Uludağ Üniversitesi
İktisat ve İdari Bilimler Dergisi
Cilt VIII, Sayı 1-2, Kasım 1987

MAKSİMUM PRENSİBİ VE DONATIMIN YENİLENMESİ PROBLEMİNE UYGULANIŞI

İsmail İLHAN*

Bazı kaynakların "Pontriyagin Prensibi" olarak da isimlendirdikleri maksimum prensibinin yöneylem araştırması konularından olan "bir donatımın yenilenmesinin optimal politikası"nı belirlemede nasıl kullanılabileceğini araştıracağız. İlk önce problemimizi olabildiğince açık bir biçimde ortaya koymaya çalışalım.

1. PROBLEMİN TANIMI

Belirli bir tarihte yeni olarak işletmeye alınmış bir donatım gözönüne alacağız. Zamanla, bu donatımın kullanımı ile sağlanan net gelir azalacaktır. Zira giderek donatımın bakım-onarım ve işletme giderleri artacaktır. Bir üretim düşüşü olmasa bile sonuçta üretim birimi başına düşen bakım-onarım ve işletme giderleri artacağından üretim maliyetleri artar. Kaldı ki teknolojik yenilikler de donatımın yenilenmesini zorunlu hale getirebilir. Donatımın verimlilik kapasitesini düşürmemek için karar organı ya koruyucu bakım ve onarım, kısmi modernleştirme ya da yenileme doğrultusunda karar almak durumundadır. Böylece problem,

a) Donatımı elde tutma (maintenance de l'equipment)

b) Yenileme (Renouvellement)

olarak ortaya çıkar.

Biz bu çalışmamızda, karar organının donatıma yenilemeyi düşünmediğini varsayarak, elde tutma harcamalarının optimal ölçüsünü maksimum prensibinden yararlanarak belirlemeyi deneyeceğiz.

2. PROBLEMİN FORMÜLER TANIMI

Konuya daha somut bir görünüm kazandırmak için donatım olarak bir torna makinasını gözönüne alalım. t_0 anında yeni olarak işletmeye konulan bu makinanın satınalma fiatı c_0 olsun. Üretimdeki işlevini t_0 anı olarak başlattığımız bu makinanın her t anındaki hurda değerini (elden çıkarma değeri) u(t) olarak tanımlayacağız.

---

* *Doç. Dr.; U.Ü. İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Öğretim Üyesi.*

Makinanın fiziki yıpranması a(t) fonksiyonu ile belirtilmiştir. a(t) fonksiyonu (t) nin artan bir fonksiyonu olup türetilebilirdir. Ayrıca, t ve $t + \Delta t$ zamanları arasında makinanın değer kaybı onun fiziki yıpranmasına bağlı olup bu a(t) dt miktarında olacaktır.

Elde tutma (maintenance) politikaları sonucu yapılan toplam harcamalar c(t) olmak koşulu ile t ve $t + \Delta t$ zaman diliminde makinanın, yıpranma nedeni ile ortaya çıkan, değer kaybının

$$F\,[c(t), t]\,dt$$

olacağını varsayıyoruz. Burada da makinanın her t anındaki değer kaybını tanımlayan F fonksiyonu sürekli ve türetilebilir olup,

a) $F(0, t) = 0$

b) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial c^2} < 0$, ya da $\dfrac{\partial F}{\partial c}$ türevi azalan, ya da bir başka deyişle, elde tutma harcamalarının marjinal etkisi azalandır. Sözkonusu değer kaybını,

$$F\,[c(t)\,.\,t]\,dt = a(t)\,dt + d\,\vartheta\,(t)$$

diferansiyel denklemi ile tanımlayabiliriz.

c) $\dfrac{F\cdot\,[c(t)\,, t]}{\partial c} \leqslant 1,$

yani elde tutma harcamaları ile makinanın değeri başlangıç değeri seviyesinde korunabilir.

t_0 anında makinanın değerinin onun satınalma fiatı (c_0) olduğunu biliyoruz. Bu kısaca,

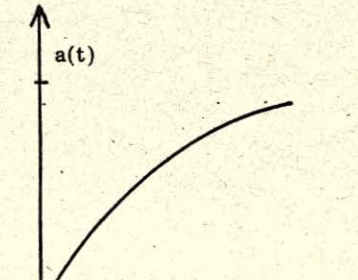
$$c_0 = \vartheta\,(t_0)$$

ve

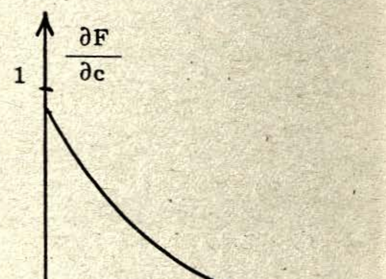
$$c(t) \geqslant 0$$

şeklinde tanımlanır.

a(t) ve $\dfrac{\partial F}{\partial c}$ fonksiyonlarının grafiği aşağıda olduğu gibidir.



Şekil: 1



Şekil: 2

Hurdà değer fonksiyonu $\vartheta(t)$ ve makinanın kullanımı ile sağlanan gelir $R(t) = r \, . \, \vartheta(t)$ açık ve kesin tanımlanmış varsayılarak amaç fonksiyonu olarak tanımlanacak olan toplam net hasılanın bugünkü değeri aşağıdaki üç terimin cebirsel toplamı olarak belirlenmelidir:

1- Makinanın başlangıçtaki (t_0) anında maliyeti (c_0)

2- Elde tutma harcamaları üzerine, kullanım ile oluşmuş gelirlerin bugünkü değerine indirgenmiş kalanı ki bu terim

$$\int_0^T [r \, . \, \vartheta(t) - c(t)] \, e^{-İT} \, dt$$

ifadesine sahiptir. Bu terimde yer alan $r \, \vartheta(t) - c(t)$, kullanımla sağlanan net gelir kalanı, $e^{-İT}$ ise bugünkü değere indirgeme (güncelleştirme) faktörüdür.

3- Makinanın bugünkü hurda değeri $\vartheta(t) \, . \, e^{-İT}$. Buna göre toplam net getiri,

$$G(T) = \int_0^T [r \, v(t) - c(t) \, e^{-İT}] \, dt + v(T) \, e^{-İT} - c_0$$

ifadesine sahip olur. Bu fonksiyonun,

- $\dfrac{d\vartheta(t)}{dt} = F \, [c(t) \, . \, t] - a(t)$
- $v(0) = c_0$ ve
- $c(t) \geqslant 0$

koşullarına bağlı olarak belirlenecek maksimumu bize (T) zamanını verecektir.

Yukarıda tanımladığınız problemin çözümü iki aşamada gerçekleştirilir.

1- (T) gibi sabit bir tarih gözönüne alınarak bu varsayım ile hangi elde tutma maliyetinin optimal olacağı araştırılır.

2- Bu optimal politikaya uygun biçimde bir kere belirlenmiş elde tutma maliyeti ile uyumlu olarak G(T) yi maksimum yapacak (T) zamanı bulunur.

G(T) fonksiyonunda $\vartheta(t)$ bir durum değişkeni (la variable d'etat) c(t) ise sipariş değişkeni (la variable de commande) dir. Problemin topluca formülasyonu,

$$v'(t) = F \, [c(t), t] - a(t)$$

$$v(0) = c_0$$

$$\begin{array}{ll} \text{Màx. } G(T) = \text{Max.} & \left\{ \int_0^T [r \, \vartheta(t) - c(t)] \, e^{-İT} \, dt + \vartheta(t) \, e^{-İT} - c_0 \right\} \\ c(t) \geqslant 0 & \text{''} \\ t \in (0, T) & \text{''} \end{array}$$

olur.

Bu problemin çözümüne maksimum prensibini uygulamak için V(t) fonksiyonu içinde (t) ye bağlı yeni bir değişken tanımlanmaktadır. Bu yeni değişkeni $\varphi(t)$ olarak alıp c_0 'in dikkate alınmadığı hamiltoniyen denklemi yazalım.

$$H = [r \, \vartheta(t) - c(t)] \, e^{-it} + \varphi(t) \left\{ F \, [c(t) \, . \, t] - a(t) \right\}$$

Burada, $\varphi(t)$ yi tanımlayan denklemler,

$$\varphi'(t) = \frac{\partial H}{\partial \vartheta(t)} = -r e^{-it}$$

$$\varphi(t) = e^{-İT}$$

olup $e^{-İT}$ amaç fonksiyonda $\vartheta(t)$ nin katsayısı durumundadır. Sonuç durumuna ilişkin koşullar da gözönüne alındığında yukarıdaki kısmi (parça) diferansiyel denklemin integrasyonu,

$$\varphi(t) = \int_t^T r e^{-i\theta} d\theta + e^{-İT}$$

sonucunu verir.

$\varphi(t)$ değişkeni şu şekilde yorumlanır: $\int_t^T r e^{-i\theta} d\theta$ terimi 1 birim TL.lık bir yatırımın $[t, T]$ dönemi boyunca sağladığı getirinin t anındaki değerine indirgenmiş toplamlarıdır. Burada r, 1 birim TL. nın her bir dönem için getirisidir. İkinci terim ($e^{-İT}$) dönem sonunda, tamamı geriye dönmüş olan, yatırım miktarının t anına indirgenmiş değeridir.

Hamiltaniyen fonksiyonda $\varphi(t)$ nin yukarıdaki ifadesi yerine yazılırsa,

$$H = [r \vartheta(t) - c(t)] e^{-it} + \left(\int_t^T re^{-i\theta} d\theta + e^{-İT}\right)\left\{F[c(t).t] - a(t)\right\}$$

olur. Bu fonksiyonu maksimum yapacak olan c(t) değerini belirlemek için onun c(t) ye göre kısmi türevini alalım:

$$\frac{\partial H}{\partial ç} = -e^{-it} + \left(\int_t^T r e^{-i\theta} d\theta + e^{-İT}\right). \frac{\partial F(c,t)}{\partial c}$$

dir. Bu eşitlik, donatımı elde tutma amacı ile t anında yatırılmış fazladan 1 birim TL. nın bugünkü değerine indirgenmiş kârını tanımlar. Eşitliğin birinci terimi, harcamanın güncel değerine uygun düşen kısmını, ikinci terimi ise bu harcama ile sağlanan gelirin güncel değerine uygun düşen kısmını belirlemektedir. Ayrıca $\frac{\partial F}{\partial c}$, donatımı elde tutmaya harcanmış marjinal 1 birim TL. nın donatım üzerindeki etkisinin ölçüsüdür. Daha önce $\varphi(t)$ ile gösterdiğimiz parantez içerisindeki ifade ise, $\vartheta(t)$ nin değerindeki 1 birim TL. artışın sağladığı gelir olmaktadır.

Yukarıdaki kısmi türevi sıfıra eşitlemek suretiyle ($\frac{\partial H}{\partial c} = 0$) alınacak karan optimal kılacak olan kural belirlenir. Buna göre, donatımı elde tutma maliyeti olan c(t) o şekilde belirlenmelidir ki elde tutma için harcanan son birim TL. nın kârının güncel değeri (bugünkü değeri) sıfır olsun. Bu sonuç $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$ denkleminin c(t) ye göre çözümü ile elde edilecektir.

SONUÇ

Yenilemeye ilişkin işletmenin alacağı kararlar o işletmenin geleceğine ve finansal gücüne önemli ölçüde etkide bulunur. Çünkü yenileme bir yatırım biçimidir ve donatım için yatırılan kapitalin atıl kalması, hareketsiz kalması tehlikesi vardır. Bundan başka, satın alınmış donatımın, teknolojik gelişmeler karşısında teknik etkinlik ve yeteneğini yitirerek kendisine bağlanmış kapitali eritip tüketme gibi tehlikeleri de vardır. Bu nedenle onu gereksiz zamanlarda yenileme yoluna giderek işletmeyi bu tehlikelerin içine atmak ya da zamanında yapılmayan bir yenileme işleminin olumsuz sonuçlarına işletmeyi mahkum etmek çağdaş işletmecilik anlayışı ile bağdaşamaz.

Donatımın niteliğine, kullanım amacına ve farklı varsayımlara bağlı olarak probleme değişik biçimlerde yaklaşılabilir. Sonuçta donatımın yenilenmesi işi, onun yıpranarak ya da bozularak kısmen ya da tamamen kaybettiği etkinlik ve verimliliğini yeniden eski düzeyine en uygun koşullarda yükseltme işidir. Bu sorunu çözmede matematik tekniklerden günümüzde geniş ölçüde yararlanılmaktadır. Yapılan harcamalarla sağlanacak yararlar arasında olumlu bir denge kurulması amacı, sorunu bir maksimizasyon (en iyileme) modeli içinde tanımlayarak çözüm arama olanağı sağlamaktadır. Maksimum prensibi olarak bilinen bu modelin, optimizasyon amaçlı pek çok alanda olduğu gibi donatımın yenilenmesi konusunda da önemli ipuçları verdiği inancını taşımaktayız.

KAYNAKLAR

Cruen, R., Kaufmann, A.; La Programation Dinamique et ses applications, Dunot. 1960.

Desbazeille, G.; Exerciees et Problems de Recharche Operationelle, Dunot, 1976.

Faure, R.; Fiabilite, Renouvellement des equipemento, Cours de l'institut de programation, VI. 2 Edition Paris 1971.

Helmer, J., Y.; La Commande Optimale en Economie. Dunot, 1972.

İlhan, İ.; Donatımın Yenilenmesi ve Tesadüfi Bozulma Problemine Markov Zincirleri Uygulaması, Bursa Üniversitesi Basımevi, 1982.

Kaufmann, A.; Methodes et Modeles de la Recherches Operationnelle, Tome I, Tome II. Dunot 1972.

Thompson, G., L.; Optimal Maintenance and Sale date of a machine, Management Science, Vol. 14, No: 9, 1968.