POZİTİF TANIMLI FORMLAR, BAZLAR, İNDEFİNİTE FORMLAR, KUADRATİK İDEALLER VE DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ

Şeyma KUTLU

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POZİTİF TANIMLI FORMLAR, BAZLAR, İNDEFİNİTE FORMLAR, KUADRATİK İDEALLER VE DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ

Şeyma KUTLU

Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2017

TEZ ONAYI

Şeyma KUTLU tarafından hazırlanan "Pozitif Tanımlı Formlar, Bazlar, İndefinite Formlar, Kuadratik İdealler ve Diophantine Denklemleri " adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Başkan : Prof.Dr. Ahmet TEKCAN
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Doç.Dr. Betül GEZER
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Yard. Doç.Dr. Fırat EVİRGEN
Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü
……/……/2017

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01/ 06 /2017

Şeyma KUTLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

POZİTİF TANIMLI FORMLAR, BAZLAR, İNDEFİNİTE FORMLAR, KUADRATİK İDEALLER VE DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ

Şeyma KUTLU

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu çalışmada pozitif tanımlı formların taban noktaları, $\mathbb{C}$ nin $\mathbb{R}$ bazı, indefinite formlar, kuadratik idealler ve Diophantine denklemlerinin tamsayı çözümleri ele alınmıştır.

Birinci bölümde, tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan pozitif tanımlı formlar, bu formların denklikleri, taban noktaları, bazlar, indefinite formlar, kuadratik idealler ve Diophantine denklemleri hakkında bazı temel kavramlara, notasyonlara ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, pozitif tanımlı formların taban noktaları ele alınmıştır. Bu bölümde ilk olarak $m \geq 2$ tamsayısı için taban noktaları $x = \frac{-1}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı formlar, daha sonra $m \geq 1$ tamsayısı için taban noktaları $C: x^2 + y^2 = \frac{1}{m^2}$ çemberinin üst-yarı düzlemde kalan kısmı üzerinde pozitif tanımlı formlar ele alınmıştır. Tüm bu problemler $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ grubu ve $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grubu dikkate alınarak incelenmiştir.

Tezin üçüncü bölümü orijinal olup bu bölümde, pozitif tanımlı formların taban noktaları, $\mathbb{C}$ nin $\mathbb{R}$ bazı ele alınmış ve bunlarla ilgili bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümü de orijinal olup bu bölümde ise indefinite formlar ve kuadratik idealler ele alınmış ve bunlarla ilgili bazı cebirsel sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde son olarak ele alınan indefinite formlardan elde edilen bazı özel Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri kümesi elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pozitif tanımlı formlar, taban noktaları, bazlar, üst-yarı düzlem, indefinite formlar, kuadratik idealler ve Diophantine denklemleri.

2017, vii + 85 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

POSITIVE DEFINITE FORMS, BASIS, INDEFINITE FORMS, QUADRATIC IDEALS AND DIOPHANTINE EQUATIONS

Şeyma KUTLU

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this thesis, base points of positive definite forms, $\mathbb{R}$ basis of $\mathbb{C}$, indefinite forms, quadratic ideals and integer solutions of some specific Diophantine equations are considered.

In the first section, some preliminary notations, definitions and theorems concerning positive definite forms, equivalence of forms, base points, indefinite forms, quadratic ideals and Diophantine equations are given.

In the second section, base points of positive definite forms are considered. First we consider the positive definite form whose base points lie on the line $x = \frac{-1}{m}$ for some integer $m \geq 2$ and later we consider the positive definite form whose base points lie on the circle $C : x^2 + y^2 = \frac{1}{m^2}$ intersection with the upper-half plane. All problems have been considered by using the groups $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ and the extended Hecke group $\overline{H}(\sqrt{2})$.

In the third section, this is the original part of the thesis; base points of positive definite forms and $\mathbb{R}$ basis of $\mathbb{C}$ are discussed. Some new theorems and relations are derived.

In the last section, this is the original part of the thesis; indefinite quadratic forms, quadratic ideals and the set of all integer solutions of some specific Diophantine equations derived from the indefinite forms are considered.

Key words: Positive definite forms, base points, bases, upper-half plane, indefinite forms, quadratic ideals and Diophantine equations.

2017, vii + 85 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamın her aşamasında bilgisiyle beni yönlendiren, tecrübelerinden yararlandığım, hoşgörüsüyle her zaman yanımda olan danışman hocam Prof. Dr. Ahmet TEKCAN'a, teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışması boyunca bana her türlü manevi desteği veren aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Şeyma KUTLU

01/06/2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$F=(a,\ b,\ c)$	kuadratik form
$\Delta=\Delta(F)$	formun diskriminantı
$Aut^{+}(F)$	F nin has otomorfizmleri kümesi
$Aut^{-}(F)$	F nin has olmayan otomorfizmleri kümesi
$\rho^{i}(F)$	indirgeme operatörü
F_R	temel form
$\mathbb{U}$	üst-yarı düzlem
z	karmaşık sayı
$z(F)$	formun taban noktası
$\mathbb{C}$	kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
B	baz
$O(B)$	B bazının yönlendirmesi
$\Delta(B)$	B bazının diskriminantı
F_B	B bazına karşılık gelen form
F_z	z karmaşık sayısına karşılık gelen form
$F_{z(F)}$	$z(F)$ taban noktasına karşılık gelen form
$B(F)$	F formuna karşılık gelen baz
$\overline{\alpha}$	α nın eşleniği
$Tr(\alpha)$	α nın izi
$N(\alpha)$	α nın normu
$\alpha\cdot\beta$	α ve β nın skalar çarpımı
$\alpha\times\beta$	α ve β nın vektörel çarpımı
$\overline{z}$	z karmaşık sayısının eşleniği
$\overline{B}$	B bazının eşleniği
$\overline{z}(F)$	$z(F)$ taban noktasının eşleniği
$\overline{B}(F)$	$B(F)$ bazının eşleniği
$\overline{H}(\sqrt{2})$	genişletilmiş Hecke grubu
γ	kuadratik irrasyonel
I_γ	kuadratik ideal
F_γ	indefinite form

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu bölümde, tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

1.1. Kuadratik Formlar.

Bu kısımda kuadratik formlar ile ilgili bazı temel kavramlara, notasyonlara ve teoremlere yer verilecektir.

1.1.1. Tanım. $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

şeklindeki ikinci dereceden polinomlara kuadratik form denir ve kısaca $F = (a,\ b,\ c)$ ile gösterilir (Flath 1989).

Yukarıdaki formun diskriminantı $\Delta = \Delta(F)$ ile gösterilir ve

$$\Delta(F) = b^2 - 4ac$$

olarak tanımlanır. Üstelik $F = (a,\ b,\ c)$ formu için

i) F tamdır $\Leftrightarrow$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dir.

ii) F pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow$ $\Delta(F) < 0,\ a, c > 0$ dır.

iii) F indefinitedir $\Leftrightarrow$ $\Delta(F) > 0$ dır.

iv) F ilkeldir $\Leftrightarrow$ $obeb(a, b, c) = 1$ dir.

1.1.2. Not. 1) $\Delta(F) < 0$ ve $a, c > 0$ olması durumunda F formu

$$F(x, y) = a(x + \frac{b}{2a}y)^2 - \frac{\Delta}{4a}y^2$$

şeklinde yazılabilir. Burada dikkat edilirse $(x, y) \neq (0, 0)$ için $F(x, y) > 0$ dır. Bu nedenle F ye pozitif tanımlı form denilir.

2) $r,s,t,u \in \mathbb{R}$ ve $ru - st = \pm 1$ olmak üzere 2×2 lik $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ şeklindeki matrislerin kümesi, matrislerde çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu grup $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ ile gösterilir. O halde

$$\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} : r,s,t,u \in \mathbb{R},\ ru - st = \pm 1 \right\}$$

dir. Benzer şekilde $r,s,t,u \in \mathbb{R}$ ve $ru - st = 1$ olmak üzere 2×2 lik $\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}$ şeklindeki matrislerin kümesi de matrislerde çarpma işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup da $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ile gösterilir.

1.1.3. Tanım. F herhangi bir form ve $g = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ olsun. Bu takdirde F formunun g matrisi altındaki resmi

$$gF = F(rx + ty, sx + uy)$$

olarak tanımlanır (Flath 1989).

Yukarıdaki tanıma göre,

$$\begin{aligned} gF(x,y) &= a(rx+ty)^2 + b(rx+ty)(sx+uy) + c(sx+uy)^2 \\ &= (ar^2 + brs + cs^2)x^2 + (2art + bru + bts + 2csu)xy + (at^2 + btu + cu^2)y^2 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buna göre gF de bir kuadratik formdur. Üstelik F ve gF aynı özelliklere sahiptir, yani F pozitif tanımlı, indefinite veya ilkel ise gF de pozitif tanımlı, indefinite veya ilkeldir. Üstelik F ve gF aynı diskriminantlı, yani $\Delta(F) = \Delta(gF)$ dir.

1.1.4. Tanım. F ve G herhangi iki form olmak üzere $gF = G$ olacak şekilde en az bir $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ varsa F ve G formlarına denk form denir. $\det(g) = 1$ ise bu formlara has denk, $\det(g) = -1$ ise bu formlara has olmayan denk form denir (Flath 1989).

Örneğin, $F = (2,-1,4)$ ve $G = (16,47,35)$ formları $g = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi altında birbirine has denktir. Dikkat edilirse F ve G pozitif tanımlı olup $\Delta(F) = \Delta(G) = -31$ dir.

1.1.5. Not. Yukarıda F ve G nin birbirine denk olması durumunda aynı diskriminantlı olduğu söylenmişti. Ancak bunun tersi doğru değildir, yani aynı diskriminantlı formların denk olması gerekmez. Örneğin $F=(1,4,2)$ ve $G=(1,2,-1)$ formlarının diskriminantları 8 olmasına rağmen bu formlar birbirine denk değildir, yani $gF=G$ olacak şekilde bir $g\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ matrisi yoktur.

1.1.6. Tanım. F formu için $gF=F$ olacak şekilde en az bir $g\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ varsa g ye F nin bir otomorfizmi denir. $\det(g)=1$ ise has otomorfizm, $\det(g)=-1$ ise has olmayan otomorfizm denir. F nin has otomorfizmleri kümesi $Aut^{+}(F)$ ile, has olmayan otomorfizmleri kümesi ise $Aut^{-}(F)$ ile gösterilir (Flath 1989).

Örneğin, $F=(1,1,1)$ formunun has otomorfizmleri kümesi

$$Aut^{+}(F)=\left\{\pm\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\pm\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix},\pm\begin{bmatrix}1&1\\-1&0\end{bmatrix}\right\}$$

iken $G=(1,3,-2)$ formunun has olmayan otomorfizmleri kümesi

$$Aut^{-}(G)=\left\{\pm\begin{bmatrix}1&0\\3&-1\end{bmatrix},\pm\begin{bmatrix}9&16\\-5&-9\end{bmatrix}\right\}$$

dir.

1.1.7. Tanım. Pozitif tanımlı $F=(a,\,b,\,c)$ formu

$$|b|\le a\le c$$

şartını sağlıyor ise bu forma indirgenebilir form denir. $F=(a,\,b,\,c)$ indefinite formu da

$$|\sqrt{\Delta}-2|a||<b<\sqrt{\Delta}$$

şartını sağlıyor ise bu forma indirgenebilir form denir (Flath 1989).

1.1.8. Tanım. $F=(a,\,b,\,c)$ pozitif tanımlı form olsun. Bu takdirde üst-yarı düzlemdeki herhangi bir z karmaşık sayısı için bu form

$$F(x,y)=a(x+zy)(x+\bar{z}y) \qquad (1.1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekildeki z karmaşık sayısına F formunun taban noktası denir ve $z(F)$ ile gösterilir (Tekcan ve Bizim 2003).

$z = p + iq$ olarak alınırsa (1.1.1) eşitliği

$$F(x, y) = a(x + zy)(x + \bar{z}y) = ax^2 + 2apxy + a\,|\,z\,|^2\, y^2$$

haline gelir. Buna göre $2ap = b$ ve $a\,|\,z\,|^2 = c$ eşitliklerinden

$$p = \frac{b}{2a} \text{ ve } q = \frac{\sqrt{-\Delta(F)}}{2a}$$

olarak elde edilir. q pozitif olduğundan

$$z = \frac{b + i\sqrt{-\Delta(F)}}{2a} \in \mathbb{U}$$

dur. Tersine Tekcan ve Bizim (2003), üst-yarı düzlemdeki herhangi bir $z = p + iq$ karmaşık sayısı için $\Delta(F) = \dfrac{-4q^2}{|\,z\,|^4} < 0$ diskriminantlı ve taban noktası z olan

$$F = (a, b, c) = \left(\frac{1}{|\,z\,|^2}, \frac{2p}{|\,z\,|^2}, 1 \right)$$

pozitif tanımlı formunun olduğunu göstermişlerdir. Dolayısıyla $\varphi : F \to z(F)$ dönüşümü, sabit diskriminantlı pozitif tanımlı formlar ile üst-yarı düzlemin noktaları arasında birebir bir dönüşümdür.

Üstelik Tekcan (2007), herhangi bir $F = (a, b, c)$ indefinite formunun taban noktasını da

$$z = z(F) = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olarak tanımlamış ve aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

1.1.9. Teorem. F_1 ve F_2 indefinite formlarının taban noktaları sırasıyla $z(F_1)$ ve $z(F_2)$ olsun. Bu takdirde F_1 ve F_2 formlarının denk, yani belli bir $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ için $gF_1 = F_2$ olması için gerek ve yeter şart

$$(g^{-1})^T z(F_1) = \begin{cases} z(F_2) & \det(g) = 1 \text{ ise} \\ \overline{z(F_2)} & \det(g) = -1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmasıdır (Tekcan 2007).

İndirgenebilir indefinite tam formların devirleri ve has devirleri aşağıdaki teoremde verilmiştir.

1.1.10. Teorem. $F=(a,b,c)$ indirgenebilir indefinite tam form olsun. $i \geq 0$ için

$$s_i = \left\lfloor \frac{b_i+\sqrt{\Delta}}{2\,|\,c_i\,|} \right\rfloor$$

ve

$$F_{i+1}=(|\,c_i\,|,\,-b_i+2s_i\,|\,c_i\,|,\,-a_i-b_is_i-c_is_i^2)$$

olmak üzere F nin devri, birbirine denk olan formların

$$F_0 \sim F_1 \sim F_2 \sim \cdots \sim F_{l-1}$$

bir dizisidir. $\tau(F)=(-a,b,-c)$ dönüşümü için F nin has devri ise birbirine has denk o-lan formların bir dizisi olup bu dizi l çift iken

$$F_0 \sim \tau(F_1) \sim F_2 \sim \tau(F_3) \sim \cdots \sim F_{l-2} \sim \tau(F_{l-1})$$

ve l tek iken

$$F_0 \sim \tau(F_1) \sim F_2 \sim \tau(F_3) \sim \cdots \sim \tau(F_{l-2}) \sim F_{l-1} \sim \tau(F_0) \sim F_1 \sim \tau(F_2) \sim \cdots \sim F_{l-2} \sim \tau(F_{l-1})$$

dir (Buchmann ve Vollmer 2007).

Örneğin, indirgenebilir $F=(4,6,-3)$ indefinite formunun devri

$$\begin{aligned}&F_0=(4,6,-3) \sim F_1=(3,6,-4) \sim F_2=(4,2,-5) \sim F_3=(5,8,-1) \sim \\ &F_4=(1,8,-5) \sim F_5=(5,2,-4)\end{aligned}$$

dir. Buna göre has devri

$$\begin{aligned}&F_0=(4,6,-3) \sim F_1=(-3,6,4) \sim F_2=(4,2,-5) \sim F_3=(-5,8,1) \sim \\ &F_4=(1,8,-5) \sim F_5=(-5,2,4)\end{aligned}$$

şeklindedir.

1.1.11. Tanım. $F=(a,b,c)$ indefinite formunun sağ komşusu

$$A=c\,,\ b+B \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2A),\ \ \sqrt{\Delta}-2\,|\,A\,|<B<\sqrt{\Delta}\ \text{ ve }\ B^2-4AC=\Delta$$

şartlarını sağlayan $R(F)=(A,B,C)$ formudur. $\tau(F)=(-a,b,-c)$ ve $\chi(F)=(-c,b,-a)$ için F nin sol komşusu ise $L(F)=\chi\tau R(c,b,a)$ olarak tanımlanır (Flath 1989).

1.1.12. Not. 1) Yukarıdaki tanıma göre, $\delta=(b+B)/2c$ tamsayısı için F nin sağ kom-şusu $R(F)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -\delta\end{bmatrix}(a,b,c)$ dir.

2) Eğer F indirgenebilir ise sonlu bir adımda F nin sağ ve sol komşu dizileri tekrar F ye döner. Örneğin indirgenebilir $F=(1,5,-4)$ formunun sağ komşuları

$$R^1(F)=(-4,3,2), R^2(F)=(2,5,-2),\ R^3(F)=(-2,3,4),\ R^4(F)=(4,5,-1)$$
$$R^5(F)=(-1,5,4),\ R^6(F)=(4,3,-2),\ R^7(F)=(-2,5,2),\ R^8(F)=(2,3,-4)$$
$$R^9(F)=(-4,5,1),\ R^{10}(F)=(1,5,-4)=F$$

dır. Burada dikkat edilirse $R^{10}(F)=F$ dir, yani F nin dokuz tane sağ komşusu vardır. F nin sol komşuları ise

$$L^1(F)=(-4,5,1), L^2(F)=(2,3,-4),\ L^3(F)=(-2,5,2),\ L^4(F)=(4,3,-2)$$
$$L^5(F)=(-1,5,4),\ L^6(F)=(4,5,-1),\ L^7(F)=(-2,3,4),\ L^8(F)=(2,5,-2)$$
$$L^9(F)=(-4,3,2), L^{10}(F)=(1,5,-4)=F$$

dir. Yine burada $L^{10}(F)=F$ olduğundan F nin dokuz tane de sol komşusu vardır.

3) F indirgenebilir değilse F nin sağ ve sol komşu dizileri tekrar F ye dönmez, dizi içerisindeki başka bir forma döner. Örneğin indirgenemeyen $F=(1,0,-10)$ formunun sağ ve sol komşuları

$$R^1(F)=(-10,0,1), R^2(F)=(1,6,-1),\ R^3(F)=(-1,6,1),\ R^4(F)=(1,6,-1)=R^2(F)$$
$$L^1(F)=(-1,6,1), L^2(F)=(1,6,-1),\ L^3(F)=(-1,6,1)=L^1(F)$$

dır. Burada dikkat edilirse $R^4(F)=R^2(F)$ ve $L^3(F)=L^1(F)$ dir. Şu halde F nin üç sağ, iki de sol komşusu vardır.

1.2. Kuadratik İdealler.

Bu alt bölümde kuadratik irrasyonellerden, kuadratik ideallerden ve bunlarla ilgili bazı temel tanımlardan ve teoremlerden bahsedilecektir.

1.2.1. Tanım. $\delta>0$ tam kare olmayan pozitif bir sayı olmak üzere P ve Q tamsayıları için $Q \mid (P+\delta)(P+\overline{\delta})$ oluyorsa $\gamma=\dfrac{P+\delta}{Q}$ ya bir kuadratik irrasyonel denir. γ bir kuadratik irrasyonel iken $I_\gamma=[Q,\ P+\delta]$ bir kuadratik ideal ve $F_\gamma=Q(x+\gamma y)(x+\overline{\gamma}y)$ ise bir indefinite formdur (Mollin 1996).

δ nın izi t ve normu n olmak üzere F_γ indefinite formu

$$F_\gamma(x,y) = Qx^2 + (t+2P)xy + \left(\frac{n+tP+P^2}{Q}\right)y^2$$

şeklindedir. Bu formun diskriminantı $\Delta(F) = t^2 - 4n$ dir.

1.2.2. Tanım. $I_\gamma = [Q,\ P+\delta]$ kuadratik ideali için $P+\delta > 0$ ve $-Q < P+\overline{\delta} < 0$ şartları sağlanıyorsa bu ideale indirgenebilir ideal denir (Mollin 1996).

Örneğin, $I_\gamma = [9,\ 10+\sqrt{181}]$ ideali indirgenebilir bir ideal iken $I_\gamma = [7, 4+\sqrt{13}]$ ideali indirgenebilir değildir.

1.2.3. Teorem. $I_\gamma = [Q,\ P+\delta]$ ideali verilsin. $i \geq 0$ için

$$m_i = \left\lfloor \frac{P_i+\delta}{Q_i} \right\rfloor,\ P_{i+1} = m_i Q_i - P_i \text{ ve } Q_{i+1} = \frac{\delta^2 - P_{i+1}^2}{Q_i}$$

tanımlansın. Bu takdirde γ nın basit sürekli kesirli devirli açılımı

$$\gamma = [m_0; \overline{m_1, m_2, \cdots, m_{l-1}}]$$

ve $I_\gamma = [Q,\ P+\delta]$ idealinin devri

$$I_{\gamma_0} \sim I_{\gamma_1} \sim I_{\gamma_2} \sim \cdots \sim I_{\gamma_{l-1}}$$

dir (Mollin 1996).

1.2.4. Not. 1) Eğer ideal indirgenebilir ise sonlu bir adımda devir yine ilk başta verilen ideale döner. Örneğin, $I_\gamma = [7,\ 10+\sqrt{149}]$ ideali indirgenebilirdir ve bu idealin devri için aşağıdaki çizelge elde edilir:

Çizelge 1.1. $I_\gamma = [7,\ 10+\sqrt{149}]$ idealin devri

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_i	10	11	9	8	12	12	8	9	11	10
Q_i	7	4	17	5	1	5	17	4	7	7
m_i	3	5	1	4	24	4	1	5	3	3

Bu çizelgeye göre $I_{\gamma_9} = I_{\gamma_0}$ olduğundan I_γ idealinin devri

$$I_{\gamma_0} = [7,10+\sqrt{149}] \sim I_{\gamma_1} = [4,11+\sqrt{149}] \sim I_{\gamma_2} = [17,9+\sqrt{149}] \sim I_{\gamma_3} = [5,8+\sqrt{149}] \sim$$
$$I_{\gamma_4} = [1,12+\sqrt{149}] \sim I_{\gamma_5} = [5,12+\sqrt{149}] \sim I_{\gamma_6} = [17,8+\sqrt{149}] \sim I_{\gamma_7} = [4,9+\sqrt{149}] \sim$$
$$I_{\gamma_8} = [7,11+\sqrt{149}]$$

şeklindedir.

2) Eğer ideal indirgenebilir değilse devir ilk başta verilen ideale değil, devri içerisindeki başka bir ideale döner. Örneğin, $I_\gamma = [20,\, 19+\sqrt{21}]$ ideali indirgenebilir değildir. Bu idealin devri için aşağıdaki çizelge elde edilir:

Çizelge 1.2. $I_\gamma = [20,\, 19+\sqrt{21}]$ idealin devri

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P_i	19	1	4	1	3	3	1	4	4
Q_i	20	1	5	4	3	4	5	1	5
m_i	1	5	1	1	2	1	1	8	1

Buna göre I_γ nın devri

$$I_{\gamma_0} = [20,19+\sqrt{21}] \sim I_{\gamma_1} = [1,11+\sqrt{21}] \sim I_{\gamma_2} = [5,4+\sqrt{21}] \sim I_{\gamma_3} = [4,1+\sqrt{21}] \sim$$
$$I_{\gamma_4} = [3,3+\sqrt{21}] \sim I_{\gamma_5} = [4,3+\sqrt{21}] \sim I_{\gamma_6} = [5,1+\sqrt{21}] \sim I_{\gamma_7} = [1,4+\sqrt{21}]$$

şeklindedir.

1.3. Bazlar.

Tezin bu kısmında $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin $\mathbb{R}$ bazı ele alınacak, bu baz ile ilgili bazı temel tanımlara ve notasyonlara yer verilecektir.

1.3.1. Tanım. k,l,m,n, $kn-ml \neq 0$ özelliğindeki reel sayılar ve $i^2 = -1$ olmak üzere

$$B = (\alpha, \beta) = (k+il, m+in)$$

ikilisine $\mathbb{C}$ nin bir $\mathbb{R}$ bazı denir (Buchmann ve Vollmer 2007).

1.3.2. Not. 1) $kn - ml \neq 0$ olması α ve β nın lineer bağımsız olmasını garanti eder.

2) α nın eşleniği $\overline{\alpha}$, izi $Tr(\alpha)$ ve normu $N(\alpha)$ ile gösterilirse sırasıyla

$$\overline{\alpha} = k - il,\ Tr(\alpha) = \alpha + \overline{\alpha} = 2k \text{ ve } N(\alpha) = k^2 + l^2$$

dir.

1.3.3. Tanım. $B = (\alpha, \beta)$ bazının yönlendirmesi $O(B)$ ile gösterilir ve

$$O(B) = \mathrm{sgn}\left(\frac{\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta}}{i}\right)$$

olarak tanımlanır. Diskriminantı ise $\Delta(B)$ ile gösterilir ve

$$\Delta(B) = (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})^2$$

olarak tanımlanır (Buchmann ve Vollmer 2007).

1.3.4. Not. 1) $B = (\alpha, \beta) = (k + il, m + in)$ bazında α ve β elemanlarının skalar ve vektörel çarpımları sırasıyla $\alpha \cdot \beta = km + nl$ ve $\alpha \times \beta = kn - lm$ dır. Buna göre B nin yönlendirmesi

$$O(B) = \mathrm{sgn}(kn - ml) = \mathrm{sgn}(\alpha \times \beta) = \begin{cases} 1 & \alpha \times \beta > 0 \text{ ise} \\ -1 & \alpha \times \beta < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve diskriminantı

$$\Delta(B) = (\overline{\alpha}\beta - \alpha\overline{\beta})^2 = [2i(kn - ml)]^2 = -4(\alpha \times \beta)^2$$

dır.

2) Herhangi bir z karmaşık sayısının yönlendirmesi $O(z)$ ile gösterilir ve $O(1, z)$ olarak tanımlanır. Diskriminantı ise $\Delta(z)$ ile gösterilir ve $\Delta(1, z)$ olarak tanımlanır. Buna göre herhangi bir $z = p + iq$ karmaşık sayısının yönlendirmesi ve diskriminantı sırasıyla

$$O(z) = \mathrm{sgn}(q) \text{ ve } \Delta(z) = -4q^2$$

dir.

3) $g = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ve $B = (\alpha, \beta)$ bazı için

$$Bg = [\alpha \quad \beta]\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} = [\alpha r + \beta t \quad \alpha s + \beta u]$$

olmak üzere $Bg = (\alpha r + \beta t, \alpha s + \beta u)$ dur.

4) Eğer $B_1 g = B_2$ olacak şekilde en az bir $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ varsa bu bazlara denk baz denir. $\det(g) = 1$ ise bazlara has denk, $\det(g) = -1$ ise bazlara has olmayan denk denir.

5) B, z ve $z(F)$ nin eşlenikleri sırasıyla

$$\overline{B} = (\overline{\alpha}, \overline{\beta}),\ \overline{z} = p - iq \text{ ve } \overline{z}(F) = \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

dır.

1.3.5. Örnek. 1) $B = (2-i,\ -3+5i)$ bazı için $O(B) = 1$ ve $\Delta(B) = -196$ dır. Benzer şekilde $z = \frac{2}{3} - \frac{5i}{7}$ karmaşık sayısı için $O(z) = -1$ ve $\Delta(z) = -100/49$ dur.

2) $B_1 = (2-i,\ -3+5i)$ ve $B_2 = (-9+22i,\ -4+9i)$ bazları $g = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi altında birbirine has denk, yani $B_1 g = B_2$ iken, $B_3 = (7+4i,\ 3-i)$ ve $B_4 = (23+5i,\ 33+8i)$ bazları da $h = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi altında birbirine has olmayan denk, yani $B_3 h = B_4$ dür.

1.3.6. Tanım. $B = (\alpha, \beta)$ bazına karşılık gelen form F_B ile gösterilir ve

$$F_B = O(B)(N(\alpha), Tr(\alpha\overline{\beta}), N(\beta))$$

olarak tanımlanır (Buchmann ve Vollmer 2007).

1.3.7. Not. 1) Yukarıdaki tanıma göre, $B = (\alpha, \beta) = (k+il, m+in)$ bazı için

$$N(\alpha) = k^2 + l^2,\ Tr(\alpha\overline{\beta}) = 2(km+nl) \text{ ve } N(\beta) = m^2 + n^2$$

olduğundan bu baza karşılık gelen form

$$F_B = \pm(k^2 + l^2, 2(km+nl), m^2 + n^2)$$

dir.

2) $z = p + iq$ kompleks sayısına karşılık gelen pozitif tanımlı form F_z ile gösterilir ve $F_z = F_{(1,z)}$ olarak tanımlanır. $O(1,z) = \mathrm{sgn}(q)$, $N(1) = 1$, $Tr(1\overline{z}) = 2p$ ve $N(z) = p^2 + q^2$ olduğundan z ye karşılık gelen form

$$F_z = F_{(1,z)} = \mathrm{sgn}(q)(1, 2p, p^2 + q^2)$$

dir.

3) Buna göre pozitif tanımlı F formunun $z(F)$ taban noktasına karşılık gelen form

$$O(1, z(F)) = 1,\ N(1) = 1,\ Tr(1\overline{z}(F)) = \frac{b}{a} \text{ ve } N(z(F)) = \frac{c}{a}$$

olduğundan

$$F_{z(F)} = (1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a})$$

dır.

Yukarıda $B = (\alpha, \beta)$ bazına karşılık gelen formun F_B şeklinde olduğu belirtilmişti. Tersine pozitif tanımlı bir F formuna karşılık gelen baz ise aşağıdaki gibidir.

1.3.8. Tanım. Pozitif tanımlı F formuna karşılık gelen baz

$$B(F) = \left(a, \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2} \right)$$

dir (Buchmann ve Vollmer 2007).

1.3.9. Not. 1) $B(F)$ bazı için $\alpha = a$ ve $\beta = \dfrac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2}$ olarak alınırsa

$$O(B(F)) = 1,\ N(\alpha) = a^2, Tr(\alpha\overline{\beta}) = ab \text{ ve } N(\beta) = ac$$

olduğundan $B(F)$ bazına karşılık gelen form $F_{B(F)} = (a^2, ab, ac)$ dir.

2) $B(F)$ bazının eşleniği $\overline{B}(F) = \left(a, \dfrac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2} \right)$ dir.

1.4. Pell ve Diophantine Denklemleri.

Bu alt bölümde Pell ve Diophantine denklemleri ile ilgili bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$ax + by = c \tag{1.4.1}$$

şeklindeki denklemlere birinci dereceden Diophantine denklemi denir.

Bu tür denklemlerin tamsayı çözümlerinin olması için gerek ve yeter şart $d=(a,b)$ için $d\,|\,c$ olmasıdır. Bu durumda denklemin sonsuz çoklukta tamsayı çözümü vardır. Eğer (x_0, y_0) bu denklemin bir özel çözümü ise denklemin diğer tüm çözümleri $t\in\mathbb{Z}$ için

$$(x,y)=\left(x_0+\frac{b}{d}t,\ y_0-\frac{a}{d}t\right)$$

şeklindedir. Denklemin özel çözümü Öklid algoritması kullanılarak elde edilir. Örneğin,

$$574x+252y=14$$

lineer Diophantine denklemi için

$$\begin{aligned}574&=252\cdot 2+70\\252&=70\cdot 3+42\\70&=42\cdot 1+28\\42&=28\cdot 1+14\\28&=14\cdot 2+0\end{aligned}$$

olup $d=(574,252)=14$ ve $d\,|\,14$ olduğundan denklemin tamsayı çözümleri vardır. Yukarıdaki eşitliklerden geriye doğru gidilirse

$$\begin{aligned}14&=42-28\cdot 1=42-(70-42\cdot 1)\cdot 1=42\cdot 2-70\cdot 1\\&=(252-70\cdot 3)\cdot 2-70\cdot 1=252\cdot 2-70\cdot 7\\&=252\cdot 2-(574-252\cdot 2)\cdot 7=252\cdot 16-574\cdot 7\\&=574(-7)+252(16)\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, denklemin bir özel çözümü $(x_0,y_0)=(-7,16)$ dir. Denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $t\in\mathbb{Z}$ için $(x,y)=(-7+18t,16-41t)$ şeklindedir.

$a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z}$ olmak üzere (1.4.1) deki denklemin daha genel hali olan

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \tag{1.4.2}$$

denklemine ise ikinci dereceden Diophantine denklemi denir. Bu tür denklemlerin tamsayı çözümleri ilk olarak Fermat (1601-1665) daha sonraları ise Lagrange (1736-1813) tarafından ele alınmıştır.

D pozitif tam kare olmayan bir tamsayı ve n sıfırdan farklı herhangi bir tamsayı olmak üzere, (1.4.2) deki denklemin özel bir hali olan

$$x^2-Dy^2=\pm n \tag{1.4.3}$$

denklemine ise Pell denklemi denir. $x^2 - Dy^2 = n$ denklemine pozitif Pell denklemi, $x^2 - Dy^2 = -n$ denklemine is negatif Pell denklemi denir. (1.4.3) de özel olarak $n = 1$ olarak alınırsa elde edilen

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1 \tag{1.4.4}$$

denklemine ise klasik Pell denklemi denir. Bu denklemler de ilk olarak John Pell (1611-1676) tarafından ele alınmış ve daha sonraları da birçok matematikçi tarafından bu denklemlerin tamsayı çözümleri incelenmiştir. (x_n, y_n), $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ Pell denkleminin pozitif bir tamsayı çözümü ise $(-x_n, -y_n), (x_n, -y_n)$ ve $(-x_n, y_n)$ de bu denklemin birer tamsayı çözümüdür. Ancak Pell denklemlerin çözümleri incelenirken genelde pozitif tamsayı çözümleri dikkate alınır. Her D için $(\pm 1,\ 0)$, $x^2 - Dy^2 = 1$ Pell denkleminin bir tamsayı çözümüdür. Bu çözüme aşikar çözüm denir.

1.4.1. Not. 1) $x^2 - Dy^2 = \pm n$ Pell denkleminde D nin tam kare olmaması gerekir. Aksi halde denklem lineer iki denklemin çarpımı şeklinde yazılabilir. Gerçekten de pozitif t tamsayısı için $D = t^2$ ise denklem $x^2 - Dy^2 = (x - ty)(x + ty) = \pm n$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla da n nin çarpanlarına göre denklemin sonlu sayıda tamsayı çözümü vardır veya yoktur. Örneğin $x^2 - 9y^2 = 8$ Pell denklemi için, denklem

$$x^2 - 9y^2 = (x - 3y)(x + 3y) = 8$$

şeklinde yazılabileceğinden, denklem için aşağıdaki çizelge elde edilir:

Çizelge 1.3. $x^2 - 9y^2 = 8$ Pell denklemi

İhtimaller	Çözümler
$x - 3y = \pm 1$ $x + 3y = \pm 8$	$(x, y) = \pm(\frac{9}{2}, \frac{7}{6})$
$x - 3y = \pm 2$ $x + 3y = \pm 4$	$(x, y) = \pm(3, \frac{1}{3})$
$x - 3y = \pm 4$ $x + 3y = \pm 2$	$(x, y) = \pm(3, -\frac{1}{3})$
$x - 3y = \pm 8$ $x + 3y = \pm 1$	$(x, y) = \pm(\frac{9}{2}, -\frac{7}{6})$

Bu çizelgeye göre verilen Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

2) D nin tam kare olmaması durumunda $x^2 - Dy^2 = \pm n$ denkleminin tamsayı çözümü varsa bu çözümlerin sayısı sonsuzdur veya tamsayı çözümü yoktur.

3) $x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin, tam kare olmayan her pozitif D tamsayısı için tamsayı çözümleri varken, $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin her D tamsayısı için tamsayı çözümü yoktur (1.4.3. Teoreminde de görüleceği üzere $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin tamsayı çözümleri, $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli devirli açılımının periyot uzunluğunun tek olmasına durumunda vardır).

4) $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ denklemini gerçekleyen en küçük pozitif (x_1, y_1) tamsayı ikilisine denklemin temel çözümü denir ki denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri bu temel çözüme bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilir.

1.4.2. Teorem. $(x_1, y_1), x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü ise denklemin diğer tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$x_n + \sqrt{D}y_n = (x_1 + \sqrt{D}y_1)^n$$

olmak üzere (x_n, y_n) şeklindedir. Eğer $(x_1, y_1), x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin temel çözümü ise denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} + \sqrt{D}y_{2n-1} = (x_1 + \sqrt{D}y_1)^{2n-1}$$

olmak üzere (x_{2n-1}, y_{2n-1}) şeklindedir (Mollin 2008).

Şu halde denklemin temel çözümünün bulunması, Pell denklemlerinin tamsayı çözümlerinin elde edilmesinde önemli bir rol oynar. Bu temel çözüm $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli devirli açılımına bağlı aşağıdaki gibi elde edilir.

1.4.3. Teorem. $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli devirli açılımı

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_{l-1}, a_l}]$$

olsun. $A_{-2} = 0, A_{-1} = 1, B_{-2} = 1, B_{-1} = 0$ ve

$$A_k = a_k A_{k-1} + A_{k-2} \text{ ve } B_k = a_k B_{k-1} + B_{k-2}$$

tanımlansın. Bu takdirde $x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (A_{l-1}, B_{l-1}) & l \text{ çift iken} \\ (A_{2l-1}, B_{2l-1}) & l \text{ tek iken} \end{cases}$$

dir. l nin çift olması durumunda negatif Pell denkleminin tamsayı çözümü yoktur. l nin tek olması durumunda negatif Pell denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = (A_{l-1}, B_{l-1})$$

dir (Mollin 2008).

Yukarıdaki teoremde geçen l sayısına peryot uzunluğu denir. Örneğin, $x^2 - 13y^2 = \pm 1$ Pell denklemi için $\sqrt{13} = [3; \overline{1,1,1,1,6}]$ olup

$$\begin{aligned} &A_0 = 3, A_1 = 4, A_2 = 7, A_3 = 11, A_4 = 18, A_5 = 119, \\ &A_6 = 137, A_7 = 256, A_8 = 393, A_9 = 649 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 3, B_4 = 5, B_5 = 33, B_6 = 38, \\ &B_7 = 71, B_8 = 109, B_9 = 180 \end{aligned}$$

dir. Buna göre, $x^2 - 13y^2 = 1$ denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (A_9, B_9) = (649{,}180)$ ve $x^2 - 13y^2 = -1$ denkleminin temel çözümü ise $(x_1, y_1) = (A_4, B_4) = (18, 5)$ olarak elde edilir. Dolayısıyla 1.4.2 Teoreminden $x^2 - 13y^2 = 1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için $x_n + \sqrt{13}y_n = (649 + 180\sqrt{13})^n$ olmak üzere (x_n, y_n) şeklinde, $x^2 - 13y^2 = -1$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri ise $n \geq 1$ için $x_{2n-1} + \sqrt{13}y_{2n-1} = (18 + 5\sqrt{13})^{2n-1}$ olmak üzere (x_{2n-1}, y_{2n-1}) şeklindedir.

1.4.4. Teorem. $n \geq 3$ olmak üzere $x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin tamsayı çözümleri arasında

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (2x_1 - 1)(x_n + x_{n-1}) - x_{n-2} \\ y_{n+1} &= (2x_1 - 1)(y_n + y_{n-1}) - y_{n-2} \end{aligned}$$

ve $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin tamsayı çözümleri arasında

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= (4x_1^2 + 1)(x_{2n-1} + x_{2n-3}) - x_{2n-5} \\ y_{2n+1} &= (4x_1^2 + 1)(y_{2n-1} + y_{2n-3}) - y_{2n-5} \end{aligned}$$

şeklinde indirgeme bağıntıları vardır (Mollin 2008).

1.4.2. Teoremine benzer şekilde $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ Pell denkleminin tüm tamsayı çözümleri matrislere bağlı olarak aşağıdaki gibi de verilebilir.

1.4.5. Teorem. $x^2 - Dy^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) olsun. Bu takdirde denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (x_n, y_n) şeklindedir. Eğer (x_1, y_1), $x^2 - Dy^2 = -1$ negatif Pell denkleminin temel çözümü ise denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & Dy_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}^{2n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (x_{2n-1}, y_{2n-1}) şeklindedir (Mollin 2008).

1.4.6. Not. 1) (1.4.2) de verilen $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ Diophantine denklemi esasında bir konik denklemi olup $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere

1. $\Delta < 0$ iken bu konik bir elips belirtir ve bu durumda verilen denklemin sonlu sayıda tamsayı çözümü vardır.
2. $\Delta = 0$ iken bir parabol belirtir.

   i) $2ae - bd = 0$ ise $(2ax + by + d)^2 = d^2 - 4af$

   ii) $2ae - bd \neq 0$ ise $X = 2ax + by + d$ ve $Y = (4ae - 2bd)y + 4af - d^2$

   olarak alınırsa her iki halde de verilen denklem

   $$X^2 + Y = 0$$

   denklemine indirgenmiş olur.
3. $\Delta > 0$ iken bir hiperbol belirtir. Bu durumda denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa denklem $X^2 - dY^2 = n$ Pell denklemine indirgenmiş olur.

2) $\Delta > 0$ olması durumundaki Diophantine denklemlerinin incelenmesi daha kayda değerdir. Çünkü bu durumda verilen denklemin tamsayı çözümleri varsa bunların sayısı sonsuzdur. Diğer durumlarda tamsayı çözümleri ya yoktur ya da varsa bunların sayısı sonlu tanedir. Örneğin, $2x^2 - 6xy + 3y^2 + 1 = 0$ denklemi için $\Delta = 12 > 0$ dır. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa denklem

$$x^2 - 3(y-x)^2 = 1$$

haline gelir. Bu son denklemde $u = x$ ve $v = y - x$ değişken değişimi yapılarak denklem

$$u^2 - 3v^2 = 1$$

pozitif Pell denklemine indirgenmiş olur. Bu denklemin temel çözümü $(u_1, v_1) = (2, 1)$ olup denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere (u_n, v_n) şeklindedir. Şu halde $2x^2 - 6xy + 3y^2 + 1 = 0$ Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (u_n, u_n + v_n)$$

şeklindedir. Benzer şekilde $x^2 - 7y^2 + 2x + 56y - 110 = 0$ Diophantine denklemi de

$$(x+1)^2 - 7(y-4)^2 = -1$$

olarak yazılabileceğinden $u = x + 1$, $v = y - 4$ değişken değişimi yapılarak denklem

$$u^2 - 7v^2 = -1$$

negatif Pell denklemine indirgenmiş olur. Ancak $\sqrt{7} = [2; \overline{1,1,1,4}]$ olduğundan bu denklemin tamsayı çözümleri yoktur (Peryot uzunluğu çift olduğundan). Dolayısıyla denkleminin tamsayı çözümleri yoktur.

2. POZİTİF TANIMLI FORMLAR VE TABAN NOKTALARI

Bu kısımda ilk olarak pozitif tanımlı formlar ve normal formlar ele alınacak ve aralarındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Daha sonra ise pozitif tanımlı formların taban noktaları $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ grubu ve $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grubu dikkate alınarak incelenecektir.

2.1. Pozitif Tanımlı Formlar.

Bu alt bölümde pozitif tanımlı formların indirgenebilirliği ve normal formlar ile olan ilişkisi, daha sonra ise diskriminantı Δ olan tüm indirgenmiş pozitif tanımlı formların nasıl elde edileceği gösterilecektir. 1.1.7. Tanımında pozitif tanımlı $F=(a,\, b,\, c)$ formunun $|\,b\,|\leq a\leq c$ şartını sağlaması durumunda bu forma indirgenebilir form denilmişti. Örneğin $F=(7,-2,\, 9)$ pozitif tanımlı formu indirgenebilir iken $G=(2,8,9)$ pozitif tanımlı formu indirgenebilir değildir. İndirgenemeyen pozitif tanımlı bir form aşağıdaki indirgeme algoritması kullanılarak aynı diskriminantlı indirgenebilir bir forma dönüştürülebilir. Bu son forma, indirgenemeyen formun indirgenmişi denir.

2.1.1. Teorem. $F=(a,b,c)$ pozitif tanımlı formu indirgenebilir olmasın. $i\geq 0$ için

$$r_i=\left\lfloor \frac{b_i+c_i}{2c_i}\right\rfloor$$

olmak üzere F nin indirgenmişi

$$\rho^{i+1}(F)=(c_i,-b_i+2c_ir_i,c_ir_i^2-b_ir_i+a_i)$$

dir (Buchmann ve Vollmer 2007).

2.1.2. Not. 1) Yukarıdaki teoreme dikkat edilirse

$$\rho(F)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & r\end{bmatrix}F=F(-y,x+ry)$$

olduğu görülür.

2) Bu algoritma indirgenebilir form elde edilinceye kadar bir önceki forma uygulanmaya devam edilir. Üstelik F formu, kendisinin indirgenmiş olan $\rho^i(F)$ formuna, yukarıdaki matrislerin tersten çarpılması suretiyle elde edilen matris yardımıyla resmedilebilir, yani F ile indirgenmişi olan $\rho^i(F)$ formu has denktir.

3) İndirgeme adımlarının sayısı en fazla $\left\lfloor \log\left(\frac{a}{\sqrt{|\Delta|}}\right)\right\rfloor + 2$ dir.

2.1.3. Örnek. $\Delta = -3$ diskriminantlı $F = (61, -27, 3)$ formu indirgenebilir değildir. Bu forma yukarıda belirtilen indirgeme algoritması uygulanırsa $r_0 = -4$ olur. Buna göre $\rho^1(F) = (3, 3, 1)$ formu elde edilir. Bu form indirgenebilir olmadığından bir kez daha indirgeme algoritması uygulanırsa $r_1 = 2$ ve $\rho^2(F) = (1, 1, 1)$ formu elde edilmiş olur. Bu son form indirgenebilir olduğundan F formunun indirgenmişi

$$\rho^2(F) = (1, 1, 1)$$

dir. Burada dikkat edilirse $\Delta(\rho^2(F)) = -3$ tür. Üstelik

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$$

dönüşümü için $gF = \rho^2(F)$, yani F ve $\rho^2(F)$ formları birbirine denktir.

2.1.4. Tanım. Diskriminantı Δ olan pozitif tanımlı indirgenmiş (temel) form F_R ile gösterilir ve

$$F_R = \begin{cases} (1, 0, \frac{-\Delta}{4}) & \Delta \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4) \\ (1, 1, \frac{1-\Delta}{4}) & \Delta \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Flath 1989).

2.1.5. Not. Eğer pozitif tanımlı bir F formu indirgenebilir değilse bu form $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ nin elemanı ile aynı diskriminantlı indirgenmiş F_R formuna resmedilebilir. Örneğin, $\Delta = -3$ diskriminantlı $F = (1, 3, 3)$ formu indirgenebilir değildir. Aynı diskriminantlı indirgenebilir form $F_R = (1,1,1)$ olup $g = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ için $gF = F_R$ dir. Benzer şekilde $\Delta = -8$ diskriminantlı $F = (1,4,6)$ formu da indirgenebilir değildir. Aynı diskriminantlı indirgenmiş form $F_R = (1,0,2)$ olup $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ için $gF = F_R$ dir.

2.1.6. Teorem. Eğer $F = (a,b,c)$ formu indirgenebilir ise $a \le \sqrt{|\Delta|/3}$ dür (Buchmann ve Vollmer 2007).

İspat. F indirgenebilir ise $|b| \le a \le c$ dir. Buna göre $c \ge a$ olduğundan $4ac \ge 4a^2$ dir. Benzer şekilde $|b| \le a$ olduğundan $b^2 \le a^2 \Leftrightarrow -b^2 \ge -a^2$ elde edilir. O halde

$$|\Delta| = 4ac - b^2 \ge 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

dir. Buradan $a \le \sqrt{|\Delta|/3}$ olduğu açıktır.

2.1.7. Teorem. Δ diskriminantlı sonlu sayıda indirgenebilir pozitif tanımlı tam form vardır (Buchmann ve Vollmer 2007).

İspat. $F = (a,b,c)$, Δ diskriminantlı pozitif tanımlı form olsun. Bu takdirde 2.1.6. Teoreminden dolayı $|b| \le a \le \sqrt{|\Delta|/3}$ dür. Şu halde verilen herhangi bir Δ diskriminantı için sonlu sayıda b ve a değeri (veya değerleri) vardır. Diğer yandan $\Delta = b^2 - 4ac$ olduğundan $c = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a}$ dır. b ve a için sonlu sayıda değer olduğundan c için de sonlu sayıda değer vardır. Dolayısıyla indirgenebilir formların sayısı sonludur.

2.1.8. Teorem. Pozitif tanımlı formların her bir denklik sınıfı tam olarak bir tane indirgenebilir form bulundurur ki bu form F_R formudur (Buchmann ve Vollmer 2007).

2.1.9. Not. 2.1.7 ve 2.1.8 Teoremlerine göre, Δ diskriminantlı indirgenebilir pozitif tanımlı formlar şu şekilde belirlenir: Δ nın tek veya çift olması b nin tek veya çift olmasına bağlı olduğundan $b \equiv \Delta \pmod 2$ dir. Diğer yandan elde edilen formun indirgenebilir olması istenildiğinden 2.1.7. Teoremi gereği $|b| \le a \le \sqrt{|\Delta|/3}$ şartının sağlanması gerekir. Şu halde b için

$$\Delta\,(\mathrm{mod}\,2) \le b \le \left\lfloor \sqrt{|\,\Delta\,|/3}\, \right\rfloor$$

aralığı elde edilmiş olur. $\Delta = b^2 - 4ac$ için $c = \dfrac{b^2-\Delta}{4a}$ olup a sayısı

$$A = \frac{b^2-\Delta}{4}$$

tamsayısını böler. Üstelik $|\,b\,| \le a \le c$ eşitsizliği göz önüne alınırsa $a \le c = \dfrac{A}{a}$ elde edilir. Şu halde $a^2 \le A$ dır. Ayrıca $a \ge b$ olacağından a için $b \le a \le \left\lfloor \sqrt{A} \right\rfloor$ aralığı elde edilmiş olur. a ve b için elde edilen bu aralıklardaki her değer için $c = \dfrac{b^2-\Delta}{4a}$ nın tamsayı olup olmadığı kontrol edilir. Eğer c tamsayı ise indirgenmiş pozitif tanımlı (a,b,c) formu elde edilmiş olur. Bu form için $(a,-b,c)$ de indirgenmiş pozitif tanımlı bir formdur. c tamsayı değilse indirgenmiş pozitif tanımlı form yoktur.

Örneğin, $\Delta = -191$ diskriminantlı pozitif tanımlı indirgenmiş formlar için $\Delta \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$ olduğundan

$$\Delta\,(\mathrm{mod}\,2) \le b \le \left\lfloor \sqrt{|\,\Delta\,|/3}\, \right\rfloor \Leftrightarrow 1 \le b \le 7$$

dir. Buna göre $b = 1, 3, 5, 7$ olmak zorundadır. Diğer yandan $|\,b\,| \le a \le c$ olması gerektiğinden her bir b değeri için $a \ge b$ olmalıdır. Buna göre

1) $b = 1$ için $A = \dfrac{b^2-\Delta}{4} = \dfrac{1+191}{4} = 48$ olup $b \le a \le \left\lfloor \sqrt{48} \right\rfloor \Leftrightarrow 1 \le a \le 6$ dır.

(i) $a = 1$ için $c = \dfrac{b^2-\Delta}{4a} = 48$ olup indirgenmiş form $(1,1,48)$ dir.

(ii) $a = 2$ için $c = \dfrac{b^2-\Delta}{4a} = 24$ olup indirgenmiş formlar $(2,1,24)$ ve $(2,-1,24)$ dir.

(iii) $a = 3$ için $c = \dfrac{b^2-\Delta}{4a} = 16$ olup indirgenmiş formlar $(3,1,16)$ ve $(3,-1,16)$ dir.

(iv) $a = 4$ için $c = \dfrac{b^2-\Delta}{4a} = 12$ olup indirgenmiş formlar $(4,1,12)$ ve $(4,-1,12)$ dir.

(v) $a = 5$ için $c = \dfrac{b^2-\Delta}{4a} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan indirgenmiş form yoktur.

(vi) $a=6$ için $c=\dfrac{b^2-\Delta}{4a}=8$ olup indirgenmiş formlar $(6,1,8)$ ve $(6,-1,8)$ dir.

2) $b=3$ için $A=\dfrac{b^2-\Delta}{4}=\dfrac{9+191}{4}=50$ olup $3\leq a\leq \lfloor\sqrt{50}\rfloor \Leftrightarrow 3\leq a\leq 7$ dir.

(i) $a=3$ için $c=\dfrac{b^2-\Delta}{4a}\notin\mathbb{Z}$ olduğundan indirgenmiş form yoktur.

(ii) $a=4$ için $c=\dfrac{b^2-\Delta}{4a}\notin\mathbb{Z}$ olduğundan indirgenmiş form yoktur.

(iii) $a=5$ için $c=\dfrac{b^2-\Delta}{4a}=10$ olup indirgenmiş formlar $(5,3,10)$ ve $(5,-3,10)$ dir.

(iv) $a=6$ için $c=\dfrac{b^2-\Delta}{4a}\notin\mathbb{Z}$ olduğundan indirgenmiş form yoktur.

(v) $a=7$ için $c=\dfrac{b^2-\Delta}{4a}\notin\mathbb{Z}$ olduğundan indirgenmiş form yoktur.

3) $b=5$ için $A=\dfrac{b^2-\Delta}{4}=\dfrac{25+191}{4}=54$ olup $5\leq a\leq \lfloor\sqrt{54}\rfloor \Leftrightarrow 5\leq a\leq 7$ dir.

(i) $a=5$ için $c=\dfrac{b^2-\Delta}{4a}\notin\mathbb{Z}$ olduğundan indirgenmiş form yoktur.

(ii) $a=6$ için $c=\dfrac{b^2-\Delta}{4a}=9$ olup indirgenmiş formlar $(6,5,9)$ ve $(6,-5,9)$ dir.

(iii) $a=7$ için $c=\dfrac{b^2-\Delta}{4a}\notin\mathbb{Z}$ olduğundan indirgenmiş form yoktur.

4) $b=7$ için $A=\dfrac{b^2-\Delta}{4}=\dfrac{49+191}{4}=60$ olup $7\leq a\leq \lfloor\sqrt{60}\rfloor \Leftrightarrow 7\leq a\leq 7$ dir.

(i) $a=7$ için $c=\dfrac{b^2-\Delta}{4a}\notin\mathbb{Z}$ olduğundan indirgenmiş form yoktur.

O halde tüm indirgenmiş formlar

$$(1,1,48),\ (2,1,24),(2,-1,24),(3,1,16),(3,-1,16),(4,1,12),(4,-1,12),$$
$$(6,1,8),(6,-1,8),\ (5,3,10),(5,-3,10),\ (6,5,9),(6,-5,9)$$

dır. Burada dikkat edilirse elde edilen tüm bu formların diskriminantları -191 dir.

2.1.10. Normal Form. Pozitif tanımlı $F=(a,b,c)$ formu $-a<b\leq a$ şartını sağlıyor ise F ye normal form denir (Buchmann ve Vollmer 2007).

2.1.11. Teorem. Eğer $F=(a,b,c)$ normal ve $a \le \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$ ise F indirgenebilirdir (Buchmann ve Vollmer 2007).

İspat. $F=(a,b,c)$ normal ise $-a<b\le a$ olup $a \le \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$ ise $2a \le \sqrt{|\Delta|} \Leftrightarrow 4a^2 \le |\Delta|$ dir. F pozitif tanımlı olduğundan $\Delta<0$ dır. O halde

$$|\Delta| = 4ac-b^2 \Leftrightarrow c = \frac{|\Delta|+b^2}{4a} \ge \frac{|\Delta|}{4a} \ge \frac{4a^2}{4a} = a$$

Ayrıca $-a<b\le a$ olduğundan $|b| \le a \le c$ elde edilir. Dolayısıyla F indirgenebilirdir.

2.1.12. Teorem. Eğer $F=(a,b,c)$ normal ve $a \ge \sqrt{|\Delta|}$ ise $c \le a/2$ dir (Buchmann ve Vollmer 2007).

İspat. Eğer F normal ise $-a<b\le a$ dir. Buradan $b^2 \le a^2$ elde edilir. Diğer yandan $a \ge \sqrt{|\Delta|}$ olduğundan $a^2 \ge |\Delta|$ ve böylece

$$|\Delta| = 4ac-b^2 \Leftrightarrow c = \frac{|\Delta|+b^2}{4a} \le \frac{a^2+a^2}{4a} = \frac{2a^2}{4a} = \frac{a}{2}$$

dir.

2.1.13. Teorem. F normal fakat indirgenemeyen bir form olsun. $a < \sqrt{|\Delta|}$ ise $\rho(F)$ formu indirgenebilirdir (Buchmann ve Vollmer 2007).

İspat. $a < \sqrt{|\Delta|}$ olsun. F normal fakat indirgenebilir olmadığından ya $a>c$ dir ya da $a=c$ ve $b<0$ dır. İkinci halde $\rho(F)$ nin indirgenebilir olduğu açıktır. $a>c$ hali dikkate alınsın. $c<\sqrt{|\Delta|}/2$ ise $\rho(F)$ nin indirgenebilirdir. Bu nedenle $c \ge \sqrt{|\Delta|}/2$ olsun. Bu takdirde $4c^2 \ge \sqrt{|\Delta|}$ olup $|b| \le a < \sqrt{|\Delta|}$ olduğundan $\frac{b^2}{4c^2} \le 1$ dir. Dolayısıyla $|r| \le 1$ dir. $r=0$ ise $c<a$ olup $\rho(F)=(c,-b,a)$ indirgenebilirdir. $|r|=1$ ise $r=\pm 1$ olup

$$\rho(F)=(c,-b\pm 2c, a\mp b+c)$$

dir. Eğer $a>|b|$ ise $a\mp b+c \ge a-|b|+c > c$ olacağından $\rho(F)$ indirgenebilirdir. Eğer $a=b$ ise $b>0$ olduğundan $r=1$ olup $\rho(F)=(c,-a+2c,c)$ dir. Diğer yandan

$$c \geq \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} > \frac{a}{2}$$

olduğundan $-a+2c>0$, yani $\rho(F)=(c,-a+2c,c)$ indirgenebilirdir.

2.1.14. Teorem. F normal fakat indirgenemeyen bir form ise $a \geq rc$ dir (Buchmann ve Vollmer 2007).

İspat. Eğer $|r|=1$ ise F normal fakat indirgenemeyen bir form ise $a \geq rc$ olduğu açıktır. Bu nedenle $|r|>1$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde $\Delta = b^2-4ac<0$ olduğundan

$$r = \left\lfloor \frac{b+c}{2c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b}{2c}+\frac{1}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow \frac{b}{2c} \geq r-\frac{1}{2}$$

dir. O halde

$$a = \frac{|\Delta|+b^2}{4c} > \frac{b^2}{4c} = c\left(\frac{|b|}{2c}\right)^2 \geq c\left(|r|-\frac{1}{2}\right)^2 > c|r|(|r|-1) \geq c|r| > cr$$

dır. Şu halde $a \geq rc$ dir.

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç verilebilir.

2.1.15. Sonuç. F normal ve $|r| \leq 1$ ise $F, \rho^1(F)$ ve $\rho^2(F)$ formlarından birisi indirgenebilirdir (Buchmann ve Vollmer 2007).

2.2. Pozitif Tanımlı Formların Taban Noktaları.

Tekcan ve Bizim (2003), pozitif tanımlı bir $F=(a,b,c)$ formunun üst-yarı düzlemdeki bir z karmaşık sayısı için $F(x,y)=a(x+zy)(x+\bar{z}y)$ şeklinde yazılabildiğini, tersine verilen herhangi bir $z=p+iq \in \mathbb{U}$ sayısı için, bu sayıyı taban noktası kabul eden $\Delta = \frac{-4q^2}{|z|^4}$ diskriminantlı pozitif tanımlı bir

$$F=(a,b,c)=\left(\frac{1}{|z|^2}, \frac{2p}{|z|^2}, 1\right) \tag{2.2.1}$$

formunun olduğunu göstermişlerdi.

Bu kısımda ilk olarak $m \geq 2$ tamsayısı için taban noktaları $x = \frac{-1}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı formlar ele alınacak, bu formlardan kaç tanesinin tam form olduğu ve tam olmayan formların indirgenmiş formlara nasıl resmedilebileceği gösterilecektir. Daha sonra aynı problem $m \geq 1$ tamsayısı için taban noktaları $C : x^2 + y^2 = \frac{1}{m^2}$ çemberinin üst-yarı düzlemde kalan yayı üzerinde olan pozitif tanımlı formlar için ele alınacaktır. Tüm bu işlemlerde $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ grubu dikkate alınacaktır. Daha sonra benzer işlemler $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ grubu yerine $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grubu alınarak incelenecektir.

2.2.1. Teorem. $m \geq 2$ olmak üzere $0 < D < m^2$ olsun. Bu takdirde $\Delta(F) = -D$ diskriminantlı ve taban noktası $x = \frac{-1}{m}$ doğrusu üzerinde olan pozitif tanımlı bir $F = (a,b,c)$ formu vardır (Tekcan ve Bizim 2003).

İspat. $z = x + iy$ olmak üzere $x = \frac{-1}{m}$ için $\frac{-4y^2}{|z|^4} = -D$ eşitliğinden

$$y = \frac{m + \sqrt{m^2 - D}}{m\sqrt{D}}$$

elde edilir. Buna göre (2.2.1) eşitliğinden

$$F = (a,b,c) = \left(\frac{mD}{2(m + \sqrt{m^2 - D})}, \ \frac{-D}{m + \sqrt{m^2 - D}}, \ 1 \right) \tag{2.2.2}$$

pozitif tanımlı formu elde edilmiş olur. Burada dikkat edilirse (2.2.2) de elde edilen pozitif tanımlı form tam form değildir. Bu formun tam olması için *m* nin tek veya çift oluşuna göre iki durum söz konusudur:

1. Durum: *m* tek olsun. Bu takdirde belli bir pozitif *k* tamsayısı için $m = 2k + 1$ dir. Bu durumda *D* çift olup *F* nin tam olması için gerek ve yeter şart $1 \leq l \leq k$ özelliğindeki *l* tamsayıları için $D = m^2 - (2l-1)^2$ olmasıdır. Gerçekten de *F* tam olsun. Bu takdirde *m* tek ve *D* çift olduğundan $\sqrt{m^2 - D}$ tektir. $l \geq 1$ tamsayısı için $\sqrt{m^2 - D} = 2l - 1$ denilirse $m^2 - D = (2l-1)^2$ ve böylece $D = m^2 - (2l-1)^2$ elde edilir. *D* pozitif olduğundan

$$m^2 - (2l-1)^2 = (m - (2l-1))(m + (2l-1))$$

pozitif olmak zorundadır. $l \geq 1$ olduğundan $m+(2l-1)>0$ ve böylece $m-(2l-1)>0$ dır. Bu ise $k+1>l$ olması demektir. O halde $1 \leq l \leq k$ için $D=m^2-(2l-1)^2$ dir.

Tersine $1 \leq l \leq k$ özelliğindeki l tamsayıları için $D=m^2-(2l-1)^2$ olsun. m tek ve D çift olduğundan $m-(2l-1)$ çift olup

$$a=\frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-D})}=\frac{m(m^2-(2l-1)^2)}{2\big(m+(2l-1)\big)}=\frac{m(m-(2l-1))}{2}$$

tamsayı ve benzer şekilde

$$b=\frac{-D}{m+\sqrt{m^2-D}}=\frac{-(m^2-(2l-1)^2)}{m+(2l-1)}=-m+(2l-1)$$

tamsayı olur, yani F formu tamdır.

2. Durum: m çift olsun. Bu takdirde belli bir pozitif k tamsayısı için $m=2k$ dır. Bu durumda da F nin tam olması için gerek ve yeter şart $1 \leq t \leq m-1$ özelliğindeki t tamsayıları için $D=m^2-t^2$ olmasıdır. Gerçekten de F tam olsun. Bu takdirde $m^2-D>0$ olduğundan pozitif t tamsayısı için $\sqrt{m^2-D}=t$ denilirse $D=m^2-t^2$ elde edilir. D pozitif olduğundan $m^2-t^2=(m-t)(m+t)$ çarpımı pozitif olmak zorundadır. m ve t pozitif olduğundan $m+t$ pozitiftir. Dolayısıyla $m-t$ pozitif olmak zorundadır. Bu ise $m>t$ olması demektir. Böylece $t \leq m-1$ elde edilir. Diğer yandan t pozitif olduğundan $1 \leq t \leq m-1$ dir. O halde $D=m^2-t^2$ dir.

Tersine $1 \leq t \leq m-1$ için $D=m^2-t^2$ olsun. Bu takdirde m çift olduğundan

$$a=\frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-D})}=\frac{m(m^2-t^2)}{2(m+t)}=\frac{m(m-t)}{2}$$

ve benzer şekilde

$$b=\frac{-D}{m+\sqrt{m^2-D}}=\frac{-(m^2-t^2)}{m+t}=-m+t$$

birer tamsayı olur, yani F formu tamdır.

2.2.2. Sonuç. $m=2k+1$ ise taban noktaları $x=\frac{-1}{m}$ doğrusu üzerinde olan k tane pozitif tanımlı form vardır ve bu formlar

$$F_j=(mj,\,-2j,\,1),\; 1 \leq j \leq k \tag{2.2.3}$$

şeklindedir. $m=2k$ ise yine taban noktaları $x=\frac{-1}{m}$ doğrusu üzerinde olan $m-1$ tane pozitif tanımlı tam form vardır ve bu formlar

$$F_j=(kj,\,-j,\,1),\quad 1\leq j\leq m-1 \tag{2.2.4}$$

şeklindedir (Tekcan ve Bizim 2003).

Yukarıda elde edilen tam formlara dikkat edilirse, bu formların indirgenebilir olmadığı görülür. Ancak indirgenemeyen herhangi bir pozitif tanımlı F formu, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ nin belli bir elemanı ile F ile aynı diskriminantlı indirgenebilir bir forma resmedilebileceği bir önceki bölümde görüldü. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

2.2.3. Teorem. (2.2.3) ve (2.2.4) de elde edilen pozitif tanımlı F tam formları, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ nin belli bir elemanı ile F ile aynı diskriminantlı indirgenebilir F_R formuna resmedilebilir (Tekcan ve Bizim 2003).

İspat. 2.2.1. Teoreminin ispatına benzer şekilde m nin tek veya çift olmasına göre ispat iki durumda ele alınacaktır.

1. Durum: $m=2k+1$ olsun. Bu durumda (2.2.3) gereği $1\leq j\leq k$ için pozitif tanımlı tam formlar $F_j=((2k+1)j,\,-2j,\,1)$ dir. Aynı diskriminantlı indirgenebilir pozitif tanımlı form $F_{R_j}=(1,0,mj-j^2)$ olup $g=\begin{bmatrix} r & s\\ t & u\end{bmatrix}\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ için

$$\begin{aligned} &mjr^2-2jrs+s^2=1\\ &2mjrt-2jru-2jts+2su=0\\ &mjt^2-2jtu+u^2=mj-j^2 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin bir çözümü $r=0, s=1, t=1, u=j$ dir. Şu halde $g=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & j\end{bmatrix}$ için $g_jF_j=F_{R_j}$ dir, yani F_j ve F_{R_j} formları birbirine denktir.

2. Durum: $m=2k$ olsun. Bu takdirde (2.2.4) gereği $1\leq j\leq m-1$ için pozitif tanımlı tam formlar $F_j=(kj,\,-j,\,1)$ dir. Burada j nin tek veya çift olması durumuna göre iki hal söz konusudur.

(i) j tek, yani belli bir $h\geq 0$ tamsayısı için $j=2h+1$ olsun. Bu durumda (2.2.4) eşitliğinden pozitif tanımlı tam formlar

$$F_j = (k(2h+1), -(2h+1), 1)$$

olup bu forma karşılık gelen aynı diskriminantlı indirgenmiş form

$$F_{R_j} = (1, 1, -h^2 - h + 2kh + k)$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} &k(2h+1)r^2 - (2h+1)rs + s^2 = 1 \\ &2k(2h+1)rt - (2h+1)ru - (2h+1)ts + 2su = 1 \\ &k(2h+1)t^2 - (2h+1)tu + u^2 = -h^2 - h + 2kh + k \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin bir çözümü $r = 0,\ s = 1,\ t = 1, u = h+1$ dir. O halde $g_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{j+1}{2} \end{bmatrix}$ için $g_j F_j = F_{R_j}$ dir.

(ii) *j* çift, yani belli bir $h \geq 0$ tamsayısı için $j = 2h$ olsun. Bu durumda (2.2.4) den pozitif tanımlı form $F_j = (2kh, -2h, 1)$ olup indirgenmiş form $F_{R_j} = (1, 0, -h^2 + 2kh)$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned} &2khr^2 - 2hrs + s^2 = 1 \\ &4khrt - 2hru - 2hts + 2su = 0 \\ &2kht^2 - 2htu + u^2 = -h^2 + 2kh \end{aligned}$$

denklem sisteminin bir çözümü $r = 0,\ s = -1,\ t = 1, u = h$ olduğundan $g_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{j}{2} \end{bmatrix}$ için

$g_j F_j = F_{R_j}$ dir.

Örneğin, $m = 5$ için pozitif tanımlı formlar $F_1 = (5,\ -2,\ 1)$ ve $F_2 = (10,\ -4,\ 1)$ ve indirgenebilir formlar $F_{R_1} = (1,\ 0,\ 4)$ ve $F_{R_2} = (1,\ 0,\ 6)$ olup

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ için } g_1 F_1 = F_{R_1} \quad \text{ve} \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ için } g_2 F_2 = F_{R_2}$$

dir. Benzer şekilde $m = 6$ için pozitif tanımlı formlar

$$F_1 = (3, -1, 1), F_2 = (6, -2, 1), F_3 = (9, -3, 1), F_4 = (12, -4, 1) \text{ ve } F_5 = (15, -5, 1)$$

ve indirgenebilir formlar

$$F_{R_1} = (1, 1, 3), F_{R_2} = (1, 0, 5), F_{R_3} = (1, 1, 7), F_{R_4} = (1, 0, 8) \text{ ve } F_{R_5} = (1, 1, 9)$$

olup

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ için } g_1 F_1 = F_{R_1},$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ için } g_2 F_2 = F_{R_2},$$

$$g_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ için } g_3 F_3 = F_{R_3},$$

$$g_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ için } g_4 F_4 = F_{R_4},$$

$$g_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ için } g_5 F_5 = F_{R_5}$$

dir.

Şimdi yukarıda ele alınan problem, taban noktaları orijin merkezli çemberler üzerinde olan pozitif tanımlı kuadratik formlar için ele alınsın.

2.2.4. Teorem. $m \geq 1$ tamsayısı için $C : x^2 + y^2 = \dfrac{1}{m^2}$ ve $\widetilde{C} = C \cap \mathbb{U}$ olsun. Bu takdirde $0 < D < 4m^2$ için taban noktaları $\widetilde{C}$ da olan $\Delta(F) = \Delta(G) = -D$ diskriminantlı pozitif tanımlı $F = (a, -b, c)$ ve $G = (a, b, c)$ formları vardır (Tekcan ve Bizim 2003).

İspat. Yine $z = x + iy$ için $|z| = \dfrac{1}{m}$ olup $\dfrac{-4y^2}{|z|^4} = -D \Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{D}}{2m^2}$ elde edilir. Bu son eşitliğe göre $x = \pm\dfrac{\sqrt{4m^2 - D}}{2m^2}$ dir. Şu halde taban noktaları $\widetilde{C}$ çemberi üzerinde olan $\Delta(F) = \Delta(G) = -D$ diskriminantlı

$$F = (m^2, -\sqrt{4m^2 - D}, 1) \text{ ve } G = (m^2, \sqrt{4m^2 - D}, 1) \tag{2.2.5}$$

pozitif tanımlı formları vardır. Yine burada dikkat edilirse (2.2.5) de elde edilen bu formlar tam değildir. Bu formlardan sadece F tam hale getirilsin. Benzer şekilde G için de yapılabilir. $b = \sqrt{4m^2 - D}$ olsun. Bu takdirde F nin tam olması için gerek ve yeter şart $1 \leq t \leq 2m - 1$ için $D = 4m^2 - t^2$ olmasıdır. F tam ise $\sqrt{4m^2 - D} \in \mathbb{Z}$ dir. Buna göre $4m^2 - D > 0$ olduğundan pozitif t tamsayısı için $\sqrt{4m^2 - D} = t$ denilirse buradan

$$4m^2 - D = t^2 \Leftrightarrow D = 4m^2 - t^2$$

elde edilir. D pozitif olduğundan eşitliğin sağındaki ifadenin pozitif olması gerekir. m ve t pozitif olduğundan $2m+t$ pozitif olup $2m-t$ pozitif olmak zorundadır. Buradan $2m-t>0 \Leftrightarrow t<2m$ elde edilir. O halde $1 \leq t \leq 2m-1$ dir. Buna göre, $1 \leq t \leq 2m-1$ için $D=4m^2-t^2$ dir. Tersine, $1 \leq t \leq 2m-1$ için $D=4m^2-t^2$ olsun. Bu takdirde t tamsayı olduğundan $b=\sqrt{4m^2-D}=t$ tamsayıdır. $a=m^2$ ve $c=1$ tamsayı olduğundan F tamdır.

2.2.5. Sonuç. $m \geq 1$ olmak üzere taban noktaları $\widetilde{C}$ çemberi üzerinde olan $2m-1$ tane pozitif tanımlı tam form vardır ve bu formlar

$$F_j=(m^2,-j,1) \text{ ve } G_j=(m^2,j,1) \tag{2.2.6}$$

şeklindedir (Tekcan ve Bizim 2003).

2.2.6. Not. $g=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ matrisi için (a,b,c) formu $(a,-b,c)$ formuna has olmayan denktir. (2.2.6) eşitliğine dikkat edilirse aynı g dönüşümü için $gF_j=G_j$ dir, yani F_j ve G_j formları birbirine has olmayan denktir.

2.2.7. Teorem. (2.2.6) da elde edilen indirgenemeyen formlar, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ nin belli bir elemanı ile aynı diskriminantlı indirgenebilir formlara resmedilebilirler (Tekcan ve Bizim 2003).

İspat. 1. Durum: j tek, yani belli bir $h \geq 0$ tamsayısı için $j=2h+1$ olsun. Bu durumda (2.2.6) dan pozitif tanımlı tam form $F_j=(m^2,-2h-1,1)$ olup bu forma karşılık gelen indirgenebilir form $F_{R_j}=(1,1,-h^2-h+m^2)$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
&m^2r^2-(2h+1)rs+s^2=1\\
&2m^2rt-(2h+1)ru-(2h+1)ts+2su=1\\
&m^2t^2-(2h+1)tu+u^2=-h^2-h+m^2
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin bir çözümü $r=0,\ s=1,\ t=1, u=h+1$ olup $g_j=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & \frac{j+1}{2}\end{bmatrix}$ için $g_jF_j=F_{R_j}$ dir.

2. Durum: j çift, yani belli bir $h \geq 0$ tamsayısı için $j = 2h$ denilirse $F_j = (m^2, -2h, 1)$ olup bu forma karşılık gelen indirgenmiş form $F_{Rj} = (1, 0, -h^2 + m^2)$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned} &m^2r^2 - 2hrs + s^2 = 1 \\ &2m^2rt - 2hru - 2hts + 2su = 0 \\ &m^2t^2 - 2htu + u^2 = -h^2 + m^2 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sisteminin bir çözümü $r = 0,\ s = -1,\ t = 1, u = h$ dır. O halde $g_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{j}{2} \end{bmatrix}$ için $g_j F_j = F_{Rj}$ dir. Benzer işlemler G_j için de yapılabilir.

Örneğin, $m = 5$ için (2.2.6) dan indirgenemeyen pozitif tanımlı formlar

$$\begin{aligned} &F_1 = (25, -1, 1), F_2 = (25, -2, 1), F_3 = (25, -3, 1),\ F_4 = (25, -4, 1), \\ &F_5 = (25, -5, 1), F_6 = (25, -6, 1), F_7 = (25, -7, 1),\ F_8 = (25, -8, 1), \\ &F_9 = (25, -9, 1) \end{aligned}$$

olup bu formlara karşılık gelen aynı diskriminantlı indirgenmiş formlar

$$\begin{aligned} &F_{R_1} = (1,1,\ 25), F_{R_2} = (1,0,24), F_{R_3} = (1,1,23),\ F_{R_4} = (1,0,21), F_{R_5} = (1,1,19), \\ &F_{R_6} = (1,0,16), F_{R_7} = (1,1,13), F_{R_8} = (1,0,9),\ F_{R_9} = (1,1,5) \end{aligned}$$

dır. Buna göre

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ için } g_1F_1 = F_{R_1},$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ için } g_2F_2 = F_{R_2},$$

$$g_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ için } g_3F_3 = F_{R_3},$$

$$g_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ için } g_4F_4 = F_{R_4},$$

$$g_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ için } g_5F_5 = F_{R_5},$$

$$g_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ için } g_6F_6 = F_{R_6},$$

$$g_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ için } g_7F_7 = F_{R_7},$$

$$g_8 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ için } g_8 F_8 = F_{R_8},$$
$$g_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ için } g_9 F_9 = F_{R_9}$$

dur.

2.2.8. Not. Yukarıda $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ matrisi altında F_j ve G_j formlarının birbirine has olmayan denk olduğu söylendi. Yukarıdaki teoremde ise F_j formlarının kendisiyle aynı diskriminantlı F_{R_j} formlarına belli bir g_j dönüşümü ile resmedilebileceği gösterildi. Şu halde $g_j g^{-1}$ dönüşümü de G_j formunu F_{R_j} formuna resmeder, yani

$$g_j g^{-1} G_j = F_{R_j}$$

dir.

$$\begin{tikzcd} G_j \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "g_j\, g^{-1}"'] & F_j \arrow[r, "g_j"] & F_{R_j} \end{tikzcd}$$

Şekil 2.1. $g_j g^{-1}$ dönüşümü

Yukarıda ele alınan problem $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ grubu yerine $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grubunu alınarak incelensin. Ancak ilk olarak modüler grup ve bu grubun temel bölgesi hakkında kısa bir bilgi verilsin. $r,s,t,u \in \mathbb{Z}$ ve $ru - st = 1$ olmak üzere

$$z \to \frac{rz+s}{tz+u}$$

şeklindeki dönüşümlerin kümesi, fonksiyonlarda bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba modüler grup denir ve $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ ile gösterilir. O halde

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ z = \frac{rz+s}{tz+u} : \ r,s,t,u \in \mathbb{Z}, \ ru - st = 1 \right\}$$

dir. Modüler grup $T(z) = -\frac{1}{z}$ ve $V(z) = z+1$ dönüşümleri ile üretilir ve

$$U(z) = TV(z) = -\frac{1}{z+1}$$

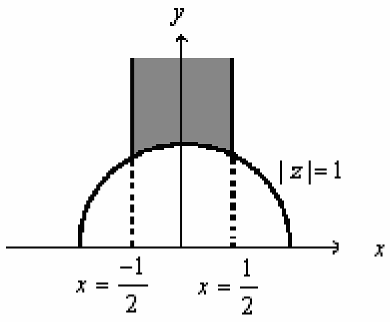
dönüşümü için bu grubun grup gösterimi

$$\Gamma = \langle T, U \mid T^2 = U^3 = I \rangle$$

dır. Bu grubun temel bölgesi

$$X(\Gamma) = \left\{ z \in \mathbb{U} : |z| \geq 1,\ |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

olup bu küme aşağıdaki şekilde belirtilmiştir.



Şekil 2.2. Modüler grubun temel bölgesi

Hecke (1936), λ bir reel sayı olmak üzere

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } V_\lambda(z) = z + \lambda$$

dönüşümleri ile üretilen bir grup tanımlamış, bu gruba Hecke grubu adını vermiş ve bu grubu $H(\lambda)$ ile göstermiştir. Ayrıca $H(\lambda)$ grubunun ayrık grup olması için gerek ve yeter şartın $\lambda = \lambda_q = 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right), q \in \mathbb{N},\ q \geq 3$ veya $\lambda \geq 2$ olması gerektiğini göstermiştir. $U_\lambda(z) = TV_\lambda(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$ dönüşümü için $H(\lambda_q)$ grubunun grup gösterimi

$$H(\lambda_q) = \langle T, U_\lambda \mid T^2 = (U_\lambda)^q = I \rangle$$

dir. $H(\lambda_q)$ grubu, mertebeleri sırasıyla 2 ve q olan iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur, yani $H(\lambda_q) \cong C_2 * C_q$ dur. Örneğin, $q = 3$ için $H(\lambda_3)$, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ grubudur ki bu esasında yukarıda bahsedilen Γ modüler grubudur.

Hecke grubuna, $R(z)=\frac{1}{z}$ yansıma dönüşümü eklenirse $\overline{H}(\lambda)$ ile gösterilen genişletilmiş Hecke grubu elde edilir. Bu grubun grup gösterimi de

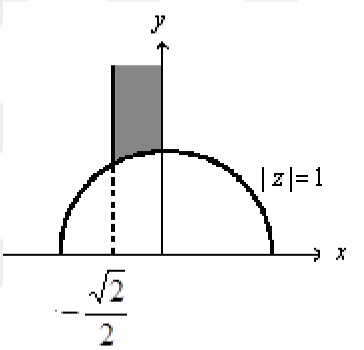
$$\overline{H}(\lambda_q)=\langle T,U_\lambda,R \mid T^2=(U_\lambda)^q=R^2=(TR)^2=(U_\lambda R)^2=I\rangle$$

dir.

$q=4$ olarak alınırsa $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grubu elde edilir. Bu grubun temel bölgesi

$$X(\overline{H}(\sqrt{2}))=\left\{z\in\mathbb{U}:-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq \mathrm{Re}(z)\leq 0,\ |z|\geq 1\right\}$$

kümesi olup bu küme aşağıdaki şekilde belirtilmiştir.



Şekil 2.3. $\overline{H}(\sqrt{2})$ Genişletilmiş Hecke grubunun temel bölgesi

Bu kısımda, $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grubu ile ilgili olması bakımından katsayıları $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{u+v\sqrt{2}:u,v\in\mathbb{Z}\}$ halkasında olan pozitif tanımlı formlar ele alınacaktır.

2.2.9. Teorem. $m\geq 3$ tamsayısı için $0<2D<m^2$ olsun. Bu takdirde taban noktası $x=\frac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde olan bir $F=F[\sqrt{2}]$ pozitif tanımlı formu vardır (Çıldır, Özden ve Tekcan 2016).

İspat. $m\geq 3$ tamsayısı için $x=\frac{-\sqrt{2}}{m}$ olsun. Bu durumda

$$F=\left(\frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-2D})},\frac{-D\sqrt{2}}{m+\sqrt{m^2-2D}},1\right) \qquad (2.2.7)$$

pozitif tanımlı formu elde edilir. Bu forma dikkat edilirse bu form tam form değil, yani katsayıları $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ halkasında değildir. Bunun için iki durum söz konusudur.

1. Durum: m tek, yani $k \in \mathbb{Z}^+$ için $m = 2k+1$ olsun. Bu takdirde (2.2.7) de elde edilen formun tam olması için gerek ve yeter şart $|l| < k$ özelliğindeki l tamsayıları için $2D = m^2 - (2l-1)^2$ olmasıdır. Gerçekten de F tam olsun. Bu takdirde m tek ve D çift olduğundan $\sqrt{m^2 - 2D}$ ifadesi tek olmak zorundadır. $l \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt{m^2 - 2D} = 2l - 1$ denilirse $2D = m^2 - (2l-1)^2$ elde edilir. D pozitif olduğundan eşitliğin sağındaki ifadenin pozitif olması gerekir. Buna göre

$$D > 0 \Leftrightarrow m^2 - (2l-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (m - 2l + 1)(m + 2l - 1) > 0$$

dır. $m = 2k+1$ olduğundan $(k+l)(k-l+1) > 0$ dır. $l > 0$ ise k da pozitif olduğundan $k + l > 0$ dır. Dolayısıyla $k - l + 1 > 0$ olmalıdır ki bu $k > l - 1$ olması demektir. $l < 0$ ise $k + l < 0$ ve böylece $k - l + 1 < 0$ dır. Buradan $k + 1 < l$ elde edilir ki bu $k \in \mathbb{Z}^+$ olması ile çelişir. O halde $k + 1 > 0$ dır. Buradan $k - l + 1 > 0$ sonucu elde edilir. Yani $-k \le l$ dir. O halde $|l| \le k$ dır. Tersine $|l| \le k$ için $2D = m^2 - (2l-1)^2$ olsun. Bu takdirde m tek olduğundan $m - (2l-1)$ çift ve böylece $(k-l)$ tek olduğundan

$$a = \frac{mD}{2(m + \sqrt{m^2 - 2D})} = \frac{(2k+1)(k-l+1)}{2}$$

ve benzer şekilde

$$b = \frac{-D\sqrt{2}}{m + \sqrt{m^2 - 2D}} = \sqrt{2}(l - k - 1)$$

olduğu kolayca görülebilir. Yani F tamdır.

2. Durum: m çift, yani $k \in \mathbb{Z}^+$ için $m = 2k$ olsun. Bu takdirde F nin tam olması için gerek ve yeter şart $|t| \le m - 1$ özelliğindeki t ler için $2D = m^2 - t^2$ olmasıdır. Gerçekten de F tam olsun. Bu takdirde $\sqrt{m^2 - 2D} = |t|$ denilirse $2D = m^2 - t^2$ elde edilir. D pozitif olduğundan $m^2 - t^2$ pozitif ve böylece $(m-t)(m+t) > 0$ olmak zorundadır. m ve t pozitif olduğundan $(m+t) > 0$ ve böylece $(m-t) > 0$ olmak zorundadır. Buradan $|t| \le m - 1$ olduğu sonucu elde edilir. Tersine $|t| \le m - 1$ için $2D = m^2 - t^2$ olsun. Bu durumda m ve t çift olduğundan $m - t$ çift ve böylece

$$a = \frac{mD}{2(m+\sqrt{m^2-2D})} = \frac{k(m-t)}{2}$$

bir tamsayıdır. Benzer şekilde

$$b = \frac{-D\sqrt{2}}{m+\sqrt{m^2-2D}} = -\frac{m-t}{\sqrt{2}}$$

olur, yani F tamdır.

2.2.10. Sonuç. $m = 2k+1$ için taban noktaları $x = \frac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde olan k tane pozitif tanımlı tam form vardır ve bu formlar

$$F_j = (mj, -2\sqrt{2}j, 1)\,,\ 1 \le j \le k \tag{2.2.8}$$

şeklindedir. $m = 2k$ ise taban noktaları $x = \frac{-\sqrt{2}}{m}$ doğrusu üzerinde olan $m-1$ tane pozitif tanımlı tam form vardır ve bu formlar

$$F_j = (kj, -\sqrt{2}j, 1)\,,\ 1 \le j \le m-1 \tag{2.2.9}$$

şeklindedir (Çıldır, Özden ve Tekcan 2016).

2.1.4. Tanımında diskriminantı Δ olan pozitif tanımlı indirgenmiş (temel) formun

$$F_R = \begin{cases} (1, 0, \frac{-\Delta}{4}) & \Delta \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4) \\ (1, 1, \frac{1-\Delta}{4}) & \Delta \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

şeklinde olduğu dikkate alınırsa, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ halkasındaki diskriminantı Δ olan indirgemiş form

$$F_R = \begin{cases} (1, 0, \frac{-\Delta}{4}) & \Delta \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4) \\ (1, -\sqrt{2}, \frac{2-\Delta}{4}) & \Delta \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 4) \end{cases} \tag{2.2.10}$$

olarak elde edilir. (2.2.8) ve (2.2.9) da elde edilen pozitif tanımlı tam formlar indirgenebilir değildir. 2.2.3. Teoremine benzer şekilde bu formlar da aynı diskriminantlı indirgenmiş formlara $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grubunun belli bir elemanı ile aşağıdaki gibi resmedilebilirler.

2.2.11. Teorem. (2.2.8) ve (2.2.9) da elde edilen $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ halkasındaki indirgenemeyen pozitif tanımlı tam formlar, $\overline{H}(\sqrt{2})$ genişletilmiş Hecke grubunun belli bir elemanı ile (2.2.10) daki aynı diskriminantlı indirgenmiş forma resmedilebilirler, yani belli bir $g \in \overline{H}(\sqrt{2})$ için $gF_j = F_R$ dir (Çıldır, Özden ve Tekcan 2016).

İspat. *m* nin tek veya çift olmasına göre iki durumda ele alınacaktır.

1. Durum: m tek olsun. Bu durumda pozitif tanımlı tam form $F_j = (mj, -2\sqrt{2}j, 1)$ olup bu formun diskriminantı

$$\Delta(F_j) = (-2\sqrt{2}j)^2 - 4mj = 4j(2j - m) \equiv 0 \,(\text{mod } 4)$$

dır. Buna göre (2.2.10) dan aynı diskriminantlı indirgenmiş form $F_{R_j} = (1, 0, mj - 2j^2)$ olup $g_j = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \overline{H}(\sqrt{2})$ matrisi için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} mjr^2 - 2\sqrt{2}jrs + s^2 &= 1 \\ 2mjrt - 2\sqrt{2}jru - 2\sqrt{2}jts + 2su &= 0 \\ mjt^2 - 2\sqrt{2}jtu + u^2 &= mj - 2j^2 \end{aligned}$$

Denklem sisteminin bir çözümü $r = 0, s = 1, t = 1, u = \sqrt{2}j$ dir. Buna göre

$$g_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2}j \end{bmatrix} \in \overline{H}(\sqrt{2})$$

için $g_j F_j = F_{R_j}$ dir.

2. Durum: m çift olsun. Bu durumda pozitif tanımlı tam formlar $F_j = (kj, -\sqrt{2}j, 1)$ dır. Bu formların diskriminantı $\Delta(F_j) = 2j^2 - 4kj$ dır. Burada iki durum söz konusudur.

(i) *j* tek, yani $h \in \mathbb{Z}^+$ için $j = 2h - 1$ olsun. Bu durumda $F_j = (k(2h-1), -\sqrt{2}(2h-1), 1)$ olup bu formun diskriminantı $\Delta = 8h^2 - 8h + 2 - 8kh + 4k \equiv 2 \,(\text{mod } 4)$ dır. Dolayısıyla bu forma karşılık gelen indirgenmiş form $F_{Rj} = (1, -\sqrt{2}, -2h^2 + 2h + 2kh - k)$ olup

$$\begin{aligned} k(2h-1)r^2 - \sqrt{2}(2h-1)rs + s^2 &= 1 \\ 2k(2h-1)rt - \sqrt{2}(2h-1)ru - \sqrt{2}(2h-1)ts + 2su &= -\sqrt{2} \\ k(2h-1)t^2 - \sqrt{2}(2h-1)tu + u^2 &= -2h^2 + 2h + 2kh - k \end{aligned}$$

denklem sisteminin bir çözümü $r = 0, s = -1, t = 1, u = h\sqrt{2}$ dir, yani

$$g_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{j+1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \in \overline{H}(\sqrt{2})$$

için $g_j F_j = F_{R_j}$ dir.

(ii) *j* çift, yani $h \in \mathbb{Z}^+$ için $j = 2h$ olsun. Bu durumda $F_j = (2hk, -2\sqrt{2}h, 1)$ olup bu formun diskriminantı $\Delta(F_j) = 4(2h^2 - 2kh) \equiv 0 \,(\text{mod } 4)$ olduğundan bu forma karşılık gelen indirgenmiş form $F_{R_j} = (1, 0,\ 2hk - 2h^2)$ dır. Buna göre

$$2hkr^2 - 2\sqrt{2}hrs + s^2 = 1$$
$$4hkrt - 2\sqrt{2}hru - 2\sqrt{2}ts + 2su = 0$$
$$2hkt^2 - 2\sqrt{2}tu + u^2 = 2hk - 2h^2$$

denklem sisteminin bir çözümü $r = 0, s = 1,\ t = 1, u = h\sqrt{2}$ dir, yani

$$g_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{j}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \in \overline{H}(\sqrt{2})$$

için $g_j F_j = F_{R_j}$ dir.

3. POZİTİF TANIMLI FORMLAR, TABAN NOKTALARI VE BAZLAR

Tezin bu bölümünde, pozitif tanımlı formlar, bu formların taban noktaları ve $\mathbb{C}$ nin $\mathbb{R}$ bazı ile ilgili bazı cebirsel sonuçlar verilecektir. Ayrıca bu üç kavramın birbiri ile olan ilişkisi üzerinde durulacaktır.

3.1. Pozitif Tanımlı Formlar, Bu Formların Taban Noktaları ve Bazlar.

Bu alt bölümde pozitif tanımlı formların taban noktaları ve $\mathbb{C}$ nin $\mathbb{R}$ bazı ile ilgili bazı yeni teoremler ve sonuçlar verilecektir.

3.1.1. Teorem. $g \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ elemanı ve $B=(\alpha,\beta)$ bazı için

(1) $O(Bg)=\det(g)O(B)$ dir.

(2) $\Delta(Bg)=\Delta(B)$ dir (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. (1) $g=\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ ve $B=(\alpha,\beta)$ bazı için

$$Bg=(\alpha r+\beta t,\alpha s+\beta u)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} O(Bg) &= \mathrm{sgn}\Big(\frac{\overline{(\alpha r+\beta t)}(\alpha s+\beta u)-(\alpha r+\beta t)\overline{(\alpha s+\beta u)}}{i}\Big) \\ &= \mathrm{sgn}(\det(g))\,\mathrm{sgn}\Big(\frac{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}{i}\Big) \\ &= \det(g)O(B) \end{aligned}$$

dir.

(2) Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \Delta(Bg) &= [[\overline{(\alpha r+\beta t)}(\alpha s+\beta u)-(\alpha r+\beta t)\overline{(\alpha s+\beta u)}]^2 \\ &= [(ru-st)(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})]^2 \\ &= (\det(g))^2(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})^2 \\ &= \Delta(B) \end{aligned}$$

dir.

3.1.2. Teorem. B pozitif yönlendirilmiş ise F_B de pozitif tanımlıdır. Üst-yarı düzlemdeki her z karmaşık sayısı için F_z pozitif tanımlıdır (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. B pozitif yönlendirilmiş ise $O(B)=1$ olup $F_B=(k^2+l^2,2(km+nl),m^2+n^2)$ dir. Buna göre $k^2+l^2>0$ ve $m^2+n^2>0$ dır. Diğer yandan F_B nin diskriminantı

$$\Delta(F_B)=[2(km+nl)]^2-4(k^2+l^2)(m^2+n^2)=-4(kn-ml)^2<0$$

olduğundan F_B pozitif tanımlıdır. $z=p+iq$ üst-yarı düzlemde ise $q>0$ olacağından $F_z=(1,2p,p^2+q^2)$ ve böylece

$$\Delta(F_z)=(2p)^2-4(p^2+q^2)=-4q^2<0$$

olduğundan F_z pozitif tanımlıdır.

3.1.3. Not. 1) B negatif yönlendirilmiş ise $F_B=-(k^2+l^2,2(km+nl),m^2+n^2)$ olacağından $-k^2-l^2<0$ ve $-m^2-n^2<0$ olur, yani F_B pozitif tanımlı değildir. Benzer şekilde z alt-yarı düzlemde ise $q<0$ olacağından $F_z=-(1,2p,p^2+q^2)$ pozitif tanımlı değildir.

2) Pozitif tanımlı F formunun taban noktasına karşılık gelen $F_{z(F)}=(1,\frac{b}{a},\frac{c}{a})$ formu her zaman pozitif tanımlıdır. Çünkü F pozitif tanımlı olduğundan $a,c>0$ ve böylece $\frac{c}{a}>0$ dır. Diğer yandan bu formun diskriminantı

$$\Delta(F_{z(F)})=(\frac{b}{a})^2-4(1)(\frac{c}{a})=\frac{\Delta}{a^2}<0$$

dır.

3.1.4. Teorem. Pozitif tanımlı F formu, bu formun $z(F)$ taban noktası, z karmaşık sayısı ve $B=(\alpha,\beta)$, $B(F)$ bazları için

(1) $\Delta(F_B)=\Delta(B)$ ve $\Delta(F_z)=\Delta(z)$ dir.

(2) $F_{z(F)}=\frac{1}{a}F$, $F_{B(F)}=aF$, $F_{z(F)B(F)}=cF$ ve $F_{B(F_{z(F)})}=F_{z(F)}$ dir.

(3) $F_{z(F)B}=\frac{c}{a}F_B$ ve $F_{B(F)}=\frac{a}{c}F_{z(F)B(F)}$ dir.

(4) $B(F_B)=O(B)\overline{\alpha}B$ dir.

(5) $z(F_{z(F)B})=z(F_B)$ ve $z(F_{B(F_{z(F)})})=z(F_{z(F)B(F)})=z(F_{B(F)})=z(F)$ dir (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. (1) B bazına karşılık gelen form $F_B=\pm(k^2+l^2,2(km+nl),m^2+n^2)$ olup bu formun diskriminantı

$$\Delta(F_B)=[2(km+nl)]^2-4(k^2+l^2)(m^2+n^2)=-4(kn-ml)^2=\Delta(B)$$

dir. $z=p+iq$ karmaşık sayısına karşılık gelen form $F_z=\pm(1,2p,p^2+q^2)$ olup bu formun diskriminantı da

$$\Delta(F_z)=(2p)^2-4(p^2+q^2)=-4q^2=\Delta(z)$$

dir.

(2) $F_{z(F)}=(1,\frac{b}{a},\frac{c}{a})$ olduğu dikkate alınırsa

$$F_{z(F)}=(1,\frac{b}{a},\frac{c}{a})=\frac{1}{a}(a,b,c)=\frac{1}{a}F$$

olduğu görülür.

$B(F)=(a,\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2})$ bazı için $\alpha=a$ ve $\beta=\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2}$ olarak alınırsa

$$N(\alpha)=a^2,\ Tr(\alpha\overline{\beta})=ab \text{ ve } N(\beta)=ac$$

olduğundan bu baza karşılık gelen form $F_{B(F)}=(a^2,ab,ac)$ dir. Burada açıkça görüleceği üzere

$$F_{B(F)}=(a^2,ab,ac)=a(a,b,c)=aF$$

dir.

$z(F)=\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ taban noktası ve $B(F)=(a,\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2})$ bazı için

$$z(F)B(F)=(\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2},\frac{b^2+\Delta+2ib\sqrt{-\Delta}}{4a})$$

dir. Burada $\alpha=\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2}$ ve $\beta=\frac{b^2+\Delta+2ib\sqrt{-\Delta}}{4a}$ olarak alınırsa

$$O(z(F)B(F))=1,\ N(\alpha)=ac,\ Tr(\alpha\overline{\beta})=bc \text{ ve } N(\beta)=c^2$$

olduğundan $F_{z(F)B(F)}=(ac,bc,c^2)$ olarak elde edilir. O halde

$$F_{z(F)B(F)} = (ac, bc, c^2) = c(a,b,c) = cF$$

dir. Son olarak $F_{z(F)} = (1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a})$ olduğu dikkate alınırsa $B(F_{z(F)}) = (1, \frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a})$ olup $\alpha = 1$ ve $\beta = \frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ olarak alınırsa

$$O(B(F_{z(F)})) = 1,\ N(\alpha) = 1, Tr(\alpha\overline{\beta}) = \frac{b}{a} \text{ ve } N(\beta) = \frac{c}{a}$$

olduğundan $B(F_{z(F)})$ bazına karşılık gelen form $F_{B(F_{z(F)})} = (1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a})$ olur. Buna göre

$$F_{B(F_{z(F)})} = (1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}) = F_{z(F)}$$

dir.

(3) $z(F) = \frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ taban noktası ve $B = (k+il, m+in)$ bazı için

$$z(F)B = \left(\frac{bk - l\sqrt{-\Delta} + i(bl + k\sqrt{-\Delta})}{2a}, \frac{bm - n\sqrt{-\Delta} + i(bn + m\sqrt{-\Delta})}{2a} \right)$$

dir. Burada $\gamma = \frac{bk - l\sqrt{-\Delta} + i(bl + k\sqrt{-\Delta})}{2a}$ ve $\delta = \frac{bm - n\sqrt{-\Delta} + i(bn + m\sqrt{-\Delta})}{2a}$ olarak alınırsa

$$O(z(F)B) = O(B),\ N(\gamma) = \frac{(k^2 + l^2)c}{a}, Tr(\gamma\overline{\delta}) = \frac{2(km + nl)c}{a} \text{ ve } N(\delta) = \frac{(m^2 + n^2)c}{a}$$

olduğundan $z(F)B$ ye karşılık gelen form

$$F_{z(F)B} = O(B)\left(\frac{(k^2 + l^2)c}{a}, \frac{2(km + nl)c}{a}, \frac{(m^2 + n^2)c}{a} \right)$$

olarak elde edilir. Bu son forma dikkat edilirse

$$\begin{aligned} F_{z(F)B} &= O(B)\left(\frac{(k^2 + l^2)c}{a}, \frac{2(km + nl)c}{a}, \frac{(m^2 + n^2)c}{a} \right) \\ &= \frac{c}{a} O(B)(k^2 + l^2, 2(km + nl), m^2 + n^2) \\ &= \frac{c}{a} F_B \end{aligned}$$

olduğu görülür. $F_{B(F)} = (a^2, ab, ac)$ ve $F_{z(F)B(F)} = (ac, bc, c^2)$ olduğu dikkate alınırsa

$$F_{B(F)} = \frac{a}{c} F_{z(F)B(F)}$$

olduğu açıktır.

(4) $O(B)=1$ olsun. Bu durumda $F_B = (k^2+l^2,\ 2(km+nl), m^2+n^2)$ olup bu forma karşılık gelen baz

$$B(F_B) = \left(k^2+l^2, \frac{2(km+nl)+i\sqrt{4(kn-ml)^2}}{2} \right)$$

dır. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
B(F_B) &= \left(k^2+l^2, \frac{2(km+nl)+i\sqrt{4(kn-ml)^2}}{2} \right) \\
&= \left(k^2+l^2, \frac{2(km+nl)+2i\,|\,kn-ml\,|}{2} \right) \\
&= (k^2+l^2, km-iml+ikn+nl) \\
&= \frac{(k+il)(k-il)}{k+il}(k+il, m+in) \\
&= (k-il)(k+il, m+in) \\
&= \overline{\alpha} B
\end{aligned}$$

olduğu görülür. $O(B)=-1$ olması durumu da benzer şekilde gösterilebilir.

(5) $O(B)=1$ olsun. Bu takdirde $F_{z(F)B} = \frac{c}{a}(k^2+l^2, 2(km+nl),\ m^2+n^2)$ formunun diskriminantı $\Delta(F_{z(F)B}) = \frac{-4c^2}{a^2}(kn-ml)^2$ olup taban noktası

$$z(F_{z(F)B}) = \frac{\frac{2(km+nl)c}{a} + i\sqrt{\frac{4c^2}{a^2}(kn-ml)^2}}{\frac{2(k^2+l^2)c}{a}} = \frac{km+nl+i(kn-ml)}{k^2+l^2} = z(F_B)$$

dir. $O(B)=-1$ olması durumu da benzer şekilde gösterilebilir.

$F_{B(F_{z(F)})} = (1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a})$ formunun diskriminantı $\Delta(F_{B(F_{z(F)})}) = \frac{\Delta}{a^2}$ olup taban noktası

$$z(F_{B(F_{z(F)})}) = \frac{\frac{b}{a} + i\sqrt{\frac{-\Delta}{a^2}}}{2} = \frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = z(F)$$

dir.

$F_{z(F)B(F)} = (ac, bc, c^2)$ formunun diskriminantı $\Delta(F_{z(F)B(F)}) = c^2\Delta$ olup taban noktası

$$z(F_{z(F)B(F)}) = \frac{bc + i\sqrt{-\Delta c^2}}{2ac} = \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = z(F)$$

dir. Son olarak $F_{B(F)} = (a^2, ab, ac)$ formunun diskriminantı $\Delta(F_{B(F)}) = a^2\Delta$ olup taban noktası

$$z(F_{B(F)}) = \frac{ab + i\sqrt{-\Delta a^2}}{2a^2} = \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = z(F)$$

dir.

Yukarıda ele alınan karmaşık sayıların ve bazların eşlenikleri

$$\overline{z} = p - iq,\ \overline{z}(F) = \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a},\ \overline{B} = (\overline{\alpha}, \overline{\beta}) \text{ ve } \overline{B}(F) = (a, \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a})$$

olarak tanımlanırsa 3.1.4. Teoremine benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.1.5. Teorem. Pozitif tanımlı F formu, bu formun $z(F)$ taban noktası, z karmaşık sayısı ve $B = (\alpha, \beta)$, $B(F)$ bazları için

(1) $O(\overline{B}) = -O(B)$ ve $O(\overline{z}) = -O(z)$ dir.

(2) $\Delta(\overline{z}) = \Delta(z),\ \Delta(\overline{B}) = \Delta(B),\ \Delta(F_{\overline{z}}) = \Delta(\overline{z})$ ve $\Delta(F_{\overline{B}}) = \Delta(\overline{B})$ dir.

(3) $F_{\overline{z}(F)} = -\frac{1}{a}F,\ F_{\overline{B}(F)} = -aF,\ F_{\overline{z}(F)\overline{B}(F)} = -cF$ ve $F_{\overline{B}(F_{\overline{z}(F)})} = -F_{\overline{z}(F)}$ dir.

(4) $F_{\overline{z}(F)\overline{B}} = \frac{c}{a}F_{\overline{B}}$ ve $F_{\overline{B}(F)} = \frac{a}{c}F_{\overline{z}(F)\overline{B}(F)}$ dir.

(5) $B(F_{\overline{B}}) = O(\overline{B})\alpha\overline{B}$ dir.

(6) $z(F_{\overline{z}(F)\overline{B}}) = z(F_{\overline{B}}), z(F_{\overline{B}(F)}) = z(F_{\overline{z}(F)\overline{B}(F)}) = \overline{z}(F)$ ve $z(F_{\overline{B}(F_{\overline{z}(F)})}) = z(F)$ dir

(Tekcan ve Kutlu 2017).

3.2. Formların ve Bazların Denklikleri.

Bu alt bölümde pozitif tanımlı formların ve bazların denklikleri ele alınacaktır. Ayrıca bu bölümde formların denk olması halinde bazların da denk olacakları ve bu formların taban noktalarının da denk olacakları gösterilecektir. Bu bölümde ayrıca bazların ve formların çarpımları ele alınacak ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

2.1.4. Tanımında diskriminantı Δ olan pozitif tanımlı indirgenmiş (temel) form

$$F_R = \begin{cases} (1, 0, \frac{-\Delta}{4}) & \Delta \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4) \\ \\ (1, 1, \frac{1-\Delta}{4}) & \Delta \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştı. $B = (k + il, m + in)$ bazına karşılık gelen pozitif tanımlı formun

$$F_B = \pm(k^2 + l^2, 2(km + nl), m^2 + n^2)$$

olduğu dikkate alınırsa bu formun diskriminantının $\Delta(F_B) = -4(kn - ml)^2$ olduğu görülür. Şu halde F_B ile aynı diskriminantlı indirgenmiş form

$$F_R = (1, 0, (kn - ml)^2)$$

dir. Bu takdirde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.1. Teorem. $B = (\alpha, \beta) = (k + il, m + in)$ bazı ve katsayıları k, l, m, n ye bağlı belli bir $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ için

(i) $kn - ml = 1$ ise F_B, $F_R = (1, 0, 1)$ formuna denktir.

(ii) $kn - ml = -1$ ise F_B, $-F_R = -(1, 0, 1)$ formuna denktir (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. (i) $kn - ml = 1$ ise $O(B) = 1$ olduğundan $F_B = (k^2 + l^2, 2(km + nl), m^2 + n^2)$ dir. Bu takdirde $g = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ dönüşümü için

$$\begin{aligned} &(k^2 + l^2)r^2 + 2(km + nl)rs + (m^2 + n^2)s^2 = 1 \\ &2(k^2 + l^2)rt + 2(km + nl)ru + 2(km + nl)ts + 2(m^2 + n^2)su = 0 \\ &(k^2 + l^2)t^2 + 2(km + nl)tu + (m^2 + n^2)u = 1 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin bir çözümü

$$r = m, s = -k, t = n, u = -l \text{ veya } r = m, s = -k, t = -n, u = l$$

dir. Şu halde $g = \begin{bmatrix} m & -k \\ n & -l \end{bmatrix}$ için F_B, F_R ye has denk, $g = \begin{bmatrix} m & -k \\ -n & l \end{bmatrix}$ için F_R ye has olmayan denktir. Şu halde her iki halde de F_B, F_R ye denktir.

(ii) $kn-ml=-1$ ise $O(B)=-1$ olduğundan $F_B=-(k^2+l^2,2(km+nl),m^2+n^2)$ dir. Bu takdirde $g=\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ dönüşümü için

$$\begin{aligned}
&-(k^2+l^2)r^2-2(km+nl)rs-(m^2+n^2)s^2=-1\\
&-2(k^2+l^2)rt-2(km+nl)ru-2(km+nl)ts-2(m^2+n^2)su=0\\
&-(k^2+l^2)t^2-2(km+nl)tu-(m^2+n^2)u=-1
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin bir çözümü

$$r=m,s=-k,t=-n,u=l \text{ veya } r=m,s=-k,t=n,u=-l$$

dir. Şu halde $g=\begin{bmatrix} m & -k \\ -n & l \end{bmatrix}$ için F_B, $-F_R$ ye has denk, $g=\begin{bmatrix} m & -k \\ n & -l \end{bmatrix}$ için $-F_R$ ye has olmayan denktir. Şu halde her iki halde de F_B, $-F_R$ ye denktir.

3.2.2. Teorem. B_1 ve B_2, $\mathbb{C}$ nin herhangi iki $\mathbb{R}$ bazı olsun. Bu takdirde B_1 ve B_2 bazlarının birbirine denk olması için gerek ve yeter şart

$$g^T F_{B_1}=\det(g)F_{B_2}$$

olmasıdır (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. B_1 ve B_2 bazlarının birbirine denk olsun. $B_1=(k_1+il_1,\ m_1+in_1)$ bazına karşılık gelen form $F_{B_1}=O(B_1)(k_1^2+l_1^2,2(k_1m_1+n_1l_1),m_1^2+n_1^2)$ dır. $g=\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ için

$$B_2=B_1g=(\alpha_2,\beta_2)=(k_1r+m_1t+i(l_1r+n_1t),\ k_1s+m_1u+i(l_1s+nu_1))$$

dir. Buna göre $O(B_2)=\det(g)O(B_1)$ ve

$$\begin{aligned}
&N(\alpha_2)=(k_1r+m_1t)^2+(l_1r+n_1t)^2\\
&Tr(\alpha_2\overline{\beta}_2)=2[(k_1r+m_1t)(k_1s+m_1u)+(l_1r+n_1t)(l_1s+n_1u)]\\
&N(\beta_2)=(k_1s+m_1u)^2+(l_1s+n_1u)^2
\end{aligned}$$

olduğundan B_2 bazına karşılık gelen form

$$F_{B_2}=O(B_2)\begin{pmatrix} (k_1r+m_1t)^2+(l_1r+n_1t)^2, \\ 2[(k_1r+m_1t)(k_1s+m_1u)+(l_1r+n_1t)(l_1s+n_1u)], \\ (k_1s+m_1u)^2+(l_1s+n_1u)^2 \end{pmatrix}$$

olur. $O(B_1)=1$ ve $\det(g)=1$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde g^T dönüşümü için

$$
\begin{aligned}
g^T F_{B_1} &= F_{B_1}(rx+sy,\, tx+uy) \\
&= (k_1^2+l_1^2)(rx+sy)^2 + 2(k_1m_1+n_1l_1)(rx+sy)(tx+uy) + (m_1^2+n_1^2)(tx+uy)^2 \\
&= x^2(k_1^2r^2+l_1^2r^2+2k_1m_1rt+2n_1l_1rt+m_1^2t^2+n_1^2t^2) \\
&\quad + xy(2k_1^2rs+2l_1^2rs+2k_1m_1ru+2k_1m_1st+2n_1l_1ru+2n_1l_1st+2m_1^2tu+2n_1^2tu) \\
&\quad + y^2(k_1^2s^2+l_1^2s^2+2k_1m_1su+2n_1l_1su+m_1^2u^2+n_1^2u^2) \\
&= x^2[(k_1r+m_1t)^2+(l_1r+n_1t)^2] + xy[2[(k_1r+m_1t)(k_1s+m_1u)+(l_1r+n_1t)(l_1s+n_1u)]] \\
&\quad + y^2[(k_1s+m_1u)^2+(l_1s+n_1u)^2] \\
&= F_{B_2}
\end{aligned}
$$

dir. $\det(g) = -1$ olması durumunda $O(B_1) = -O(B_2)$ olacağından $g^T F_{B_1} = -F_{B_2}$ olur. O halde her iki halde de $g^T F_{B_1} = \det(g) F_{B_2}$ dir. Tersi de benzer şekilde gösterilebilir.

3.2.3. Örnek. $B_1 = (\frac{3}{4} - \frac{9i}{5}, \frac{12}{7} + \frac{21i}{8})$ ve $B_2 = (\frac{41}{28} + \frac{137i}{140}, \frac{397+431i}{48})$ bazları

$$g = \begin{bmatrix} 3/7 & 5/4 \\ 2/3 & 77/18 \end{bmatrix}$$

matrisi altında birbirine has denktir. Bu bazlara karşılık gelen formlar sırasıyla

$$F_{B_1} = (\frac{1521}{400}, \frac{-963}{140}, \frac{30825}{3136}) \text{ ve } F_{B_2} = (\frac{30397}{9800}, \frac{8777}{210}, \frac{171685}{1152})$$

olup $g^T F_{B_1} = F_{B_2}$ dir. Benzer şekilde

$$F_{B_1} = (\frac{30397}{9800}, \frac{8777}{210}, \frac{925}{36}) \text{ ve } F_{B_2} = (\frac{286793}{882}, \frac{1182841}{1260}, \frac{4878509}{7200})$$

formları da $g^T = \begin{bmatrix} 5/7 & 7/2 \\ 3/4 & 203/40 \end{bmatrix}$ matrisi altında birbirine has denk olup bu formlar sırasıyla

$$B_1 = (\frac{2}{5} + \frac{i}{4}, \frac{7}{3} + \frac{9i}{2}) \text{ ve } B_2 = (\frac{355}{42} + \frac{233i}{14}, \frac{1457}{120} + \frac{921i}{40})$$

bazlarından elde edilmişlerdir ve $B_1 g = B_2$ dir, yani B_1 ve B_2 bazları birbirine denktir.

3.2.4 .Teorem. F_1 ve F_2 pozitif tanımlı formlarının $g = \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ dönüşümü altında birbirine denk olması için gerek ve yeter şart $h = \begin{bmatrix} u & t \\ s & r \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ dönüşümü için

$$hz(F_1)=\begin{cases} z(F_2) & \det(h)=1 \text{ ise} \\ \overline{z}(F_2) & \det(h)=-1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmasıdır (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. $F_1=(a_1,b_1,c_1)$ formu ve $g=\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ dönüşümü için

$$g\,F_1=F_2=(a_2,b_2,c_2)=(a_1r^2+b_1rs+c_1s^2, 2a_1rt+b_1ru+b_1ts+2c_1su, a_1t^2+b_1tu+c_1u^2)$$

dir. F_1 in taban noktası $z(F_1)=\dfrac{b_1+i\sqrt{-\Delta}}{2a_1}$ ve F_2 nin taban noktası

$$z(F_2)=\frac{2a_1rt+b_1ru+b_1ts+2c_1su+i\sqrt{-\Delta}}{2(a_1r^2+b_1rs+c_1s^2)}$$

dır. $h=\begin{bmatrix} u & t \\ s & r \end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ dönüşümü için

$$\begin{aligned} hz(F_1) &= \frac{u\left(\frac{b_1+i\sqrt{-\Delta}}{2a_1}\right)+t}{s\left(\frac{b_1+i\sqrt{-\Delta}}{2a_1}\right)+r}=\frac{2a_1t+b_1u+iu\sqrt{-\Delta}}{2a_1r+b_1s+is\sqrt{-\Delta}} \\ &= \frac{2a_1rt+b_1ru+b_1ts+2c_1su+i(ru-st)\sqrt{-\Delta}}{2(a_1r^2+b_1rs+c_1s^2)} \\ &= \frac{2a_1rt+b_1ru+b_1ts+2c_1su+i\det(h)\sqrt{-\Delta}}{2(a_1r^2+b_1rs+c_1s^2)} \end{aligned}$$

dir. Bu son eşitliğe göre, $\det(h)=1$ ise $hz(F_1)=z(F_2)$, $\det(h)=-1$ ise $hz(F_1)=\overline{z}(F_2)$ dir. Tersi de benzer şekilde gösterilebilir.

3.2.5. Teorem. F_1 ve F_2 pozitif tanımlı formlarının $g=\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ dönüşümü altında birbirine denk olması için gerek ve yeter şart $w=\dfrac{2a_1r+b_1s-si\sqrt{-\Delta}}{2a_1}$ için

$$wB(F_1)g^T=\begin{cases} B(F_2) & \det(g)=1 \text{ ise} \\ \overline{B}(F_2) & \det(g)=-1 \text{ ise} \end{cases}$$

olmasıdır (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. $F_1=(a_1,b_1,c_1)$ formu ve $g=\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ dönüşümü için

$$gF_1=F_2=(a_1r^2+b_1rs+c_1s^2,2a_1rt+b_1ru+b_1ts+2c_1su,a_1t^2+b_1tu+c_1u^2)$$

dir. F_1 formuna karşılık gelen baz $B(F_1)=(a_1,\dfrac{b_1+i\sqrt{-\Delta}}{2})$ ve F_2 formuna karşılık gelen baz

$$B(F_2)=(a_1r^2+b_1rs+c_1s^2,\frac{2a_1rt+b_1ru+b_1ts+2c_1su+i\sqrt{-\Delta}}{2})$$

olup $w=\dfrac{2a_1r+b_1s-si\sqrt{-\Delta}}{2a_1}$ için

$$\begin{aligned}
wB(F_1)g^T &= (\frac{2a_1r+b_1s-si\sqrt{-\Delta}}{2a_1})(a_1,\frac{b_1+i\sqrt{-\Delta}}{2})\begin{bmatrix} r & t \\ s & u \end{bmatrix} \\
&= (\frac{2a_1r+b_1s-si\sqrt{-\Delta}}{2a_1})\left(\frac{2a_1r+b_1s+si\sqrt{-\Delta}}{2},\frac{2a_1t+b_1u+ui\sqrt{-\Delta}}{2}\right) \\
&= (a_1r^2+b_1rs+c_1s^2,\frac{2a_1rt+b_1ru+b_1ts+2c_1su+i\det(g)\sqrt{-\Delta}}{2})
\end{aligned}$$

olur. Burada $\det(g)=1$ ise $wB(F_1)g^T=B(F_2)$, $\det(g)=-1$ ise $wB(F_1)g^T=\overline{B}(F_2)$ olduğu açıktır. Tersi de benzer şekilde gösterilebilir.

3.2.6. Örnek. (1) $F_1=(\frac{9}{4},\frac{2}{5},\frac{11}{2})$ ve $F_2=(\frac{14459}{1568},\frac{154153}{2520},\frac{333031}{3240})$ formları

$$g=\begin{bmatrix} 3/7 & 5/4 \\ 2/3 & 77/18 \end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$$

matrisi altında birbirine has denktir. F_1 ve F_2 formlarının taban noktaları sırasıyla

$$z(F_1)=\frac{4+i\sqrt{4934}}{45} \quad \text{ve} \quad z(F_2)=\frac{2158142}{650655}+\frac{392i\sqrt{4934}}{72295}$$

olup $h=\begin{bmatrix} 77/18 & 2/3 \\ 5/4 & 3/7 \end{bmatrix}$ matrisi için

$$hz(F_1)=\frac{\frac{77}{18}(\frac{4+i\sqrt{4934}}{45})+\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}(\frac{4+i\sqrt{4934}}{45})+\frac{3}{7}}=\frac{2158142}{650655}+\frac{392i\sqrt{4934}}{72295}=z(F_2)$$

dir. Benzer şekilde $F_1=(\frac{19}{2},\frac{7}{9},\frac{13}{6})$ ve $F_2=(\frac{42464}{1323},\frac{75622}{1617},\frac{628667}{35574})$ pozitif tanımlı formları da $g=\begin{bmatrix}3/7 & 11/3\\ 87/154 & 5/2\end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ matrisi altında birbirine has olmayan denktir. Bu formların taban noktaları

$$z(F_1)=\frac{7+2i\sqrt{1655}}{171} \quad \text{ve} \quad z(F_2)=\frac{340299}{467104}+\frac{147i\sqrt{1655}}{42464}$$

olup $h=\begin{bmatrix}5/2 & 87/154\\ 11/3 & 3/7\end{bmatrix}$ matrisi için

$$hz(F_1)=\frac{\frac{5}{2}(\frac{7+2i\sqrt{1655}}{171})+\frac{87}{154}}{\frac{11}{3}(\frac{7+2i\sqrt{1655}}{171})+\frac{3}{7}}=\frac{340299}{467104}-\frac{147i\sqrt{1655}}{42464}=\overline{z}(F_2)$$

dir.

(2) $F_1=(\frac{9}{4},\frac{2}{5},\frac{11}{2})$ ve $F_2=(\frac{14459}{1568},\frac{154153}{2520},\frac{333031}{3240})$ pozitif tanımlı formları

$$g=\begin{bmatrix}3/7 & 5/4\\ 2/3 & 77/18\end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$$

matrisi altında birbirine has denktir. Bu formlara karşılık gelen bazlar

$$B(F_1)=\left(\frac{9}{4},\ \frac{1}{5}+\frac{i\sqrt{4934}}{20}\right) \quad \text{ve} \quad B(F_2)=\left(\frac{14459}{1568},\ \frac{154153}{5040}+\frac{i\sqrt{4934}}{20}\right)$$

olup $w=\frac{34}{63}-\frac{i\sqrt{4934}}{20}$ için

$$\begin{aligned} wB(F_1)g^T &= \left(\frac{34}{63}-\frac{i\sqrt{4934}}{20}\right)\left(\frac{9}{4},\ \frac{1}{5}+\frac{i\sqrt{4934}}{20}\right)\begin{bmatrix}3/7 & 2/3\\ 5/4 & 77/18\end{bmatrix}\\ &=\left(\frac{34}{63}-\frac{i\sqrt{4934}}{20}\right)\left(\frac{17}{14}+\frac{i\sqrt{4934}}{16},\ \frac{106}{45}+\frac{77i\sqrt{4934}}{360}\right)\\ &=\left(\frac{14459}{1568},\ \frac{154153}{5040}+\frac{i\sqrt{4934}}{20}\right)\\ &=B(F_2)\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $F_1=(\frac{19}{2},\frac{7}{9},\frac{13}{6})$ ve $F_2=(\frac{42464}{1323},\frac{75622}{1617},\frac{628667}{35574})$ pozitif tanımlı formları da $g=\begin{bmatrix} 3/7 & 11/3 \\ 87/154 & 5/2 \end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ matrisi altında birbirine has olmayan denk olup bu formlara karşılık gelen bazlar sırasıyla

$$B(F_1)=\left(\frac{19}{2},\frac{7}{18}+\frac{i\sqrt{1655}}{9}\right) \text{ ve } B(F_2)=\left(\frac{42464}{1323},\frac{37811}{1617}+\frac{i\sqrt{1655}}{9}\right)$$

dir. Buna göre $w=\frac{2078}{3591}-\frac{22i\sqrt{1655}}{513}$ için

$$\begin{aligned} wB(F_1)g^T &= \left(\frac{2078}{3591}-\frac{22i\sqrt{1655}}{513}\right)\left(\frac{19}{2},\frac{7}{18}+\frac{i\sqrt{1655}}{9}\right)\begin{bmatrix} 3/7 & 287/154 \\ 11/3 & 5/2 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{2078}{3591}-\frac{22i\sqrt{1655}}{513}\right)\left(\frac{1039}{189}+\frac{11i\sqrt{1655}}{27},\ \frac{4393}{693}+\frac{5i\sqrt{1655}}{18}\right) \\ &= \left(\frac{42464}{1323},\frac{37811}{1617}-\frac{i\sqrt{1655}}{9}\right) \\ &= \overline{B}(F_2) \end{aligned}$$

dir.

3.2.7. Teorem. $F_1=(a_1,b_1,c_1)$ ve $F_2=(a_2,b_2,c_2)$ formları birbirine denk, yani belli bir $g\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ için $g\,F_1=F_2$ olsun.

(1) $a_1=a_2$ ise

i) $F_{B(F_1)}$ ve $F_{B(F_2)}$ formları da aynı g dönüşümü altında birbirine denktir.

ii) $F_{z(F_1)}$ ve $F_{z(F_2)}$ formları da aynı g dönüşümü altında birbirine denktir.

(2) $c_1=c_2$ ise $F_{z(F_1)B(F_1)}$ ve $F_{z(F_2)B(F_2)}$ formları da aynı g dönüşümü altında birbirine denktir (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. (1-i) $g=\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ için F_1 ve F_2 formları denk olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} g\,F_1 = F_2 &= (a_2,b_2,c_2) \\ &= (a_1r^2+b_1rs+c_1s^2, 2a_1rt+b_1ru+b_1ts+2c_1su, a_1t^2+b_1tu+c_1u^2) \end{aligned}$$

dir. F_1 ve F_2 formları için

$$F_{B(F_1)}=(a_1^2,\ a_1b_1, a_1c_1) \text{ ve } F_{B(F_2)}=(a_2^2,\ a_2b_2, a_2c_2)$$

olup $\Delta(F_{B(F_1)})=a_1^2\Delta(F_1)$ ve $\Delta(F_{B(F_2)})=a_2^2\Delta(F_2)$ dir. Buna göre

$$\Delta(F_{B(F_1)})=\Delta(F_{B(F_2)})\Leftrightarrow a_1=a_2$$

dir. $a_1=a_2$ olsun. Bu takdirde aynı g dönüşümü için

$$\begin{aligned}
g\,F_{B(F_1)} &= F_{B(F_1)}(rx+ty,sx+uy)\\
&= a_1^2(rx+ty)+a_1b_1(rx+ty)(sx+uy)+a_1c_1(sx+uy)^2\\
&= a_1(a_1r^2+b_1rs+c_1s^2)x^2+a_1(2a_1rt+b_1ru+b_1ts+2c_1su)xy\\
&\quad +a_1(a_1t^2+b_1tu+c_1u^2)y^2\\
&= a_1(a_2,b_2,c_2)\\
&= a_2(a_2,b_2,c_2)\\
&= F_{B(F_2)}
\end{aligned}$$

dir. Şu halde $F_{B(F_1)}$ ve $F_{B(F_2)}$ formları da birbirine denktir.

(1-ii) Benzer şekilde F_1 ve F_2 formları için $F_{z(F_1)}=(1,\frac{b_1}{a_1},\frac{c_1}{a_1})$ ve $F_{z(F_2)}=(1,\frac{b_2}{a_2},\frac{c_2}{a_2})$ olup bu formların diskriminantları sırasıyla $\Delta(F_{z(F_1)})=\frac{\Delta}{a_1^2}$ ve $\Delta(F_{z(F_2)})=\frac{\Delta}{a_2^2}$ dir. Buna göre

$$\Delta(F_{z(F_1)})=\Delta(F_{z(F_1)})\Leftrightarrow a_1=a_2$$

olmak zorundadır. $a_1=a_2$ olsun. Bu takdirde aynı g dönüşümü için

$$\begin{aligned}
g\,F_{z(F_1)} &= F_{z(F_1)}(rx+ty,sx+uy)\\
&=(rx+ty)^2+\frac{b_1}{a_1}(rx+ty)(sx+uy)+\frac{c_1}{a_1}(sx+uy)^2\\
&=(r^2+\frac{b_1}{a_1}rs+\frac{c_1}{a_1}s^2)x^2+(2rt+\frac{b_1}{a_1}ru+\frac{b_1}{a_1}ts+2su\frac{c_1}{a_1})xy+(t^2+\frac{b_1}{a_1}tu+\frac{c_1}{a_1}u^2)y^2\\
&=(1,\frac{b_2}{a_2},\frac{c_2}{a_2})\\
&=F_{z(F_2)}
\end{aligned}$$

dir. Yani $F_{z(F_1)}$ ve $F_{z(F_2)}$ formları da birbirine denktir.

(2) $z(F)B(F)$ bazına karşılık gelen formun $F_{z(F)B(F)}=(ac,bc,c^2)$ olduğu dikkate alınırsa

$$F_{z(F_1)B(F_1)}=(a_1c_1,b_1c_1,c_1^2)\ \text{ ve }\ F_{z(F_2)B(F_2)}=(a_2c_2,b_2c_2,c_2^2)$$

olur. Bu formların diskriminantları $\Delta(F_{z(F_1)B(F_1)})=c_1^2\Delta$ ve $\Delta(F_{z(F_2)B(F_2)})=c_2^2\Delta$ olup $\Delta(F_{z(F_1)B(F_1)})=\Delta(F_{z(F_2)B(F_2)})\Leftrightarrow c_1=c_2$ dir. $c_1=c_2$ ise aynı g dönüşümü için

$$
\begin{aligned}
g\,F_{z(F_1)z(B_1)} &= F_{z(F_1)z(B_1)}(rx+ty, sx+uy) \\
&= a_1c_1(rx+ty)^2 + b_1c_1(rx+ty)(sx+uy) + c_1^2(sx+uy)^2 \\
&= (a_1c_1r^2 + b_1c_1rs + c_1^2s^2)x^2 + (2a_1c_1rt + b_1c_1ru + b_1c_1ts + 2c_1^2su)xy \\
&\quad + (a_1c_1t^2 + b_1c_1tu + c_1^2u^2)y^2 \\
&= c_1\left(a_1r^2 + b_1rs + c_1 s^2)x^2 + (2a_1rt + b_1ru + b_1ts + 2c_1 su)xy + (a_1t^2 + b_1tu + c_1 u^2)y^2\right) \\
&= c_1(a_2, b_2, c_2) \\
&= c_2(a_2, b_2, c_2) \\
&= (a_2c_2, b_2c_2, c_2^2) \\
&= F_{z(F_2)z(B_2)}
\end{aligned}
$$

dir.

3.2.8. Örnek. (1) $F_1 = (\frac{3}{7}, \frac{1}{6}, \frac{259}{432})$ ve $F_2 = (\frac{3}{7}, \frac{24}{77} + \frac{14\sqrt{23}}{11}, \frac{75799}{3388} + \frac{56\sqrt{23}}{121})$ formları

$$
g = \begin{bmatrix} \frac{-11}{72} + \frac{\sqrt{23}}{12} & \frac{11}{14} \\ \frac{1363}{792} - \frac{337\sqrt{23}}{1584} & \frac{2}{7} + \frac{5\sqrt{23}}{4} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})
$$

matrisi altında birbirine has denktir. Buna göre

$$
F_{B(F_1)} = (\frac{9}{49}, \frac{1}{14}, \frac{37}{144}) \text{ ve } F_{B(F_2)} = (\frac{9}{49}, \frac{72}{539} + \frac{6\sqrt{23}}{11}, \frac{227397}{23716} + \frac{24\sqrt{23}}{121})
$$

formları ve

$$
F_{z(F_1)} = (1, \frac{7}{18}, \frac{1813}{1296}) \text{ ve } F_{z(F_2)} = (1, \frac{8}{11} + \frac{98\sqrt{23}}{33}, \frac{75799}{1452} + \frac{392\sqrt{23}}{363})
$$

formları da aynı g matrisi altında birbirine has denk, yani

$$
gF_{B(F_1)} = F_{B(F_2)} \text{ ve } gF_{z(F_1)} = F_{z(F_2)}
$$

dir.

(2) $F_1 = (\frac{3}{7}, \frac{1}{6}, \frac{259}{432})$ ve $F_2 = (\frac{1764795}{3792019} - \frac{5805\sqrt{2451}}{7584038}, \frac{-215}{1452} + \frac{3\sqrt{2451}}{484}, \frac{259}{432})$ pozitif tanımlı formları

$$
g = \begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{3}}{11} & \frac{-774\sqrt{3} - 774\sqrt{817}}{31339} \\ \frac{-7\sqrt{3} + 7\sqrt{817}}{180} & \frac{\sqrt{3}}{5} \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})
$$

matrisi altında birbirine has denk olup

$$F_{z(F_1)B(F_1)}=(\frac{37}{144},\frac{259}{2592},\frac{67081}{186624})$$

ve

$$F_{z(F_2)B(F_2)}=(\frac{588265}{2108304}-\frac{215\sqrt{2451}}{468512},\frac{-55685}{627264}+\frac{259\sqrt{2451}}{69696},\frac{67081}{186624})$$

formları da aynı g matrisi altında birbirine has denk, yani

$$g\,F_{z(F_1)B(F_1)}=F_{z(F_2)B(F_2)}$$

dir.

$B_1=(\alpha_1,\beta_1)$ ve $B_2=(\alpha_2,\beta_2)$ bazlarının çarpımı

$$B_1B_2=(\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2)$$

olarak tanımlansın. Buna göre

$$B_1=(\alpha_1,\beta_1)=(k_1+il_1,\ m_1+in_1)\ \text{ve}\ B_2=(\alpha_2,\beta_2)=(k_2+il_2,\ m_2+in_2)$$

bazlarının çarpımı

$$B_1B_2=(k_1k_2-l_1l_2+i(k_1l_2+l_1k_2),\ m_1m_2-n_1n_2+i(m_1n_2+n_1m_2))$$

dir. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.9. Teorem. B_1B_2 bazı için

$$O(B_1B_2)\neq O(B_1)O(B_2)\ \text{ve}\ \Delta(B_1B_2)\neq\Delta(B_1)\Delta(B_2)$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. $B_1B_2=(k_1k_2-l_1l_2+i(k_1l_2+l_1k_2),\ m_1m_2-n_1n_2+i(m_1n_2+n_1m_2))$ bazı için

$$\alpha=k_1k_2-l_1l_2+i(k_1l_2+l_1k_2)\ \text{ve}\ \beta=m_1m_2-n_1n_2+i(m_1n_2+n_1m_2)$$

denilirse

$$\begin{aligned}O(B_1B_2)&=\operatorname{sgn}(\frac{\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}}{i})\\&=\operatorname{sgn}((k_1n_1-m_1l_1)(k_2m_2+n_2l_2)+(k_2n_2-m_2l_2)(k_1m_1+n_1l_1))\\&=\operatorname{sgn}((\alpha_1\times\beta_1)(\alpha_2\cdot\beta_2)+(\alpha_2\times\beta_2)(\alpha_1\cdot\beta_1))\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer yandan

$$O(B_1)=\operatorname{sgn}(\alpha_1\times\beta_1)\ \text{ve}\ O(B_2)=\operatorname{sgn}(\alpha_2\times\beta_2)$$

olduğundan açıkça görüleceği üzere $O(B_1B_2)\neq O(B_1)O(B_2)$ dir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\Delta(B_1B_2) &= -4(\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta})^2\\ &= -4[(k_1k_2-l_1l_2-i(k_1l_2+l_1k_2))(m_1m_2-n_1n_2+i(m_1n_2+n_1m_2))\\ &\quad -(k_1k_2-l_1l_2+i(k_1l_2+l_1k_2))(m_1m_2-n_1n_2-i(m_1n_2+n_1m_2))]^2\\ &= -4[(\alpha_1\times\beta_1)(\alpha_2\cdot\beta_2)+(\alpha_2\times\beta_2)(\alpha_1\cdot\beta_1)]^2\end{aligned}$$

dir. Ancak

$$\Delta(B_1)=-4(\alpha_1\times\beta_1)^2 \text{ ve } \Delta(B_2)=-4(\alpha_2\times\beta_2)^2$$

olduğundan açıkça görüleceği üzere $\Delta(B_1B_2)\neq\Delta(B_1)\Delta(B_2)$ dir.

3.2.10. Örnek. $B_1=(4+7i,\ 5+2i)$ ve $B_2=(2+4i,\ 10+3i)$ bazlarının çarpımı

$$B_1B_2=(-20+30i,\ 44+35i)$$

dır. $O(B_1)=-1, O(B_2)=-1$ olup $O(B_1)O(B_2)=1$ iken $O(B_1B_2)=-1$ dir. Benzer şekilde $\Delta(B_1)=-2916,\ \Delta(B_2)=-4624$ olup

$$\Delta(B_1)\,\Delta(B_2)=13483584$$

iken $\Delta(B_1B_2)=-16321600$ dır.

Bazların çarpımına benzer şekilde aynı diskriminantlı pozitif tanımlı $F_1=(a_1,b_1,c_1)$ ve $F_2=(a_2,b_2,c_2)$ formlarının çarpımı

$$F_1F_2=(a_1a_2,b_1b_2,c_1c_2)$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.11. Teorem. $B_1=(\alpha_1,\beta_1)$ ve $B_2=(\alpha_2,\beta_2)$ bazları için

$$(\alpha_1\cdot\beta_1)(\alpha_2\cdot\beta_2)+(\alpha_1\times\beta_1)(\alpha_2\times\beta_2)=0$$

ise $F_{B_1B_2}=\pm F_{B_1}F_{B_2}$ dir (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. $B_1=(\alpha_1,\beta_1)=(k_1+il_1,m_1+in_1)$ ve $B_2=(\alpha_2,\beta_2)=(k_2+il_2,m_2+in_2)$ bazlarına karşılık gelen formlar sırasıyla

$$F_{B_1}=O(B_1)(k_1^2+l_1^2,2(k_1m_1+n_1l_1),m_1^2+n_1^2)$$

ve

$$F_{B_2}=O(B_2)(k_2^2+l_2^2,2(k_2m_2+n_2l_2),m_2^2+n_2^2)$$

olup

$$F_{B_1}F_{B_2}=O(B_1)O(B_2)\begin{pmatrix}(k_1^2+l_1^2)(k_2^2+l_2^2),\\ 4(k_1m_1+n_1l_1)(k_2m_2+n_2l_2),\\ (m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)\end{pmatrix}$$

dir. Diğer yandan $B_1B_2=(k_1k_2-l_1l_2+i(k_1l_2+l_1k_2),\ m_1m_2-n_1n_2+i(m_1n_2+n_1m_2))$ bazına karşılık gelen form

$$F_{B_1B_2}=O(B_1B_2)\begin{pmatrix}(k_1k_2-l_1l_2)^2+(k_1l_2+l_1k_2)^2,\\ 2[(k_1k_2-l_1l_2)(m_1m_2-n_1n_2)+(k_1l_2+l_1k_2)(m_1n_2+m_2n_1)],\\ (m_1m_2-n_1n_2)^2+(m_1n_2+m_2n_1)^2\end{pmatrix}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}(k_1k_2-l_1l_2)^2+(k_1l_2+l_1k_2)^2&=(k_1^2+l_1^2)(k_2^2+l_2^2)\\ (m_1m_2-n_1n_2)^2+(m_1n_2+m_2n_1)^2&=(m_1^2+n_1^2)(m_2^2+n_2^2)\end{aligned}$$

olduğu açıktır. $(\alpha_1\cdot\beta_1)(\alpha_2\cdot\beta_2)+(\alpha_1\times\beta_1)(\alpha_2\times\beta_2)=0$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}&(\alpha_1\cdot\beta_1)(\alpha_2\cdot\beta_2)+(\alpha_1\times\beta_1)(\alpha_2\times\beta_2)=0\\ &\Leftrightarrow (k_1m_1+l_1n_1)(k_2m_2+l_2n_2)+(k_1n_1-l_1m_1)(k_2n_2-l_2m_2)=0\\ &\Leftrightarrow k_1m_1(k_2m_2+l_2n_2)+l_1n_1(k_2m_2+l_2n_2)=l_1m_1(k_2n_2-l_2m_2)-k_1n_1(k_2n_2-l_2m_2)\\ &\Leftrightarrow 2\begin{Bmatrix}k_1m_1k_2m_2+k_1m_1l_2n_2\\ +l_1n_1k_2m_2+l_1l_2n_1n_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}k_1k_2m_1m_2-k_1k_2n_1n_2-l_1l_2m_1m_2+l_1l_2n_1n_2\\ +k_1l_2m_1n_2+k_1l_2m_2n_1+l_1k_2m_1n_2+l_1k_2m_2n_1\end{Bmatrix}\\ &\Leftrightarrow 4(k_1m_1+l_1n_1)(k_2m_2+l_2n_2)=2\begin{bmatrix}(k_1k_2-l_1l_2)(m_1m_2-n_1n_2)\\ +(k_1l_2+l_1k_2)(m_1n_2+m_2n_1)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

dir. Buradan açıkça görüleceği üzere $F_{B_1B_2}=\pm F_{B_1}F_{B_2}$ dir.

3.2.12. Örnek. 1) $B_1=(2-3i,\ 1+i)$ ve $B_2=(6-6i,-3+2i)$ bazları için

$$(\alpha_1\cdot\beta_1)(\alpha_2\cdot\beta_2)+(\alpha_1\times\beta_1)(\alpha_2\times\beta_2)=0$$

şartı sağlanır. B_1 ve B_2 için $F_{B_1}=(13,-2,2)$ ve $F_{B_2}=(-72,60,-13)$ olup

$$F_{B_1}F_{B_2}=(-936,-120,-26)$$

dır. Diğer yandan $B_1B_2=(-6-30i,-5-i)$ bazına karşılık gelen form

$$F_{B_1B_2}=(-936,-120,-26)$$

dır. Buna göre $F_{B_1B_2}=F_{B_1}F_{B_2}$ dir.

2) $B_1=(13-3i,6+9i)$ ve $B_2=(10-2i,8-5i)$ bazları için

$$(\alpha_1 \cdot \beta_1)(\alpha_2 \cdot \beta_2) + (\alpha_1 \times \beta_1)(\alpha_2 \times \beta_2) = 0$$

şartı sağlanır. $F_{B_1} = (178,102,117)$ ve $F_{B_2} = (-104,-180,-89)$ olup

$$F_{B_1} F_{B_2} = (-18512,\ -18360,\ -10413)$$

dür. Diğer yandan $B_1 B_2 = (124-56i, 93+42i)$ bazı için

$$F_{B_1 B_2} = (18512,\ 18360,\ 10413)$$

olup $F_{B_1 B_2} = -F_{B_1} F_{B_2}$ dir.

3.2.11. Teoremine benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.13. Teorem. B_1 ve B_2 bazları için

$$z(F_{B_1 B_2}) = z(F_{B_1}) z(F_{B_2})$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. $B_1 = (\alpha_1, \beta_1) = (k_1 + il_1, m_1 + in_1)$ bazına karşılık gelen form

$$F_{B_1} = O(B_1)(k_1^2 + l_1^2, 2(k_1 m_1 + n_1 l_1), m_1^2 + n_1^2)$$

olup $\Delta(F_{B_1}) = -4(\alpha_1 \times \beta_1)^2$ olduğundan bu formun taban noktası

$$z(F_{B_1}) = \frac{O(B_1)(\alpha_1 \cdot \beta_1) + i\,|\,\alpha_1 \times \beta_1\,|}{O(B_1)(k_1^2 + l_1^2)}$$

dır. Benzer şekilde $B_2 = (\alpha_2, \beta_2) = (k_2 + il_2, m_2 + in_2)$ bazına karşılık gelen form

$$F_{B_2} = O(B_2)(k_2^2 + l_2^2, 2(k_2 m_2 + n_2 l_2), m_2^2 + n_2^2)$$

olup $\Delta(F_{B_2}) = -4(\alpha_2 \times \beta_2)^2$ olduğundan bu formun taban noktası

$$z(F_{B_2}) = \frac{O(B_2)(\alpha_2 \cdot \beta_2) + i\,|\,\alpha_2 \times \beta_2\,|}{O(B_2)(k_2^2 + l_2^2)}$$

dir. Diğer yandan yukarıdaki teorem gereği $B_1 B_2$ bazına karşılık gelen form

$$F_{B_1 B_2} = O(B_1 B_2) \begin{pmatrix} (k_1^2 + l_1^2)(k_2^2 + l_2^2), \\ 2[(k_1 k_2 - l_1 l_2)(m_1 m_2 - n_1 n_2) + (k_1 l_2 + l_1 k_2)(m_1 n_2 + m_2 n_1)], \\ (m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) \end{pmatrix}$$

olup bu formun diskriminantı $\Delta(F_{B_1 B_2}) = -4[(\alpha_1 \times \beta_1)(\alpha_2 \cdot \beta_2) + (\alpha_2 \times \beta_2)(\alpha_1 \cdot \beta_1)]^2$ ve taban noktası

$$z(F_{B_1B_2}) = \frac{\begin{Bmatrix} O(B_1B_2)2[(k_1k_2 - l_1l_2)(m_1m_2 - n_1n_2) + (k_1l_2 + l_1k_2)(m_1n_2 + m_2n_1)] \\ + i\sqrt{4[(\alpha_1 \times \beta_1)(\alpha_2 \cdot \beta_2) + (\alpha_2 \times \beta_2)(\alpha_1 \cdot \beta_1)]^2} \end{Bmatrix}}{2O(B_1B_2)(k_1^2 + l_1^2)(k_2^2 + l_2^2)}$$

dır. Bu son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$z(F_{B_1B_2}) = \frac{\begin{Bmatrix} O(B_1B_2)2[(k_1k_2 - l_1l_2)(m_1m_2 - n_1n_2) + (k_1l_2 + l_1k_2)(m_1n_2 + m_2n_1)] \\ + i\sqrt{4[(\alpha_1 \times \beta_1)(\alpha_2 \cdot \beta_2) + (\alpha_2 \times \beta_2)(\alpha_1 \cdot \beta_1)]^2} \end{Bmatrix}}{2O(B_1B_2)(k_1^2 + l_1^2)(k_2^2 + l_2^2)}$$

$$= \frac{\begin{Bmatrix} O(B_1B_2)[(k_1k_2 - l_1l_2)(m_1m_2 - n_1n_2) + (k_1l_2 + l_1k_2)(m_1n_2 + m_2n_1)] \\ + i\,|(\alpha_1 \times \beta_1)(\alpha_2 \cdot \beta_2) + (\alpha_2 \times \beta_2)(\alpha_1 \cdot \beta_1)| \end{Bmatrix}}{O(B_1B_2)(k_1^2 + l_1^2)(k_2^2 + l_2^2)}$$

$$= \frac{\begin{Bmatrix} O(B_1)O(B_2)(k_1m_1 + l_1n_1)(k_2m_2 + l_2n_2) - |k_1n_1 - m_1l_1|.|k_2n_2 - m_2l_2| \\ + i[O(B_1)(k_1m_1 + l_1n_1)|k_2n_2 - m_2l_2| + O(B_2)(k_2m_2 + l_2n_2)|k_1n_1 - m_1l_1|] \end{Bmatrix}}{O(B_1B_2)(k_1^2 + l_1^2)(k_2^2 + l_2^2)}$$

$$= \left(\frac{O(B_1)(\alpha_1 \cdot \beta_1) + i\,|\alpha_1 \times \beta_1|}{O(B_1)(k_1^2 + l_1^2)}\right)\left(\frac{O(B_2)(\alpha_2 \cdot \beta_2) + i\,|\alpha_2 \times \beta_2|}{O(B_2)(k_2^2 + l_2^2)}\right)$$

$$= z(F_{B_1})z(F_{B_2})$$

olduğu görülür.

3.2.14. Örnek. 1) $B_1 = (3+4i,\ 2+7i)$ ve $B_2 = (2-5i,\ 3+9i)$ ye karşılık gelen formlar $F_{B_1} = (25, 68, 53)$ ve $F_{B_2} = (29, -78, 90)$ olup bu formların taban noktaları

$$z(F_{B_1}) = \frac{34+13i}{25} \text{ ve } z(F_{B_2}) = \frac{-39+33i}{29}$$

dur. Diğer yandan $B_1B_2 = (26-7i, -57+39i)$ olup $F_{B_1B_2} = (725, -3510, 4770)$ formunun taban noktası da

$$z(F_{B_1B_2}) = \frac{-351+123i}{145}$$

dır. Burada dikkat edilirse

$$z(F_{B_1B_2}) = \frac{-351+123i}{145} = \left(\frac{34+13i}{25}\right)\left(\frac{-39+33i}{29}\right) = z(F_{B_1})z(F_{B_2})$$

dir.

2) $B_1 = (2-5i,\ 3+i)$ ve $B_2 = (-3+2i, 4+2i)$ bazlarına karşılık gelen formlar sırasıyla $F_{B_1} = (29, 2, 10)$ ve $F_{B_2} = (-13, 16, -20)$ olup

$$z(F_{B_1})=\frac{1+17i}{29} \text{ ve } z(F_{B_2})=\frac{-8-14i}{13}$$

dür. $B_1B_2=(4+19i,\ 10+10i)$ için $F_{B_1B_2}=(-377,-460,-200)$ olup bu formun taban noktası

$$z(F_{B_1B_2})=\frac{230-150i}{377}$$

dir. Yine açıkça görüleceği üzere

$$z(F_{B_1B_2})=\frac{230-150i}{377}=(\frac{1+17i}{29})(\frac{-8-14i}{13})=z(F_{B_1})z(F_{B_2})$$

dir.

3.2.13. Teoremine benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.15. Teorem. $F_1=(a_1,b_1,c_1)$ ve $F_2=(a_2,b_2,c_2)$ aynı Δ diskriminantlı pozitif tanımlı formlar olsun. Eğer $b_1b_2=\Delta$ ise

$$F_{z(F_1)z(F_2)}=F_{z(F_1)}F_{z(F_2)}$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. F_1 ve F_2 formları için $F_{z(F_1)}=(1,\frac{b_1}{a_1},\frac{c_1}{a_1})$ ve $F_{z(F_2)}=(1,\frac{b_2}{a_2},\frac{c_2}{a_2})$ dir. Buna göre

$$F_{z(F_1)}F_{z(F_2)}=(1,\frac{b_1}{a_1},\frac{c_1}{a_1})(1,\frac{b_2}{a_2},\frac{c_2}{a_2})=(1,\frac{b_1b_2}{a_1a_2},\frac{c_1c_2}{a_1a_2}) \qquad (3.2.1)$$

dir. Diğer yandan F_1 ve F_2 formlarının taban noktalarının çarpımı

$$z(F_1)z(F_2)=\left(\frac{b_1+i\sqrt{-\Delta}}{2a_1}\right)\left(\frac{b_2+i\sqrt{-\Delta}}{2a_2}\right)=\frac{b_1b_2+\Delta+i(b_1+b_2)\sqrt{-\Delta}}{4a_1a_2}$$

olup buna karşılık gelen form için

$$F_{z(F_1)z(F_2)}=(1,\frac{b_1b_2+\Delta}{2a_1a_2},\frac{(b_1b_2+\Delta)^2-\Delta(b_1+b_2)^2}{(4a_1a_2)^2}) \qquad (3.2.2)$$

dir. Bu son eşitliğe göre

$$\frac{(b_1b_2+\Delta)^2-\Delta(b_1+b_2)^2}{(4a_1a_2)^2}=\frac{4a_1c_1(\Delta-b_2^2)}{(4a_1a_2)^2}=\frac{c_1c_2}{a_1a_2}$$

dir. Diğer yandan $b_1b_2=\Delta$ ise

$$\frac{b_1b_2+\Delta}{2a_1a_2}=\frac{2b_1b_2}{2a_1a_2}=\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$$

olduğu görülür. Buna göre (3.2.2) eşitliği

$$F_{z(F_1)z(F_2)}=(1,\ \frac{b_1b_2}{a_1a_2},\ \frac{c_1c_2}{a_1a_2}) \tag{3.2.3}$$

haline gelir. Şu halde (3.2.1) ve (3.2.3) eşitliklerinden

$$F_{z(F_1)z(F_2)}=F_{z(F_1)}F_{z(F_2)}$$

olduğu görülür.

3.2.16. Örnek. $\Delta=-20$ diskriminantlı $F_1=(6,2,1)$ ve $F_2=(2,-10,15)$ pozitif tanımlı formları için $2(-10)=-20$ dir. $F_{z(F_1)}=(1,\frac{1}{3},\frac{1}{6})$ ve $F_{z(F_2)}=(1,-5,\ \frac{15}{2})$ olup

$$F_{z(F_1)}F_{z(F_2)}=(1,\frac{-5}{3},\frac{5}{4})$$

dür. Diğer yandan $z(F_1)=\frac{1+i\sqrt{5}}{6}$ ve $z(F_2)=\frac{-5+i\sqrt{5}}{2}$ olup $z(F_1)z(F_2)=\frac{-5-2i\sqrt{5}}{6}$

dır. Buna karşılık gelen form $F_{z(F_1)z(F_2)}=(1,\ \frac{-5}{3},\frac{5}{4})$ dür. Buna göre

$$F_{z(F_1)z(F_2)}=F_{z(F_1)}F_{z(F_2)}$$

dir.

3.2.17. Sonuç. Aynı diskriminantlı pozitif tanımlı F_1 ve F_2 formları için

$$z(F_1F_2)\neq z(F_1)z(F_2)$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017).

İspat. $z(F_1)=\frac{b_1+i\sqrt{-\Delta}}{2a_1}$ ve $z(F_2)=\frac{b_2+i\sqrt{-\Delta}}{2a_2}$ taban noktaları için

$$z(F_1)z(F_2)=\frac{b_1b_2+\Delta+i(b_1+b_2)\sqrt{-\Delta}}{4a_1a_2} \tag{3.2.4}$$

dir. Diğer yandan $F_1F_2=(a_1a_2,b_1b_2,c_1c_2)$ formu için

$$\Delta(F_1F_2)=(b_1b_2)^2-4a_1a_2c_1c_2$$

olduğundan bu formun taban noktası

$$z(F_1F_2) = \frac{b_1b_2 + i\sqrt{4a_1a_2c_1c_2 - (b_1b_2)^2}}{2a_1a_2} \tag{3.2.5}$$

dır. Buna göre (3.2.4) ve (3.2.5) eşitliklerinden

$$z(F_1F_2) \neq z(F_1)z(F_2)$$

olduğu görülür.

4. İNDEFİNİTE FORMLAR, KUADRATİKLER İDEALLER VE DİOPHANTİNE DENKLEMLERİ

Bu bölümde indefinite kuadratik formların sağ ve sol komşuları, has otomorfizmleri kümesi, kuadratik ideallerin devirleri ve bazı özel Diophantine denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerinin kümesi ele alınacaktır.

4.1. İndefinite Formlar ve Kuadratik İdealler.

Bu alt bölümde indefinite formlar ve kuadratik idealler ele alınacaktır. $k \geq 1$ tamsayı olmak üzere $D = k^2 + 4,\ P = k + 2,\ Q = k$ olsun. Bu takdirde

$$\gamma = \frac{k + 2 + \sqrt{k^2 + 4}}{k}$$

bir kuadratik irrasyonel olup

$$I_\gamma = [k, k + 2 + \sqrt{k^2 + 4}]$$

bir kuadratik ideal ve

$$F_\gamma = (k, 2k + 4, 4)$$

ise $\Delta = 4D$ diskriminantlı bir indefinite formdur. Burada tüm teoremler k nın tek veya çift oluşuna göre iki durumda verilmiştir.

<u>1. DURUM:</u> $k \geq 1$ tek olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremler verilebilir.

4.1.1. Teorem. $k = 1$ için

(1) $\gamma = 3 + \sqrt{5}$ nın sürekli kesirli devirli açılımı $\gamma = [5; \overline{4}]$ dür.

(2) $I_\gamma = [1, 3 + \sqrt{5}]$ idealinin devri $I_{\gamma_0} = [1, 3 + \sqrt{5}] \sim I_{\gamma_1} = [1, 2 + \sqrt{5}]$ dir.

(3) $F_\gamma = (1, 6, 4)$ formunun sağ komşuları

$$R^1(F_\gamma) = (4, 2, -1), R^2(F_\gamma) = (-1, 4, 1),\ R^3(F_\gamma) = (1, 4, -1)$$

ve sol komşuları

$$L^1(F_\gamma) = (-1,4,1),\ L^2(F_\gamma) = (1,4,-1)$$

dir.

(4) $g_{F_\gamma,4}g_{F_\gamma,2}^{-1} = \begin{bmatrix} -21 & 4 \\ -16 & 3 \end{bmatrix}$ için $Aut^+(F_\gamma) = \{\pm(g_{F_\gamma,4}g_{F_\gamma,2}^{-1})^t : t \in \mathbb{Z}\}$ dır (Tekcan ve Kutlu 2017a).

İspat. (1) $\gamma = 3+\sqrt{5}$ için

$$\gamma = 5 + (-2+\sqrt{5}) = 5 + \frac{1}{4+(-2+\sqrt{5})}$$

olduğundan $\gamma = [5;\overline{4}]$ dir.

(2) $I_\gamma = [1, 3+\sqrt{5}]$ ideali için $m_0 = 5$ olup $P_1 = 2, Q_1 = 1$ dir. $i=1$ için $m_1 = 4$, $P_2 = 2 = P_1$ ve $Q_2 = 2 = Q_1$ olduğundan I_γ nın devri $I_{\gamma_0} = [1, 3+\sqrt{5}] \sim I_{\gamma_1} = [1, 2+\sqrt{5}]$ dir.

(3) $F_\gamma = (1,6,4)$ indefinite formu için aşağıdaki çizelge elde edilir.

Çizelge 4.1. $F_\gamma = (1,6,4)$ formunun sağ komşuları

i	0	1	2	3	4
A_i	1	4	-1	1	-1
B_i	6	2	4	4	4
C_i	4	-1	1	-1	1
δ_i	1	-3	4	-4	

Bu çizelgeye göre $R^4(F_\gamma) = R^2(F_\gamma)$ olduğundan F_γ nın sağ komşuları

$$R^1(F_\gamma) = (4,2,-1), R^2(F_\gamma) = (-1,4,1),\ R^3(F_\gamma) = (1,4,-1)$$

dır. Sol komşuları ise

$$L^1(F_\gamma) = \chi\tau\, R(4,6,1) = \chi\tau\,(1,4,-1) = (-1,4,1)$$
$$L^2(F_\gamma) = \chi\tau\, R(1,4,-1) = \chi\tau\,(-1,4,1) = (1,4,-1)$$
$$L^3(F_\gamma) = \chi\tau\, R(-1,4,1) = \chi\tau\,(1,4,-1) = (-1,4,1) = L^1(F_\gamma)$$

olduğundan $L^1(F_\gamma) = (-1,4,1),\ L^2(F_\gamma) = (1,4,-1)$ dir.

(4) F nin sağ komşu tanımındaki $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\delta \end{bmatrix}$ matrisi için

$$T(\delta)=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\delta \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -\delta & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$g_{F,n}=T(\delta_0)T(\delta_1)\cdots T(\delta_{n-1})$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde Falth (1989, Sonuç 9.5) gereği

$$g_{F_\gamma,4}=\begin{bmatrix} 72 & 17 \\ 55 & 13 \end{bmatrix} \text{ ve } g_{F_\gamma,2}=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $g_{F_\gamma,4}g_{F_\gamma,2}^{-1}=\begin{bmatrix} -21 & 4 \\ -16 & 3 \end{bmatrix}$ dır. O halde $Aut^+(F_\gamma)=\{\pm(g_{F_\gamma,4}g_{F_\gamma,2}^{-1})^t : t\in\mathbb{Z}\}$ dir.

4.1.2. Teorem. $k\geq 3$ için

(1) γ nın sürekli kesirli devirli açılımı $\gamma=[2;\overline{\frac{k-1}{2},2k,\frac{k-1}{2},1,1}]$ dir.

(2) I_γ idealinin devri

$$I_{\gamma_0}=[k,k+2+\sqrt{k^2+4}]\sim I_{\gamma_1}=[4,k-2+\sqrt{k^2+4}]\sim I_{\gamma_2}=[1,k+\sqrt{k^2+4}]\sim$$
$$I_{\gamma_3}=[4,k+\sqrt{k^2+4}]\sim I_{\gamma_4}=[k,k-2+\sqrt{k^2+4}]\sim I_{\gamma_5}=[k,2+\sqrt{k^2+4}]$$

dir.

(3) F_γ nın sağ komşuları

$$R^1(F_\gamma)=(4,2k,-1), R^2(F_\gamma)=(-1,2k,4), R^3(F_\gamma)=(4,2k-4,-k),$$
$$R^4(F_\gamma)=(-k,4,k), R^5(F_\gamma)=(k,2k-4,-4), R^6(F_\gamma)=(-4,2k,1),$$
$$R^7(F_\gamma)=(1,2k,-4), R^8(F_\gamma)=(-4,2k-4,k), R^9(F_\gamma)=(k,4,-k),$$
$$R^{10}(F_\gamma)=(-k,2k-4,4)$$

ve sol komşuları

$$L^1(F_\gamma)=(-4,2k-4,k), L^2(F_\gamma)=(1,2k,-4), L^3(F_\gamma)=(-4,2k,1),$$
$$L^4(F_\gamma)=(k,2k-4,-4), L^5(F_\gamma)=(-k,4,k), L^6(F_\gamma)=(4,2k-4,-k),$$
$$L^7(F_\gamma)=(-1,2k,4), L^8(F_\gamma)=(4,2k,-1), L^9(F_\gamma)=(-k,2k-4,4),$$
$$L^{10}(F_\gamma)=(k,4,-k)$$

dir.

(4) $R=-k^6-k^5-5k^4-4k^3-6k^2-3k-1,\ S=\dfrac{k^6+4k^4+3k^2}{2},\ T=-2k^5-8k^3-6k$ ve

$U=k^5-k^4+4k^3-3k^2+3k-1$ olmak üzere $g_{F_\gamma,11}g_{F_\gamma,1}^{-1}=\begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}$ için

$$Aut^+(F_\gamma)=\{\pm(g_{F_\gamma,11}g_{F_\gamma,1}^{-1})^t : t\in\mathbb{Z}\}$$

dır (Tekcan ve Kutlu 2017a).

İspat. (1) $\gamma=\dfrac{k+2+\sqrt{k^2+4}}{k}$ için

$$\gamma=2+\left(\frac{k+2+\sqrt{k^2+4}}{k}-2\right)=2+\cfrac{1}{\cfrac{k-1}{2}+\cfrac{1}{2k+\cfrac{1}{\cfrac{k-1}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\left(\cfrac{k+2+\sqrt{k^2+4}}{k}-2\right)}}}}}$$

olduğundan $\gamma=[2;\overline{\frac{k-1}{2},2k,\frac{k-1}{2},1,1}]$ dır.

(2) $I_{\gamma_0}=[k,k+2+\sqrt{k^2+4}]$ ideali için aşağıdaki çizelge elde edilir:

Çizelge 4.2. $I_{\gamma_0}=[k,k+2+\sqrt{k^2+4}]$ idealinin devri

i	0	1	2	3	4	5	6
P_i	$k+2$	$k-2$	k	k	$k-2$	2	$k-2$
Q_i	k	4	1	4	k	k	4
m_i	2	$\frac{k-1}{2}$	$2k$	$\frac{k-1}{2}$	1	1	

Bu çizelgeye göre I_{γ_0} ın devri

$$I_{\gamma_0}=[k,k+2+\sqrt{k^2+4}]\sim I_{\gamma_1}=[4,k-2+\sqrt{k^2+4}]\sim I_{\gamma_2}=[1,k+\sqrt{k^2+4}]\sim$$
$$I_{\gamma_3}=[4,k+\sqrt{k^2+4}]\sim I_{\gamma_4}=[k,k-2+\sqrt{k^2+4}]\sim I_{\gamma_5}=[k,2+\sqrt{k^2+4}]$$

dir.

(3) $F_\gamma=(k,2k+4,4)$ formu için aşağıdaki çizelge elde edilir:

Çizelge 4.3 . $F_\gamma = (k, 2k+4, 4)$ formunun sağ komşuları

i	A_i	B_i	C_i	δ_i
0	k	$2k+4$	4	$\dfrac{k+1}{2}$
1	4	$2k$	-1	-2k
2	-1	$2k$	4	$\dfrac{k-1}{2}$
3	4	$2k-4$	-k	-1
4	-k	4	k	1
5	k	$2k-4$	-4	$\dfrac{1-k}{2}$
6	-4	$2k$	1	2k
7	1	$2k$	-4	$\dfrac{1-k}{2}$
8	-4	$2k-4$	k	1
9	k	4	-k	-1
10	-k	$2k-4$	4	$\dfrac{k-1}{2}$
11	4	$2k$	-1	

Bu çizelgeye göre

$$R^{11}(F_\gamma) = R^1(F_\gamma)$$

olduğundan sağ komşuları yukarıdaki gibi elde edilir. Sol komşuları ise

$$L^1(F_\gamma) = \chi\tau\, R(4, 2k+4, k) = (-4, 2k-4, k)$$
$$L^2(F_\gamma) = \chi\tau\, R(k, 2k-4, -4) = (1, 2k, -4)$$
$$L^3(F_\gamma) = \chi\tau\, R(-4, 2k, 1) = (-4, 2k, 1)$$
$$L^4(F_\gamma) = \chi\tau\, R(1, 2k, -4) = (k, 2k-4, -4)$$
$$L^5(F_\gamma) = \chi\tau\, R(-4, 2k-4, k) = (-k, 4, k)$$
$$L^6(F_\gamma) = \chi\tau\, R(k, 4, -k) = (4, 2k-4, -k)$$
$$L^7(F_\gamma) = \chi\tau\, R(-k, 2k-4, 4) = (-1, 2k, 4)$$
$$L^8(F_\gamma) = \chi\tau\, R(4, 2k, -1) = (4, 2k, -1)$$
$$L^9(F_\gamma) = \chi\tau\, R(-1, 2k, 4) = (-k, 2k-4, 4)$$

$$L^{10}(F_\gamma) = \chi\tau\, R(4, 2k-4, -k) = (k, 4, -k)$$
$$L^{11}(F_\gamma) = \chi\tau\, R(-k, 4, k) = (-4, 2k-4, k) = L^{1}(F_\gamma)$$

olduğundan sonuç açıktır.

(4) $R^{11}(F_\gamma) = R^{1}(F_\gamma)$ olduğundan $n = 11$ ve $m = 1$ olarak alınırsa

$$g_{F_\gamma,11} = \begin{bmatrix} \frac{k^7 + k^6 + 6k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 6k^2 + 4k + 1}{2} & -k^6 - k^5 - 5k^4 - 4k^3 - 6k^2 - 3k - 1 \\ k^6 + 5k^4 + 6k^2 + 1 & -2k^5 - 8k^3 - 6k \end{bmatrix}$$

ve $g_{F_\gamma,1} = \begin{bmatrix} -\frac{k+1}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ olur. Buna göre teoremde geçen *R*, *S*, *T* ve *U* sayıları için

$g_{F_\gamma,11} g_{F_\gamma,1}^{-1} = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}$ olup $Aut^{+}(F_\gamma) = \{\pm (g_{F_\gamma,11} g_{F_\gamma,1}^{-1})^{t} : t \in \mathbb{Z}\}$ dir.

2. DURUM: $k \geq 2$ çift olsun. Yukarıdaki teoremlere benzer şekilde aşağıdaki teoremler verilebilir. İspatları benzer şekilde yapılabilir.

4.1.3. Teorem. $k = 2$ ise

(1) γ nın sürekli kesirli devirli açılımı $\gamma = [3; \overline{2}]$ dir.

(2) $I_\gamma = [2, 4 + \sqrt{8}]$ idealinin devri $I_{\gamma_0} = [2, 4 + \sqrt{8}] \sim I_{\gamma_1} = [2, 2 + \sqrt{8}]$ dir.

(3) $F_\gamma = (2, 8, 4)$ nın sağ komşuları

$$R^{1}(F_\gamma) = (4, 0, -2), R^{2}(F_\gamma) = (-2, 4, 2), R^{3}(F_\gamma) = (2, 4, -2)$$

ve sol komşuları $L^{1}(F_\gamma) = (-2, 4, 2), L^{2}(F_\gamma) = (2, 4, -2)$ dir.

(4) $g_{F_\gamma,4} g_{F_\gamma,2}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ için $Aut^{+}(F_\gamma) = \{\pm (g_{F_\gamma,4} g_{F_\gamma,2}^{-1})^{t} : t \in \mathbb{Z}\}$ dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

4.1.4. Teorem $k = 4$ ise

(1) γ nın sürekli kesirli devirli açılımı $\gamma = [2; \overline{1}]$ dir.

(2) $I_\gamma = [4, 6 + \sqrt{20}]$ idealinin devri $I_{\gamma_0} = [4, 6 + \sqrt{20}] \sim I_{\gamma_1} = [4, 2 + \sqrt{20}]$ dir.

(3) $F_\gamma = (4, 12, 4)$ nın sağ ve sol komşuları

$$R^1(F_\gamma)=(4,4,-4), R^2(F_\gamma)=(-4,4,4) \text{ ve } L^1(F_\gamma)=(-4,4,4), L^2(F_\gamma)=(4,4,-4)$$

dir.

(4) $g_{F_\gamma,3}g_{F_\gamma,1}^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ için $Aut^+(F_\gamma)=\{\pm(g_{F_\gamma,3}g_{F_\gamma,1}^{-1})^t : t\in\mathbb{Z}\}$ dır (Tekcan ve Kutlu 2017a).

4.1.5. Teorem $k\geq 6$ ise

(1) γ nın sürekli kesirli devirli açılımı $\gamma=[2;\overline{\frac{k-2}{2},1,1}]$ dir.

(2) I_γ idealinin devri

$$\begin{aligned}I_{\gamma_0}&=[k,k+2+\sqrt{k^2+4}]\sim I_{\gamma_1}=[4,k-2+\sqrt{k^2+4}]\sim\\ I_{\gamma_2}&=[k,k-2+\sqrt{k^2+4}]\sim I_{\gamma_3}=[k,2+\sqrt{k^2+4}]\end{aligned}$$

dir.

(3) F_γ nın sağ komşuları

$$\begin{aligned}&R^1(F_\gamma)=(4,2k-4,-k), R^2(F_\gamma)=(-k,4,k), R^3(F_\gamma)=(k,2k-4,-4),\\ &R^4(F_\gamma)=(-4,2k-4,k), R^5(F_\gamma)=(k,4,-k),\ R^6(F_\gamma)=(-k,2k-4,4),\end{aligned}$$

ve sol komşuları

$$\begin{aligned}&L^1(F_\gamma)=(-4,2k-4,k), L^2(F_\gamma)=(k,2k-4,-4), L^3(F_\gamma)=(-k,4,k),\\ &L^4(F_\gamma)=(4,2k-4,-k), L^5(F_\gamma)=(-k,2k-4,4), L^6(F_\gamma)=(k,4,-k)\end{aligned}$$

dir.

(4) $g_{F_\gamma,7}g_{F_\gamma,1}^{-1}=\begin{bmatrix}k^2-k-1 & \frac{k^2}{2}\\ -2k & k-1\end{bmatrix}$ için $Aut^+(F_\gamma)=\{\pm(g_{F_\gamma,7}g_{F_\gamma,1}^{-1})^t : t\in\mathbb{Z}\}$ dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

4.2. Diophantine Denklemleri.

Bu alt bölümde bir önceki bölümde ele alınan $F_\gamma=(k,2k+4,4)$ indefinite formu dikkate alınarak elde edilen $F_\gamma^{\pm k}(x,y)=\pm Q$, yani

$$F_\gamma^{\pm k}(x,y)=kx^2+(2k+4)xy+4y^2=\pm k$$

Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi ele alınacaktır. Ancak bunun için ilk olarak bazı kavramlara ve notasyonlara ihtiyaç vardır.

$F=(a,b,c)$ indefinite formu

$$F(x,y)=\frac{\left(ax+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)\left(ax+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2}y\right)}{a}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$M_F=\left\{ax+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y : x,y\in\mathbb{Z}\right\}$$

kümesi üzerinde

$$[x' \ \ y']=\begin{cases}[x \ \ y]\begin{bmatrix} u-\frac{b}{2}v & av \\ -cv & u+\frac{b}{2}v\end{bmatrix} & \Delta\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\\[2ex] [x \ \ y]\begin{bmatrix} u+\frac{1-b}{2}v & av \\ -cv & u+\frac{1+b}{2}v\end{bmatrix} & \Delta\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\end{cases} \tag{4.2.1}$$

olmak üzere

$$(u+v\rho_\Delta)\left(ax+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)=ax'+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y'$$

tanımlansın. Bu takdirde $\Psi(x,y)=ax+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y$ dönüşümü için

$$\Psi:\{(x,y):F(x,y)=m\}\rightarrow\{\gamma\in M_F : N(\gamma)=am\}$$

dir. Buna göre $F(x,y)=m$ denklemini çözmek demek, M_F nin normu am olan elemanlarını bulmak demektir. Eğer $F(x,y)=m$ denklemi yeniden düzenlenirse

$$\Delta y^2+4am=(2ax+by)^2$$

haline gelir. ε_Δ, O_Δ nın temel birimi olmak üzere

$$\tau_\Delta=\begin{cases}\varepsilon_\Delta & N(\varepsilon_\Delta)=1 \text{ ise}\\ \varepsilon_\Delta^2 & N(\varepsilon_\Delta)=-1 \text{ ise}\end{cases}$$

tanımlansın. Bu τ_Δ değeri için

$$0 \le y \le U = \begin{cases} \left|\dfrac{am\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{1/2}\left(\dfrac{\tau_\Delta - 1}{\tau_\Delta}\right) & am > 0 \text{ ise} \\ \\ \left|\dfrac{am\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{1/2}\left(\dfrac{\tau_\Delta + 1}{\tau_\Delta}\right) & am < 0 \text{ ise} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

olmak üzere, bu aralıktaki *y* değerleri için, $\Delta y^2 + 4am$ ifadesinin tam kare olup olmadığı kontrol edilir. Eğer tam kare ise yukarıdaki eşitlikten *x* değeri (veya değerleri) elde edilir. Böylece $F(x,y) = m$ denkleminin tamsayı çözümleri için bir $\{[\,x\ \ y]\}$ çözüm sınıfı elde edilmiş olur. Bu çözüm sınıfı ve (4.2.1) deki matris kullanılarak $F(x,y) = m$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri elde edilmiş olur (Flath 1989).

Örneğin, $5x^2 + 14xy + 7y^2 = 10$ denklemi için $F = (5,14,7)$ olup $\Delta(F) = 4 \cdot 14$ dür. Buna göre O_{56} halkasının temel birimi $\varepsilon_{56} = 15 + 4\sqrt{14}$ dür. $N(\varepsilon_{56}) = 1$ olduğundan $\tau_{56} = 15 + 4\sqrt{14}$ dür. Buna göre (4.2.2) eşitliğinden

$$0 \le y \le U = \left|\frac{5 \cdot 10 \cdot (15 + 4\sqrt{14})}{56}\right|^{1/2}\left(\frac{14 + 4\sqrt{14}}{15 + 4\sqrt{14}}\right) \cong 5.002$$

olarak bulunur. Buna göre $0 \le y \le 5$ aralığındaki *y* değerleri için $\Delta y^2 + 4am$ ifadesi sadece $y = 1$ ve $y = 5$ için bir tam karedir ve *y* nin bu değerleri için sırasıyla $x = -3$ ve $x = -11$ olarak elde edilir. O halde çözüm sınıfı

$$\{[\,-3\ \ 1],[\,-11\ \ 5],[-3\ \ 5]\}$$

dir. Çözüm matrisi ise (4.1) den $M = \begin{bmatrix} -13 & 20 \\ -28 & 43 \end{bmatrix}$ olarak elde edilir. O halde verilen Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$\Omega = \{\pm[\,-3\ \ 1]M^n, \pm[\,-11\ \ 5]M^n, \pm[\,-3\ \ \ 5]M^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

Bu açıklamalardan sonra esas konuya geçilebilir. Yine burada da *k* nın tek veya çift olmasına göre iki durum söz konusudur.

<u>1. DURUM:</u> $k \ge 1$ tek olsun. Bu takdirde aşağıdaki teoremler verilebilir.

4.2.1. Teorem. $\sqrt{D}$ nin basit sürekli kesirli devirli açılımı

$$\sqrt{D}=\begin{cases}[2;\overline{4}] & k=1 \text{ ise}\\ [k;\overline{\frac{k-1}{2},1,1,\frac{k-1}{2},2k}] & k\geq 3 \text{ ise}\end{cases}$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

İspat. $k=1$ olsun. Bu takdirde kolayca görüleceği üzere $\sqrt{5}=[2;\overline{4}]$ dir. $k\geq 3$ için

$$\sqrt{k^2+4}=k+(\sqrt{k^2+4}-k)=k+\cfrac{1}{\frac{k-1}{2}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{k-1}{2}+\cfrac{1}{2k+(\sqrt{k^2+4}-k)}}}}}$$

olduğundan $\sqrt{D}=[k;\overline{\frac{k-1}{2},1,1,\frac{k-1}{2},2k}]$ dır.

4.2.1. Teoremine göre, $k\geq 3$ tamsayısı için $\sqrt{D}=[k;\overline{\frac{k-1}{2},1,1,\frac{k-1}{2},2k}]$ olduğundan $A_9=(k^6+6k^4+9k^2+2)/2$ ve $B_9=(k^5+4k^3+3k)/2$ olup

$$\tau_\Delta=\frac{k^6+6k^4+9k^2+2}{2}+\frac{k^5+4k^3+3k}{2}\sqrt{k^2+4}$$

dır.

Bu açıklamalardan sonra

$$F_\gamma^k(x,y)=kx^2+(2k+4)xy+4y^2=k$$

pozitif Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi ele alınabilir. Burada iki hal söz konusudur:

1.Hal: $k=1$ ise çözüm sınıfı $\{[\pm 1 \quad 0]\}$ ve çözüm matrisi $M=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -16 & 21\end{bmatrix}$ olup

1. $n\geq 1$ için $[1 \quad 0]M^n$ denklemin (x_{2n},y_{2n}) çözümlerini
2. $n\geq 0$ için $[-1 \quad 0]M^{-n}$ denklemin (x_{2n+1},y_{2n+1}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.2. Teorem. $k=1$ ise

$$[x_{2n+1} \quad y_{2n+1}]=[-1 \quad 0]M^{-n}, n\geq 0 \quad \text{ve} \quad [x_{2n} \quad y_{2n}]=[1 \quad 0]M^{n}, n\geq 1$$

ve $M=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ -16 & 21\end{bmatrix}$ olmak üzere $F_{\gamma}^{1}(x,y)=1$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$\Psi(F_{\gamma}^{1})=\pm\{(x_{2n+1},y_{2n+1}),(x_{2n},y_{2n})\}$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

2. Hal. $k\geq 3$ için iki durum söz konusudur:

(i) k tam kare değilse çözüm sınıfı

$$\{[\pm 1 \quad 0],[-k^3+k^2-2k+1 \quad \frac{k^3-2k^2+3k-2}{2}]\}$$

ve çözüm matrisi

$$M=\begin{bmatrix}-k^5+k^4-4k^3+3k^2-3k+1 & \frac{k^6+4k^4+3k^2}{2}\\ -2k^5-8k^3-6k & k^6+k^5+5k^4+4k^3+6k^2+3k+1\end{bmatrix} \tag{4.2.3}$$

olup burada

1. $n\geq 1$ için $[1 \quad 0]M^{n}$ denklemin (x_{4n},y_{4n}) çözümlerini
2. $n\geq 0$ için $[-1 \quad 0]M^{-n}$ denklemin (x_{4n+1},y_{4n+1}) çözümlerini
3. $n\geq 1$ için $[k^3-k^2+2k-1 \quad \frac{-k^3+2k^2-3k+2}{2}]M^{n}$ denklemin (x_{4n-2},y_{4n-2}) çözümlerini
4. $n\geq 0$ için $[-k^3+k^2-2k+1 \quad \frac{k^3-2k^2+3k-2}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{4n+3},y_{4n+3}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.3. Teorem. $F_{\gamma}^{k}(x,y)=k$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$[x_{4n+1} \quad y_{4n+1}]=[-1 \quad 0]M^{-n}, n\geq 0$$

$$[x_{4n-2} \quad y_{4n-2}]=[k^3-k^2+2k-1 \quad \frac{-k^3+2k^2-3k+2}{2}]M^{n},\ n\geq 1$$

$$[x_{4n+3} \quad y_{4n+3}] = [-k^3 + k^2 - 2k + 1 \quad \frac{k^3 - 2k^2 + 3k - 2}{2}]M^{-n},\ n \geq 0$$

$$[x_{4n} \quad y_{4n}] = [1 \quad 0]M^n,\ n \geq 1$$

ve M, (4.2.3) deki matris olmak üzere

$$\Psi(F_\gamma^k) = \pm\{(x_{4n+1}, y_{4n+1}), (x_{4n+3}, y_{4n+3}), (x_{4n-2}, y_{4n-2}), (x_{4n}, y_{4n})\}$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

(ii) k tam kare ise çözüm sınıfı

$$\{\ [\pm 1 \quad 0], [-k^{\frac{3}{2}} \quad \frac{k^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{1}{2}}}{2}]\ ,\ [-k^3 + k^2 - 2k + 1 \quad \frac{k^3 - 2k^2 + 3k - 2}{2}]\ \}$$

olup

1. $n \geq 1$ için$[1 \quad 0]M^n$ denklemin (x_{6n}, y_{6n}) çözümlerini
2. $n \geq 0$ için $[-1 \quad 0]M^{-n}$ denklemin (x_{6n+1}, y_{6n+1}) çözümlerini
3. $n \geq 1$ için $[k^{\frac{3}{2}} \quad \frac{-k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^n$ denklemin (x_{6n-1}, y_{6n-1}) çözümlerini
4. $n \geq 0$ için $[-k^{\frac{3}{2}} \quad \frac{k^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{6n+2}, y_{6n+2}) çözümlerini
5. $n \geq 1$ için $[k^3 - k^2 + 2k - 1 \quad \frac{-k^3 + 2k^2 - 3k + 2}{2}]M^n$ denklemin (x_{6n-3}, y_{6n-3})

   çözümlerini
6. $n \geq 0$ için $[-k^3 + k^2 - 2k + 1 \quad \frac{k^3 - 2k^2 + 3k - 2}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{6n+4}, y_{6n+4})

   çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.4 .Teorem. $F_\gamma^k(x, y) = k$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$[x_{6n+1} \quad y_{6n+1}] = [-1 \quad 0]M^{-n},\ n \geq 0$$

$$[x_{6n+2} \quad y_{6n+2}] = [-k^{\frac{3}{2}} \quad \frac{k^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^n,\ n \geq 0$$

$$[x_{6n-3} \quad y_{6n-3}] = [k^3 - k^2 + 2k - 1 \quad \frac{-k^3 + 2k^2 - 3k + 2}{2}]M^n,\ n \geq 1$$

$$[x_{6n+4} \quad y_{6n+4}] = [-k^3+k^2-2k+1 \quad \frac{k^3-2k^2+3k-2}{2}]M^{-n},\ n\geq 0$$

$$[x_{6n-1} \quad y_{6n-1}] = [k^{\frac{3}{2}} \quad \frac{-k^{\frac{3}{2}}+k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{n},\ n\geq 1$$

$$[x_{6n} \quad y_{6n}] = [1 \quad 0]M^{n},\ n\geq 1$$

ve M, (4.2.3) deki matris olmak üzere

$$\Psi(F_{\gamma}^{k}) = \pm\begin{Bmatrix} (x_{6n+1}, y_{6n+1}), (x_{6n+2}, y_{6n+2}), (x_{6n+4}, y_{6n+4}), \\ (x_{6n-3}, y_{6n-3}), (x_{6n-1}, y_{6n-1}), (x_{6n}, y_{6n}) \end{Bmatrix}$$

dır (Tekcan ve Kutlu 2017a).

Şimdi

$$F_{\gamma}^{-k}(x,y) = kx^2+(2k+4)xy+4y^2 = -k$$

negatif Diophantine denklemi ele alınabilir. Yine burada iki hal söz konusudur:

1.Hal. $k=1$ ise çözüm sınıfı $\{[-5 \quad 1],[-1 \quad 1]\}$ olup

1. $n\geq 0$ için $[-1 \quad 1]M^{n}$ denklemin (x_{2n+1}, y_{2n+1}) çözümlerini
2. $n\geq 1$ için $[-1 \quad 1]M^{-n}$ denklemin (x_{2n}, y_{2n}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.5. Teorem. $k=1$ için $F_{\gamma}^{-1}(x,y)=-1$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$[x_{2n+1} \quad y_{2n+1}] = [-1 \quad 1]M^{n}, n\geq 0 \quad \text{ve} \quad [x_{2n} \quad y_{2n}] = [-1 \quad 1]M^{-n}, n\geq 1$$

ve $M=\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -16 & 21 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\Psi(F_{\gamma}^{-1}) = \pm\{(x_{2n+1}, y_{2n+1}), (x_{2n}, y_{2n})\}$ dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

2.Hal. $k\geq 3$ için iki durum söz konusudur:

(i) k tam kare değilse çözüm sınıfı

$$\{[-1 \quad 1], [-k^2+k-1 \quad \frac{k^3+k}{2}], [-k^3-k^2-2k-1 \quad \frac{k^3+k}{2}]\}$$

olup

1. $n \geq 1$ için $[-1 \quad 1]M^{n}$ denklemin (x_{4n}, y_{4n}) çözümlerini

2. $n \geq 0$ için $[-1 \quad 1]M^{-n}$ denklemin (x_{4n+1}, y_{4n+1}) çözümlerini

3. $n \geq 0$ için $[-k^{2}+k-1 \quad \frac{k^{3}+k}{2}]M^{n}$ denklemin (x_{4n+2}, y_{4n+2}) çözümlerini

4. $n \geq 1$ için $[-k^{2}+k-1 \quad \frac{k^{3}+k}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{4n-1}, y_{4n-1}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.6. Teorem. $F_{\gamma}^{-k}(x,y)=-k$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$
\begin{aligned}
[x_{4n+1} \quad y_{4n+1}] &= [-1 \quad 1]M^{-n}, n \geq 0 \\
[x_{4n+2} \quad y_{4n+2}] &= [-k^{2}+k-1 \quad \frac{k^{3}+k}{2}]M^{n}, \ n \geq 0 \\
[x_{4n-1} \quad y_{4n-1}] &= [-k^{2}+k-1 \quad \frac{k^{3}+k}{2}]M^{-n}, \ n \geq 1 \\
[x_{4n} \quad y_{4n}] &= [-1 \quad 1]M^{n}, \ n \geq 1
\end{aligned}
$$

ve M, (4.2.3) deki matris olmak üzere

$$\Psi(F_{\gamma}^{-k}) = \pm\{(x_{4n+1}, y_{4n+1}), (x_{4n+2}, y_{4n+2}), (x_{4n-1}, y_{4n-1}), (x_{4n}, y_{4n})\}$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

(ii) k tam kare ise çözüm sınıfı

$$\{[-1 \quad 1], [-k^{\frac{1}{2}} \quad \frac{k^{\frac{3}{2}}+k^{\frac{1}{2}}}{2}], [-k^{2}+k-1 \quad \frac{k^{3}+k}{2}], [-k^{3}-k^{2}-2k-1 \quad \frac{k^{3}+k}{2}]\}$$

olup

1. $n \geq 1$ için $[-1 \quad 1]M^{n}$ denklemin (x_{6n}, y_{6n}) çözümlerini

2. $n \geq 0$ için $[-1 \quad 1]M^{-n}$ denklemin (x_{6n+1}, y_{6n+1}) çözümlerini

3. $n \geq 0$ için $[-k^{\frac{1}{2}} \quad \frac{k^{\frac{3}{2}}+k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{n}$ denklemin (x_{6n+2}, y_{6n+2}) çözümlerini

4. $n \geq 1$ için $[-k^{\frac{1}{2}} \quad \frac{k^{\frac{3}{2}}-k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{6n-1}, y_{6n-1}) çözümlerini

5. $n \geq 0$ için $[-k^2+k-1 \quad \frac{k^3+k}{2}]M^n$ denklemin (x_{6n+3}, y_{6n+3}) çözümlerini

6. $n \geq 1$ için$[-k^2+k-1 \quad \frac{k^3+k}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{6n-2}, y_{6n-2}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.7. Teorem. $F_\gamma^{-k}(x,y)=-k$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$\begin{aligned}
[x_{6n+1} \quad y_{6n+1}] &= [-1 \quad 1]M^{-n},\ n \geq 0 \\
[x_{6n+2} \quad y_{6n+2}] &= [-k^{\frac{1}{2}} \quad \frac{k^{\frac{3}{2}}+k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^n,\ n \geq 0 \\
[x_{6n+3} \quad y_{6n+3}] &= [-k^2+k-1 \quad \frac{k^3+k}{2}]M^n,\ n \geq 0 \\
[x_{6n-2} \quad y_{6n-2}] &= [-k^2+k-1 \quad \frac{k^3+k}{2}]M^{-n},\ n \geq 1 \\
[x_{6n-1} \quad y_{6n-1}] &= [-k^{\frac{1}{2}} \quad \frac{k^{\frac{3}{2}}-k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{-n},\ n \geq 1 \\
[x_{6n} \quad y_{6n}] &= [-1 \quad 1]M^n,\ n \geq 1
\end{aligned}$$

ve M, (4.2.3) deki matris olmak üzere

$$\Psi(F_\gamma^{-k}) = \pm \begin{Bmatrix} (x_{6n+1}, y_{6n+1}), (x_{6n+2}, y_{6n+2}), (x_{6n+3}, y_{6n+3}), \\ (x_{6n-2}, y_{6n-2}), (x_{6n-1}, y_{6n-1}), (x_{6n}, y_{6n}) \end{Bmatrix}$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

2. DURUM: $k \geq 2$ çift olsun. Bu takdirde yukarıdaki teoremlere benzer şekilde aşağıdaki teoremler verilebilir.

4.2.8. Teorem. $k \geq 2$ çift ise $\sqrt{D} = [k; \overline{\frac{k}{2}, 2k}]$ dır (Tekcan ve Kutlu 2017a).

4.2.8. Teoremine göre, $A_1 = (k^2+2)/2$ ve $B_1 = k/2$ olduğundan

$$\tau_\Delta = \frac{k^2+2}{2} + \frac{k}{2}\sqrt{k^2+4}$$

dir.

Buna göre

$$F_{\gamma}^{k}(x,y)=kx^2+(2k+4)xy+4y^2=k$$

pozitif Diophantine denklemi için iki hal söz konusudur.

1.Hal. $k=2$ ise çözüm sınıfı $\{[\pm 1 \quad 0]\}$ ve çözüm matrisi $M=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & 7\end{bmatrix}$ olup

1. $n\geq 1$ için $[1 \quad 0]M^{n}$ denklemin (x_{2n-1},y_{2n-1}) çözümlerini
2. $n\geq 0$ için $[-1 \quad 0]M^{-n}$ denklemin (x_{2n+2},y_{2n+2}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.9. Teorem. $k=2$ ise $F_{\gamma}^{2}(x,y)=2$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$[x_{2n-1} \quad y_{2n-1}]=[1 \quad 0]M^{n}, n\geq 1 \text{ ve } [x_{2n+2} \quad y_{2n+2}]=[-1 \quad 0]M^{-n}, n\geq 0$$

ve $M=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & 7\end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\Psi(F_{\gamma}^{2})=\pm\{(x_{2n+2},y_{2n+2}),(x_{2n-1},y_{2n-1})\}$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

4.2.10. Not. $F_{\gamma}^{2}(x,y)=2$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin kümesi, balans sayılarına (Behera ve Panda 1999) bağlı olarak da verilebilir. B_n balans ve c_n Lucas-cobalans sayıları olmak üzere $M=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -4 & 7\end{bmatrix}$ matrisinin *n*. kuvveti $n\geq 1$ için

$$M^{n}=\begin{bmatrix}-c_n & 2B_n\\ -4B_n & c_{n+1}\end{bmatrix}$$

dir. Şu halde $F_{\gamma}^{2}(x,y)=2$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$\Psi(F_{\gamma}^{2})=\pm\{(-c_{n+1},2B_n),(-c_n,2B_n)\}$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

2. Hal. $k>2$ tamsayısı için iki durum söz konusudur.

(i) k tam kare değilse çözüm sınıfı $\{[\pm 1 \quad 0], [1-k \quad \frac{k-2}{2}]\}$ ve çözüm matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1-k & \frac{k^2}{2} \\ -2k & k^2+k+1 \end{bmatrix} \tag{4.2.4}$$

dir. Buna göre

1. $n \geq 1$ için $[1 \quad 0]M^n$ denklemin (x_{4n-1}, y_{4n-1}) çözümlerini
2. $n \geq 0$ için $[-1 \quad 0]M^{-n}$ denklemin (x_{4n+2}, y_{4n+2}) çözümlerini
3. $n \geq 1$ için $[k-1 \quad \frac{2-k}{2}]M^n$ denklemin (x_{4n-3}, y_{4n-3}) çözümlerini
4. $n \geq 0$ için $[1-k \quad \frac{k-2}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{4n+4}, y_{4n+4}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.11. Teorem. $F_\gamma^k(x,y) = k$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$\begin{aligned}
[x_{4n-1} \quad y_{4n-1}] &= [1 \quad 0]M^n, n \geq 1 \\
[x_{4n+2} \quad y_{4n+2}] &= [-1 \quad 0]M^{-n}, \ n \geq 0 \\
[x_{4n-3} \quad y_{4n-3}] &= [k-1 \quad \frac{2-k}{2}]M^n, \ n \geq 1 \\
[x_{4n+4} \quad y_{4n+4}] &= [1-k \quad \frac{k-2}{2}]M^{-n}, \ n \geq 0
\end{aligned}$$

ve M, (4.2.4) deki gibi olmak üzere

$$\Psi(F_\gamma^k) = \pm\{(x_{4n+2}, y_{4n+2}), (x_{4n+4}, y_{4n+4}), (x_{4n-1}, y_{4n-1}), (x_{4n-3}, y_{4n-3})\}$$

dır (Tekcan ve Kutlu 2017a).

(ii) k tam kare ise çözüm sınıfı

$$\{[\pm 1 \quad 0], [0 \quad \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2}], [1-k \quad \frac{k-2}{2}]\}$$

olup

1. $n \geq 1$ için$[1 \quad 0]M^n$ denklemin (x_{6n-3}, y_{6n-3}) çözümlerini
2. $n \geq 0$ için $[-1 \quad 0]M^{-n}$ denklemin (x_{6n+2}, y_{6n+2}) çözümlerini

3. $n \geq 1$ için $[0 \quad \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{n}$ denklemin (x_{6n-1}, y_{6n-1}) çözümlerini

4. $n \geq 1$ için$[0 \quad -\frac{k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{6n}, y_{6n}) çözümlerini

5. $n \geq 1$ için $[k-1 \quad \frac{2-k}{2}]M^{n}$ denklemin (x_{6n-5}, y_{6n-5}) çözümlerini

6. $n \geq 0$ için $[1-k \quad \frac{k-2}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{6n+4}, y_{6n+4}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.12. Teorem. $F_{\gamma}^{k}(x,y) = k$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$
\begin{aligned}
[x_{6n-3} \quad y_{6n-3}] &= [1 \quad 0]M^{n},\ n \geq 1 \\
[x_{6n+2} \quad y_{6n+2}] &= [-1 \quad 0]M^{-n},\ n \geq 0 \\
[x_{6n-1} \quad y_{6n-1}] &= [0 \quad \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{n},\ n \geq 1 \\
[x_{6n} \quad y_{6n}] &= [0 \quad -\frac{k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{-n},\ n \geq 1 \\
[x_{6n-5} \quad y_{6n-5}] &= [k-1 \quad \frac{2-k}{2}]M^{n},\ n \geq 1 \\
[x_{6n+4} \quad y_{6n+4}] &= [1-k \quad \frac{k-2}{2}]M^{-n},\ n \geq 0
\end{aligned}
$$

ve M, (4.2.4) deki gibi olmak üzere

$$
\Psi(F_{\gamma}^{k}) = \pm \left\{ \begin{array}{l} (x_{6n-3}, y_{6n-3}), (x_{6n+2}, y_{6n+2}), (x_{6n-1}, y_{6n-1}), \\ (x_{6n}, y_{6n}), (x_{6n-5}, y_{6n-5}), (x_{6n+4}, y_{6n+4}) \end{array} \right\} \cup \{(0, \pm \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2})\}
$$

dır (Tekcan ve Kutlu 2017a).

Son olarak

$$
F_{\gamma}^{-k}(x,y) = kx^{2} + (2k+4)xy + 4y^{2} = -k
$$

negatif Diophantine denklemi dikkate alınırsa yine burada iki hal söz konusudur:

1.Hal. $k = 2$ ise çözüm sınıfı $\{[-1 \quad 1], [-3 \quad 1]\}$ olup

1. $n \geq 1$ için $[-1 \quad 1]M^{n}$ denklemin (x_{2n}, y_{2n}) çözümlerini

2. $n \geq 0$ için $[-1 \quad 1]M^{-n}$ denklemin (x_{2n+1}, y_{2n+1}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.13. Teorem. $k=2$ için $F_{\gamma}^{-2}(x,y)=-2$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$[x_{2n} \quad y_{2n}]=[-1 \quad 1]M^{n}, n \geq 1 \text{ ve } [x_{2n+1} \quad y_{2n+1}]=[-1 \quad 1]M^{-n}, n \geq 0$$

ve $M=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\Psi(F_{\gamma}^{-2})=\pm\{(x_{2n}, y_{2n}),(x_{2n+1}, y_{2n+1})\}$ dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

4.2.14. Not. $F_{\gamma}^{2}(x,y)=2$ Diophantine denkleminde olduğu gibi, $F_{\gamma}^{-2}(x,y)=-2$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümlerinin kümesi de balans ve Lucas-cobalans sayılarına bağlı olarak

$$\Psi(F_{\gamma}^{-2})=\pm\{(c_n-4B_n,-2B_n+c_{n+1}),(-c_{n+1}+4B_n,2B_n-c_n),(-1,1)\}$$

şeklinde verilebilir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

2. Hal. $k>2$ için iki durum söz konusudur:

(i) k tam kare değilse çözüm sınıfı

$$\{[-1 \quad 1],[-k-1 \quad \tfrac{k}{2}],[-1 \quad \tfrac{k}{2}]\}$$

olup

1. $n \geq 1$ için $[-1 \quad 1]M^{n}$ denklemin (x_{4n-1}, y_{4n-1}) çözümlerini

2. $n \geq 0$ için $[-1 \quad 1]M^{-n}$ denklemin (x_{4n+2}, y_{4n+2}) çözümlerini

3. $n \geq 1$ için $[-k-1 \quad \frac{k}{2}]M^{n}$ denklemin (x_{4n-3}, y_{4n-3}) çözümlerini

4. $n \geq 0$ için $[-k-1 \quad \frac{k}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{4n+4}, y_{4n+4}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.15. Teorem. $F_\gamma^{-k}(x,y)=-k$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kü mesi

$$[x_{4n-1} \quad y_{4n-1}]=[-1 \quad 1]M^n, n\geq 1$$
$$[x_{4n+2} \quad y_{4n+2}]=[-1 \quad 1]M^{-n},\ n\geq 0$$
$$[x_{4n-3} \quad y_{4n-3}]=[-k-1 \quad \frac{k}{2}]M^n,\ n\geq 1$$
$$[x_{4n+4} \quad y_{4n+4}]=[-k-1 \quad \frac{k}{2}]M^{-n},\ n\geq 0$$

ve M, (4.2.4) deki gibi olmak üzere

$$\Psi(F_\gamma^{-k})=\pm\{(x_{4n-1},y_{4n-1}),(x_{4n+2},y_{4n+2}),(x_{4n-3},y_{4n-3}),(x_{4n+4},y_{4n+4})\}$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

(ii) k tam kare ise çözüm sınıfı

$$\{[-1 \quad 1],[-k^{\frac{1}{2}} \quad \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2}],[-k-1 \quad \frac{k}{2}],[-1 \quad \frac{k}{2}]\}$$

olup

1. $n\geq 1$ için $[-1 \quad 1]M^n$ denklemin (x_{6n-1},y_{6n-1}) çözümlerini
2. $n\geq 0$ için $[-1 \quad 1]M^{-n}$ denklemin (x_{6n+2},y_{6n+2}) çözümlerini
3. $n\geq 1$ için $[-k^{\frac{1}{2}} \quad \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^n$ denklemin (x_{6n-3},y_{6n-3}) çözümlerini
4. $n\geq 0$ için $[-k^{\frac{1}{2}} \quad \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{6n+4},y_{6n+4}) çözümlerini
5. $n\geq 1$ için $[-k-1 \quad \frac{k}{2}]M^n$ denklemin (x_{6n-5},y_{6n-5}) çözümlerini
6. $n\geq 0$ için $[-k-1 \quad \frac{k}{2}]M^{-n}$ denklemin (x_{6n+6},y_{6n+6}) çözümlerini

üretir. O halde aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.16. Teorem. $F_\gamma^{-k}(x,y)=-k$ Diophantine denkleminin tüm tamsayı çözümleri kü-mesi

$$[x_{6n-1} \quad y_{6n-1}]=[-1 \quad 1]M^n,\ n\geq 1$$

$$[x_{6n+2} \quad y_{6n+2}] = [-1 \quad 1]M^{-n},\ n \geq 0$$

$$[x_{6n-3} \quad y_{6n-3}] = [-k^{\frac{1}{2}} \quad \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{n},\ n \geq 1$$

$$[x_{6n+4} \quad y_{6n+4}] = [-k^{\frac{1}{2}} \quad \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2}]M^{-n},\ n \geq 0$$

$$[x_{6n-5} \quad y_{6n-5}] = [-k-1 \quad \frac{k}{2}]M^{n},\ n \geq 1$$

$$[x_{6n+6} \quad y_{6n+6}] = [-k-1 \quad \frac{k}{2}]M^{-n},\ n \geq 0$$

ve M, (4.2.4) deki gibi olmak üzere

$$\Psi(F_\gamma^{-k}) = \pm \begin{Bmatrix} (x_{6n-1}, y_{6n-1}), (x_{6n+2}, y_{6n+2}), (x_{6n-3}, y_{6n-3}), \\ (x_{6n+4}, y_{6n+4}), (x_{6n-5}, y_{6n-5}), (x_{6n+6}, y_{6n+6}) \end{Bmatrix}$$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

Son olarak F_γ formunun otomorfizm grubu ile ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

4.2.17. Teorem. M, (4.2.3) deki matris ve

$$M^* = \begin{bmatrix} -k^2+k-1 & \frac{k^3+k}{2} \\ -2k^2-2 & k^3+k^2+2k+1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere F_γ formu için $Aut^+(F_\gamma) = \{\pm M^t : t \in \mathbb{Z}\}$ ve $Aut^*(F_\gamma) = \{\pm (M^*)^{2t+1} : t \in \mathbb{Z}\}$

dir (Tekcan ve Kutlu 2017a).

İspat. (4.2.3) de tanımlanan M matrisi için $\det(M) = 1$ dir. Üstelik

$$\begin{aligned}
MF_\gamma &= F_\gamma \begin{pmatrix} (-k^5+k^4-4k^3+3k^2-3k+1)x + (-2k^5-8k^3-6k)y, \\ (\frac{k^6+4k^4+3k^2}{2})x + (k^6+k^5+5k^4+4k^3+6k^2+3k+1)y \end{pmatrix} \\
&= k((-k^5+k^4-4k^3+3k^2-3k+1)x + (-2k^5-8k^3-6k)y)^2 \\
&\quad + (2k+4)((-k^5+k^4-4k^3+3k^2-3k+1)x + (-2k^5-8k^3-6k)y) \\
&\quad \times ((\frac{k^6+4k^4+3k^2}{2})x + (k^6+k^5+5k^4+4k^3+6k^2+3k+1)y) \\
&\quad + 4((\frac{k^6+4k^4+3k^2}{2})x + (k^6+k^5+5k^4+4k^3+6k^2+3k+1)y)^2 \\
&= kx^2 + (2k+4)xy + 4y^2 = F_\gamma
\end{aligned}$$

olduğundan, M , F_γ nın bir has otomorfizmidir. Tümevarımla M^t nin de F_γ nın bir has otomorfizmi olduğu gösterilebilir. O halde $Aut^+(F_\gamma)=\{\pm M^t : t\in\mathbb{Z}\}$ dir.

Benzer şekilde M^* matrisi için $\det(M^*)=-1$ olup

$$\begin{aligned}
M^*F_\gamma &= F_\gamma((-k^2+k-1)x+(-2k^2-2)y,(\frac{k^3+k}{3})x+(k^3+k^2+2k+1)y) \\
&= k((-k^2+k-1)x+(-2k^2-2)y)^2+(2k+4)((-k^2+k-1)x+(-2k^2-2)y) \\
&\quad \times((\frac{k^3+k}{2})x+(k^3+k^2+2k+1)y)+4((\frac{k^3+k}{2})x+(k^3+k^2+2k+1)y)^2 \\
&= -kx^2-(2k+4)xy-4y^2 \\
&= -F_\gamma
\end{aligned}$$

dır. Şu halde $M^*\in Aut^*(F_\gamma)$ dır. Yine tümevarımla $(M^*)^{2t+1}$ için

$$(M^*)^{2t+1}F_\gamma=-F_\gamma$$

olduğu gösterilebilir. O halde $Aut^*(F_\gamma)=\{\pm(M^*)^{2t+1} : t\in\mathbb{Z}\}$ dır.

KAYNAKLAR

Behera A., Panda G. K. 1999. On the Square Roots of Triangular Numbers. *The Fibonacci Quarterly* 37(2): 98-105.

Buchmann, J., Vollmer, U. 2007. Binary Quadratic Forms: An Algorithmic Approach. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Çıldır, M., Koruoğlu, Ö., Tekcan, A. 2016. On Positive Definite Quadratic Forms and the Extended Hecke Group $\overline{H}(\sqrt{2})$. *Mathematical Reports* 18(3):355-361.

Flath, D.E. 1989. Introduction to Number Theory. Wiley.

Hecke, E. 1936. Uber die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen. *Math. Ann*. 12: 664-699.

Mollin, R.A. 1996. Quadratics. CRS Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo.

Mollin, R.A. 2008. Fundamental Number Theory with Appl. Chapman & Hall/ CRC.

Tekcan, A., Bizim, O. 2003. The Connection between Quadratic Forms and the Extended Modular Group. *Mathematica Bohemica* 128(3): 225-236.

Tekcan, A. 2007. The Base Points of Indefinite Quadratic Forms in the cycle and Proper Cycle of an Indefinite Quadratic Form. Hacettepe Jour. of Math. and Statistics 36 (2): 101-114.

Tekcan, A., Kutlu, Ş. 2017. Base Points, Bases and Positive Definite Forms. *Asian-European Journal of Mathematics* dergisinde yayına kabul edildi.

Tekcan, A., Kutlu, Ş. 2017a. Quadratic Ideals, Indefinite Quadratic Forms and Some Specific Diophantine Equations. *Boletim da Sociedada Paranaense de Math*. dergisinde yayına kabul edildi.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Şeyma KUTLU

Doğum Yeri ve Tarihi: Osmangazi / 28.04.1993

Yabancı Dil: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Malcılar Lisesi

Lisans: Uludağ Üniversitesi

Yüksek Lisans: Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:

EKOLE Özel Öğretim Kursu

İletişim:

Yayınları:

1. Tekcan, A., Kutlu, Ş. Quadratic Ideals, Indefinite Quadratic Forms and Some Specific Diophantine Equations. *Boletim da Sociedada Paran. de Mathematica* dergisinde yayına kabul edildi.
2. Tekcan, A., Kutlu, Ş. Base Points, Bases and Positive Definite Forms. *Asian-European Journal of Mathematics* dergisinde yayına kabul edildi.