($\lambda \geqslant \mu$) servisin ortalama oranı (μ) varışların ortalama oranından büyük olmadığı için kararlı durum yoktur ve kuyruğun uzunluğu sonsuz olarak büyür.

KAYNAKLAR

Akalın, Sedat; Yöneylem Araştırması, Ege Üniversitesi Matbaası, 1979, İzmir.

Desbazeille, Gérard; Exercices et Problemes de recherche opérationnelle, Dunod, 1976, Paris.

Hadley, G.; Whitin, T.M.; Etude et Pratiques des MODELES de STOCKS, Dunod, 1966, Paris.

İlhan, İsmail; Donatımın Yenilenmesi ve Tesadüfi Bozulma Problemine Markov Zincirleri Uygulaması, B.Ü. Basımevi, 1982, Bursa.

---

9 Öztürk, Ahmet; Yöneylem Araştırması, s. 270, U.Ü. Basımevi, 1984, Bursa.

* $\rho < 1$ için ρ^n geometrik dizinin toplamı formülü $\Sigma\, \rho^n = \dfrac{1-\rho^n}{1-\rho}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \rho^n \to 0$ dır.

İlhan, İsmail; Leontief Modelinin Bir Markov Zinciri İçinde İncelenmesi, B.İ.T.İ.A. İktisat Fakültesi Dergisi, Sayı: 1, Cilt: 2, Bursa, 1981.

Kara, İmdat; Servis Sistemleri ve Gelişler Zamana Bağlı Olduğunda Kapasite Sorununa Matematiksel Yaklaşım, E.İ.T.İ.A. Yayınları, No: 160/102, 1976, Eskişehir.

Kaufmann, A.; Méthodes et Modéles de la recherche Opérationnelle, Tome 1, Dunod, 1972, Paris.

Öztürk, Ahmet; Yöneylem Araştırması, U.Ü. Basımevi, 1984, Bursa.