

ÜRETİM FONKSİYONU, EKONOMETRİK YAKLAŞIM

Sacit ERTAŞ*

ÖZET

Bu yazının amacı üretim fonksiyonunun ampirik olarak belirlenmesi açısından geçerli önemli noktaları vurgulamaktır.

SUMMARY

Production Function, Econometric Approach

The aim of this paper is to discuss those points that are relevant to the empirical determination of the production function.

1. GİRİŞ

Üretim fonksiyonu çeşitli faktör akımları veya girdilerle, bunların yarattığı ürün akımı veya çıktı arasındaki bir teknik ilişkilidir. Fonksiyon özünde mümkün her türlü üretim yöntemini kapsamı içine alan ve girdilerin çıktı haline dönüşümünü açıklayan bir fiziki süreçtir. Örneğin sabun üretimi çok değişik şekillerde, yani farklı süreçlerle, gerçekleştirilebilir, üretim fonksiyonu tüm bu süreçleri kapsamı içine almaktadır. Fakat klasik iktisat teorisi sürekli olarak değişebilen ve üretimde her zaman sürekli olarak ikame edilebilen oldukça soyut emek ve sermaye (L ve K) gibi iki üretim faktörünün varlığını varsaymakta ve bunların her kombinasyonuna karşı gelen maksimum çıktı miktarını, Q,

$$Q = f(L, K) \quad (1)$$

veren ilişkiyi bir üretim fonksiyonu olarak tanımlamaktadır¹.

* Doç. Dr.; U. Ü. İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Öğretim Üyesi.

1 Bazen hammaddeler, M, ayrı bir girdi olarak üretim fonksiyonu içine katılmaktadır:

$$Q = f(L, K, M)$$

Fakat genellikle üretimin tamamen entegre olduğu veya çıktı ile katma değerin ölçüldüğü varsayılarak üretim fonksiyonu (1) deki gibi ifade edilmektedir.

Sadece iki input cinsinden ifade edilen bu üretim fonksiyonu aşırı bir basitleştirme değildir; gerçekte farklı üretim süreçlerini tanımlayan çok çeşitli emek ve sermaye girdileri mevcuttur². Farklı üretim süreçlerinin denklem (1) deki gibi bir üretim fonksiyonu olarak ifadesi ancak bir üretim faktörünün herhangi iki türü arasındaki marjinal ikame haddi, diğer faktörün herhangi bir türünden bağımsız olduğunda ve fonksiyona katılan üretim faktörleri kendi farklı türlerinin doğrusal homojen fonksiyonları olduğunda mümkün olabilir³. Uygulamada L ve K'nın alt kategorilerini ayrı ayrı üretim içine katma yerine, açıkça veya zımni olarak yukarıda belirtilen gerekli koşulların sağlandığı varsayılmaktadır. Bu yol seçildiğinde üretim fonksiyonunu tek bir homojen malın üretim sürecini açıklayan bir ilişki olmanın ötesinde, bir tesis, bir firma, bir endüstri veya bir ekonominin üretim sürecini açıklayan bir fonksiyon olarak tanımlamak mümkün olmaktadır. Bu şekilde bir ekonomideki işgücü hizmetini ve sermaye stoğu hizmetini girdi olarak tanımlayan makro ekonomik üretim fonksiyonuna ulaşılabilmektedir⁴.

Mikro düzeyde üretim fonksiyonu ile ilgili genel problemler üretimde ölçek ekonomileri veya eksi ekonomilerin olup olmadığı ve üretim faktörleri arasındaki ikamenin kolaylığı ve genişliği problemleridir. Bunların uzantısı olarak faktör hizmetlerinin fiyatları ile faktör girdileri arasındaki ilişkinin yapısı ve teknik gelişmenin niteliği sorunları ortaya çıkmaktadır. Bütüncül üretim fonksiyonları ile cevaplandırılmaya çalışılan sorular 'mikro' üretim fonksiyonu ile ilgili sorularla aşağı yukarı aynıdır.

Yukardaki satırlardan da açıkça anlaşıldığı gibi üretim fonksiyonu oldukça soyut bir kavramdır. Bu yazının amacı üretim fonksiyonunun ampirik olarak belirlenmesi açısından geçerli olan temel noktaları vurgulamaktadır.

2. MODEL

2.1. Teknik İlişki

Neoklasik üretim fonksiyonu, $Q = f(K, L)$, tek değerli, sürekli ve (en azından) iki kez diferansiyeli alınabilir bir fonksiyon olarak tanımlanmaktadır. Pozitif ve azalan marjinal verimi garantilemek için

$$\frac{\partial f}{\partial L} \geq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial K} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} < 0 \quad (2)$$

olması gerekmektedir. Sermaye ve işgücü girdilerinin bir λ oranında arttırıldığını farzedelim, Q aynı oranda, daha büyük oranda veya daha küçük oranda artabilir:

2 Mevcut süreçler arasından en iyi olanını seçme problemini en iyi şekilde ele alma yolu bir matematiksel programlama yaklaşımıdır. Bakınız Dorfman (1953).

3 Bakınız Wallis (1973, 25-26).

4 Üretim fonksiyonu ardında yatan bütünleştirme oldukça karmaşıktır. Endüstri veya ekonomi bazındaki çalışmalarda karşı karşıya kalınan ve üretici birimlerin bir araya getirebilmesinden kaynaklanan bütünleştirme probleminin ortaya çıkmasından çok önce bireysel tesis ve firma düzeyinde bütünleştirme problemi ortaya çıkmaktadır.

$$f(\lambda L, \lambda K) = \lambda^h f(L, K) = \lambda^h Q$$

Burada h fonksiyonun *homojenlik (türdeşlik) derecesini* vermektedir. $h = 1$ değeri ölçüğe göre sabit getiriye işaret etmektedir; artan veya azalan getiriler sırası ile birden büyük ve birden küçük h değerleri ile belirtilmektedir. Homojen fonksiyonların önemli bir özelliği Euler teoremi tarafından verilir. Bu teorem faktör miktarı ile ağırlıklandırılan birinci kısmı türevlerin toplamının homojenlik derecesi çarpı çıktıya eşit olduğunu söylemektedir:

$$\frac{\partial f}{\partial L} L + \frac{\partial f}{\partial K} K = hQ$$

Bir örnek olarak ölçüğe göre sabit getiriye, $h = 1$, belirtilen bir "doğrusal homojen" üretim fonksiyonunu ele alalım; bu halde

$$\frac{\partial f}{\partial L} L + \frac{\partial f}{\partial K} K = Q$$

olur; faktörlere marjinal ürünleri (marjinal verimlilikleri karşılığı) ödendiğinde ürünün tamamı tüketilmektedir, pür zararlar veya kârlar söz konusu olmamaktadır.

Veri çıktı düzeyleri için üretim fonksiyonu, yani

$$Q = f(L, K) = \text{sabit}$$

bir eşürün diyagramı ile temsil edilir. Bu ifadenin toplam türevi alındığında bir eşürün eğrisi boyunca

$$dQ = \frac{\partial f}{\partial L} dL + \frac{\partial f}{\partial K} dK = 0$$

olduğu bulunur. Eşürün eğrisi boyunca hareket edildiğinde çıktı değişmediğinden, eşürün eğrisinin eğiminin mutlak değeri, *marjinal ikame haddi*

$$R = - \frac{dK}{dL} = \frac{\partial f / \partial L}{\partial f / \partial K}$$

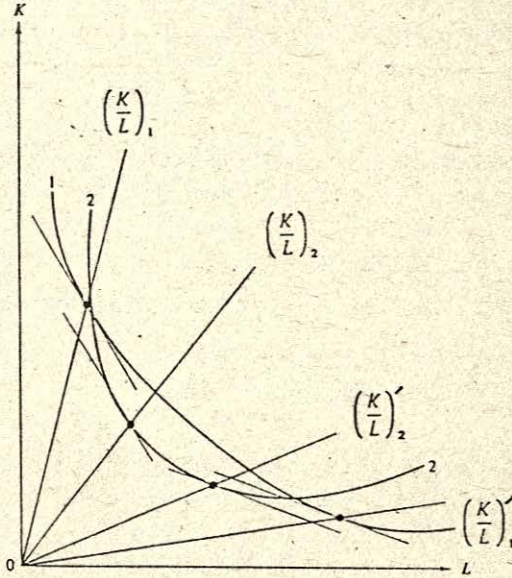
olarak bulunur. Eşürün orijine göre konveks olmasını ve dolayısı ile ikame devam ederken R nin düşmesini sağlamak için

$$\frac{\partial^2 f}{\partial L^2} \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial L \partial K} \right)^2 > 0 \quad (3)$$

olduğu varsayılmaktadır. Ölçüğe göre getiriye ek olarak üretim fonksiyonunun bir başka önemli niteliği ikame elastikiyettir. *İkame elastikiyeti*, σ , marjinal ikame haddindeki (veya marjinal verimlilik oranındaki) bir oransal değişme sonucu ortaya çıkan faktör girdi oranındaki oransal değişme olarak tanımlanır, yani

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{d \log (K / L)}{d \log (-dK/dL)} = \frac{d \log (K / L)}{d \log R} = \frac{d (K/L) / (K/L)}{dR / R} \\ &= \frac{d (K/L) / (K/L)}{d [(\partial f / \partial L) / (\partial f / \partial K)] / [(\partial f / \partial L) / (\partial f / \partial K)]} \end{aligned}$$

Eşürin eğrisinin bükümünün bir ölçüsü olan ikame elastikiyeti faktörler arasındaki ikame kolaylığını ölçer. İkame elastikiyetinin sıfır olması faktörlerin sabit bir oranda birleştirildiğini belirtir. Şekil 1 iki farklı üretim fonksiyonu için eşürin eğrilerini göstererek σ nın değişimini yansıtmaktadır. Eşürin eğrisi 1 deki marjinal ikame haddi 2 dekinden büyüktür, çünkü marjinal ikame haddindeki aynı değişme eşürin eğrisi 1 de daha büyük faktör oranı değişimine neden olmaktadır; faktör oranlarındaki değişme geometrik olarak eşmaliyet doğruları ile eşürin eğrilerinin teğet olduğu noktalara orijinden çizilen ışınların eğimindeki değişme olarak gösterilmektedir.



Şekil: 1
Eşürin Eğrisi 1'in İkame Elastikiyetinin Eşürin Eğrisi 2'den Büyük Olduğunun Gösterilmesi

Cobb-Douglas Üretim Fonksiyonu

Ekonometrik çalışmada yapılması gereken ilk şey yukarıda belirtilen koşulları tatmin eden basit fonksiyonların bulunmasıdır. En popüler kalıp Cobb-Douglas üretim fonksiyonudur:

$$Q = AL^\alpha K^\beta \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1$$

burada A, α ve β sabit parametrelerdir. Fonksiyon girdiler ve çıktının logaritmasını cinsinden doğrusaldır, yani

$$\log Q = \log A + \alpha \log L + \beta \log K$$

üstler her bir girdiye göre çıktı elastikiyetlerini belirtmektedir. $\alpha + \beta$ homojenlik derecesini gösterir çünkü

$$f(\lambda L, \lambda K) = A(\lambda L)^\alpha (\lambda K)^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} A L^\alpha K^\beta = \lambda^{\alpha+\beta} Q$$

$h = \alpha + \beta = 1$ olduğunda Cobb-Douglas üretim fonksiyonu ölçeğe göre sabit getiriye sahip olmaktadır. Marjinal verimlilikler

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha AL^{\alpha-1} K^{\beta} = \alpha \left(\frac{Q}{L}\right), \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = \beta AL^{\alpha} K^{\beta-1} = \beta \left(\frac{Q}{K}\right)$$

ortalama verimlilik ile oransal olarak değişmektedir. K'nın L yerine marjinal ikame haddi

$$R = - \frac{dK}{dL} = \frac{\partial Q}{\partial L} / \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha \frac{Q}{L} / \beta \frac{Q}{K} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{L}$$

olduğudur. İkame elastikiyetini çıkarmak için bu denklemi şöyle yazabiliriz:

$$\log(R) = \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \log\left(\frac{K}{L}\right)$$

buradan

$$\sigma = \frac{d \log\left(\frac{K}{L}\right)}{d \log(R)} = 1$$

olduğu bulunur⁵. Başka bir deyişle her zaman sermaye kapital yerine birim sabit elastikiyetle ikame edilebilir⁶.

Sabit İkame Elastikiyetli (CES) Üretim Fonksiyonu

Verilere bir Cobb-Douglas üretim fonksiyonu uydurulmaya kalkışıldığında, onların sabit ve birime eşit ikame elastikiyeti veren bir kalıba girmesi istenmektedir. Gerçekte veriler böyle bir kalıpta olmayabilir. Ampirik çalışmalarda oldukça yaygın olarak kullanılan bir başka kalıp sabit ikame elastikiyetli (CES) üretim fonksiyonudur. CES üretim fonksiyonunda da, ikame elastikiyetinin sabit olduğu varsayılmasına karşın, değeri üzerine konan herhangi bir sınırlama yoktur. CES üretim fonksiyonu

$$Q = y [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta) L^{-\rho}]^{-v/\rho} \quad (4)$$

şeklinde ifade edilir. Burada y , ρ ve δ negatif olmayan sabitlerdir. Emek ve sermaye aynı λ oranında arttırıldığında

$$f(\lambda K, \lambda L) = y [\delta (\lambda K)^{-\rho} + (1 - \delta) (\lambda L)^{-\rho}]^{-v/\rho} = \lambda^v Q$$

-
- 5 İlk bakışta ikame elastikiyeti ölçüsünün yanlış olduğu, gerçekte faktör oranı değiştiğinde ikame haddinin nasıl değiştiğini göstermek için verilen ölçünün tersinin kullanılması gerektiği düşünülebilir. Verilenin tersi olarak ifade edilen ölçü ikame elastikiyeti kavramının geleneksel kullanımına aykırı düşmektedir.
- 6 Cobb-Douglas üretim fonksiyonu literatürde çok değişik şekillerde genelleştirilmektedir. Bu konuda daha detaylı bilgi için bakınız Zellner ve Revankar (1969), Halter, Carter, and Hocking (1957), Nerlove (1963) ve Ringstad (1967).

olmaktadır, yani ν homojenlik (türdeşlik) derecesini belirtir⁷. y bir ölçek parametresidir ve etkinliği belirtmek için kullanılabilir; y deki bir kayma nötr bir teknik değişmeye işaret eder⁸. δ teknolojinin sermaye yoğunluk derecesini belirtmektedir. ρ ikame parametresidir. Üretim fonksiyonunu yeniden

$$Q^{-\rho/\nu} = y^{-\rho/\nu} [\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho}]$$

şeklinde yazar ve K ve L ye göre diferansiyelini alırsak

$$-\frac{\rho}{\nu} Q^{-1-\rho/\nu} \frac{\partial Q}{\partial K} = -\rho y^{-\rho/\nu} \delta K^{-\rho-1}$$

$$-\frac{\rho}{\nu} Q^{-1-\rho/\nu} \frac{\partial Q}{\partial L} = -\rho y^{-\rho/\nu} (1-\delta) L^{-\rho-1}$$

elde edilir, dolayısı ile marjinal verimlilikler

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \nu \delta y^{-\rho/\nu} \frac{Q^{1+\rho/\nu}}{K^{1+\rho}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \nu (1-\delta) y^{-\rho/\nu} \frac{Q^{1+\rho/\nu}}{L^{1+\rho}} \quad (5)$$

olmaktadır. Marjinal ikame haddi

$$R = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial Q}{\partial L} / \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1-\delta}{\delta} \left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho}$$

olur. Logaritmalar alındığında

$$\log R = \log \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right) + (1+\rho) \log \left(\frac{K}{L}\right)$$

ve dolayısı ile ikame elastikiyetinin

$$\sigma = \frac{d \log (K / L)}{d \log R} = \frac{1}{1+\rho} \quad (6)$$

olduğu bulunur. Başka bir ifade ile ikame parametresi ρ , ikame elastikiyetinin, σ , basit bir fonksiyonudur:

$$\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}$$

ρ nun değeri ne kadar yüksek ise ikame elastikiyeti o kadar düşüktür. Açıkça görülebileceği gibi ρ nun değeri -1 den küçük olamaz. ρ nun değeri -1 e yaklaştıkça ikame elastikiyeti sonsuza yönelir, yani eşürün eğrileri doğrusal hale dönüşür. Öte

7 Ölçeğe göre sabit getiri halinde fonksiyon

$$Q = y [\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

şeklini alır.

8 Cobb-Douglas üretim fonksiyonundaki A ya karşı gelen bu parametre çıktının ölçüldüğü birimlere göre farklılık gösterir. Çıktı birimlerini $y = 1$ olacak şekilde tanımlanarak fonksiyon standartlaştırılabilir.

yandan ρ sonsuza doğru yaklaştığında ikame elastikiyeti 0 a doğru yönelir, limit halinde CES fonksiyonu input-output üretim fonksiyonu haline dönüşür. σ nın değeri 1 e doğru ve dolayısı ile ρ nun değeri 0 a doğru yaklaştığında CES üretim fonksiyonunun ölçeğe göre sabit getirili bir üretim fonksiyonu haline dönüştüğü, yani

$$Q = (\text{sabit}) K^\delta L^{1-\delta}$$

olduğu gösterilebilir. Bu şekilde CES üretim fonksiyonu, özel haller olarak Cobb-Douglas, input-output ve doğrusal üretim fonksiyonlarını kapsama içine alan bir üretim fonksiyonları ailesidir.

CES üretim fonksiyonu Cobb-Douglas fonksiyonu gibi her iki tarafın logaritması alınarak kolaylıkla doğrusal hale dönüştürülemez. Gerçekte CES fonksiyonunun doğrudan tahminini sağlayacak biçimde parametrelerini ve değişkenlerini birbirinden ayıracak bir doğrusallaştırma metodu yoktur.

2.2. İktisadi Model

Teknik bir ilişki olan üretim fonksiyonunda K ve L girdilerini Q yu belirleyen bağımsız ekzojen değişkenler olarak ele almak mümkün değildir. Üretim, girdilerinin kendi kendine bir araya gelmesi ile kendiliğinden ortaya çıkan bir olgu değildir. Aksine Q, K ve L belirli bazı iktisadi kararlar sonucu müştereken belirlenmektedir. Dolayısı ile üretim fonksiyonunu ampirik olarak incelemeye geçmeden önce üretim ile ilgili iktisadi kararların alındığı bir çerçevenin çizilmesi gerekir.

Tam Rekabet Koşulları

Geleneksel yaklaşım üreticinin tam rekabet koşulları altında çalıştığını ve K ve L yi üretim fonksiyonu tarafından belirlenen sınırlayıcı koşul altında, kârı, π , maksimum kılacak şekilde belirlediğini varsaymaktadır. Çıktı fiyatını p, ücret had-dini w ve sermaye fiyatını r ile belirtirsek, Q, L ve K nın kâr maksimize eden değerleri

$$\pi = pQ - wL - rK$$

denkleminin Q = f(L, K) sınırlayıcı koşulu altında maksimizasyonu ile elde edilir. Maksimizasyon için gerekli koşullardan

$$w = p \frac{\partial f}{\partial L}, \quad r = p \frac{\partial f}{\partial K}$$

marjinal verimlilik koşulları elde edilir: Her girdinin marjinal ürününün değeri girdi fiyatına eşit olmalıdır. Dolayısı ile Q, L ve K nın kâr maksimum kılan değerleri üç denklemden oluşan

$$Q = f(L, M) \quad w = p \frac{\partial f}{\partial L} \quad r = p \frac{\partial f}{\partial K}$$

eşanlı denklem sisteminin çözümünden elde edilmektedir⁹.

9 Bu nokta ilk kez Marschak ve Andrews (1944) tarafından belirtilmiştir. Keza bakınız Nerlove (1965), Hildebrand ve Liu (1965), Zellner, Kmenta ve Dreze (1966), Griliches ve Ringstad (1971).

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu halinde dengedeki marjinal verimlilik koşulları

$$w = p \frac{\alpha Q}{L}, \quad r = p \frac{\beta Q}{K}$$

şeklini almaktadır, dolayısı ile α ve β

$$\alpha = \frac{wL}{pQ}, \quad \beta = \frac{rK}{pQ}$$

sıra ile emeğin ve sermayenin toplam çıktıdaki payları olarak yorumlanabilir. Optimal çıktı ve girdi düzeylerinin belirlenmesi üretim fonksiyonunun iki marjinal verimlilik koşulu ile eşanlı olarak çözümünü gerektirir. Çözülecek üç denklemlile ve üç bilinmeyenli sistem logaritmalardan cinsinden

$$\begin{bmatrix} 1 & -\alpha & -\beta \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log Q \\ \log L \\ \log K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log A \\ -\log \alpha + \log \left(\frac{w}{p}\right) \\ -\log \beta + \log \left(\frac{r}{p}\right) \end{bmatrix}$$

olmaktadır. Bu sistemin katsayı matrisinin determinanı

$$1 - \alpha - \beta$$

olduğundan, $\alpha + \beta = 1$ olması halinde çözüm yoktur, yani ölçüğe göre sabit getirili Cobb-Douglas üretim fonksiyonu halinde kârı maksimum kılan çıktı düzeyi belirsizdir. Maksimum için yeterli koşullar sınırlayıcı koşul olan üretim fonksiyonunu içine alan

$$\pi = p Q(L, M) - rK - wL$$

fonksiyonun L ve K ya göre ikinci türevleri alınarak çıkartılabilir; bu fonksiyonda ikinci ve üçüncü terimler doğrusal olduğundan ikinci dereceden koşullar, birinci terimin ikinci dereceden koşulları, yani (2) ve (3), ile tamamen aynıdır. Cobb-Douglas durumunda (3) eşitsizliği ile belirtilen koşul

$$\alpha + \beta < 1$$

olmasını gerektirir. Cramer (1969, 228-9) tarafından belirtildiği gibi, üretim fonksiyonu ve marjinal verimlilik koşulları tarafından belirtilen sistemin kârı maksimum yapan, sıfırdan farklı Q, L ve K değerleri için, bir çözüm vermesi ölçüğe göre azalan getiriyi gerektirmektedir. Marjinal verimlilik koşullarının burada veri olarak alınan fiyatların bir fonksiyonu olarak girdi miktarlarını belirlemede kullanıldığına dikkat edilmelidir. Bu çerçeve içinde ortaya atılan ve birçok tartışmalara neden olan cevaplandırılması güç bir soru, "faktörlere yapılan ödemelerin çıktıdan elde edilen getiriye eşit olmasının gerekip gerekmediği" sorusudur. Gerçekten de yeni firmaların endüstriye giriş çıkışının serbest olduğu bir teorik çerçeve içinde dengede pür zarar veya kârlar söz konusu olmayacağından

$$wL + rK = pQ$$

olması gerekmektedir. Bu ise ölçüğe göre sabit getiriyi ima eder.

Yukarda ulaşılan sonuçlarla ilgili olarak vurgulanması gereken iki nokta vardır. Birincisi, ampirik olarak herhangi bir tahmin yapmadan önce üretim fonksiyonu teknik özelliği sabit veya artan getiri kâr maksimizasyonunu sağlamıyor diye red edilemez ve herhangi bir veri kümesinin

$$wL + rK = PQ$$

şeklinde bir dengeyi yansıttığı varsayılmaz. İkincisi, sabit getiri halindeki Q, L ve K'nın belirsizliği pek mantıklı görünmemektedir, çünkü gerçekte bu değişkenler kesin değerler almaktadır ve bunların bir açıklaması olmak zorundadır. Bu problemin üstesinden gelmek için iki yaklaşım benimsenebilir. Birinci yaklaşım tam rekabet varsayımını düşürmektedir. Bu şekilde model içine bir çıktı talep fonksiyonu ve/veya bir emek arz fonksiyonu ve/veya bir sermaye arz fonksiyonu katılabilir. Fakat literatürde bu yol pek benimsenmemektedir, çünkü bu halde ürün tanımı ve endüstri kavramı sorunları ortaya çıkmaktadır.

İkinci yaklaşım emek ve sermayeden farklı ve piyasada satınalınamayan bir başka tip girdinin, 'müteşebbislik' girdisinin varlığını varsaymaktadır. Müteşebbislik kapasitesinin firma büyüklüğünü belirlediği farzedilmektedir. Müteşebbisin becerisini çıktıdan bağımsız olarak ölçmek güçtür, dolayısı ile firma büyüklüğünün müteşebbislik kapasitesi tarafından belirlendiğini söylemek bilinmeyene bir ad vermekten başka birşey deđildir¹⁰.

Üreticinin CES üretim fonksiyonunu sınırlayıcı koşul olarak kullanarak tam rekabet koşulları altında çalıştığı varsayılırsa, denge halindeki verimlilik koşulları

$$v\delta y^{-\rho/v} \frac{Q^{1+\rho/v}}{K^{1+\rho}} = \frac{r}{p}, v(1-\delta) y^{-\rho/v} \frac{Q^{1+\rho/v}}{L^{1+\rho}} = \frac{w}{p}$$

olur. Ölçeğe göre sabit getiri, $v = 1$, durumunda, logaritmalar cinsinden, marjinal verimlilik koşulları

$$\log\left(\frac{Q}{K}\right) = -\frac{1}{1+\rho} \log\left(\frac{\delta}{y^\rho}\right) + \frac{1}{1+\rho} \log\left(\frac{r}{p}\right)$$

$$\log\left(\frac{Q}{L}\right) = -\frac{1}{1+\rho} \log\left(\frac{1-\delta}{y^\rho}\right) + \frac{1}{1+\rho} \log\left(\frac{w}{p}\right)$$

şeklinde ifade edilebilir. Dikkat edilirse reel ücretlerdeki yüzde 1 lik bir artış işgücü verimliliğinde yüzde $1/(1+\rho)$ kadarlık bir artışa neden olmaktadır. Dolayısı ile, eşitlik (5) ile ifade edildiği gibi, $1/(1+\rho)$ ikame elastikiyetini, σ , belirtmektedir. Ölçeğe göre sabit getiri durumunda, CES üretim fonksiyonu ve iki marjinal verimlilik koşulundan oluşan eşanlı denklem sisteminin Q, L ve K'yı yine belirsiz bıraktığı gösterilebilir¹¹.

10 Walters (1967, 281).

11 Bu konunun daha detaylı tartışması bu yazının çerçevesini aşmaktadır. Sözel bir tartışma için bakınız Cramer (1973, 229-230).

Kamu Teşebbüsleri İçin Geçerli Koşullar

Kamu teşebbüsleri ve güdümlü endüstriler genellikle çıktılarını istedikleri gibi azaltıp çoğaltamazlar. Bu durumda çıktı sistem içinde belirlenen bir endojen değişken değil bir önceden belirlenmiş değişkendir. Çıktı fiyatları genellikle teşebbüslerin yönetiminden sorumlu kurullarca belirlenir. Girdi fiyatları rekabetçi piyasalarda belirlenebileceği gibi kısa dönemde önceden belirlenmiş olabilir. Demiryolu taşımacılığı ve elektrik arzı tipik örneklerdir¹². Kâr maksimizasyonu yine

$$\pi = pQ - wL - rK$$

denkleminin $Q = f(L, K)$ sınırlayıcı koşulu altında maksimizasyonu ile sağlanır; Q ve p bilinen sabitler olduğundan bu maksimizasyon toplam maliyet fonksiyonu

$$TC = rL + wK$$

nin minimizasyonu ile eşdeğerlidir. Optimum çözüm marjinal ikame haddinin faktör fiyat oranına eşit olmasını gerektirir:

$$R = \frac{\partial f}{\partial L} / \frac{\partial f}{\partial K} = \frac{w}{r}$$

Bu koşul üretim fonksiyonu $Q = f(L, K)$ ile birlikte kârı maksimize ve maliyeti minimize eden (L ve K) değerlerini belirler. Bu koşullarda da, çoğunlukla, fiyatı belirlemede geçerli olan kuralların sıfırdan farklı kârın ortaya çıkmasına izin vermeyeceği gerekçe olarak gösterilerek

$$wL + rK = pQ$$

olduğu varsayılmaktadır.

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, $Q = AL^\alpha K^\beta$, durumunda optimal çözümden

$$R = \frac{\partial Q}{\partial L} / \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{K}{L} = \frac{w}{r}$$

elde edilir. Buradan L ve K için çözüm yapıldığında

$$L = \frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{w} K, \quad K = \frac{\beta}{\alpha} \frac{w}{r} L$$

bulunur. Bu ifadeleri sıra ile üretim fonksiyonu içinde yerine koyar ve yeniden düzenleme yaparsak maliyeti minimize eden girdi fonksiyonları

$$L = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{w}{r}\right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \quad K = \left(\frac{Q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{w}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \quad (7)$$

elde edilir.

12 Bakınız Klein (1953, 226-236) ve Nerlove (1963).

2.3. Ekonometrik Model

Üretim fonksiyonu ampirik olarak tahmin edilecek bir ekonometrik model olarak formüle edildiğinde ek bazı güçlükler ortaya çıkmaktadır. Sistem içindeki denklemlerin kalıplarının açıkça tanımlanması ve analiz dışında bırakılan tüm değişkenlerin ve diğer tesadüfi unsurların etkilerini dikkate almak üzere tesadüfi bozukluk terimlerinin modele katılması gerekir.

İlk aşamada çapraz kesit çalışmaları için geçerli bir ekonometrik model üzerinde durulm. Tesadüfi bozukluk terimi genelde kolaylık sağladığı için, çarpım şeklinde modele katılmaktadır. Örneğin Cobb-Douglas üretim fonksiyonu

$$Q_t = AL_i^\alpha K_i^\beta u_{1i}$$

şeklinde ifade edilebilir, u_{1i} nin pozitif bir faktör olduğu ve 1 in her iki yanında değerler aldığı varsayılmaktadır¹³. Çoğunlukla u_{1i} nin i ninci firma veya müteşebbisin teknik etkinliğini (bilgi, beceri, çaba, konum avantajı, yapılan hatalar ve şanslılık) temsil ettiği kabul edilir¹⁴. Marjinal verimlilik koşulları içine katılan

$$\alpha \frac{Q_i}{L_i} = \frac{w}{p} u_{2i} \quad \text{ve} \quad \beta \frac{Q_i}{K_i} = \frac{r}{p} u_{3i} \quad (8)$$

tesadüfi bozukluk terimlerinin, u_2 ve u_3 , optimizasyonu sağlama başarısını yansıttığı varsayılmaktadır; müteşebbis en yüksek etkinliği sağladığında u_2 ve u_3 birim değerlerini alacaktır¹⁵. Sistem doğrusallaştırıldığında

$$\begin{aligned} \log Q_i - \alpha \log L_i - \beta \log K_i &= \log A + \log u_{1i} \\ \log Q_i - \log L_i &= \log \left(\frac{w}{p} \right) - \log \alpha + \log u_{2i} \\ \log Q_i - \log K_i &= \log \left(\frac{r}{p} \right) - \log \beta + \log u_{3i} \end{aligned}$$

bulunur. Sabitler dışında sistemde sadece endojen değişkenler yer almaktadır. Eğer üretim fonksiyonu tesadüfi terimi marjinal verimlilik koşulları tesadüfi terimlerin-

13 Alternatif olarak tesadüfi bozukluk

$$Q_i = AL_i^\alpha K_i^\beta u_{1i}$$

şeklinde denkleme katılabilir, bu halde u_{1i} nin sıfırın her iki yanında değerler aldığı varsayılır.

14 Bu yorumda da dikkatli olmak gerekir. Çünkü u_{1i} , i ninci firma veya müteşebbis için çoğu hallerde değeri tesadüfen belirlenen bir değişken değil o firmanın işletme olarak görelî becerisini yansıtan bir sabit olabilir. Her firma için bu sabit sistematik olmadığından bunun A içine yansıtacağını iddia etmek te mümkün değildir.

15 Alternatif olarak tesadüfi bozukluklar

$$e^{u_{1i}} \quad \text{ve} \quad e^{u_{2i}}$$

şeklinde ifade edilerek çarpım biçiminde verimlilik koşullarına katılabilir. Bu halde müteşebbis en yüksek etkinliği sağlandığında u_2 ve u_3 sıfır değerlerini alır.

den bağımsız değil ise üretim fonksiyonunun teşhis edilmediği görülmektedir. Başka bir deyişle, tahmin yapıldığında üretim fonksiyonunu, marjinal verimlilik koşullarının bir doğrusal kombinasyonundan ayırmak mümkün olmayacaktır. Teşhis çeşitli şekillerde sağlanabilir. Bir yol üretim fonksiyonu dışındaki değişkenler içine ekzojen değişken ilave etmektedir¹⁶. Örneğin sermayenin marjinal verimlilik koşulunu belirten denklem içine sermaye stoğu değişkeni bir ekzojen değişken olarak katılabilir. Girdi fiyatlarının sabitliği varsayımı düşürülebilir. Çapraz kesit çalışmasında ücret hadlerinin bölgesel farklılığı dikkate alınabilir. Tam rekabet varsayımı düşünülebilir, bu halde bir veya daha fazla sayıda fiyat endojen değişken haline gelecektir. Üretim fonksiyonu teşhis edilmemesine karşın marjinal verimlilik koşulları teşhis edilmiştir. (8) de verilen bu koşulları yeniden

$$\log \alpha = \log \left(\frac{wL_i}{pQ_i} \right) + \log u_{2i} \quad \text{ve} \quad \log \beta = \log \left(\frac{rK_i}{pQ_i} \right) + \log u_{3i}$$

şeklinde yazarsak $\log \alpha$ ve $\log \beta$, n sayıda gözlemden bir ortalama olarak hesaplanabilir:

$$\log \tilde{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{wL_i}{pQ_i} \right) \quad , \quad \log \tilde{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{rK_i}{pQ_i} \right)$$

Bu tahminler toplam çıktıdaki emek ve sermaye paylarının geometrik ortalamalarıdır:

$$\tilde{\alpha} = n \sqrt{\prod_{i=1}^n \frac{wL_i}{pQ_i}} \quad \tilde{\beta} = n \sqrt{\prod_{i=1}^n \frac{rK_i}{pQ_i}}$$

Benzer şekilde kamu teşebbüsleri için geliştirilen ve maliyeti minimize eden iki girdi fonksiyonundan, (7), oluşan sistemde teşhis edilemez. Bu halde tahmin edilebilir bir ekonometrik model iki denklemin birleştirilmesi ile bir maliyet fonksiyonu biçiminde türetilebilir:

$$TC = w \left[\left(\frac{Q}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{w}{r} \right)^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right] + r \left[\left(\frac{Q}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{w} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right]$$

$$TC = \psi Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

burada ψ bir sabittir. Maliyet fonksiyonu çıktı ve faktör fiyatları cinsinden logaritmik doğrusal bir fonksiyondur:

$$\log TC = \log \psi + \left(\frac{1}{\alpha+\beta} \right) \log Q + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right) \log w + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) \log r$$

16 Gelişigüzel ekzojen değişken ilavesi ile teşhisin ucuz bir şekilde sağlanması gerekir.

Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun tahmininde yaygın kullanılan bir yaklaşım tam rekabet, kâr maksimizasyonu, ölçüğe göre sabit getiri ($\beta = 1 - \alpha$) varsayarak fonksiyonu

$$\log Q_i = \log A + \alpha \log L_i + (1 - \alpha) \log K_i + u_i$$

biçimine dönüştürmek ve yoğun kalıp adı verilen

$$\log \left(\frac{Q_i}{L_i} \right) = \alpha + (1 - \alpha) \log \left(\frac{K_i}{L_i} \right) + u_i$$

kalıpta tahmin etmektedir. Aynı varsayımlar altında marjinal verimlilik koşulları

$$\log \left(\frac{Q_i}{L_i} \right) = \log \left(\frac{w}{p} \right) - \log \alpha + w_1$$

$$\log \left(\frac{Q_i}{K_i} \right) = \log \left(\frac{r}{p} \right) - \log \beta + w_2$$

ilişkilerini verir; kesmeler α ve β elastikiyetlerinin logaritmalarının ters işaretli değerleri olmaktadır.

CES üretim fonksiyonunun ekonometrik bir model olarak ifadesinde karşılaşılan temel problem, bu fonksiyonun parametreleri cinsinden doğrusal olan bir kalıpta ifade edilememesidir. Tahmin edilebilir bir model üretmek için marjinal verimlilik koşullarından yararlanılır. Ölçüğe göre sabit getiri ($v = 1$) halinde emek için geliştirilen marjinal verimlilik koşulu, (5), tam rekabet şartları altında

$$(1 - \delta) y^{-\rho} \left(\frac{Q}{L} \right)^{1 + \rho} = \frac{w}{p}$$

şeklinde ifade edilir. Yeniden düzenler

$$\left(\frac{wL}{pQ} \right) \left(\frac{w}{p} \right)^{\sigma - 1} = [(1 - \delta) y^{-\rho}]^{1/1 + \rho}$$

ve her iki yanın logaritmasını alırsak

$$\log \left(\frac{wL}{pQ} \right) = (1 - \sigma) \log \left(\frac{w}{p} \right) + \sigma \log (1 - \delta) + (\sigma - 1) \log y$$

tahmin edilebilir bir denklem olarak elde edilir. Cobb-Douglas üretim fonksiyonundaki gibi eğer $\sigma = 1$ ise emeğin payı ücret haddi ve nötr teknik değişmeden, y , bağımsızdır.

Üretim fonksiyonunun ampirik olarak tahmini açısından zaman serisi verilerinin en büyük dezavantajı, bu verilerin zaman içindeki teknik değişme ve gelişmeyi içermesidir. Dolayısı ile zaman serisi verileri ile çalışırken bunun dikkate alınması gerekir. En basit yaklaşım çarpım şeklinde bir trend terimi kullanılmaktadır.

$$Q_t = AL_t^\alpha K_t^\beta e^{\lambda t} + u$$

t yi alt indis olarak t döneminde üretilen çıktı ve istihdam edilen emek ve sermayeyi göstermek için kullandık. Eğer emek ve sermaye sabit tutulursa çıktı λ oranında büyüyecektir. Denklem yeniden

$$\ln Q_t = \ln A + \alpha \ln L_t + \beta \ln K_t + \lambda t + u$$

şeklinde yazılabilir¹⁷.

3. VERİLER VE TAHMİN

Üretim fonksiyonu içinde yer alan değişkenlerden ölçümü en kolay olan emek girdisidir. Bu girdinin ölçümünde karşılaşılan problem farklı kalitedeki birimlerin standart bir birim cinsinden nasıl ifade edileceğidir. Emek için en iyi kalite ölçüsü marjinal verimliliklerdir; denge halinde bu bir baz yıl ücreti ile ölçülebilir. Dolayısı ile emek baz yılındaki ücrete göre ağırlıklandırılarak bütünleştirilmelidir. Uygulamada emek, cinsiyet ve yaş gibi kaba kategorilere göre gruplandırılmakta ve ağırlıklar bu gruplar için kullanılmaktadır. Teori bütünleştirmede geometrik ağırlıklandırmayı önermesine karşın uygulamada aritmetik ortalama veya toplamlar kullanılır. Emek girdisi genellikle yıllık adam saati olarak ölçülmektedir. Çıktının ölçümünde ağırlıklı indeks sayıları tekniği kullanılmaktadır. Genellikle bir baz yılını esas alan aritmetik ağırlıklandırma kullanılır. Temel problem sermayenin ölçümünde ortaya çıkmaktadır. Üretim fonksiyonundaki sermaye girdisi, çıktı ve emek girdisinin hesaplandığı yıldaki sermaye hizmetine karşı gelmektedir. Bir makine diğerinden çok kıymetli olsa dahi belirli bir dönemde aynı hizmeti sunuyorsa dönemlik kira her iki makine için aynı olmalıdır. Heterojen sermaye mallarını bir araya getirmedeki indeks sayıları problemi yanı sıra zaman içinde ortaya çıkan teknik gelişme ve yenilikler ek problemler yaratmaktadır. Uygulamada sermaye çoğunlukla net sermaye stoğu ile ölçülür. Bu ölçü sermaye stoğundan yıpranma çıkarılarak bulunur. Bir diğer metod tesis ve cihazları yangın sigorta değerine göre değerlendirmektedir¹⁸. Bazen gayri safi sermaye stoğu ve bazı doğrudan ölçüler (tarımda kullanılan traktör sayısı, hastanedeki yatak sayısı gibi) de sermaye ölçüsü olarak kullanılmaktadır. Hammadde, yakıt ve toprak üretim fonksiyonu içine dahil edilen diğer belli başlı girdilerdir. Ayrıca bazen emek girdisi kalifiye ve kalifiye olmayan şeklinde ve sermaye girdisi de tesis ve teçhizat şeklinde alt gruplara ayrılmaktadır.

Üretim fonksiyonunu parametrelerini tahminde farklı yöntemler kullanılmaktadır. Yapılan varsayımlar ve araştırılan ilişkiler de kullanılan yöntemin belirlenmesinde etkili olmaktadır. Tam rekabet ve kâr maksimizasyonu koşullarının geçerli olduğu bir ortamda, eğer teşhis problemi de çözümlenebilirse, buradaki gibi üç denklemlerle bir sistem içinde tahmin tutarlı bir yöntemdir. Kâr maksimizasyonu ve tam rekabet varsayımlar düşürüldüğünde bir sistem geliştirmek çok zorlaşmaktadır. Bu halde, çoğunlukla, eşanlı denklem eğilimi problemi göz ardı edilerek veya problemin önemsiz olduğu varsayılarak üretim fonksiyonu bir tek denklem modeli olarak tahmin edilmektedir. Emek ve sermaye genellikle birlikte değiştiğinden üretim fonk-

17 Daha karmaşık teknolojik gelişme modelleri için bakınız Solow (1959) ve Walters (1968).

18 Ringstad (1971, 31-33).

siyonu tahminlerinde karşılaşılan tipik bir problem çoklu doğrusal bağıntı problemi; bu problem bazı hallerde çok önemli boyutlara ulaşmakta ve iktisadi olarak anlamlı parametre tahminleri yapmak imkansız hale gelmektedir. Fakat bu gibi durumlarda dahi üretim fonksiyonu tahminleri yararlı olabilir; örneğin Cobb-Douglas üretim fonksiyonunda α ve β sağlıklı olarak tahmin edilemese dahi ölçüğe göre getiri, $\alpha + \beta$, hakkında güvenilir bilgi elde edilebilir. Üretim fonksiyonu tahminlerinde karşılaşılan bir başka önemli ekonometrik problem heteroskedastisite problemidir. Özellikle çapraz kesit örneklemeleri ile çalışıldığında gözlem birimleri (firma veya endüstri) büyüdükçe tesadüfi bozukluk teriminin beklenen ortalama etrafındaki saçılım artmaktadır.

KAYNAKLAR

- Arrow, K.J., H.B. Chenery, B.S. Minhas ve R.M. Solow (1961); "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency", *Review of Economics and Statistics*, 43, 225-35.
- Brown, M. (1966); *On the Theory of Measurement and Technological Change*, New York: Cambridge University Press.
- Brown, M., Ed. (1967); *The Theory and Empirical Analysis of Production*, National Bureau of Economic Research, New York: Columbia University Press.
- Chenery, H.B. (1949); "Engineering Production Functions", *Quarterly Journal of Economics*, 63, 507-31.
- Christensen, L.R., D.W. Jorgenson, and L.J., Lau (1973); "Transcendental Logarithmic Production Frontiers", *Review of Economics and Statistics*, 55, 28-45.
- Cremer, J.S. (1969); *Empirical Econometrics*, Chapter 10, Amsterdam: North-Holland Publishing Co.
- Dorfman, R. (1953); "Mathematical or 'Linear', Programming: A Nonmathematical Exposition", *American Economic Review*, December 1953, 797-825. Bu makalenin türkçeye çevirisi için bakınız Ertaş (1982).
- Ertaş, S. (1982); "Matematiksel, veya "Doğrusal" Programlama: Matematiksel Olmayan Bir Açıklama", *İktisadi ve İdari Bilimler*, Aralık 1982, 3, No: 2, 51-77, çeviri Dorfman (1953).
- Griliches, Z. (1967) "Production Functions in Manufacturing: Some Preliminary Results", Brown, Ed. (1967) içinde.
- Griliches, Z. ve V. Ringstad (1971); *Economies of Scale and the Form of the Production Function*, Amsterdam: North-Holland Publishing Co.
- Halter, A.N., H.O. Carter and J.G. Hocking (1957); "A Note on Transcendental Production Functions", *Journal of Farm Economics*, 39, 966-74.
- Hildebrand, G.H. and T.C. Liu (1965); *Manufacturing Production Functions in the United States*, 1957. Ithaca: New York State School of Industrial Labor Relations.
- Intriligator, M.D. (1978); *Econometric Models, Techniques and Application*, Chapter 8, Amsterdam: North-Holland Publishing Co.
- Klein, L.R. (1953); *A Textbook of Econometrics*, Evanston: Row, Peterson.
- Kmenta, J. (1967); "On Estimation of the CES Production Function", *International Economic Review*, 8, 180-189.

- Marschak, J. ve W.H. Andrews (1944); "Random Simultaneous Equations and the Theory of Production", *Econometrica*, 12, 143-205.
- Nerlove, M. (1963); "Returns to Scale in Electricity Supply", G.F. Christ et al., *Measurement in Econometrics: Studies in Mathematical Econometrics*, Stanford University Press içinde. Zellner, Ed. (1968) ve Nerlove (1965) içinde yeniden basılmıştır.
- Nerlove, M. (1965); *Estimation and Identification of Cobb-Douglas Production Functions*, Amsterdam: North-Holland Publishing Co.
- Ringstad, V. (1971), *Estimating Production Functions and Technical Change from Micro Data*, Central Bureau of Statistics of Norway, Oslo.
- Wallis, K.F. (1973); *Topics in Applied Econometrics*, London: Gray-Mills Publishing Ltd.
- Walters, A.A. (1963); "Production and Cost. Functions: An Econometric Survey", *Econometrica*, 31, 1-66.
- Walters, A.A. (1968); *An Introduction to Econometrics*, Macmillan and Co Ltd., London.
- Zellner, A., J. Kmenta ve J. Dreze (1966); "Specification and Estimation of Cobb-Douglas Production Function Models", *Econometrica*, 34, 727-29.
- Zellner, A. ve N. Revankar (1969); "Generalized Production Functions", *Review of Economic Studies*, 36: 241-50.