Uludağ Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi
Cilt IX, Sayı 1-2, Mart-Kasım 1988

SINAI ÜRETİM FAKTÖRÜ KULLANIMINDA DOĞRUSAL PROGRAMLAMA TEKNİĞİ

Ercan DÜLGEROĞLU[1]

ÖZET

Bu makalede sınaî sektörün faktör kullanımında karşılaşılan problemlerin doğrusal programlama tekniğiyle çözümüne yer verilmektedir. Öncelikle doğrusal programlama tekniğinin ne olduğu açıklanmıştır. Daha sonra ise bu teknik kullanılarak bir sınaî firmada kâr maksimizasyonunun nasıl sağlanacağı bir örnekle açıklanmıştır. Ayrıca doğrusal olmayan programlama dualite ve simpleks çözümleri de gösterilmiştir.

SUMMARY

Within this paper it is discussed how the problems faced with factor using in industrial sector would be solved by linear programming technics. First linear programming is explained, then how the profit maximization in an industrial firm will be reached is shown by samples. In addition, non-linear programming, duality and simplex solutions are applied to the same samples.

Tarihi açıdan bakıldığında; doğrusal iktisadın üç branşı göze çarpar. Birinci olarak oyun teorisi 1928'lerde Neumann tarafından ortaya atılmış, oligopol halindeki bir firmanın davranışının rakiplerinin davranışlarını da hesaba katan bir minimaksimizasyon işlemi olduğunu açıklamaktadır. İkinci olarak girdi-çıktı analizi 1936-41'lerde Leontief'in çalışmaları ile ortaya çıkmıştır. Leontief sisteminde, çok kesimli bir ekonomi içindeki sanayilerarası teknolojik bağıntılar ince-

1 Doç. Dr.; Uludağ Üniv. İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Öğretim Üyesi.

lenmiştir. Nihai talep biliniyorsa her üretim dalındaki çıktı miktarı tespit edilebilir. Konunun önemi gayet açıktır. Planda saptanan yatırım, yoğaltım ve ithalat vs. nin sabit sayılan teknolojik matrisi yardımıyla ekonomideki üretim miktarlarının ne olacağını bize verecektir. Son olarak ise doğrusal programlama; 1947'lerde George Dantzig'in ABD'nin hava kuvvetlerinin planlanmasında yaptığı çalışmalarla ortaya çıkmıştır. Hava kuvvetlerinin planlanmasında üç türlü tespit var, faaliyetler, ilişkiler, hedefler. Hedeflere varırken hangi faaliyetleri ne kadar kullanmak; tedarik, bakım, talim, askere almanın nisbi tesirlerinin neler olduğunu saptamak Dantzig'in çalışmalarıyla mümkün olmuştur.

Doğrusal programlama ile girdi-çıktı analizi arasındaki ilişki aşikârdır. Girdi-çıktı analizi; içinde kararlaştırılmış (veri) nihai istihsali, yani çıktının istenilen tarzda seçim imkanı, olmayan doğrusal programlama modülünün özel bir hali olarak düşünülebilir[2].

Doğrusal programlama ile girdi-çıktı analizinin oyun teorisi ile olan bağıntısı ise daha muğlaktır. Matematiksel yapı bakımından oyun teorisi ile doğrusal programlama aynı pratiğe sahiptirler. Her ikisini de matematiğin aynı branşının (doğrusal eşitsizliklerin analizi) tatbikatı olarak ele alırsak, aradaki bağıntının gizliliği azalacaktır. Netice olarak doğrusal programlamanın, doğrusal iktisadın çekirdeği olduğunu söylemek yanıltıcı olmayacaktır.

Doğrusal programlama herşeyden evvel çeşitli problemlerin çözümünde kullanılmak üzere ortaya konmuş, yeni sayılabilecek bir matematik tekniktir. Aslında matematik görünümü olan bu çözüm ekonomi bilmine uygulanmak suretiyle iktisatçılar açısından önem kazanıyor.

Meselenin 25-30 yıllık bir mazisi olması, öneminden hiçbir şey kaybetmesini gerektirmiyor. İlk olarak savunma hizmetlerinde ihtiyaçların azami seviyede giderilmesi için geliştirilmiş olan metod bugün endüstriye de uygulanmaktadır. Niçin bu uygulamanın yapıldığını düşünürsek; konumuzu optimizasyon problemine getirmiş oluruz.

Genellikle ekonominin herhangi bir bölümünde belirli dönemler için, eldeki mevcut üretim faktörleri (asli faktörler; yani sermaye, toprak ve kapital) miktarı sabit tutulabilir. Dolayısıyla bir istihsal kolunun veya bir endüstrinin bu üretim faktörlerini kullanmakta çeşitli alternatifleri olacaktır. Amaçlara ulaşmak için, tabii olarak, bu alternatiflerden biri kullanılacaktır. Herhangi bir istihsal metodunun kullanılması, tabiatıyle, diğerlerinin seçilmemesini sağlayacağından her seferinde değişik sonuçlar elde edilecektir. İstihsal faktörlerinin farklı şekilde birleştirilmeleri belli amaçları elde etmek için araçların en iyi kullanımını meydana çıkaracaktır. İstenilen miktarda emek ve kapital bileşiminden hareket etmek, müteşebbisin vereceği karara bağlı kalacaktır. Yalnız burada gözönünde bulundurulması gereken husus *israfı* önlemektir. Boşuna uğraşı olarak ni-

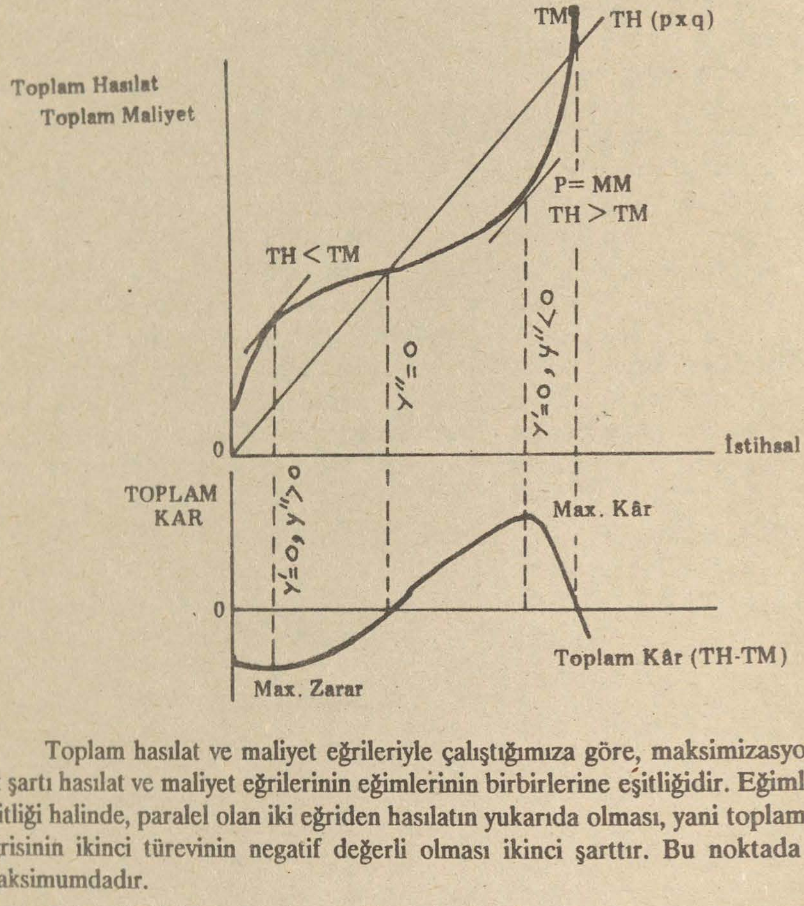
---

2 R. Dorfman; P.A. Samuelson and R.M. Solow; Linear programming and Economic Analysis, Mcgraw-Hill Book Co., Newyork, 1958, s. 4.

telemek istenilen husus iki noktadan ele alınabilir. Birincisi mevcut imkanlarla tesbit edilen amacı (ki bu azamileştirilecek kâr miktarı veya istihsal olabilir) gerçekleştirememek; ikincisi, belli bir amaca asgarinin üzerinde araç ve imkanları kullanarak ulaşmaktır. Her iki halde de etkinlik yoktur. Optimizasyona varılamamıştır, yani bir boşuna uğraşı vardır. Buna mani olmak için istihsal imkan ve metodlarının iyi seçilmesi gerekmektedir. Girdi-çıktı modellerinde de endüstriler kendi aralarındaki talebi, asli faktörlere olan talebi ve sonunda nihai talebi karşılamak için belirli faaliyet göstermektedir. Faaliyet kelimesinden burada anlaşılması gereken nokta alternatif istihsal teknikleri toplamıdır. Meselâ; bir firma 4000 birim (x) malı üretmek için üç türlü emek ve sermaye kombinasyonu yapıyorsa, firma üç faaliyet imkanına sahiptir. Fakat, mevcut ihtimallerden birisini kendi maksadına en uygun olanı seçecektir. Genelleştirecek olursak (n) sayıda kombinasyon imkanına sahip olan bir endüstri, bir istihsal metodundan vazgeçip diğerine başvurmak veya her teknikteki faaliyetinin dozunu ayarlamak suretiyle belli bir istihsal miktarını daha değişik bir kaynak terkibi ile elde eder. Bileşimlerdeki kaynaklarla daha çok mal üretebilir. Girdi-çıktı modellerinde optimizasyon probleminde; azamileştirme veya asgarileştirme meselesi yoktur, hedef olarak belli miktar çıktı elde edebilmek için gayri safi istihsalin yani girdinin ne olması gerektiğini veya tersine miktarı belli girdinin kapasite ile çarpılarak üreteceği nihai malları, çıktıyı, bulmak saptanmıştır.

Halbuki incelemekte olduğumuz konu bu açıdan bakıldığında farklı olmaktadır. Belli bir üretim tekniği ve verilen araçlarla üretimi en yüksek seviyeye çıkaracak faaliyeti veya faaliyetler kombinasyonunu bulmak lüzumu hasıl olmaktadır. Girdi-çıktı analizinin ampirik özelliğine mukabil, doğrusal programlama tekniği genel denge ve refah teorisine uygulandığı hallerde herhangi bir ampirik görünüşü yoktur. Girdi-çıktı analizi ile programlama tekniğinin ampirik problemlere uygulanması sırasında birbirlerine yakınlaştıklarını görüyoruz. Ancak aradaki tek fark önem kazanmaktadır. Girdi-çıktı analizinde talep fonksiyonu yoktur ve nihai talep dışarıdan veridir. Buna göre girdi-çıktı analizinin çözümü gerçek bir denge ve optimizasyon vermez. Halbuki doğrusal programlama tekniğinde nihai talep, problemin çözümü olarak hesaplanacaktır. Bu bakımdan doğrusal programlama bir dengeleme ve en iyi kullanım çözümüdür. Gerçekte problemin çözümü bir "minimizasyon" veya "maksimizasyon" olduğuna göre bunu kalkülüs ya da marjinal analiz tekniği ile de çözmek mümkün olabilecektir. Ancak böyle bir çözümün yapılabilmesi için maksimum veya minimum kılınacak miktar, değişkenlerin birinci ve ikinci dereceden türevleri olan sürekli bir fonksiyonu olmalıdır. Biraz daha konuyu açarsak optimizasyon problemi bir tahdit dizisiyle sınırlandırılmamalıdır. Gerçi sınırlı maksimizasyon ve minimizasyon problemi çözümü diferansiyel cebir ve Lagrange çarpanı vasıtasiyle mümkün olmaktadır. Fakat modeldeki denklem ve bilinmiyenlerin sayısı arttıkça çözüm imkansızlaşmaktadır. Ayrıca Lagrange çarpanının kullanılış sahası gayet sınırlıdır.

Optimizasyon probleminde tahditlerin ve şartların bulunmaması sürekli fonksiyonel bir incelemeyi sağlamaktadır. Bu suretle endüstri veya firma için hedeflere varırken bir serbesti ortaya çıkıyor. Hedef kârın azamileştirilmesi olduğuna göre; çeşitli istihsal faktörlerinin kullanılması ve metodun seçimi azamiyi veren biçimde olacaktır. Denge noktası daha doğrusu kârın maksimizasyonu aşağıdaki geometrik şekil yardımıyla ve cebrik açıdan gösterilebilir[3].



Toplam hasılat ve maliyet eğrileriyle çalıştığımıza göre, maksimizasyonun ilk şartı hasılat ve maliyet eğrilerinin eğimlerinin birbirlerine eşitliğidir. Eğimlerin eşitliği halinde, paralel olan iki eğriden hasılatın yukarıda olması, yani toplam kâr eğrisinin ikinci türevinin negatif değerli olması ikinci şarttır. Bu noktada kâr maksimumdadır.

Tek istihsal faktörüyle izah edilen yukarıdaki marjinal analiz, kolayca çok istihsal faktörleriyle, çok mal için de kesiksiz olarak uygulanabilir. Fakat herhangi bir tahdit getirecek olursak fonksiyon sürekliliğini kaybederek marjinal analizin uygulama sahasından çıkar. Bu takdirde yeni bir çözüme başvurulmalıdır. Bu çözüm yolu metodu ise doğrusal programlama tekniğidir.

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA PROBLEMİNİN ORTAYA KOYULMASI

Tipik bir doğrusal programlama problemi aşağıda gösterileceği gibi cebir ve geometri yardımıyla basitçe ortaya konulabilir. Problemin yapısında üç ana bölüm yer almaktadır:

3 W.J. Baumol; Economic Theory and Operations Analysis, 1965, pp. 49-51.

1- **Denklemler:**

Bu kısımda problem için belirli şartlar konulmuş ve problemin çözümünde bu şartların sağlanması istenmiştir.

Formüle edersek;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1j}x_j + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2j}x_j + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots + a_{ij}x_j + \dots\dots + ai_nx_n = b_i$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mj}x_j + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m$$

(a)lar teknik istihsal koefisyanlarını göstermektedir. Meselâ (j) inci birimin içinde (i) inci maldan bir miktar olması gerekiyorsa, koefisyan (a_{ij}) olacaktır. Birinci malın toplam istihsali; koefisyanları ile istihsal miktarlarının çarpımına eşit olacaktır.

Eldeki kaynakların sayısı (m) dir. (n) ise istihsal olunan (veya problem istihlak ise tüketilen) malların sayısıdır. (b_i) de (1'den m'e kadar) mevcut kaynakların arzını gösterir. (n) maldan içinde ikinci kaynaktan bulunanların nihai seçimi bize ikinci sıradaki denklemi verecektir.

Teknoloji maddesi (A) ve mevcut kaynak arzı (B) bilindiğine göre müteşebbisler veya müstehlikler ikinci malın toplam istihsal veya istihlakinde çeşitli mallardan bazılarını kullanmayı düşünmeyebilirler. Mesela; (j) inci malı üretmez veya tüketmezseler matristeki (x_j) ile ilgili kolonun değeri sıfır olacaktır.

2. **Negatif Değer Kısıtlamaları:**

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \dots, x_j \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0$$

Doğrusal programlama problemini hazırlayan bu şart (x) lerin asgari sıfıra eşit olmasını veya pozitif değerler almasını öngörmektedir. Matematik olarak (x) lerin negatif olması olağandır. Fakat iktisadi gerçeklere fiziksel açıdan bakacak olursak (x)lerin eksi değerler alması manasız olacaktır. Tüketici için (x)in negatif olması halinde satın alma söz konusu olmayacağı gibi üretici için üretim yapma yerine, üstelik, tahrip sözkonusudur.

3. **Doğrusal Form veya Objektif Fonksiyon:**

$$Z = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots\dots + p_jx_j + \dots\dots + p_nx_n \text{ dir.}$$

Bu fonksiyon optimize edilmesi gereken denklemdir. Çözümü halinde ya minimize edilmesi veya maksimize edilmesi gerekecektir. (Z) yerine göre firma kârını (ki maksimize edilecektir) veya tüketicinin ödeyeceği masraf toplamını (ki minimize edilecektir) göstermektedir. Denklemdeki (x) ler (1 den n'e kadar) istihsal edilecek 1, 2, ..., n. inci malların miktarlarıdır. Problemimiz maksimizasyon ise (p) ler (1 den n'e kadar) birim başına kâr, minimizasyon ise masrafı gösterecektir.

Unsurları ayrı ayrı ele alınan tipik doğrusal programlama problemi çözüldüğünde ulaşılacak netice (Z) nin optimizasyonudur. Bu meyanda (Z) nin değeri ya en az veya en çok seviyelerde tespit edilecektir. Bu işlem yapılırken de iki şarta; tahditler ve negatif olmama şartına bağlı kalınacaktır. Kullanılan kaynaklara talep, o kaynağın arzına eşit olmalıdır ve istihsal miktarları negatif olmamalıdır[4].

FİRMADA KÂR VE MAKSİMİZASYON

İnceleyeceğimiz maksimizasyon probleminin çözümü yine geometrik ve cebrik olarak tesbit edilecektir. Çünkü ele aldığımız misalde, az sayıda denklem ve değişken vardır.

Objektif Fonksiyon:

Maksimum: $Z = x_1 + x_2$

Tahditler:

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 9$$

Negatif Değer Kısıtlamaları: $x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0$

Faktörler	**Mallar**		**Standart**
	x_1	x_2	
Emek	1	2	6
Sermaye	3	2	9
Birim Kâr	1	1	?

Tahditlerin çözüm değerleri:

Emek $x_1 = 0, x_2 = 3; x_2 = 0, x_1 = 6$

Sermaye $x_1 = 0, x_2 = 4{,}5; x_2 = 0, x_1 = 3$

Simultane çözümde ise $x_1 = 1{,}5$ $x_2 = 2{,}25$ bulunur.

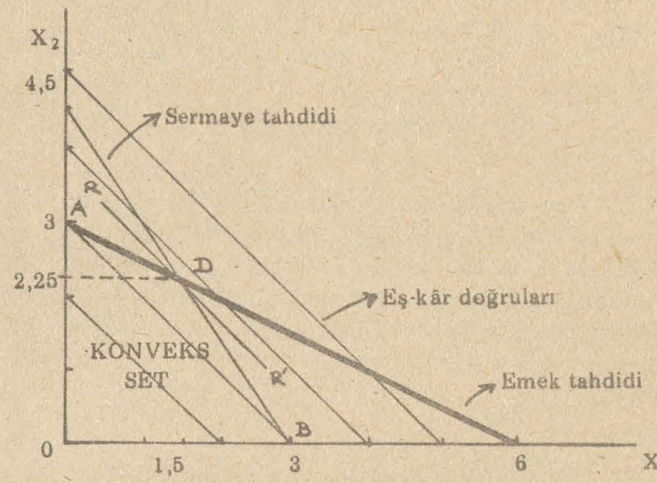
Kâr fonksiyonumuz ise, maksimum $Z = x_1 + x_2$ idi. Burada birim kâr iki mal için; $p_1 = 1$ ve $p_2 = 1$ (denklemde katsayılar bir olduğu için yazılmamıştır) olduğuna göre doğrunun eğimi 1'dir. Eğimi 1 olan eş-kâr doğruları aşağıda şekilde gösterdiğimiz uygulanabilir alandan geçmelidir ve faktörleri tam olarak (iki faktör olduğu için optimal çözüm de sözkonusudur) kullanmalıdır. Aynı za-

4 A. Kılıçbay; Ekonometri, İst., 1965, s. 332.

manda kuzeydoğuya doğru azami seviyeye çıkmalıdır. Bu doğru şeklimizde RR'dür. Sermaye ve emek tahdidi doğrularının kesim noktası, bu doğru üzerindedir. Koordinatları $x_1 = 1{,}5$ $x_2 = 2{,}25$ olan bu noktada (Z)nin değeri maksimumdur.

Maksimum $Z = 1.1{,}5 + 1.2{,}25$

$Z = 3{,}75$



Doğrusal denklemlerle çalıştığımız için çözüm alanımız mutlaka orijine dışbükey ve köşeli biçimde olacak ve kâr fonksiyonumuz ise düz hatlardan ibaret bulunacaktır. Çözüm ise köşededir. İki basit değişkenli ve iki tahditli misalimizde, doğrusal programlamanın saçma bir problem olduğuna karar vermemelidir. Basitliği, meselenin özü, yere inmesi için tercih edilmiştir. Halbuki gerçek bir programlama modelinde konveks setin köşelerinin sayısı astronomik olabilir. Optimal bir seçim ancak kuvvetli bir hesaplama tekniği ile yapılabilir. Bu durumda simpleks metodunu kullanmak gerekmektedir. Simpleks metodda köşeler sistemli bir şekilde taranmaktadır.

BİR DOĞRUSAL PROGRAMLAMA PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

1. Sun'i Değişkenler:

Doğrusal programlamada ortaya koyduğumuz tahditler kısmında mevcut eşitsizlikleri eşitlikler haline getirmek için ilave semboller kullanılmaktadır. Bunlara sun'i veya belirtisiz değişkenler diyoruz. Aşağıdaki problemde;

Max, $P = 5w + 3x + 2y + 7z$

Tahditler, $0{,}5w + 2x + 1{,}9y + 3{,}1z \leq 32000$ makine saat

$10w + 1{,}2x + 7y + 4z \leq 50000$ ambar birim

Negatifsizlikler,

$w \geq 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Firmanın elindeki makine saati 32000, ambar kapasitesi 50000 birimdir. Mesela birim (w) malı için 0,5 birim makine saate, yine 10 birim ambara ihtiyaç vardır.

Sun'i değişken ilave edersek eşitsizlikleri denklem haline çevirmek mümkün olacaktır[5].

Max, $P = 5w+3x+2y+7z$

Tahditler, $0,5w+2x+1,9y+3,1z+T = 32000$

$10w+1,2x+7y+4z+C = 50000$

Negatifsizlikler,

$w \geqslant 0, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, T \geqslant 0, C \geqslant 0$

Burada (T) boş kalabilecek makine saati, (C) ise boş kalabilecek ambar alanını belirtiyor. (T) ve (C) nin değeri normal değişkenler gibi çözümde ortaya çıkar. Sun'i değişkenlerin sıfır veya sıfıra yakın olması, istihsalin o faktörünün, meselâ (T) için makine saatin darboğaz yarattığını ifade eder. Sun'i değişkenlerin değeri büyüdükçe faktör bollaşıyor demektir.

2. Çözümler:

i) Mümkün Çözüm

Tahditleri ve negatif olmama şartlarını tatmin eden değişkenlerimizin değerleridir (Feasible solution). Çözüm ise; (solution) bütün tahditleri sağlayan (x_i)ler takımı olup değer işaretlerinden bağımsızdır.

ii) Temel Çözüm

İçinde sıfır değerli olmayan (tahditlerdeki eşitsizlikler sayısına eşit olan değişkenlerimizin) değerlerinin meydana getirdiği gruptur; aslında bunlar istihsal faktörlerinin değerleridir. Esas ve sun'i değişkenlerin konveks setin içinde bulunan herhangi bir bileşimidir.

Vajda ise temel çözümü şöyle tarif etmektedir:

"Temel çözüm; esas değişkenlerle beraber tahditleri çözmek ve eşitsizlikleri denklem haline getirmek için konulan sun'i değişkenlerle elde edilen çözümdür"[6].

iii) İlk Temel Çözüm

Mal istihsalinin veya istihlâkının hiç yapılmadığı konveks setin bir köşesini teşkil eden noktadır. Simpleks metodunda çözüme bu noktadan başlanıldığı için ilk temel çözüm adı verilmektedir.

---

5 W.J. Baumol; Economic Theory..., 1963, ss. 79-80,.

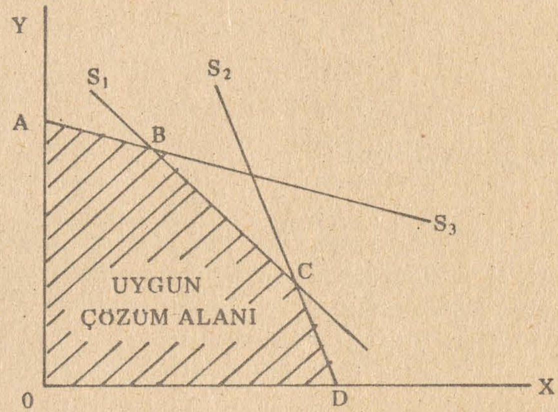
6 S. Vajda; The Theory of Games and Linear Programming, Methuen and Co. Ltd., London, 1961, s. 118.

iv) Optimal Çözüm

Optimizasyon gerçekleştiren mal bileşimi noktasıdır.

3. Temel Teorem:

Bir doğrusal maksimum veya minimum probleminde (n) değişken ve (m) eşitsizlik varsa, sıfır olmayan (x)lerin sayısı (n); (m) den asla büyük olamaz[7]. Mesela; iki mal, üç tahdit kabul edelim. Mallar: X, Y. Tahditler: S_1, S_2, S_3.



Uygun çözüm bu alanın köşelerindeki temel çözümlerden birinde bulunacaktır. Yukarıdaki şekilde beş noktada da normal ve sun'i değişkenlerden yalnız üçü sıfırdan büyük oluyor.

Bu neticeden çıkarılacak sonuç şaşırtıcıdır. Şöyle ki; doğrusal programlama hesabı 12 sabit istihsal faktörü olan ve 500 çeşitli mal üreten firmal kârını azamiye çıkarmak için mal çeşidini 12'ye indirmelidir[8]. Burada 12 sıfır olmayan esas değişkenlerin miktarıdır.

DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA

Yukarıda varmış olduğumuz neticenin geçerliliği yapmış olduğumuz doğrusal varsayımlara dayanmaktadır. Yani sabit istihsal koefisyanları ve sabit birim kâr varsayımlarına. Faraziyemiz doğrusal olmadığı taktirde ise; realiteye yaklaşım doğrusallık mahsurunun ortadan kalkmasıyla daha mümkün olacaktır. Doğrusal olmayan programlama[9] olarak nitelediğimiz çözüm; içinde ölçeğe göre azalan veya artan getirilerin temsil edildiği tahditli maksimizasyon probleminin analizi

---

7 R. Dorfman, P.A. Samuelson, R.M. Solow; Linear Programming and Economic Analysis, 1968, s. 14.

8 M. Hiç, Girdi-Çıktı Analizi ve Doğrusal Programlama, İst., 1968, s. 64.

9 W.J. Baumol; Economic Theory and Operations Analysis, 1965, s. 129-147.

olarak ekonomik terimlerle tarif edilebilir. Bu tip bir programlamanın model olarak ortaya konulması halinde fonksiyonlarımız aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi ortaya çıkacaktır.

1- Objektif fonksiyon:

$$\text{Maksimum (veya minimum) } f(x, y, z, ...)$$

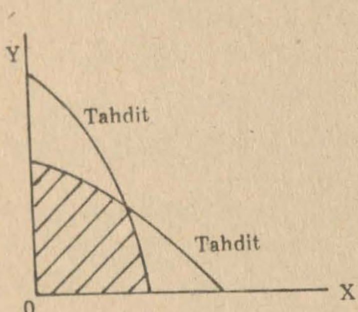
2- Tahditler:

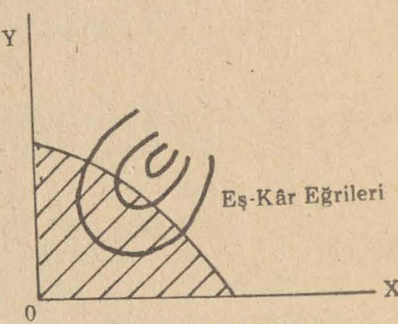
$$g_1 (x, y, z, ...) \leqslant c_1$$
$$g_2 (x, y, z, ...) \leqslant c_2$$
$$..........$$
$$g_m(x, y, z, ...) \leqslant c_m$$

3- Negatif değer kısıtlamaları:

$$x \geqslant 0, \; y \geqslant 0, \; z \geqslant 0$$

Geometrik olarak gösterecek olursak, tahditlerimiz doğrusal yerine doğrusal olmayan fonksiyon ve objektif fonksiyonumuz da aynı şekilde doğrusal olmayan bir kâr eğrisi olarak kendini gösterecektir.





DUALİTE PROBLEMİ

Doğrusal programlamada optimizasyonun iki yanı olduğunu söylemiştik. Eğer problem maksimizasyonu öngörmüşse, bunun karşısında ikinci olarak bir problem yazılabilir, tabii minimizasyon olarak. Bu çifte; ikili doğrusal programlama problemleri adı verilir[10].

İktisatçı ve matematikçiler için ikili problemin önemi aşağıdaki maddelerden anlaşılabilmektedir.

- Doğrusal programlamanın anlaşılmasına esaslı katkılarda bulunur.

10 Dualite problemi için bakınız: R. Dorfman, P.A. Samuelson, R.M. Solow, Linear Programming and Economic Analysis, 1968, ss. 52-59, 100-105.

- Programlama problemlerinin çözümünde yardımcı olmaktadır. Şöyle ki; bazı minimizasyon problemlerinin çözülmesi imkansız olduğu halde, ikinci problem şeklinin vaz'edilmesi ve çözülmesi ile netice ortaya çıkarılabilir.
- İkili problemde marjinal analizin doğrusal programlama probleminin optimal çözümünde değişik varsayımlarına rağmen teyid edildiği görülmektedir.

Doğrusal programlama problemini yazalım:

Esas modelimiz,

Max, $Z = p_1x_1 + \ldots\ldots + p_nx_n$

Tahditler, $a_{11}x_1 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leqslant c_1$

$a_{m1}x_1 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leqslant c_m$

Negatifsizlikler, $x_1 \geqslant 0, \ldots\ldots, x_n \geqslant 0$ idi.

Buna primal (birincil) problem diyoruz. Şimdi dual problemimizi yazarsak:

Min, $C = c_1v_1 + \ldots\ldots + c_mv_m$

Tahditler, $a_{11}v_1 + \ldots\ldots + a_{m1}v_m \geqslant p_1$

$a_{1n}v_1 + \ldots\ldots + a_{mn}v_m \geqslant p_n$

Negatifsizlikler, $v_1 \geqslant 0, \ldots\ldots, v_m \geqslant 0$

Yaptığımız işlemler şunlardır:

a) (p) lerin rolü, (c)ler ile değiştirilmiştir.

b) Eşitsizliklerin işaretleri değiştirilmiştir.

c) Max. yerine objektif fonksiyon min. olmuştur.

Ortaya çıkan iki problemin simetrik karakteristiklerini toplarsak[11]:

- Esas problem maksimizasyon ise, ikincil problem minimizasyondur. *vice-versa.*
- Esas büyük işareti ($\geqslant$) taşıyorsa, ikincil problem küçük işareti ($\leqslant$) taşır, *vice-versa.*
- Esas problemdeki kâr sabitleri yerini kapasite sabitlerine bırakıyor.
- Soldan sağa esas problemin koefisyan sütunları üstten itibaren dual problemin sıraları oluyor.
- Dual de yeni bir değişkenler takımı ortaya çıkıyor: (v)ler.
- Negatif olmama şartlarını ihmal edersek ve esas problemde (n) değişken ve (m) eşitsizlik varsa; dual problemde (m) değişken ve (n) eşitsizlik olacaktır.

Son olarak, dual probleme elimizi uzatıp ikinci bir problem yapacak olursak başladığımız yere döndüğümüzü görürüz.

---

11 W.J. Baumol; Adı geçen eser, ss. 103-128.

Dual probleme sun'i değişkenlerimizi de ilave edersek bilindiği üzere denksizlikler denklemi olacaktır. Bu hususu misalimizi nümerik maksimizasyon problemini ele alarak gösterirsek;

PRİMAL PROBLEM	**DUAL PROBLEM**
Max, $P = 5w + 3x + 2y + 7z$	Min, $C = 32000\,v_1 + 50000v_2$
Tah., $0{,}5w + 2x + 1{,}9y + 3{,}1z + T = 32000$	Tah., $0{,}5v_1 + 10v_2 - L_w = 5$
$10w + 1{,}2x + 7y + 4z + G = 50000$	$2v_1 + 1{,}2v_2 - L_x = 3$
	$1{,}9v_1 + 7v_2 - L_y = 2$
	$3{,}1v_1 + 4v_2 - L_z = 7$
Negatifsizlikler, $w \geqslant 0, x \geqslant 0, z \geqslant 0$	Negatifsizlikler, $v_1 \geqslant 0, v_2 \geqslant 0$
$T \geqslant 0, G \geqslant 0, y \geqslant 0$	$L_1 \geqslant 0, L_2 \geqslant 0, L_3 \geqslant 0, L_4 \geqslant 0$

Bildiğimiz gibi esas maksimizasyon probleminde firmanın elindeki veri istihsal faktörleri ile çeşitli ($x_1, x_2, ..., x_n$) mallar üretiliyordu. Maksimizasyon, çözümünde kârı azamileştiren mal çeşit ve miktarlarını bulacaktır. İkinci problemde ise firmanın toplam kârının kıt olan faktörlere nasıl dağıtılacağını tesbit etmek durumundayız. Yani firma kârının ne kadar kısmının hangi faktöre gideceğini hesaplamaktayız. Bunu hesaplamak için dual problemde her bir faktöre bir muhasebe fiatı veya "Gölge Fiat" verilir. Dual problemdeki normal değişkenler bu gölge fiatlardır. Dual problemin maksadı bu fiatları mümkün olduğu kadar yüksek tesbit etmek ve dolayısıyla faktörlere bu fiatlar üzerinden ödenecek toplam değeri kâra eşit kılmaktır. Böylece firmaya kalan kâr sıfır olsun. Ayrıca her bir malın istihsalinde kullanılan faktörlere ödenecek toplam değer o malın istihsalinde elde edilen toplam kârı aşmamalıdır. Bu da bize dual problemin tahditlerini verecektir. Yukarıda göstermiş olduğumuz nümerik misalimizde dual problemin gölge fiatları:

v_1 = Makina saatı gölge fiatı

v_2 = Ambar birim gölge fiatıdır.

Bu fiatlar tamamen matematikseldir. Piyasa ile ilişkisi yoktur. Ancak burada iktisadi bir yorum olarak faktör denge fiatları ile karşılaştırma yapabiliriz. Optimizasyonda faktör fiatları, marjinal hasılata eşit olmaktaydı. Burada dual problemin çözümünde de bulunacak (v_1 ve v_2) gölge fiatları faktörün marjinal hasılatına-eşittir. Yalnız, burada her bir mal için sabit istihsal koefisyanları varsayıldığına göre, marjinal hasılat ve marjinal maliyet kesiksiz fonksiyonlarla değil kesikli ve basamaklı fonksiyonlarla ifade edilecektir. Marjinal analizde olmayan varsayımlarla çalıştığımız halde marjinal analiz kullanmak suretiyle varılan sonuçlara varıyoruz. Problemde:

P = Toplam kâr seviyesini

5 = (w) malının birim kârını

w = (w) malının istihsal miktarını

0,5 = (w) malından kullanılan makina saat faktörü miktarını

10 = (w) malında kullanılan ambar faktörü miktarını vs. belirtmektedir.

C = Toplam masraf seviyesini

32000 = Makina saatten elde mevcut kapasiteyi

50000 = Ambar faktöründen elde mevcut kapasiteyi vermektedir.

Biraz önce de belirttiğimiz gibi v_1 makina saatine v_2 de ambar birimine izafe edilen muhasebe fiatları idi (girdi değerleri).

(T) ve (G) Sun'i değişkenler olup, makina saati ve ambar birimlerinden kullanılmayan miktarları vermektedir.

(L_w), (L_x), (L_y), (L_z) ise ikinci problemdeki değişkenler olup w, x, y, z, malları üzerinden "nisbi muhasebe zararını" (para birimleri olarak) ifade etmektedirler. Optimal çözümde (T) ve (G) nin sıfırdan büyük olması makina saatte veya ambar birimde boş kapasite olduğuna işaret edecektir. L_w, L_x, L_y, L_z sun'i değişkenleri malın fiatından istihsalinde kullanılan girdilerin muhasebe değeri çıktıktan sonra arta kalan kısımdır. İkinci problem öyle düşünülmüştür ki, kıt faktörlere atfedilen gölge fiatı kârı tamamen massetsin ve böylece sun'i değişkenin değeri (sıfır) olsun. Aksi taktirde yani L_w, L_x, L_y, L_z sıfırdan büyük olursa malın istihsalinde kullanılan faktörlerin başka mal istihsalinde kullanılması daha kârlı ve rasyonel olacaktır. Muhasebe kaybı sıfır olan mal imali en kârlı alternatif olacak ve fırsat maliyeti olarak adlandıracağımız husus mevcut olmayacaktır.

SİMPLEKS METODU İLE ÇÖZÜM

Bu bölümde basit bir misal vererek simpleks metodu hakkında temel kaideleri açıklanmaya çalışılmaktadır.

Problemimiz:

Max.; $Z = 2{,}5\,x_1 + 2x_2$

Tahditler, $x_1 + 2x_2 \leq 8000$

$3x_1 + 2x_2 \leq 9000$

Negatifsizlikler, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Sun'i değişkenleri ilave edersek;

Max.; $Z = 0 + 2{,}5x_1 + 2x_2$

Tahditler, $S_a = 8000 - x_1 - 2x_2$

$S_b = 9000 - 3x_1 - 2x_2$

Negatifsizlikler, $S_a \geq 0\ S_b \geq 0\ x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0$

Bu modelden ilk temel çözümü veren matrisi yazarsak;

		x_1	x_2
Z	0	2,5	2
S_a	8,000	−1	−2
S_b	9,000	−3	−2

Temel Çözümümüz;

$$S_a = 8{,}000 \quad S_b = 9{,}000 \quad x_1 = x_2 = 0$$

Matriste değişim elemanının seçimi suretiyle x lerden biri pozitif değer alacaktır. Hangisi ?(x)lerden birinci sırada en büyük mutlak değere sahip olanı. Öyleyse x_1. Matriste S_a ve S_b den biri ise sıfır olacaktır. Bunun seçimi ise şöyle yapılacaktır. Biraz önce seçtiğimiz x_1 sütununda mutlak değerlere bakarız, en büyük olanı yani (–3) ün bulunduğu sırada hangi sun'i değişken bulunuyorsa onun değeri sıfır yapılacaktır. Bu ise bizim matrisimizde S_b dir. Öyleyse değişim elemanımız (–3) tür.

Şimdi (–3) e göre matrisi değiştiriyoruz.

- Değişim elemanı değeri: Eskiden (–3) idi, şimdi $-\frac{1}{3}$ olacaktır.
- Değişim elemanının bulunduğu sıradaki elemanların yeni değerleri ise değişim elemanına bölünür ve değerleri değiştirilerek (pozitifse negatif, negatifse pozitif) yeni sırasına yazılır.

Tamamlanmış matrisimiz: $\frac{-9{,}000}{-3} = 3{,}000$

$$\frac{+2}{-3} = \frac{-2}{3}$$

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & & S_b & x_2 \\
\hline
Z & & & \\
S_a & & & \\
x_1 & 3{,}000 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\
\hline
\end{array}$$

- Değişim elemanının bulunduğu sütunun değerlerini bulmak için ise ilk matris elemanı değişim elemanına bölünür.

$$\frac{2{,}5}{-3} = \frac{-5}{6}, \quad \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

- Bu durumda tamamlanmamış matrisimizi tekrar yazabiliriz:

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & & S_b & x_2 \\
\hline
Z & & \frac{-5}{6} & \\
S_a & & \frac{+1}{3} & \\
x_1 & 3{,}000 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\
\hline
\end{array}$$

- Diğer elemanların bulunması:

$$\text{Yeni eleman} = \text{Eski eleman} - \frac{\text{Köşe elemanlarının çarpımı}^{12}}{\text{Değişim elemanı}}$$

Buna göre:

$$(Z) \text{ için, } 0 - \frac{(2{,}5)\,(9000)}{-3} = 7500$$

$$(S_a) \text{ için, } 8000 - \frac{(-1)\,(9000)}{-3} = 5000$$

$$(x_2) \text{ için, } 2 - \frac{(2{,}5)\,(-2)}{-3} = +\frac{1}{3}$$

$$(x_2) \text{ için, } -2 - \frac{(-1)\,(-2)}{(-3)} = -\frac{4}{3}$$

- Bu hale nazaran 2. matrisimizi yazarsak:

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & & S_b & x_2 \\
\hline
Z & 7{,}500 & -\frac{5}{6} & +\frac{1}{3} \\
S_a & 5{,}000 & +\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\
S_b & 3{,}000 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\
\hline
\end{array}$$

Bu çözüm için; $S_b = 0 = x_2$ dir (Daha önce de bu sonuca varılacağı öngörülmüştü). Yani (b) faktörü tamamen kullanılmış ve (x_1) istihsal ediliyor.

Yeni matriste birinci sıraya baktığımızda, kâr dışı bütün elemanların değerlerini görüyoruz: Bir pozitif değer var. Öyleyse aynı prosedür ile değişime devam edeceğiz.

- Değişim sütunu en büyük mutlak değeri olan elemanın bulunduğu sütundur (x_2) sütunu.

- Değişim elemanı: $\dfrac{1}{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{3}{4}$ dür.

- Değişim elemanının bulunduğu sıra elemanlarının değeri

12 Değişim elemanı ile değeri bulunacak eski elemanın teşkil edeceği köşegenin çaprazındaki köşegenin uç elemanları çarpımı.

$$\frac{-5000}{-\frac{4}{3}} = +3{,}750$$

$$-\frac{1}{3} : -\frac{4}{3} = \frac{1}{4}$$

- Değişim elemanının bulunduğu sütun elemanlarının değeri

$$\frac{1}{3} : \frac{-4}{3} = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{2}{3} : -\frac{4}{3} = +\frac{1}{2}$$

- Diğer elemanlar:

$$7500 - \frac{(+\frac{1}{3})(5000)}{-\frac{4}{3}} = 8750$$

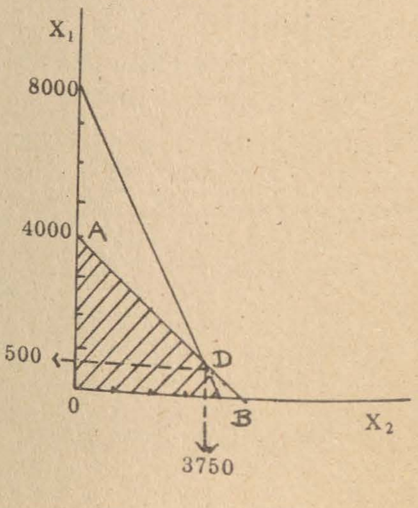
$$3000 - \frac{(5000)(-\frac{2}{3})}{-\frac{4}{3}} = 500$$

$$-\frac{5}{6} - \frac{(-\frac{1}{3})(+\frac{1}{3})}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

$$-\frac{1}{3} - \frac{(+\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})}{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2}$$

Bulduğumuz yeni değerlere göre matrisimizi yazarsak;

		S_b	S_a
Z	8750	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
X_2	3750	$+\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
X_1	500	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$



Olur ki bu uygun OPTİMAL çözümdür. Çünkü ilk sıradaki matris koefisyanlarının hepsinin değeri sıfırdan küçüktür.

KAYNAKLAR

Baumol, W.J.; *Economic Theory and Operations Analysis,* Prentice-Hill. Inc., 1963.

Bulutay, T.; *Doğrusal Programlama,* Ankara Üni. SBF Yay., 1968.

Divitçioğlu, S.; *Mikroiktisat,* İ.Ü.İ.F. Yay., İst., 1965.

Dorfman, R., Samuelson, P.A. and Solow, R.M.; *Linear Programming and Economic Analysis,* McGraw-Hill Book Co., New York, 1958.

Hiç, M.; *Girdi-Çıktı Analizi ve Doğrusal Programlama,* İ.Ü.İ.F. Yay. İst., 1968.

Kılıçbay, A.; *Ekonometri,* İ.Ü.İ.F. Yay., İst., 1965.

Vajda S.; *The Theory of Games and Linear Programming,* Methuen and Co. Ltd. London, 1962.