GENELLEŞTİRİLMİŞ BALANS SAYILARI

Aziz YAZLA

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ BALANS SAYILARI

Aziz YAZLA

Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2017

TEZ ONAYI

Aziz YAZLA tarafından hazırlanan "Genelleştirilmiş Balans Sayıları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/~~oy çokluğu~~ ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Başkan : Prof.Dr. Osman BİZİM
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Prof.Dr. Ahmet TEKCAN
Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Üye : Yard. Doç.Dr. Fırat EVİRGEN
Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı
İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü
……/……/2017

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

01/06/2017

Aziz YAZLA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ BALANS SAYILARI

Aziz YAZLA

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu çalışmada tamsayı dizilerinde yeni bir kavram olan $t-$balans sayıları ele alınmış ve bu sayıların bazı cebirsel özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu sayıların Pell, Pell-Lucas, diğer balans sayıları ve kare üçgensel sayılar ile olan ilişkisinden bahsedilmiştir.

Tezin birinci bölümünde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlara, notasyonlara ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, balans sayıları, bu sayıların bazı cebirsel özellikleri, Pell ve Pell-Lucas tamsayı dizileri ile olan ilişkisi, balans sayılarının katsayılar matrisi ve bu matris ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar ve balans fonksiyonlarından bahsedilmiştir.

Tezin üçüncü bölümü orijinal çalışma olup bu bölümde ilk olarak $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri elde edilmiş ve daha sonra $t-$balans sayılarının genel terimleri ve bu sayıların Binet fromülleri verilmiştir. Daha sonra $t-$balans sayılarının balans, Pell, Pell-Lucas ve kare üçgensel sayılar ile olan ilişkisi üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Balans, Pell, Pell-Lucas, $t-$balans sayıları, Pell denklemleri.

2017, vii + 51 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

GENERALIZED BALANCING NUMBERS

Aziz YAZLA

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this work, some algebraic properties of generalized balancing numbers, namely $t-$balancing numbers and their relationships with Pell, Pell-Lucas and square triangular numbers are considered.

In the first section, some preliminary notations, definitions and theorems which are to be used in later sections are given.

In the second section, balancing numbers, their some algebraic properties, their relationships with Pell and Pell-Lucas numbers, companion matrices and some specific balancing functions are considered.

In the third section which is the original part of the thesis, we first determine the set of all positive integer solutions of the Pell equation $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$. Later we obtain the general terms of all $t-$balancing numbers, their Binet formulas. We also deduce some theorems concerning the relationships between $t-$balancing numbers and Pell, Pell-Lucas and square triangular numbers.

Key words: Balancing, Pell, Pell-Lucas, $t-$balancing numbers, Pell equations.

2017, vii + 51 pages.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamın her aşamasında bilgisiyle beni yönlendiren, tecrübelerinden yararlandığım, hoşgörüsüyle her zaman yanımda olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ahmet TEKCAN'a, teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışması boyunca bana her türlü manevi desteği veren aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Aziz YAZLA

01/06/2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
B_n	n. balans sayısı
b_n	n. cobalans sayısı
C_n	n. Lucas-balans sayısı
c_n	n. Lucas-cobalans sayısı
(B_m, B_n)	B_m ve B_n balans sayılarının obebi
M_B	balans sayılarının katsayılar matrisi
$B_n^{(a,b)}$	$n.$ $(a,b)-$balans sayısı
B_n^t	$n.$ $t-$balans sayısı
b_n^t	$n.$ $t-$cobalans sayısı
C_n^t	n. Lucas $t-$balans sayısı
c_n^t	n. Lucas $t-$cobalans sayısı
(a,b,c)	Pisagor üçlüsü
$\left(\dfrac{a}{p}\right)$	Legendre sembolü
$F=(a,\, b,\, c)$	kuadratik form
$\Delta(F)=b^2-4ac$	F formunun diskriminantı
(x_1, y_1)	temel çözüm
T_n	n. üçgensel sayı
S_n	n. kare üçgensel sayı

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu bölümde tezin ileriki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlara ve teoremlere yer verilmiştir.

p ve q, $p^2 - 4q > 0$ özelliğinde iki tamsayı olmak üzere başlangıç değerleri

$$U_0 = 0,\ U_1 = 1,\ V_0 = 2,\ V_1 = p$$

ve genel terimleri $n \geq 2$ için

$$U_n = U_n(p,q) = pU_{n-1} - qU_{n-2}$$

ve

$$V_n = V_n(p,q) = pV_{n-1} - qV_{n-2}$$

olan U_n ve V_n tamsayı dizileri tanımlansın. Bu tamsayı dizilerinde p ve q nun özel halleri için bilinen bazı özel tamsayı dizileri elde edilir. Örneğin, $p = 1$, $q = -1$ için

$$U_n = U_n(1,-1) = F_n$$

Fibonacci tamsayı dizisi iken

$$V_n = V_n(1,-1) = L_n$$

Lucas tamsayı dizisidir. Bu iki tamsayı dizisi arasında birçok cebirsel bağıntı olup bu bağıntılardan en önemlisi

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

dir. Ayrıca bu iki tamsayı dizisi arasında aşağıdaki gibi cebirsel bağıntılar da vardır:

$$\begin{aligned}
F_{2n} &= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) \\
&= F_n(F_n + 2F_{n-1}) = 3F_{2n-2} - F_{2n-4} \\
F_{2n+1} &= F_{n+1}^2 + F_n^2 = 3F_{2n-1} - F_{2n-3} \\
F_{2n-1} &= F_n^2 + F_{n-1}^2 \\
F_{3n} &= F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = 4F_{3n-3} + F_{3n-6} \\
F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 &= F_n F_{n+3} \\
F_{n+1}^2 &= 4F_n F_{n-1} + F_{n-2}^2 \\
F_{n+1}F_m + F_n F_{m-1} &= F_{m+n} \\
F_{m+n} &= \frac{F_m L_n + L_m F_n}{2},\quad F_{2n} = F_n L_n,\quad L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n
\end{aligned}$$

$$2(F_n^4+F_{n+1}^4+F_{n+2}^4)=(F_n^2+F_{n+1}^2+F_{n+2}^2)^2$$
$$\sum_{i=1}^{n}F_{2i}^2=\frac{3F_{2n+1}^2+2F_{2n+2}^2-6F_{2n}F_{2n+2}-2n-5}{5}$$
$$\left(\frac{L_n+\sqrt{5}F_n}{2}\right)^m=\frac{L_{mn}+\sqrt{5}F_{mn}}{2}$$
$$L_{2m}L_{2n}=L_{m+n}^2+5F_{m-n}^2$$
$$F_nF_{n+3}^2-F_{n+2}^3=(-1)^{n+1}F_{n+1}$$
$$L_{(2m+1)(4n+1)}-L_{2m+1}=5F_{2n(2m+1)}F_{(2m+1)(2n+1)}$$

Benzer şekilde $p=2,\ q=-1$ için

$$U_n=U_n(2,-1)=P_n$$

Pell tamsayı dizisi iken

$$V_n=V_n(2,-1)=Q_n$$

Pell-Lucas tamsayı dizisidir. Bu iki tamsayı dizisi arasında da birçok cebirsel bağıntı olup bu bağıntılardan bazıları ($n\geq m$)

$$P_nQ_m=P_{n+m}+(-1)^mP_{n-m}\ ,\ P_{2n}=P_nQ_n,\quad P_{2n+1}=P_n+Q_{n+1}+(-1)^n,$$
$$P_n=\frac{Q_{n+1}+Q_{n-1}}{8},\ \ P_n^2=\frac{Q_{2n}+(-1)^{n+1}}{8}\ ,\ P_{2n+1}=\frac{P_nQ_{n+1}+Q_nP_{n+1}}{2},$$
$$Q_{2n+1}=\frac{8P_nP_{n+1}+Q_nQ_{n+1}}{2}$$

dir.

U_n ve V_n tamsayı dizilerinin karakteristik denklemi

$$x^2-px+q=0$$

olup bu denklemin kökleri

$$\alpha=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\ \text{ ve }\ \beta=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

dir. Bu dizilerin Binet formülleri ise sırasıyla $n\geq 0$ için

$$U_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\ \text{ ve }\ V_n=\alpha^n+\beta^n$$

dir. Bu dizilerin katsayılar (kompanion) matrisi

$$M = \begin{bmatrix} p & -q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} V_n \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = M^{n-1} \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir (Koshy 2001 ve Ribenboim 2000).

Yukarıda tanımlanan tamsayı dizlerinden başka son zamanlarda ortaya çıkan ve özellikle de Pell ve Pell-Lucas tamsayı dizileri ile yakın ilişkisi olan başka bir tamsayı dizisi daha vardır. Bu tamsayı dizisi ilk olarak Behera ve Panda (1999) tarafından birinci dereceden

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \tag{1.1}$$

Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri elde edilirken ortaya çıkmıştır. (1.1) eşitliğini gerçekleyen pozitif n tamsayısına balans sayısı, r tamsayısına ise cobalans sayısı denir.

Balans sayıları B_n ve cobalans sayıları b_n ile gösterilirse bu dizilerin başlangıç terimleri $B_1 = 1,\ B_2 = 6$ ve $b_1 = 0,\ b_2 = 2$ olup genel terimleri $n \geq 2$ için sırasıyla

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \quad \text{ve} \quad b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$$

dir. Balans sayılarının karakteristik denklemi

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri

$$\gamma = 3 + \sqrt{8} \quad \text{ve} \quad \delta = 3 - \sqrt{8}$$

dir.

(1.1) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{(n-1)n}{2} = nr + \frac{r(r+1)}{2}$$

ve böylece

$$n = \frac{2r + 1 + \sqrt{8r^2 + 8r + 1}}{2} \quad \text{ve} \quad r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 + 1}}{2} \tag{1.2}$$

elde edilir. (1.2) de elde edilen eşitliklere göre,

$$\text{“}n \text{ bir balans sayısı} \Leftrightarrow 8n^2+1 \text{ bir tam kare”}$$

ve

$$\text{“}r \text{ bir cobalans sayısı} \Leftrightarrow 8r^2+8r+1 \text{ bir tam kare”}$$

olduğu görülür. Şu halde $\sqrt{8B_n^2+1}$ ve $\sqrt{8b_n^2+8b_n+1}$ birer tamsayı olup bu sayılara sırasıyla *n*. Lucas-balans ve *n*. Lucas-cobalans sayıları denir ve sırasıyla C_n ve c_n ile gösterilir. O halde

$$C_n=\sqrt{8B_n^2+1} \text{ ve } c_n=\sqrt{8b_n^2+8b_n+1}$$

dir. Bu dizilerin başlangıç terimleri $C_1=3, C_2=17$ ve $c_1=1, c_2=7$ olup genel terimleri ise $n\geq 2$ için sırasıyla

$$C_{n+1}=6C_n-C_{n-1} \text{ ve } c_{n+1}=6c_n-c_{n-1}$$

dir. Aşağıdaki çizelgede tüm balans sayılarının ilk on terimi verilmiştir.

Çizelge 1.1. Balans sayılarının ilk 10 terimi

n	B_n	b_n	C_n	c_n
1	1	0	3	1
2	6	2	17	7
3	35	14	99	41
4	204	84	577	239
5	1189	492	3363	1393
6	6930	2870	19601	8119
7	40391	16730	114243	47321
8	235416	97512	665857	275807
9	1372105	568344	3880899	1607521
10	7997214	3312554	22619537	9369319

Balans sayılarını önemli kılan husus bu sayıların, Pell ve Pell-Lucas sayıları ile olan ilişkisidir. Bu ilişki ilk olarak Ray (2009) tarafından ortaya çıkartılmıştır. Ray (2009), yukarıda da bahsedildiği üzere “n bir balans sayısı $\Leftrightarrow 8n^2+1$ bir tam kare” ifadesini dikkate alarak sıfırdan farklı herhangi bir *y* tamsayısı için

$$8x^2+1=y^2 \Leftrightarrow y^2-8x^2=1$$

Pell denklemini elde etmiştir (Barbeau 2003). Bu denklemi gerçekleyen en küçük pozitif çözüm $(y_1,x_1)=(3,1)$ olup denklemin diğer tüm tamsayı çözümleri

$$y_n+x_n\sqrt{8}=(3+\sqrt{8})^n \tag{1.3}$$

olmak üzere (y_n,x_n) şeklindedir. Benzer şekilde

$$y_n-x_n\sqrt{8}=(3-\sqrt{8})^n \tag{1.4}$$

olduğu görülür. Şu halde (1.3) ve (1.4) eşitliklerinden

$$x_n=\frac{(3+\sqrt{8})^n-(3-\sqrt{8})^n}{2\sqrt{8}} \tag{1.5}$$

elde edilir ki bu balans sayıları için Binet formülüdür. Diğer yandan

$$\alpha=1+\sqrt{2} \text{ ve } \beta=1-\sqrt{2}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\alpha^2=3+\sqrt{8} \text{ ve } \beta^2=3-\sqrt{8}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (1.5) eşitliğinden balans sayıları için Binet formülünün

$$B_n=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \tag{1.6}$$

şeklinde olduğu görülür. Böylece balans ve Pell sayıları arasında bir ilişki kurulmuş olur. Üstelik Pell sayılarının Binet formülünün

$$P_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{2}} \tag{1.7}$$

olduğu dikkate alınırsa (1.6) ve (1.7) eşitliklerinden

$$B_n=\frac{P_{2n}}{2}$$

olduğu açıktır. Benzer şekilde cobalans, Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarının Binet formülleri de sırasıyla

$$b_n=\frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2},\ C_n=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2} \text{ ve } c_n=\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{2}$$

şeklindedir. Üstelik bu sayıların genel terimleri Pell sayılarına bağlı olarak

$$b_n=\frac{P_{2n-1}-1}{2},\ \ C_n=P_{2n}+P_{2n-1} \text{ ve } c_n=P_{2n-1}+P_{2n-2}$$

şeklindedir.

Balans sayıları ile ilgili son zamanlarda birçok çalışma yapılmış olup halen de bu sayılar ile ilgili çalışmalar devam etmektedir. Liptai (2004), sadece 1 in hem balans hem de Fibonacci sayısının olduğunu, Liptai (2006) ise hiçbir Lucas-balans sayısının Fibonacci sayısı olmadığını göstermiştir. Daha sonra Szalay (2007), benzer problemi ele almış ve farklı bir yöntem bularak aynı sonuçları elde etmiştir. Kovacs ve ark. (2010) ise balans sayılarını genelleştirmişler ve $(a,b)-$balans sayılarını tanımlayarak bu sayılar ile ilgili cebirsel bağıntılar elde etmişlerdir. $a>0$ ve $b\geq 0$ aralarında asal sayılar olmak üzere belli *n* ve *r* pozitif tamsayıları için

$$(a+b)+(2a+b)+\cdots+(a(n-1)+b)=(a(n+1)+b)+\cdots+(a(n+r)+b)$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif n tamsayısı için $an+b$ sayısına $(a,b)-$balans sayısı, $ar+b$ sayısına ise $(a,b)-$cobalans sayısı denir ve bu sayılar sırasıyla $B_n^{(a,b)}$ ve $b_n^{(a,b)}$ ile gösterilir.

Pozitif *k* ve *x* tamsayıları için

$$\prod_k(x)=x(x+1)\cdots(x+k-1)$$

olsun. Kovacs ve ark. (2010), $k\in\{2,3,4\}$ tamsayıları için

$$\prod_k(x)=B_n^{(a,b)} \tag{1.8}$$

denkleminin sonsuz çoklukta tamsayı çözümünün olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra Tengely (2013) $k=5$ olması durumunu ele almış ve (1.8) deki denklemin tamsayı çözümünün olmadığını göstermiştir.

Son zamanlarda balans sayıları, Dash ve ark. (2012) tarafından $t-$balans sayılarına genişletilmiştir. $t\geq 0$ tamsayı olmak üzere

$$1+2+\cdots+n=(n+1+t)+(n+2+t)+\cdots+(n+r+t) \tag{1.9}$$

denklemini sağlayan pozitif *n* tamsayısına $t-$balans sayısı, eşitlikteki *r* tamsayısına ise $t-$cobalans sayısı denir ve bu sayılar sırasıyla B_n^t ve b_n^t ile gösterilir.

(1.9) eşitliği *r* ve *n* ye göre çözülürse

$$r=\frac{-(2n+2t+1)+\sqrt{8n^2+8n(1+t)+(2t+1)^2}}{2} \tag{1.10}$$

ve

$$n=\frac{(2r-1)+\sqrt{8r^2+8rt+1}}{2} \tag{1.11}$$

elde edilir. (1.10) eşitliğinden

"B_n^t bir $t-$balans sayısı $\Leftrightarrow 8(B_n^t)^2+8B_n^t(1+t)+(2t+1)^2$ bir tam kare"

ve (1.11) eşitliğinden

"b_n^t bir $t-$cobalans sayısı $\Leftrightarrow 8(b_n^t)^2+8tb_n^t+1$ bir tam kare"

olduğu görülür. Şu halde $\sqrt{8(B_n^t)^2+8B_n^t(1+t)+(2t+1)^2}$ ve $\sqrt{8(b_n^t)^2+8tb_n^t+1}$ de birer tamsayı olup bu sayılara sırasıyla *n*. Lucas $t-$balans ve *n*. Lucas $t-$cobalans sayıları denir ve sırasıyla C_n^t ve c_n^t ile gösterilir. O halde

$$C_n^t=\sqrt{8(B_n^t)^2+8B_n^t(1+t)+(2t+1)^2} \text{ ve } c_n^t=\sqrt{8(b_n^t)^2+8tb_n^t+1} \tag{1.12}$$

dir. Aşağıdaki çizelgede 5-balans sayılarının ilk 10 terimi verilmiştir.

Çizelge 1.2. 5-balans sayılarının ilk 10 terimi

n	B_n^5	b_n^5	C_n^5	c_n^5
1	4	1	21	7
2	12	4	43	17
3	17	6	57	23
4	39	15	119	49
5	85	34	249	103
6	114	46	331	137
7	242	99	693	287
8	510	210	1451	601
9	679	280	1929	799
10	1425	589	4039	1673

Her ne kadar $t-$balans sayıları $t\geq 0$ için tanımlanmış olsa da genel olarak $t\geq 2$ için ele alınır. Çünkü $0-$ve $1-$balans sayıları, daha önce ele alınan balans sayılarına bağlı olarak elde edilebilir. Gerçekten de

$$B_n^0=b_{n+1},\ b_n^0=B_n,\ C_n^0=c_{n+1},\ c_n^0=C_n \text{ ve } B_n^1=B_{n+1}-1,\ b_n^1=b_{n+1},\ C_n^1=C_{n+1},\ c_n^1=c_{n+1}$$

dir.

2. BALANS SAYILARI

Bu bölümde balans sayıları, bu sayıların bazı temel özellikleri, matrisler ve balans sayılarının terimleri arasındaki ilişki, bu sayıların Pell ve Pell-Lucas sayıları ile olan ilişkisinden ve son olarak da balans fonksiyonlarından bahsedilecektir.

2.1. Balans Sayıları.

Bu kısımda balans sayıları ile ilgili bazı önemli teoremlere ve sonuçlara yer verilecektir. Hatırlanacağı üzere bir önceki bölümde balans sayılarının ilk defa Behera ve Panda (1999) tarafından birinci dereceden

$$1+2+\cdots+(n-1)=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)$$

Diophantine denkleminin tamsayı çözümleri incelenirken ortaya çıktığı belirtilmişti. Sonrasında Ray (2009), balans sayıları ile Pell sayıları arasında bir ilişki kurarak tüm balans sayılarının Binet formüllerinin

$$B_n=\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}},\, b_n=\frac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2},\; C_n=\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2} \quad \text{ve } c_n=\frac{\alpha^{2n-1}+\beta^{2n-1}}{2}$$

şeklinde olduğunu ve bu sayıların genel terimlerinin de Pell sayılarına bağlı olarak

$$B_n=\frac{P_{2n}}{2},\; b_n=\frac{P_{2n-1}-1}{2},\quad C_n=P_{2n}+P_{2n-1} \quad \text{ve} \quad c_n=P_{2n-1}+P_{2n-2}$$

şeklinde olduğunu göstermişti. Balans sayıları ile ilgili olarak Behera ve Panda (1999) aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

2.1.1. Teorem. $n\geq 2$ için

$$B_n^2=1+B_{n-1}B_{n+1}$$

dir (Behera ve Panda 1999).

Ray (2009), Behera ve Panda (1999) nın elde ettiği bu bağıntıyı kullanarak, balans sayıları arasında aşağıdaki gibi bağıntıların olduğunu göstermiştir.

2.1.2. Teorem. B_n balans sayısı olmak üzere

(i) Herhangi *m* ve *n* pozitif tamsayıları için $B_{m+n} = B_m B_{n+1} - B_{m-1} B_n$ dir.

(ii) Herhangi pozitif n tamsayısı için $B_{2n-1} = B_n^2 - B_{n-1}^2$ dir.

(iii) Herhangi $m > n$ pozitif tamsayıları için $B_{m+n} B_{m-n} = (B_m + B_n)(B_m - B_n)$ dir (Ray 2009).

Balans ve Lucas-balans sayıları arasındaki ilişkinin

$$C_n = \sqrt{1 + 8B_n^2}$$

şeklinde olduğu dikkate alınırsa balans ve Lucas-balans sayıları arasında aşağıdaki gibi bir ilişkinin olduğu görülür.

2.1.3. Teorem. Herhangi *m* ve *n* pozitif tamsayıları için

$$B_{m+n} = B_m C_n + C_m B_n$$

dir (Panda 2007).

2.1.4. Teorem. B_n balans ve C_n Lucas-balans sayılar olmak üzere

(i) Herhangi *m* ve *n* pozitif tamsayıları için $C_{m+n} = C_m C_n + 8B_m B_n$ dir.

(ii) Herhangi pozitif *n* tamsayısı için $B_{2n} = 2B_n C_n$ ve $C_{2n} = C_n^2 + 8B_n^2$ dir.

(iii) Herhangi $m > n \in \mathbb{Z}^+$ için $B_{m-n} = B_m C_n - C_m B_n$ ve $C_{m-n} = C_m C_n - 8B_m B_n$ dir (Ray 2009).

Nasıl ki Fibonacci tamsayı dizisi için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

şeklinde bir bağıntı varsa balans sayıları için de benzer bir bağıntı aşağıdaki gibidir.

2.1.5. Teorem. B_n balans sayısı için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = 3 + \sqrt{8}$$

dir (Behera ve Panda 1999).

Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri arasındaki cebirsel bağıntılara benzer şekilde balans sayılarının terimleri arasında da aşağıdaki gibi cebirsel bağıntılar vardır.

2.1.6. Teorem. Her bir $n > 1$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} B_{n+1}B_{n-1} &= (B_n + 1)(B_n - 1) \\ B_n &= B_k B_{n-k} - B_{k-1}B_{n-k-1} \\ B_{2n} &= B_n^2 - B_{n-1}^2 \\ B_{2n+1} &= B_n(B_{n+1} - B_{n-1}) \end{aligned}$$

dir (Behera ve Panda 1999).

2.1.6. Teoremine benzer şekilde, Panda (2009) aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

2.1.7. Teorem. B_n balans sayısı olmak üzere

(i) $0 < k < m$ özelliğindeki tamsayılar için $(B_m + B_k)(B_m - B_k) = B_{m+k}B_{m-k}$ dır.

(ii) Her pozitif *m* tamsayısı için

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 + \cdots + B_{2m-1} &= B_m^2 \\ B_2 + B_4 + \cdots + B_{2m} &= B_m B_{m+1} \\ B_1 + B_2 + \cdots + B_{2m} &= B_m(B_m B_{m+1}) \end{aligned}$$

dir (Panda 2009).

Yukarıdaki teoremlerden farklı olarak Ray (2012) aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

2.1.8. Teorem. (i) $k, m, n, s\,(m > 0)$ özelliğinde tamsayılar olmak üzere

$$B_s^m B_{km+n} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} B_k^j B_{k-s}^{m-j} B_{js+n}$$

$$B_s^m C_{km+n} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} B_k^j B_{k-s}^{m-j} C_{js+n}$$

dir.

(ii) $k > l \geq 1$ özelliğindeki *k* ve *l* tamsayıları için

$$B_{k-n}B_{k+n} = B_k^2 - B_n^2,\; B_{2n} = 2B_nC_n \text{ ve } C_{2n} = C_n^2 + 8B_n^2$$

dir.

(iii) $n, k \neq 0$ tamsayıları için

$$\frac{B_{kn}}{B_k} \equiv \begin{cases} 2m+1 \pmod{8B_k^2} & n = 2m+1 \text{ ise} \\ 2mC_k \pmod{8B_k^2} & n = 2m \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

(iv) $m, n \geq 1$ tamsayıları için

$$B_{mn} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} B_m^i B_{m-1}^{n-i} B_i \equiv 0 \pmod{B_m}$$

dir (Ray 2012).

p asal ve a, $(a, p) = 1$ özelliğinde tamsayı olmak üzere, Legendre sembolü $\left(\frac{a}{p}\right)$ ile gösterilir ve $x^2 \equiv a \pmod{p}$ nın çözümünün olması durumunda $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, çözümünün olmaması durumunda $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ ve $p \mid a$ olması durumunda da $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ olarak tanımlanır. Legendre sembolüne bağlı olarak, Ray (2012) aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

2.1.9. Teorem. (i) Her p tek asal sayısı için

$$B_p \equiv \left(\frac{p}{8}\right) \pmod{p} \qquad C_p \equiv 3 \pmod{p}$$

$$B_{p-1} \equiv 3\left(\left(\frac{p}{8}\right) - 1\right) \pmod{p} \qquad B_{p+1} \equiv 3\left(\left(\frac{p}{8}\right) + 1\right) \pmod{p}$$

dir.

(ii) B_m, B_n balans sayılarının obebi (B_m, B_n) ile gösterilirse

$$(B_m, B_n) = B_{(m,n)} \text{ ve } B_m \mid B_n \Leftrightarrow m \mid n$$

dir (Ray 2012).

2.1.10. Teorem. $n \geq 1$ tamsayısı için

$$B_{4n} - 6 = 2B_{2n-1}C_{2n+1} \qquad B_{4n+1} + 1 = 2B_{2n+1}C_{2n}$$
$$B_{4n+2} + 6 = 2B_{2n+2}C_{2n} \qquad B_{4n+3} - 1 = 2B_{2n+1}C_{2n+2}$$
$$B_{2n} = 2B_nC_n \qquad B_{4n+1} - 1 = 2B_{2n}C_{2n+1}$$
$$B_{4n+3} + 1 = 2B_{2n+2}C_{2n+1} \qquad B_{4n+3} + 1 = 4B_{n+1}C_{n+1}C_{2n+1}$$

$$C_{4n+1}-3=16B_{2n}B_{2n+1} \qquad C_{4n+1}+3=2C_{2n}C_{2n+1}$$
$$C_{4n+3}+3=2C_{2n+1}C_{2n+2} \qquad C_{4n+3}-3=16B_{2n+1}B_{2n+2}$$
$$C_{4n+3}-3=32B_{n+1}C_{n+1}B_{2n+1}$$

dir (Ray 2013).

Ayrıca Ray (2013a), balans ve Lucas-balans sayılarının negatiflerini

$$B_{-n}=6B_{-n+1}-B_{-n+2}=-B_n \ \text{ ve } \ C_{-n}=6C_{-n+1}-C_{-n+2}=C_n$$

olarak tanımlayarak aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

2.1.11. Teorem. B_{-n} ve C_{-n} negatif balans sayıları için

$$B_{-(n+1)}=(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left[-6-2\cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)\right]$$

ve

$$C_{-n}=\frac{(-1)^{n-2}}{2}\prod_{k=1}^{n}\left[-6-2\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right)\right]$$

dir (Ray 2013a)

Yukarıda verilen teoremlerden farklı olarak, Gözeri ve ark. (2017) da aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

2.1.12. Teorem. (i) Balans sayılarının genel terimleri Pell sayılarına bağlı olarak

$$B_n=P_n^2+P_nP_{n-1} \ \text{ ve } \ b_n=\begin{cases} P_{n-1}^2+P_nP_{n-1} & n\geq 1 \text{ tek} \\ P_{n-1}^2+P_nP_{n-1}-1 & n\geq 2 \text{ çift}\end{cases}$$

dir.

(ii) Ardışık iki balans ve cobalans sayılarının toplamı

$$B_n+B_{n-1}=P_{2n-1}+P_{2n-2}, \quad n\geq 1$$
$$b_n+b_{n-1}=P_{2n-2}+P_{2n-3}-1, \ n\geq 2$$

ve farkı

$$B_n-B_{n-1}=P_n^2+P_{n-1}^2, \ \ n\geq 1$$
$$b_n-b_{n-1}=P_{2n-2}, \ \ n\geq 1$$

dir.

(iii) $n \geq 1$ tek tamsayısı için *n*. balans ve cobalans sayılarının toplamı tam karedir ve

$$B_n + b_n = (P_n + P_{n-1})^2$$

dir. Farkları ise iki kare farkıdır ve

$$B_n - b_n = P_n^2 - P_{n-1}^2$$

dir. $n \geq 2$ çift tamsayısı için *n*. balans ve cobalans sayılarının toplamı tam karenin 1 eksiğidir ve

$$B_n + b_n = (P_n + P_{n-1})^2 - 1$$

dir. Farkları ise iki kare farkının 1 fazlasıdır ve

$$B_n - b_n = P_n^2 - P_{n-1}^2 + 1$$

dir. Esasında tüm $n \geq 1$ için *n*. balans ve cobalans sayılarının toplamı ve farkı

$$B_n + b_n = \frac{P_{2n} + P_{2n-1} - 1}{2} \quad \text{ve} \quad B_n - b_n = \frac{P_{2n} - P_{2n-1} + 1}{2}$$

dır.

(iv) *n*. balans sayısının cobalans sayısına oranı

$$\frac{B_n}{b_n} = \begin{cases} \dfrac{P_n}{P_{n-1}} & n \geq 3 \text{ tek} \\[2ex] \dfrac{P_n + P_{n-1}}{P_{n-1} + P_{n-2}} & n \geq 2 \text{ çift} \end{cases}$$

dir. Tüm $n \geq 1$ için bu oran

$$\frac{B_n}{b_n} = \frac{P_{2n}}{P_{2n-1} - 1}$$

dir.

(v) $n \geq 1$ tamsayısı için *n*. balans ve cobalans sayılarının kareleri toplamı

$$B_n^2 + b_n^2 = 5b_n^2 + (B_{n-1} + 1)(B_{n-1} + 4b_n + 1)$$

ve kareleri farkı

$$B_n^2 - b_n^2 = B_n + 2B_n b_n + b_n$$

dır.

(vi) $n \geq 1$ için *n*. Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarının genel terimleri

$$C_n = 2B_n + 2b_n + 1 \text{ ve } c_n = 2B_n - 2b_n - 1$$

dır.

(vii) $n \geq 1$ tamsayısı için *n.* Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarının toplamı ve farkı

$$C_n + c_n = 4B_n \;\; \text{ve} \;\; C_n - c_n = 4b_n + 2$$

dir.

(viii) $n \geq 1$ tamsayısı için *n.* Lucas-balans ve Lucas-cobalans sayılarının kareleri toplamı ve farkı

$$C_n^2 + c_n^2 = 2C_n(C_n - c_n) - 2 \;\; \text{ve} \;\; C_n^2 - c_n^2 = 2C_n c_n + 2$$

dir (Gözeri ve ark, 2017).

Pell sayılarının toplamı ile balans sayıları arasındaki belki de en önemli bağıntı, Panda ve Ray (2011) tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

2.1.13. Teorem. (i) İlk $2n-1$ Pell sayısının toplamı, n.balans ve n.cobalans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{2n-1} P_i = B_n + b_n$$

dir.

(ii) İlk $2n$ Pell sayısının toplamı, *n.* balans ve $(n+1)$. cobalans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{2n} P_i = B_n + b_{n+1}$$

dir.

(iii) 1 den *n* ye kadar çift indisli Pell sayılarının toplamı, $(n+1)$. cobalans sayısı, yani

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i} = b_{n+1}$$

dir.

(iv) 1 den *n* ye kadar tek indisli Pell sayılarının toplamı, *n*. balans sayısı, yani

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i-1} = B_n$$

dir (Panda ve Ray 2011).

Yukarıdaki teoreme benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

2.1.14. Teorem. (i) İlk $2n-1$ Pell-Lucas sayısının toplamı, n.Lucas-balans ve n.Lucas -cobalans sayılarının toplamı, yani

$$\sum_{i=1}^{2n-1} Q_i = C_n + c_n$$

dir.

(ii) P_n Pell sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} = c_{n+1}P_{2n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n} P_{2i} = 2B_n c_{n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n} P_{2i+1} = 2B_n C_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} P_{2i-1} = B_n C_n \qquad \sum_{i=0}^{2n} (P_{2i+1} + P_{2i+2}) = C_{n+1}c_{n+1}$$

dir.

(iii) B_n balans sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{2n} B_i = B_n c_{n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n+1} B_i = B_{n+1}c_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} B_{2i} = C_n c_{n+1} P_{2n} P_{2n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n} (B_i + B_{i+1}) = 8B_n B_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (B_i + B_{i+1}) = c_{n+1}c_{n+2} \qquad \sum_{i=0}^{2n} (B_{2i+1} + B_{2i+2}) = c_{n+1}c_{2n+2}P_{2n+1}$$

dir.

(iv) Q_n Pell-Lucas sayısı olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{2i} = B_{n+1} + b_n + \sum_{i=1}^{n-1} C_i \qquad \sum_{i=1}^{n} Q_{2i-1} = B_n + b_n + \sum_{i=1}^{n} c_i$$

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i} = 8B_n(2b_{n+1} + 1) \qquad \sum_{i=1}^{2n+1} Q_i = 2(2B_{n+1} - 1)$$

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_i = 4b_{n+1}$$

dir (Gözeri ve ark. 2017).

Santana ve Diaz-Barrero (2006), ilk $4n+1$ Pell sayılarının toplamının bir tam kare, yani

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{2i} 2^i\right]^2$$

olduğunu göstermişlerdir. Benzer şekilde Gözeri ve ark. (2017) da Pell, Pell-Lucas ve balans sayılarının bazı özel toplamları ile ilgili olarak aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

2.1.15. Teorem. P_n Pell, Q_n Pell-Lucas ve B_n balans sayıları olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{4n-3} P_i = c_n^2 \qquad 1 + \sum_{i=1}^{4n-1} P_i = C_n^2 \qquad \sum_{i=1}^{2n} Q_{2i-1} = (4B_n)^2$$

$$\sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1} = (C_n P_{2n})^2 \qquad \sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1} = B_{2n}^2 \qquad \frac{\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1}}{2} = c_{n+1}^2$$

$$\sum_{i=0}^{2n} B_{2i+1} = [P_{2n+1}(P_{2n} + P_{2n+1})]^2$$

dir (Gözeri ve ark, 2017).

Tekcan ve Tayat (2014), ilk $2n+1$ Pell sayılarının toplamı ele almışlar ve n nin çift olması durumunda bu toplamın bir tam kare iken n nin tek olması durumunda bu toplamın bir tam karenin yarısı olduğunu göstererek aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

2.1.16. Teorem. İlk $2n+1$ Pell sayılarının toplamı

$$\sum_{i=1}^{2n+1} P_i = \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2}\right)^2 & n \text{ çift ise} \\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

Santana ve Diaz-Barrero (2006), ilk $4n+1$ Pell sayılarının toplamı ile ilgili olarak yukarıda elde ettikleri bağıntıda, eşitliğin sağ tarafının hangi (belli bir) tamsayı dizisinin karesi olduğunu belirleyememişlerdir. Tekcan ve Tayat (2014) ise bu problemi ele almışlar ve 2.1.16. Teoremini dikkate alarak $n \geq 0$ için tanımladıkları

$$X_n = \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2} \quad \text{ve} \quad Y_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{2}}$$

tamsayı dizileri yardımıyla aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

2.1.17. Teorem. İlk $4n+1$ Pell sayılarının toplamı

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = [2X_n^2 - 2X_nY_{n-1} + (-1)^{n+1}]^2$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

Ayrıca tanımladıkları bu iki dizi ile ilgili olarak aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

2.1.18. Teorem. X_n ve Y_n dizilerinin terimleri arasında $n \geq 2$ için

$$X_{2n} = 6X_{2n-2} - X_{2n-4} \qquad X_{2n+1} = 6X_{2n-1} - X_{2n-3}$$
$$Y_{2n} = 6Y_{2n-2} - Y_{2n-4} \qquad Y_{2n+1} = 6Y_{2n-1} - Y_{2n-3}$$

şeklinde indirgeme bağıntısı vardır. Üstelik

$$X_{2n} = \frac{2X_nX_{n-1} + Y_nY_{n-1}}{2} \qquad Y_{2n} = X_nY_{n-1} + X_{n-1}Y_n,$$

$$Y_{2n-1} = 2Y_{n-1}X_{n-1} \qquad Y_n = \frac{X_{n+1} + X_{n-1}}{2}$$

$$Y_{n-1}^2 = X_{2n-1} + (-1)^{n+1} \qquad Y_{2n-1}^2 - 16 = Y_{2n+1}Y_{2n-3}$$

$$Y_{2n-2}^2 + 16 = Y_{2n}Y_{2n-4} \qquad \frac{Y_{2n-1}^2 + 2}{2} = X_{2n-1}^2$$

$$\frac{Y_{2n-2}^2 - 2}{2} = X_{2n-2}^2 \qquad \frac{Y_{2n-1}^2 - Y_{2n-3}^2}{4} = Y_{4n-3}$$

$$Y_{n-1}Y_{n+m-1} = X_{2n+m-1} + (-1)^{n+1}X_{m-1} \qquad X_{m-1}Y_{n-1} = \frac{Y_{n+m-1} + (-1)^m Y_{n-m-1}}{2}$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

2.1.19. Teorem. Q_n Pell-Lucas ve B_n balans sayıları olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i-1} = Y_{2n-1}^2, \qquad \frac{\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1}}{2} = X_{2n}^2 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=0}^{2n} B_{2i+1} = \left(\frac{X_{2n}Y_{2n}}{2}\right)^2$$

dir (Tekcan ve Tayat 2014).

Tekcan ve Tayat (2014) ayrıca tam kareler ile ilgili olarak aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

2.1.20. Teorem. X_n ve Y_n dizileri için

(i) $\frac{X_{4n+1}-1}{2}$ tam karedir ve $\sqrt{\frac{X_{4n+1}-1}{2}}=X_{2n}$ dir.

(ii) $\frac{Y_n^2+Y_{n-1}Y_{n+1}}{4}$ tam karedir ve $\sqrt{\frac{Y_n^2+Y_{n-1}Y_{n+1}}{4}}=X_n$ dir.

(iii) $\frac{Y_{2n-1}^2}{2}+1$ tam karedir ve $\sqrt{\frac{Y_{2n-1}^2}{2}+1}=X_{2n-1}$ dir.

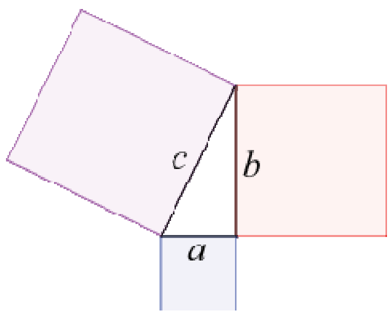
(iv) $\frac{Y_{2n-2}^2}{2}-1$ tam karedir ve $\sqrt{\frac{Y_{2n-2}^2}{2}-1}=X_{2n-2}$ dir.

(v) $\frac{Y_{n-1}^2}{4}+Y_{2n-2}+2(-1)^n$ tam karedir ve $\sqrt{\frac{Y_{n-1}^2}{4}+Y_{2n-2}+2(-1)^n}=\frac{Y_{n-1}}{2}+Y_{n-2}$ dir

(Tekcan ve Tayat 2014).

$a^2+b^2=c^2$ eşitliğini gerçekleyen pozitif a,b,c tamsayıları için (a,b,c) üçlüsüne Pisagor (Pythagorean) üçlüsü denir.

Şekil 2.1. Pisagor üçlüsü



Örneğin, (3,4,5), (5,12,13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41) ve (11, 60, 61) birer Pisagor üçlüleridir.

Bazı tamsayı dizileri ile Pisagor üçlüleri arasında bir ilişki vardır. Örneğin, Pell sayıları için

$$(2P_nP_{n+1}, P_{n+1}^2-P_n^2, P_{n+1}^2+P_n^2)$$

bir Pisagor üçlüsüdür. Gözeri ve ark. (2017), balans sayıları ile Pisagor üçlüleri arasında aşağıdaki gibi bağıntıların olduğunu göstermişlerdir.

2.1.21. Teorem. (i) $n \geq 1$ tamsayısı için

$$x = 4(-1)^n \sum_{i=1}^{n} (-1)^n B_i, \quad y = (-1)^n \left[1 + 4\sum_{i=1}^{n} (-1)^n B_i \right], \quad z = B_{n+1} - B_n$$

olmak üzere (x, y, z) bir Pisagor üçlüsüdür.

(ii) $n \geq 1$ tek tamsayısı için

$$a_1 = (b_{\frac{n+3}{2}} - b_{\frac{n+1}{2}})(b_{\frac{n+3}{2}} - 2b_{\frac{n+1}{2}} + b_{\frac{n-1}{2}})$$

$$b_1 = 3B^2_{\frac{n+1}{2}} + 2B_{\frac{n+1}{2}} B_{\frac{n-1}{2}} - B^2_{\frac{n-1}{2}}$$

$$c_1 = 5B^2_{\frac{n+1}{2}} - 2B_{\frac{n+1}{2}} B_{\frac{n-1}{2}} + B^2_{\frac{n-1}{2}}$$

olmak üzere (a_1, b_1, c_1) bir Pisagor üçlüsü ve $n \geq 2$ çift tamsayısı için

$$a_2 = (b_{\frac{n+2}{2}} - b_{\frac{n}{2}})(b_{\frac{n+4}{2}} - 2b_{\frac{n+2}{2}} + b_{\frac{n}{2}})$$

$$b_2 = B^2_{\frac{n+2}{2}} - 2B_{\frac{n+2}{2}} B_{\frac{n}{2}} - 3B^2_{\frac{n}{2}}$$

$$c_2 = B^2_{\frac{n+2}{2}} - 2B_{\frac{n+2}{2}} B_{\frac{n}{2}} + 5B^2_{\frac{n}{2}}$$

olmak üzere (a_2, b_2, c_2) bir Pisagor üçlüsüdür (Gözeri ve ark. 2017).

Bazı Pell denklemlerinin tamsayı çözümleri balans sayılarına bağlı olarak verilebilir. Örneğin, $x^2 - 8y^2 = 1$ pozitif Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$(x_n, y_n) = (C_n, B_n)$$

dir.

Aşağıdaki teoremde bazı özel Pell denklemlerinin pozitif tamsayı çözümleri balans sayılarına bağlı olarak verilmiştir.

2.1.22. Teorem. (i) $x^2 - 2y^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (4B_n - c_n, 2B_n)$$

dir.

(ii) $x^2 - 2y^2 = -1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (c_n, B_n - B_{n-1})$$

dir.

(iii) $x^2 - 2y^2 = 2$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (4b_n + 2, B_n + B_{n-1})$$

dir.

(iv) $x^2 - 2y^2 = -2$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (B_n + B_{n-1} + C_n, 3B_n - B_{n-1})$$

dir.

(v) $x^2 - 2y^2 = 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (2b_n + 2b_{n+1} + 2, 4B_n)$$

dir.

(vi) $x^2 - 2y^2 = -4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (8B_n - 2C_n,\ 4B_{n-1} + 2C_{n-1})$$

dir.

(vii) $x^2 - 8y^2 = 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (c_{n+1} - c_n,\ 2b_{n+1} - 2b_n - 2B_n)$$

dir.

(viii) $x^2 - 8y^2 = -4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (2c_n,\ B_n - B_{n-1})$$

dir.

(ix) $x^2 - 32y^2 = 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = (3C_n - 6b_n - 2B_{n-1} - 3,\ c_{n+1} - B_{n+1})$$

dir (Gözeri ve ark. 2017).

Benzer şekilde Ray (2009), $x^2 + (x+1)^2 = y^2$ denkleminin tamsayı çözümlerini aşağıdaki gibi elde etmiştir.

2.1.23. Teorem. $x^2+(x+1)^2=y^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{\sqrt{\frac{C_n-1}{2}}-1}{2},\frac{\sqrt{1+C_n}}{2}\right)$$

dir (Ray 2009).

2.2. Balans Sayıları ve Katsayılar Matrisi.

Bu alt bölümde balans sayılarının katsayılar matrisi ile balans sayıları arasındaki ilişki ele alınacaktır. Balans sayılarının katsayılar matrisi

$$M_B=\begin{bmatrix}6 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

olup bu matris ile ilgili olarak Ray (2012) aşağıdaki teoremi vermiştir.

2.2.1. Teorem. M_B matrisinin n. kuvveti

$$M_B^n=\begin{bmatrix}B_{n+1} & -B_n\\ B_n & -B_{n-1}\end{bmatrix}$$

dir (Ray 2012).

Üstelik Ray (2012) yukarıdaki teoremi kullanarak aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

2.2.2. Sonuç. $k,l\geq 1$ tamsayıları için

$$B_k^2-B_{k-1}B_{k+1}=1 \text{ ve } B_{k+l}=B_kB_{l+1}-B_{k-1}B_l$$

dir (Ray 2012).

Ayrıca Ray (2012), $a+b=c+d$ özelliğindeki pozitif a,b,c,d tamsayıları için

$$M_B^aM_B^b=M_B^cM_B^d$$

eşitliğini kullanarak balans sayılarının terimleri arasında

$$B_aB_b-B_cB_d=B_{a-1}B_{b-1}-B_{c-1}B_{d-1}$$

şeklinde bir bağıntının olduğunu göstermiştir. Daha sonra verilen herhangi bir $r \geq 0$ tamsayısı için bu bağıntının daha genel hali olan

$$B_a B_b - B_c B_d = B_{a-r} B_{b-r} - B_{c-r} B_{d-r}$$

bağıntısını elde etmiştir. Ayrıca $n \geq 0$ için M_B matrisinin n. kuvvetinin

$$M_B^n = B_n M_B - B_{n-1} I_2$$

olduğunu göstermiştir ve aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

2.2.3. Teorem. B_n balans sayıları olmak üzere her $k \geq 1$ tamsayısı için

$$B_{kn} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-1} \binom{n}{r} (B_k)^r (B_{k-1})^{n-r} B^r = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n+1} \binom{n}{r} (B_k)^r (B_{k+1})^{n-r} B^r$$

dir (Ray 2012).

Yukarıdaki teoremde $k = 2$ ve $k = 3$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.2.4. Sonuç. B_n balans sayıları için

$$B_{2n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} 6^r B_r \quad \text{ve} \quad B_{3n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} 35^r B_r$$

dir (Ray 2012).

Balans sayılarının karakteristik denkleminin $\gamma = 3 + \sqrt{8}$ ve $\delta = 3 - \sqrt{8}$ kökleri için aşağıdaki teorem verilebilir.

2.2.5. Teorem. M_B katsayılar matrisinin n. kuvvetinin özdeğerleri γ ve δ köklerinin n. kuvvetidir (Ray 2012).

Yukarıdaki M_B katsayılar matrisinden farklı olarak

$$N_B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisi tanımlansın. Bu takdirde $B_{n+1} - 3B_n = C_n$ olduğundan

$$N_B M_B^n = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{n+1} & -B_n \\ B_n & -B_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3B_{n+1} - B_n & -(3B_n - B_{n-1}) \\ B_{n+1} - 3B_n & -(B_n - 3B_{n-1}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} C_{n+1} & -C_n \\ C_n & -C_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir. Üstelik M_B ve N_B matrisleri için

$$M_B^n = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} C_{n+1} & -C_n \\ C_n & -C_{n-1} \end{bmatrix} N_B$$

dir. Balans sayıları arasındaki

$$B_a B_b - B_c B_d = B_{a-r} B_{b-r} - B_{c-r} B_{d-r}$$

bağıntısına benzer bağıntı, balans ve Lucas-balans sayıları arasında da vardır ve

$$B_a C_b - B_c C_d = B_{a-r} C_{b-r} - B_{c-r} C_{d-r}$$

şeklindedir. Bu eşitlikte özel olarak $a = n+1$, $b = n-1$, $c = d = n$ ve $r = n-1$ olarak alınırsa

$$B_{n+1} C_{n-1} - B_n C_n = 3$$

olduğu görülür. N_B matrisi için $N_B^{-1} = \frac{1}{8} N_B$ olup

$$M_B N_B = N_B M_B$$

dir. Dolayısıyla $a+b = c+d$ özelliğindeki pozitif a, b, c, d tamsayıları için

$$M_B^a M_B^b = M_B^c M_B^d \text{ ve } 8 M_B^a M_B^b = M_B^c N_B M_B^d N_B$$

dir. Buna göre $r \geq 0$ tamsayısı için

$$8 B_a B_b - C_c C_d = 8 B_{a-r} B_{b-r} - C_{c-r} C_{d-r}$$

dir. Lucas-balans sayılarının

$$C_n = \sqrt{8 B_n^2 + 1}$$

olarak tanımlandığına dikkat edilirse, yukarıdaki en son eşitlikte

$$a = b = c = d = r = n$$

olarak alınırsa

$$C_n^2 - 8 B_n^2 = 1$$

olduğu görülür.

2.2.6. Teorem. B_n balans ve C_n Lucas-balans sayıları olmak üzere $m \geq 0$ tamsayısı için

$$C_{n+1}B_{m+1} - C_nB_m = 3B_{m+n+1} - B_{m+n} \quad \text{ve} \quad C_nB_{m+1} - C_{n-1}B_m = B_{m+n+1} - 3B_{m+n}$$

dir (Ray 2012).

2.3. Balans Fonksiyonları.

Bu alt bölümde ilk olarak balans sayılarına bağlı olarak tanımlanan balans fonksiyonları ele alınacaktır. Daha sonra bu fonksiyonlara benzer şekilde tanımlanan Lucas-balans, Lucas-cobalans, Pell, Pell-Lucas ve kare üçgensel fonksiyonlar verilecektir.

Behera ve Panda (1999), verilen herhangi bir x balans sayısı için

$$F(x) = 2x\sqrt{8x^2+1},\ G(x) = 3x + \sqrt{8x^2+1}, H(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2+1}$$

ve

$$K(x) = 6x\sqrt{8x^2+1} + 16x^2 + 1$$

fonksiyonlarını tanımlamışlar ve bu fonksiyonların değerlerinin de birer balans sayısı olduğunu göstererek aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

2.3.1. Teorem. x herhangi bir balans sayısı olmak üzere $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ ve $K(x)$ değerleri de birer balans sayısıdır (Behera ve Panda 1999).

Fonksiyonların tanımlarına dikkat edilirse her x balans sayısı için $F(x)$ daima çifttir. Ancak x tek balans sayısı iken $G(x)$ çift ve x çift balans sayısı ise $G(x)$ tektir.

Behera ve Panda (1999), yukarıdaki fonksiyonlardan farklı olarak iki ve üç değişkenli

$$f(x,y) = x\sqrt{8y^2+1} + y\sqrt{8x^2+1}$$

ve

$$f(x,y,z) = x\sqrt{8y^2+1}\sqrt{8z^2+1} + y\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8z^2+1} + z\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8y^2+1} + 8xyz$$

fonksiyonlarını (burada x, y ve z balans sayılarıdır) tanımlayarak aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

2.3.2. Teorem. x, y ve z herhangi üç balans sayısı olmak üzere $f(x,y)$ ve $f(x,y,z)$ değerleri de birer balans sayısıdır (Behera ve Panda 1999).

Behera ve Panda (1999) nın balans sayıları için ele aldıkları balans fonksiyonlarına benzer şekilde Ray (2009) da benzer problemi cobalans sayıları için ele almıştır. x ve y herhangi iki cobalans sayısı olmak üzere Ray (2009) aşağıdaki fonksiyonları tanımlayarak

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$
$$\widetilde{f}(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$
$$g(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 8$$
$$h(x) = 8x^2 + 8x + 1 + (2x+1)\sqrt{8x^2 + 8x + 1}$$
$$t(x,y) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2(2x+1)(2y+1) + (2x+1)\sqrt{8y^2 + 8y + 1} \\ + (2y+1)\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + \sqrt{8x^2 + 8x + 1}\sqrt{8y^2 + 8y + 1} - 1 \end{bmatrix}$$

bu fonksiyonların değerlerinin de birer cobalans sayısı olduğunu göstermiş ve aşağıdaki teoremi vermiştir.

2.3.3. Teorem. x ve y herhangi iki cobalans sayı olmak üzere $f(x), g(x), h(x)$ ve $t(x,y)$ değerleri de birer cobalans sayısıdır. Üstelik x den sonra gelen cobalans sayısı $f(x)$ iken x den önceki cobalans sayısı $\widetilde{f}(x)$ değeridir (Ray 2009).

Yukarıda bahsedilen

$$F(x), G(x), H(x), K(x),\ f(x,y),\ f(x,y,z) \text{ ve } f(x), g(x),\ h(x),\ t(x,y)$$

fonksiyonlarının mertebeleri belli değildir. Yani x, n. balans sayısı iken $F(x)$ değerinin kaçıncı balans sayısı olduğu belli değildir. Benzer şekilde x, n. cobalans sayısı iken $f(x)$ değerinin kaçıncı cobalans sayısı olduğu belli değildir. Tekcan ve ark. (2015), ilk olarak bu problemi ele almışlar ve bu fonksiyonların kaçıncı balans ve kaçıncı cobalans sayısı olduğunu aşağıdaki gibi belirlemişlerdir.

2.3.4. Teorem. $F(x),\ G(x), H(x), K(x),\ f(x,y),\ f(x,y,z)$ balans fonksiyonları için

$$F(B_n)=B_{2n},\ G(B_n)=B_{n+1},\quad H(B_n)=B_{n+2},$$
$$K(B_n)=B_{2n+1},\ f(B_n,B_k)=B_{n+k},\ f(B_n,B_k,B_l)=B_{n+k+l}$$

ve $f(x),\ g(x), h(x), t(x,y)$ cobalans fonksiyonları için

$$f(b_n)=b_{n+1}, g(b_n)=b_{n+2},\ h(b_n)=b_{2n},\ f(b_n,b_k)=b_{n+k}$$

dır (Tekcan ve ark. 2015).

Daha sonra bu fonksiyonlardan farklı balans ve cobalans fonksiyonlarının olup olmadığı problemi üzerinde durmuşlar ve esasında sonsuz çoklukta balans ve cobalans fonksiyo-nunun olduğunu göstermişlerdir. Şöyle ki $k \geq 1$ tamsayısı için

$$B_k(x)=C_k x+B_k\sqrt{8x^2+1}$$

fonksiyonunu tanımlamışlar ve bu fonksiyondan yola çıkarak yukarıda bahsedilen balans fonksiyonlarının elde edilebileceğini göstermişlerdir. Gerçekten de $k=1$ için

$$B_1(x)=3x+\sqrt{8x^2+1}=G(x)$$

ve $k=2$ için

$$B_2(x)=17x+6\sqrt{8x^2+1}=H(x)$$

dir. Üstelik k nın diğer değerleri için elde ettikleri

$$k=3 \text{ için } B_3(x)=99x+35\sqrt{8x^2+1}$$
$$k=4 \text{ için } B_4(x)=577x+204\sqrt{8x^2+1}$$
$$k=5 \text{ için } B_5(x)=3363x+1189\sqrt{8x^2+1}$$
$$\ldots$$

fonksiyonlarının da birer balans fonksiyonu olduğunu göstermişlerdir. Dolayısıyla $k \geq 1$ tamsayısı için $B_k(x)$ balans fonksiyonlarının sayısının sonsuz olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca tanımladıkları bu balans fonksiyonunun, kaçıncı balans sayısını verdiğini de belirlemişlerdir. Öyle ki, x in n. balans sayısı olması durumunda $B_k(x)$ fonksiyonunun değerinin $(n+k)$. balans sayısı, yani

$$B_k(B_n)=B_{n+k}$$

olduğunu göstermişlerdir. Benzer şekilde $k \geq 1$ tamsayısı için

$$b_k^*(x)=C_k x+B_k(\sqrt{8x^2+8x+1}+1)+b_k$$

fonksiyonunu tanımlamışlar ve yine bu fonksiyondan yola çıkarak yukarıda bahsedilen cobalans fonksiyonlarının elde edilebileceğini göstermişlerdir. Gerçekten de $k=1$ ve $k=2$ için sırasıyla

$$b_1^*(x)=3x+\sqrt{8x^2+8x+1}+1=f(x)$$
$$b_2^*(x)=17x+6\sqrt{8x^2+8x+1}+8=g(x)$$

dir. Üstelik k nın diğer değerleri için elde ettikleri

$$k=3 \text{ için } b_3^*(x)=99x+35\sqrt{8x^2+8x+1}+49$$
$$k=4 \text{ için } b_4^*(x)=577x+204\sqrt{8x^2+8x+1}+288$$
$$k=5 \text{ için } b_5^*(x)=3363x+1189\sqrt{8x^2+8x+1}+1681$$
$$\ldots$$

fonksiyonlarının da birer cobalans fonksiyonu olduğunu ve bu cobalans fonksiyonları için, x in n. cobalans sayısı olması durumunda $b_k^*(x)$ fonksiyonunun değerinin $(n+k)$. cobalans sayısı, yani

$$b_k^*(b_n)=b_{n+k}$$

olduğunu göstermişlerdir.

Yukarıda tanımladıkları balans ve cobalans fonksiyonları dışında aşağıdaki fonksiyonları da elde etmişlerdir.

2.3.5. Teorem. (i) x, n. balans ve y de n. cobalans sayısı olmak üzere

$$B_1(x,y)=\frac{-8xy+\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8y^2+8y+1}+1}{4}$$

fonksiyonunun değeri n. balans sayısı ve

$$B_2(x,y)=x+2y+\sqrt{8x^2+1}+\sqrt{8y^2+8y+1}+1$$

fonksiyonunun değeri de $(n+1)$. balans sayısıdır.

(ii) $k\geq 0$ tamsayısı için B_k, b_k, C_k sırasıyla k. balans, k. cobalans ve k. Lucas-balans sayıları olmak üzere verilen herhangi bir x balans sayısı için

$$B_k^1(x)=B_k x\sqrt{8x^2+1}+C_k x^2+1+2b_{2n+k}-\sum_{i=0}^{n-2} B_{2i+k+1}$$

fonksiyonunun değeri bir balans sayısıdır. x, n. balans sayısı ise $B_k^1(x)$ fonksiyonunun değeri $(2n+k)$. balans sayısıdır. *k* tek ise $B_k^1(x)$ tek balans sayısı, *k* çift ise $B_k^1(x)$ çift balans sayısıdır.

(iii) *x*, *n*. balans, *y*, *m*. cobalans ve *z* de *n*. Lucas-balans sayısı olmak üzere

$$b_1(x)=\frac{2x+\sqrt{8x^2+1}-1}{2}$$

fonksiyonunun değeri $(n+1)$. cobalans sayısı ve

$$b_2(x,y,z)=\frac{2x\sqrt{8y^2+8y+1}+2y\sqrt{8x^2+1}+z-1}{2}$$

fonksiyonunun değeri de $(n+m)$. cobalans sayısıdır (Tekcan ve ark. 2015).

2.3.6. Teorem. B_k, C_k, c_k sırasıyla *k*. balans, *k*. Lucas-balans ve *k*. Lucas-cobalans sayıları olmak üzere aynı *n* mertebeli *x* balans ve *y* cobalans sayıları için

(i) $k\geq 2$ için

$$C_k(x,y)=C_{k-1}\sqrt{8x^2+1}+c_{k-1}\sqrt{8y^2+8y+1}+c_{n+k-1}$$

fonksiyonunun değeri $(n+k-1)$. Lucas-balans sayısıdır.

(ii) $n\geq k-1\geq 1$ için

$$c_k(x,y)=C_{k-1}\sqrt{8y^2+8y+1}+c_{k-1}\sqrt{8x^2+1}+C_{n-k+1}$$

fonksiyonunun değeri $(n+k-1)$. Lucas-cobalans sayısıdır ve $k\geq 1$ için

$$c_k(y)=4B_k(2y+1)+C_k\sqrt{8y^2+8y+1}$$

fonksiyonunun değeri $(n+k)$. Lucas-cobalans sayısıdır (Tekcan ve ark. 2015).

2.3.7. Teorem. $k\geq 0$ tamsayısı için $B_k, b_k, C_k, c_k, P_k, Q_k$ sırasıyla *k*. balans, *k*. cobalans, *k*. Lucas-balans, *k*. Lucas-cobalans, *k*. Pell ve *k*. Pell-Lucas sayıları olsun. Aynı *n* mertebeli *x* balans, *y* cobalans, *z* Lucas-balans ve *w* Lucas-cobalans sayıları için

(i)

$$P_k^1(x,y)=\frac{8B_k(x+y)+C_k(\sqrt{8x^2+1}+\sqrt{8y^2+8y+1})}{2}+P_{2k}$$

fonksiyonunun değeri, $(2n+2k)$. Pell sayısı,

$$P_k^2(x,y)=\frac{C_k\sqrt{8x^2+1}+c_k\sqrt{8y^2+8y+1}}{2}$$

fonksiyonunun değeri, $(2n+2k-1)$. Pell sayısı ve

$$P_1\ (x,y,z,w)=\frac{z\sqrt{8x^2+1}+w\sqrt{8y^2+8y+1}}{2}$$

fonksiyonunun değeri de $(4n-1)$. Pell sayısıdır.

(ii) $G_k(x,y)=B_k\sqrt{8x^2+1}+b_k\sqrt{8y^2+8y+1}$ fonksiyonu tanımlansın. $k=1$ için bu fonksiyonunun değeri, *n*. Lucas-balans sayısı, yani

$$G_1\ (x,y)=C_n$$

iken $k=2$ için fonksiyonun değeri $(2n+1)$. Pell sayısının dört katı, yani

$$G_2(x,y)=4P_{2n+1}$$

dir. Esasında her $k\geq 1$ tamsayısı için $G_k\ (x,y)$ fonksiyonun değeri

$$G_k(x,y)=\begin{cases} 4\sum\limits_{i=1}^{\frac{k}{2}} P_{2n+4i-3} & k\geq 2 \text{ çift} \\ P_{2n}+P_{2n-1}+4\sum\limits_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} P_{2n+4i+3} & k\geq 3 \text{ tek} \end{cases}$$

veya *n* den $(n+k-1)$ e kadar olan Lucas-balans sayılarının toplamı, yani

$$G_k(x,y)=\sum_{i=n}^{n+k-1} C_i$$

dir.

(iii) $Q_k(x)=32C_kx^2+32B_kx\sqrt{8x^2+1}+Q_{2k}$ fonksiyonunun değeri de $(4n+2k)$. Pell-Lucas sayısıdır, yani,

$$G_k(x)=Q_{4n+2k}$$

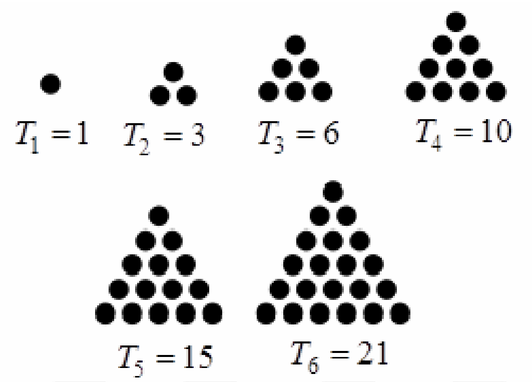
dır (Tekcan ve ark. 2015).

$n\geq 1$ tamsayısı için $\frac{n(n+1)}{2}$ şeklindeki sayılara üçgensel sayılar denir ve T_n ile gösterilir. O halde

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

dir. Örneğin, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,… birer üçgensel sayıdır.

Şekil 2.2. Üçgensel sayılar



Üçgensel sayılar ile balans sayıları arasında yakın bir ilişki vardır. Gerçekten de balans sayıları için geçerli olan

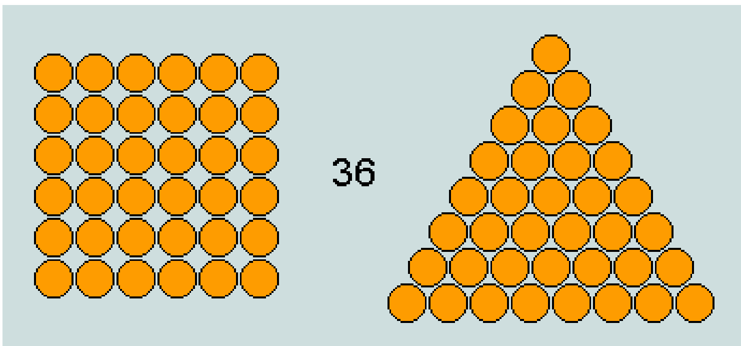
$$1+2+\cdots+(n-1)=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)$$

Diophantine denkleminden

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}$$

elde edilir. Bu eşitliğe göre "n bir balans sayısı $\Leftrightarrow$ n^2 bir üçgensel sayı" olduğu görülür. O halde $B_n^2 = T_{B_n+b_n}$ dir. Üçgensel sayılardan bazıları tam kare olup bu sayılara kare üçgensel sayılar denir. Örneğin, 1, 36, 1225, 41626, $\cdots$ birer üçgensel sayı olup aynı zamanda tam kare olduğundan bu sayılar birer kare üçgensel sayılardır.

Şekil 2.3. Üçgensel ve kare üçgensel sayılar



Kare üçgensel sayılar S_n ile gösterilirse, belli pozitif s_n ve t_n tamsayıları için

$$S_n = s_n^2 = \frac{t_n(t_n+1)}{2} \tag{2.3.1}$$

olduğu görülür. Örneğin, $n=6$ için $S_6 = 48024900$, $s_6 = 6930$ ve $t_6 = 9800$ dir.

Yukarıda da belirtildiği üzere "n bir balans sayısı $\Leftrightarrow$ n^2 bir üçgensel sayı" olduğu gerçeği dikkate alınırsa $s_n = B_n$ olduğu görülür. Diğer yandan (2.3.1) eşitliğinden

$$s_n^2 = \frac{t_n(t_n+1)}{2} \Leftrightarrow t_n^2 + t_n - 2s_n^2 = 0$$

denklemi elde edilir. $s_n = B_n$ ve $\sqrt{1+8B_n^2} = C_n$ olduğundan bu denklemin bir kökü

$$t_n = \frac{-1+\sqrt{1+8s_n^2}}{2} = \frac{C_n - 1}{2}$$

olarak elde edilir. O halde (2.3.1) eşitliği

$$S_n = B_n^2 = \frac{C_n^2 - 1}{8}$$

haline gelir. Böylece kare üçgensel sayılar ile balans ve Lucas-balans sayıları arasında bir ilişki kurulmuş olur.

Nasıl ki tüm balans sayılarının Binet formülleri, Pell sayılarının karakteristik denkleminin köklerine bağlı olarak verilebilmişse, kare üçgensel sayıların ve (2.3.1) eşitliğindeki s_n ve t_n pozitif tamsayılarının Binet formülleri

$$S_n = \frac{\alpha^{4n}+\beta^{4n}-2}{32}, s_n = \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \text{ ve } t_n = \frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2}{4}$$

dir.

2.3.8. Teorem. Aynı n. mertebeden herhangi x balans ve y cobalans sayıları için

$$S(x,y) = \frac{4x^2+4y(y+1)+\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8y^2+8y+1}+1}{8}$$

$$s(x,y) = \frac{6y-2\sqrt{8x^2+1}+3\sqrt{8y^2+8y+1}+3}{2}$$

ve

$$t(x,y)=\frac{2(x-y-1)+\sqrt{8x^2+1}-\sqrt{8y^2+8y+1}}{2}$$

fonksiyonları tanımlansın. Bu takdirde

$$S(x,y)=S_n,\ s(x,y)=s_{n-1} \text{ ve } t(x,y)=t_n$$

dir (Tekcan ve ark. 2015).

3. *t*-BALANS SAYILARI

Bu bölümde balans sayılarının daha genel hali olan $t-$balans sayılarından bahsedilecektir. Ancak ilk olarak $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin belirlenmesi gereklidir.

3.1. $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell Denklemi.

Bu kısımda $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi ele alınacaktır. Hatırlanacağı üzere, $t \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere belli bir pozitif *r* tamsayısı için

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1 + t) + (n + 2 + t) + \cdots + (n + r + t)$$

eşitliğini gerçekleyen pozitif *n* tamsayısına $t-$balans sayısı, eşitlikteki *r* sayısına da $t-$cobalans sayısı denilmişti. Yukarıdaki eşitlik sırasıyla *r* ve *n* ye göre çözülürse

$$r = \frac{-(2n + 2t + 1) + \sqrt{8n^2 + 8n(1 + t) + (2t + 1)^2}}{2} \text{ ve } n = \frac{(2r - 1) + \sqrt{8r^2 + 8rt + 1}}{2} \quad (3.1.1)$$

elde edilir. Balans sayıların da olduğu gibi, $t-$balans sayıları B_n^t ve $t-$cobalans sayıları da b_n^t ile gösterilir. (3.1.1) deki eşitliklerden elde edilen

$$C_n^t = \sqrt{8(B_n^t)^2 + 8B_n^t(1 + t) + (2t + 1)^2} \text{ ve } c_n^t = \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8tb_n^t + 1} \quad (3.1.2)$$

sayılara da sırasıyla *n*. Lucas $t-$balans ve *n*. Lucas $t-$cobalans sayıları denilmişti.

$t-$balans sayılarının genel terimlerinin belirlenmesi için belli bir Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin belirlenmesi gerekir. Çünkü (3.1.1) eşitliğinde de görüleceği üzere

$$\text{“}r\text{, bir } t-\text{cobalans sayısı} \Leftrightarrow 8r^2 + 8rt + 1 \text{ bir tam kare”}$$

gerçeği dikkate alınırsa sıfırdan farklı belli bir *y* tamsayısı için

$$8r^2 + 8rt + 1 = y^2$$

denklemi elde edilmiş olur. Bu denklem yeniden düzenlenirse

$$2(2r+t)^2 - y^2 = 2t^2 - 1$$

olduğu görülür. Buna göre, $x = 2r + t$ olarak alınırsa yukarıdaki denklem

$$2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1 \tag{3.1.3}$$

Pell denklemine indirgenmiş olur. Bu denklemin tüm tamsayı çözümlerini belirleyebilmek için çözüm sınıflarına ve çözüm matrislerine ihtiyaç vardır. Bu nedenle ilk olarak bazı kavramlar ve notasyonlar verilecektir.

Δ tam kare olmayan pozitif bir diskriminant olmak üzere

$$\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) = \{x + y\sqrt{\Delta} : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

kuadratik sayı cisminin herhangi bir $\alpha = x + y\sqrt{\Delta}$ elemanın eşleniği $\overline{\alpha} = x - y\sqrt{\Delta}$ ve normu $N(\alpha) = x^2 - \Delta y^2$ dir. Buna göre

$$\rho_\Delta = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}} & \Delta \equiv 0 (\operatorname{mod} 4) \text{ ise} \\[2ex] \dfrac{1+\sqrt{\Delta}}{2} & \Delta \equiv 1 (\operatorname{mod} 4) \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $O_\Delta = \{x + y\rho_\Delta : x, y \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ nın bir alt halkasıdır. Bu O_Δ halkasının birimleri, normu ± 1 olan elemanlar olup bu birimlerin kümesi O_Δ^* ile gösterilir. O_Δ^* da normu 1 olan birimlerin kümesi $O_{\Delta,1}^*$ ile gösterilsin. O_Δ nın 1 den büyük en küçük birimine temel birim denir ve bu temel birim ε_Δ ile gösterilir.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

şeklindeki polinomlara kuadratik form denir. Bu formun diskriminantı $\Delta = \Delta(F)$ ile gösterilir ve $\Delta(F) = b^2 - 4ac$ olarak tanımlanır. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olması durumunda F ye tam form, $\Delta > 0$ olması durumunda ise F ye indefinite form denir. Tam kare olmayan Δ diskriminantlı F indefinite tam formu

$$F(x, y) = \frac{\left(ax + \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)\left(ax + \dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2}y\right)}{a}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$M_F = \left\{ ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2} y : x, y \in \mathbb{Z} \right\}$$

olarak tanımlanırsa $ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2} y \in M_F$ ve $u + v\rho_\Delta \in O_\Delta$ olmak üzere

$$[x' \quad y'] = \begin{cases} [x \quad y] \begin{bmatrix} u - \frac{b}{2}v & av \\ -cv & u + \frac{b}{2}v \end{bmatrix} & \Delta \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4) \\ \\ [x \quad y] \begin{bmatrix} u + \frac{1-b}{2}v & av \\ -cv & u + \frac{1+b}{2}v \end{bmatrix} & \Delta \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases} \tag{3.1.4}$$

için

$$(u + v\rho_\Delta)\left(ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2} y \right) = ax' + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2} y' \in M_F$$

dir. Şu halde $F(x, y) = m$ denkleminin tamsayı çözümleri kümesi ile M_F kümesi arasında

$$\Psi(x, y) = ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2} y$$

olarak tanımlanan birebir bir

$$\Psi : \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : F(x, y) = m\} \to \{\gamma \in M_F : N(\gamma) = am\}$$

dönüşümü tanımlanmış olur. Buna göre, $F(x, y) = m$ denklemini çözmek demek, M_F nin normu am olan elemanlarını bulmak demektir. ε_Δ temel birimi için

$$\tau_\Delta = \begin{cases} \varepsilon_\Delta & N(\varepsilon_\Delta) = 1 \text{ ise} \\ \varepsilon_\Delta^2 & N(\varepsilon_\Delta) = -1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$0 \le y \le U = \begin{cases} \left| \frac{am\tau_\Delta}{\Delta} \right|^{1/2} \left(\frac{\tau_\Delta - 1}{\tau_\Delta} \right) & am > 0 \text{ ise} \\ \\ \left| \frac{am\tau_\Delta}{\Delta} \right|^{1/2} \left(\frac{\tau_\Delta + 1}{\tau_\Delta} \right) & am < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $F(x,y)=m$ denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$F(x,y)=m \Leftrightarrow \Delta y^2+4am=(2ax+by)^2$$

elde edilir. Buna göre $[0,U]$ aralığındaki *y* değerleri için, Δy^2+4am ifadesinin tam kare olup olmadığı kontrol edilir. Eğer Δy^2+4am tam kare ise yukarıdaki eşitlikten *x* değeri (veya değerleri) elde edilir. Dolayısıyla $F(x,y)=m$ denkleminin tamsayı çözümleri için bir $\{[\ x \quad y]\}$ çözüm sınıfı elde edilmiş olur. Bu çözüm sınıfı ve (3.4) eşitliğindeki çözüm matrisi kullanılarak $F(x,y)=m$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri elde edilmiş olur (Flath 1989).

Örneğin, $17x^2+32xy+14y^2=9$ denklemi ele alınsın. Bu denklem için $\varepsilon_{72}=17+4\sqrt{18}$ olup $N(\varepsilon_{72})=1$ olduğundan $\tau_{72}=17+4\sqrt{18}$ dir. Buna göre

$$0\le y\le U=\left|\frac{17\cdot 9\cdot(17+4\sqrt{18})}{72}\right|^{1/2}\left(\frac{16+4\sqrt{18}}{17+4\sqrt{18}}\right)\cong 8.246$$

olur. Bu aralıktaki *y* değerlerinden 2 ve 4 için $\Delta y^2+4am=72y^2+612$ ifadesi bir tam karedir ve *y* nin bu değerleri için sırasıyla $x=-1$ ve $x=-5$ olarak elde edilir. O halde verilen denklem için çözüm sınıfı

$$\{[-1 \quad 2],\ [-5 \quad 4]\}$$

dür. Çözüm matrisi (3.1.4) eşitliğinden

$$M=\begin{bmatrix}-47 & 68\\ -56 & 81\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Şu halde denkleminin tüm tamsayı çözümleri kümesi

$$\{\pm[-1 \quad 2]M^n,\ \pm[-5 \quad 4]M^n : n\in\mathbb{Z}\}$$

dir.

Bu açıklamalardan sonra esas konuya geçilebilir. (3.1.3) deki

$$2x^2-y^2=2t^2-1$$

Pell denklemi dikkate alındığında, bazı *t* değerleri için iki, bazı *t* değerleri için dört ve bazı *t* değerleri için daha fazla çözüm sınıfının olduğu görülür. Aşağıdaki çizelgede bazı *t* değerleri ve bu *t* değerlerine karşılık gelen çözüm sınıfları verilmiştir.

Çizelge 3.1. $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ denklemi için çözüm sınıfları

t	Çözüm sınıfı
3	$\{[\pm 3\ \ 1]\}$
5	$\{[\pm 5\ \ 1], [\pm 7\ \ 7]\}$
37	$\{[\pm 37\ \ 1], [\pm 41\ \ 25], [\pm 43\ \ 31], [\pm 47\ \ 41]\}$

Bu nedenle çözüm sınıfını tam olarak belirleyebilmek için t üzerine bazı kısıtlamaların konması gerekir. Bu kısımda verilen tüm sonuçlar $t \geq 2,\ 2t^2 - 1$ asal olacak şekilde kabul edilerek verilmiştir (Böylelikle çözüm sınıfı tek türlü olarak belirlenebilmiştir).

3.1.1. Teorem. $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denklemi için

(i) $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ve

$$[x_{2n+1} \quad y_{2n+1}] = [t \quad 1]M^n,\ n \geq 0 \ \text{ ve } \ [x_{2n} \quad y_{2n}] = [t \quad -1]M^n,\ n \geq 1$$

olmak üzere denklemin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\Omega = \{(x_{2n+1}, y_{2n+1}) : n \geq 0\} \cup \{(x_{2n}, y_{2n}) : n \geq 1\}$$

dir.

(ii) M matrisinin n. kuvveti $n \geq 1$ için

$$M^n = \begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix}$$

dir.

(iii) Denklemin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi, balans ve Lucas-balans sayılarına bağlı olarak

$$(x_{2n+1}, y_{2n+1}) = (tC_n + 2B_n,\ 4tB_n + C_n),\ \ n \geq 0$$
$$(x_{2n}, y_{2n}) = (tC_n - 2B_n,\ 4tB_n - C_n),\ \ n \geq 1$$

olmak üzere $\Omega = \{(x_{2n+1}, y_{2n+1}) : n \geq 0\} \cup \{(x_{2n}, y_{2n}) : n \geq 1\}$ dir.

(iv) Denklemin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi, Pell sayılarına bağlı olarak

$$(x_{2n+1}, y_{2n+1}) = (t(P_{2n} + P_{2n-1}) + P_{2n}, 2tP_{2n} + P_{2n} + P_{2n-1}),\ \ n \geq 0$$
$$(x_{2n}, y_{2n}) = (t(P_{2n} + P_{2n-1}) - P_{2n}, 2tP_{2n} - P_{2n} - P_{2n-1}),\ \ n \geq 1$$

olmak üzere $\Omega = \{(x_{2n+1}, y_{2n+1}) : n \geq 0\} \cup \{(x_{2n}, y_{2n}) : n \geq 1\}$ dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. (i) $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denklemi için $\tau_\Delta = 3 + 2\sqrt{2}$ olup $0 \le y \le U$ aralığındaki y değerlerinden sadece $y = 1$ için $8(y^2 + 2t^2 - 1)$ ifadesi bir tam karedir ve y nin bu değeri için $x = \pm t$ dir. Şu halde çözüm sınıfı $\{[\pm t \quad 1]\}$ olup (3.1.4) den çözüm matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu çözüm sınıfı ve matris dikkate alınırsa

$n \ge 0$ için $[t \quad 1]M^n$ denklemin (x_{2n+1}, y_{2n+1}) pozitif tamsayı çözümlerini

$n \ge 1$ için $[t \quad -1]M^n$ ise denklemin (x_{2n}, y_{2n}) pozitif tamsayı çözümlerini

üretir. O halde denklemin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\Omega = \{(x_{2n+1}, y_{2n+1}) : n \ge 0\} \cup \{(x_{2n}, y_{2n}) : n \ge 1\}$$

dir.

(ii) $n = 1$ için $C_1 = 3$ ve $B_1 = 1$ olduğundan eşitlik doğrudur. Eşitliğin $n-1$ için doğru olduğu yani,

$$M^{n-1} = \begin{bmatrix} C_{n-1} & 4B_{n-1} \\ 2B_{n-1} & C_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$3C_{n-1} + 8B_{n-1} = C_{n,} \; 3B_{n-1} + C_{n-1} = B_{n,} \; C_{n-1} + 3B_{n-1} = B_n$$

ve

$$8B_{n-1} + 3C_{n-1} = C_n$$

olduğundan

$$MM^{n-1} = \begin{bmatrix} 3C_{n-1} + 8B_{n-1} & 12B_{n-1} + 4C_{n-1} \\ 2C_{n-1} + 6B_{n-1} & 8B_{n-1} + 3C_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix} = M^n$$

dir, yani eşitlik her n için doğrudur.

(iii) (i) ve (ii) den kolayca görüleceği üzere

$$(x_{2n+1}, y_{2n+1}) = (tC_n + 2B_n, \; 4tB_n + C_n)$$

ve

$$(x_{2n}, y_{2n}) = (tC_n - 2B_n, \; 4tB_n - C_n)$$

dir.

(iv) $P_{2n} = 2B_n$ ve $P_{2n} + P_{2n-1} = C_n$ olduğundan sonuç açıktır.

Aşağıdaki çizelgede $t=3$ için $2x^2-y^2=17$ Pell denkleminin ilk 10 tamsayı çözümü verilmiştir.

Çizelge 3.2. $2x^2-y^2=17$ Pell denkleminin ilk 10 tamsayı çözümü

n	(x_n, y_n)
1	(3, 1)
2	(7, 9)
3	(11, 15)
4	(39, 55)
5	(63, 89)
6	(227, 321)
7	(367, 519)
8	(1323, 1871)
9	(2139, 3025)
10	(7711,10905)

3.2. *t*-Balans Sayıları.

Bu kısımda $t-$balans sayılarının genel terimleri, bu sayıların Binet formülleri, ilk $n-$ terim toplamları, Pell, Pell-Lucas, diğer balans sayıları ve son olarak da kare üçgensel sayılar ile olan ilişkisinden bahsedilecektir.

Dash ve ark. (2012), $t-$balans ve $t-$cobalans sayılarının genel terimleri arasında

$$B_n^t = 6B_{n-2}^t - B_{n-4}^t + 2(t+1) \text{ ve } b_{n+2}^t = 6b_n^t - b_{n-2}^t + 2t$$

şeklinde bir indirgeme bağıntısının olduğunu göstermişler ve aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

3.2.1. Teorem. B_n^t $t-$balans ve C_n^t Lucas $t-$balans sayıları sırasıyla

$$[B_n^t-(t+1)]^2 - B_{n+2}^t B_{n-2}^t = (2t+1)^2 \quad \text{ve} \quad C_{n+2}^t = 6C_n^t - C_{n-2}^t$$

indirgeme bağıntısını gerçekler (Dash ve ark. 2012).

Balans fonksiyonlarına benzer şekilde Dash ve ark. (2012), verilen herhangi bir x, $t-$ balans sayısı için

$$f(x)=3x+(t+1)+\sqrt{8x^2+8x(1+t)+(2t+1)^2}$$

ve

$$\widetilde{f}(x)=3x+(t+1)-\sqrt{8x^2+8x(1+t)+(2t+1)^2}$$

fonksiyonlarını tanımlamışlar ve aşağıdaki teoremleri elde etmişlerdir.

3.2.2. Teorem. x bir $t-$balans sayısı ise $f(x)$ değeri de bir $t-$balans sayısıdır. Eğer x, n. $t-$balans sayısı ise $(n+2)$. $t-$balans sayısı $f(x)$ ve $(n-2)$. $t-$balans sayısı da $\widetilde{f}(x)$ değeridir (Dash ve ark. 2012).

3.2.3. Teorem. B_n balans ve C_n Lucas-balans sayılar olmak üzere $n\geq 1$ tamsayısı için

$$16B_nC_n+32B_n^2+2C_n^2+2=(4b_{n+1}+2)^2$$
$$24B_nC_n+32B_n^2+4C_n^2=2c_{n+1}(4b_{n+1}+2)$$
$$8B_n^2+2C_n^2+8B_nC_n-1=c_{n+1}^2$$

dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. Sadece ilk eşitlik gösterilecektir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir. Balans sayıları için $B_n=\dfrac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$, $C_n=\dfrac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}$ ve $b_n=\dfrac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
&16B_nC_n+32B_n^2+2C_n^2+2\\
&=16\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}\right)+32\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}\right)^2+2\\
&=\frac{\alpha^{4n+2}-2(\alpha\beta)^{2n+1}+\beta^{4n+2}}{2}\\
&=16\left(\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}}\right)^2\\
&=16\left(\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)^2+16\left(\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)+4\\
&=16b_{n+1}^2+16b_{n+1}+4=(4b_{n+1}+2)^2
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Yukarıda $t \geq 2,\ 2t^2 - 1$ asal olacak şekilde kabul edilmiş ve $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri kümesi elde edilmişti. Bu kısımda ise $x = 2r + t$ eşitliği dikkate alınarak $t-$balans sayılarının genel terimleri verilecektir. Yine bu kısımda da elde edilen tüm sonuçlar $t \geq 2,\ 2t^2 - 1$ asal olacak şekilde kabul edilerek verilmiştir.

3.2.4. Teorem. $n \geq 1$ için tüm $t-$balans sayılarının genel terimleri

$$\begin{aligned}
B_{2n-1}^t &= \frac{(4B_n + C_n - 1)t - (2B_n + C_n + 1)}{2} \\
b_{2n-1}^t &= \frac{(C_n - 1)t - 2B_n}{2} \\
C_{2n-1}^t &= (4b_{n+1} + 2)t - c_{n+1} \\
c_{2n-1}^t &= 4tB_n - C_n \\
B_{2n}^t &= \frac{(4B_n + C_n - 1)t + (2B_n + C_n - 1)}{2} \\
b_{2n}^t &= \frac{(C_n - 1)t + 2B_n}{2} \\
C_{2n}^t &= (4b_{n+1} + 2)t + c_{n+1} \\
c_{2n}^t &= 4tB_n + C_n
\end{aligned}$$

dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. $x = 2r + t$ olduğundan 3.1.1. Teoreminin (iii) ünden $n \geq 1$ için

$$b_{2n-1}^t = \frac{(C_n - 1)t - 2B_n}{2}$$

olarak elde edilir. $8B_n^2 + 1 = C_n^2$ olduğundan (3.1.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
c_{2n-1}^t &= \sqrt{8(b_{2n-1}^t)^2 + 8tb_{2n-1}^t + 1} \\
&= \sqrt{8\left(\frac{(C_n - 1)t - 2B_n}{2}\right)^2 + 8t\left(\frac{(C_n - 1)t - 2B_n}{2}\right) + 1} \\
&= \sqrt{16t^2B_n^2 - 8tB_nC_n + C_n^2} \\
&= 4tB_n - C_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre (3.1.1) den

$$B_{2n-1}^t = \frac{(4B_n + C_n - 1)t - (2B_n + C_n + 1)}{2}$$

olarak elde edilir. 3.2.3. Teoremi ve (3.1.2) eşitliği kullanılırsa

$$C^t_{2n-1}=\sqrt{8(B^t_{2n-1})^2+8B^t_{2n-1}(1+t)+(2t+1)^2}$$
$$=\sqrt{\begin{array}{l}8\left(\frac{(4B_n+C_n-1)t-(2B_n+C_n+1)}{2}\right)^2\\+8\left(\frac{(4B_n+C_n-1)t-(2B_n+C_n+1)}{2}\right)(1+t)+(2t+1)^2\end{array}}$$
$$=\sqrt{\begin{array}{l}t^2(16B_nC_n+32B_n^2+2C_n^2+2)-t(24B_nC_n+32B_n^2+4C_n^2)\\+(8B_n^2+2C_n^2+8B_nC_n-1)\end{array}}$$
$$=(4b_{n+1}+2)t-c_{n+1}$$

elde edilir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

$t-$balans sayılarının genel terimleri, balans sayılarına bağlı olduğundan ve balans sayılarının Binet formülleri belli olduğundan $t-$balans sayılarının Binet formülleri de aşağıdaki gibi elde edilir.

3.2.5. Teorem. $n\geq 1$ için $t-$balans sayılarının Binet formülleri

$$B^t_{2n-1}=t\left(\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}-2}{4}\right)-\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$
$$b^t_{2n-1}=t\left(\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2}{4}\right)-\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$
$$C^t_{2n-1}=t\left(\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}$$
$$c^t_{2n-1}=t\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}$$
$$B^t_{2n}=t\left(\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}-2}{4}\right)+\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$
$$b^t_{2n}=t\left(\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2}{4}\right)+\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$
$$C^t_{2n}=t\left(\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{2}$$
$$c^t_{2n}=t\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}$$

dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. Balans ve Lucas-balans sayılarının Binet formülleri dikkate alınırsa

$$B_{2n-1}^{t}=\frac{(4B_n+C_n-1)t-(2B_n+C_n+1)}{2}$$

$$=\frac{t\left[4\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)+\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}-1\right]-2\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)-\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2}-1}{2}$$

$$=\frac{t\left[\frac{\alpha^{2n}(1+\sqrt{2})+\beta^{2n}(1-\sqrt{2})-2}{2}\right]-\frac{\alpha^{2n}(1+\sqrt{2})-\beta^{2n}(1-\sqrt{2})+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}{2}$$

$$=t\left(\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}-2}{4}\right)-\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$

olduğu görülür. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıda $t-$balans sayılarının genel terimleri, balans sayılarına bağlı olarak elde edilmişti. Aşağıdaki teoremde ise tersine, balans sayılarının genel terimleri $t-$balans sayılarına bağlı olarak verilmiştir.

3.2.6. Teorem. Balans sayılarının genel terimleri

$$B_n=\frac{b_{2n}^{t}-b_{2n-1}^{t}}{2},\ n\geq 1 \qquad b_n=\frac{C_{2n-2}^{t}+C_{2n-3}^{t}-4t}{8t},\ n\geq 2$$

$$C_n=\frac{c_{2n}^{t}-c_{2n-1}^{t}}{2},\ n\geq 1 \qquad c_n=\frac{C_{2n-2}^{t}-C_{2n-3}^{t}}{2},\ n\geq 2$$

dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. 3.2.4. Teoremine göre

$$b_{2n-1}^{t}=\frac{(C_n-1)t-2B_n}{2} \text{ ve } b_{2n}^{t}=\frac{(C_n-1)t+2B_n}{2}$$

olduğundan

$$\frac{b_{2n}^{t}-b_{2n-1}^{t}}{2}=\frac{\frac{(C_n-1)t+2B_n}{2}-\frac{(C_n-1)t-2B_n}{2}}{2}=B_n$$

olarak elde edilir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

3.2.4 ve 3.2.6. Teoremlerine dikkat edilirse, balans ve $t-$balans sayıları arasında birebir bir eşleme kurulmuş olur.

Balans sayılarının genel terimleri, $t-$balans sayılarına bağlı olarak verilebildiği gibi, Pell ve Pell-Lucas sayılarının genel terimleri de $t-$balans sayılarına bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

3.2.7. Teorem. Pell ve Pell-Lucas sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$P_{2n} = b_{2n}^t - b_{2n-1}^t,\ P_{2n+1} = \frac{C_{2n}^t + C_{2n-1}^t}{4t},\ Q_{2n} = \frac{b_{4n}^t - b_{4n-1}^t}{b_{2n}^t - b_{2n-1}^t} \quad \text{ve} \quad Q_{2n+1} = C_{2n}^t - C_{2n-1}^t$$

dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. $b_{2n-1}^t = \dfrac{(C_n - 1)t - 2B_n}{2}$ ve $b_{2n}^t = \dfrac{(C_n - 1)t + 2B_n}{2}$ olduğundan

$$b_{2n}^t - b_{2n-1}^t = \frac{(C_n - 1)t + 2B_n}{2} - \frac{(C_n - 1)t - 2B_n}{2} = 2B_n = P_{2n}$$

dir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

3.2.8. Teorem. $t-$balans sayılarının ilk n-terim toplamı, $n \geq 2$ çift için

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^t = (B_{\frac{n+2}{2}} + b_{\frac{n+2}{2}} - \frac{n+2}{2})t - \frac{n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^t = (B_{\frac{n}{2}} + b_{\frac{n+2}{2}} - \frac{n}{2})t$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^t = (3B_{\frac{n+2}{2}} + B_{\frac{n}{2}} + 2b_{\frac{n+2}{2}} - 3)t$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^t = 4tb_{\frac{n+2}{2}}$$

ve $n \geq 1$ tek için

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^t = (B_{\frac{n+3}{2}} - B_{\frac{n+1}{2}} - \frac{n+3}{2})t - b_{\frac{n+3}{2}} - \frac{n+1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^t = (2B_{\frac{n+1}{2}} - \frac{n+1}{2})t - B_{\frac{n+1}{2}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^t = (b_{\frac{n+5}{2}} - b_{\frac{n+1}{2}} - 4)t - 2B_{\frac{n+3}{2}} + 2b_{\frac{n+3}{2}} + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^t = 4(B_{\frac{n+1}{2}} + b_{\frac{n+1}{2}})t - 2B_{\frac{n+1}{2}} - 2b_{\frac{n+1}{2}} - 1$$

dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. n çift, yani belli bir $k \geq 1$ tamsayısı için $n = 2k$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} B_i^t &= B_1^t + B_2^t + \cdots + B_{2k}^t \\
&= \left[\left(\frac{\alpha^3+\beta^3-2}{4}\right)t - \frac{\alpha^3-\beta^3+2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right] + \left[\left(\frac{\alpha^3+\beta^3-2}{4}\right)t + \frac{\alpha^3-\beta^3-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right] \\
&\quad + \cdots + \left[\left(\frac{\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1}-2}{4}\right)t - \frac{\alpha^{2k+1}-\beta^{2k+1}-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right] \\
&= \left(\frac{\alpha^3+\alpha^5+\cdots+\alpha^{2k+1}+\beta^3+\beta^5+\cdots+\beta^{2k+1}}{2} - k\right)t - k \\
&= \left(\frac{\alpha^{2k+2}-\beta^{2k+2}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{2k+1}-\beta^{2k+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{2k+2}{2}\right)t - k \\
&= (B_{\frac{n+2}{2}} + b_{\frac{n+2}{2}} - \frac{n+2}{2})t - \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

dir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıdaki teoreme benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

3.2.9. Teorem. P_n, Q_n ve B_n sayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i-1} = \frac{b_{2n}^t - b_{2n-1}^t}{2} \qquad \sum_{i=1}^{2n} P_{2i} = \frac{(b_{2n}^t - b_{2n-1}^t)(C_{2n}^t - C_{2n-1}^t)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i} = \frac{C_{2n}^t + C_{2n-1}^t - 4t}{8t} \qquad \sum_{i=0}^{2n} (P_{2i+1} + P_{2i+2}) = \frac{(c_{2n+2}^t - c_{2n+1}^t)(C_{2n}^t - C_{2n-1}^t)}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{2n} P_{2i+1} = \frac{(C_{2n}^t + C_{2n-1}^t)(C_{2n}^t - C_{2n-1}^t)}{8t} \qquad \sum_{i=0}^{2n} Q_i = \frac{2(b_{4n+2}^t - b_{4n+1}^t)}{C_{2n}^t - C_{2n-1}^t}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i} = \frac{(b_{2n}^t - b_{2n-1}^t)(C_{2n}^t + C_{2n-1}^t)}{t} \qquad \sum_{i=1}^{2n} B_i = \frac{(b_{2n}^t - b_{2n-1}^t)(C_{2n}^t - C_{2n-1}^t)}{4}$$

dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. Sadece ilk eşitliğin gerçeklendiği gösterilecektir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

$$\sum_{i=1}^{n} P_{2i-1} = P_1 + P_3 + \cdots + P_{2n-1}$$

$$= \frac{\alpha + \alpha^3 + \cdots + \alpha^{2n-1} - (\beta + \beta^3 + \cdots + \beta^{2n-1})}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{\alpha^{2n} - 1}{2} - \frac{\beta^{2n} - 1}{2}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2}{4}\right)t + \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2}{4}\right)t + \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)}{2}$$

$$= \frac{b_{2n}^t - b_{2n-1}^t}{2}$$

olduğu görülür.

Pell, Pell-Lucas ve balans sayılarının bazı toplamları tam kare olup bu toplamlar, $t-$balans sayılarına bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

3.2.10. Teorem. P_n, Q_n ve B_n sayıları için

$$\sum_{i=1}^{4n-3} P_i = \left(\frac{C_{2n-2}^t - C_{2n-3}^t}{2}\right)^2 \qquad 1 + \sum_{i=1}^{4n-1} P_i = \left(\frac{c_{2n}^t - c_{2n-1}^t}{2}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{2n} Q_{2i-1} = [2(b_{2n}^t - b_{2n-1}^t)]^2 \qquad \sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1} = \left(\frac{b_{4n}^t - b_{4n-1}^t}{2}\right)^2$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{2n} Q_{2i+1}}{2} = \left(\frac{C_{2n}^t - C_{2n-1}^t}{2}\right)^2$$

dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. Pell sayılarının ilk n terim toplamının

$$\frac{P_n + P_{n+1} - 1}{2}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\sum_{i=1}^{4n-3} P_i = \frac{P_{4n-3}+P_{4n-2}-1}{2}$$
$$= \frac{\frac{\alpha^{4n-3}-\beta^{4n-3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\alpha^{4n-2}-\beta^{4n-2}}{2\sqrt{2}} - 1}{2}$$
$$= \frac{\alpha^{4n-2}+\beta^{4n-2}-2}{4}$$
$$= \left(\frac{(4b_n+2)t + c_n - (4b_n+2)t + c_n}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{C_{2n-2}^t - C_{2n-3}^t}{2}\right)^2$$

olduğu görülür. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Kare üçgensel sayıların genel terimleri, $t-$balans sayılarına bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

3.2.11. Teorem. $n \geq 1$ tamsayısı için

$$s_n = \frac{b_{2n}^t - b_{2n-1}^t}{2},\ t_n = \frac{c_{2n}^t - c_{2n-1}^t - 2}{4} \quad \text{ve} \quad S_n = \left(\frac{C_{2n}^t - C_{2n-1}^t - b_{2n+2}^t + b_{2n+1}^t}{2}\right)^2$$

dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. s_n ve t_n nin Binet formülleri dikkate alınırsa

$$s_n = \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}} = \frac{t\left(\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2}{4}\right) + \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}} - t\left(\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2}{4}\right) + \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}}}{2}$$
$$= \frac{b_{2n}^t - b_{2n-1}^t}{2}$$

ve benzer şekilde

$$t_n = \frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2}{4} = \frac{t\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2} - t\left(\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{2} - 2}{4}$$
$$= \frac{c_{2n}^t - c_{2n-1}^t - 2}{4}$$

dür. Son eşitlik de benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıdaki teoremde, kare üçgensel sayıların genel terimleri, $t-$balans sayılarına bağlı olarak verilebilmişti. Tersine $t-$balans sayılarının genel terimleri de s_n ve t_n ye bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

3.2.12. Teorem. $n \geq 1$ tamsayısı için $t-$balans sayılarının genel terimleri

$$B_{2n-1}^t = (t_n + 2s_n)t - s_n - t_n - 1 \qquad B_{2n}^t = (t_n + 2s_n)t + s_n + t_n$$

$$b_{2n-1}^t = t_n t - s_n \qquad b_{2n}^t = t_n t + s_n$$

$$C_{2n-1}^t = (4s_n + 4t_n + 2)t - s_n - s_{n+1} \qquad C_{2n}^t = (4s_n + 4t_n + 2)t + s_n + s_{n+1}$$

$$c_{2n-1}^t = 4s_n t - 2t_n - 1 \qquad c_{2n}^t = 4s_n t + 2t_n + 1$$

dir (Tekcan ve Yazla 2017).

İspat. B_n, C_n, s_n ve t_n nin Binet formülleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
B_{2n-1}^t &= \frac{(4B_n + C_n - 1)t - (2B_n + C_n + 1)}{2} \\
&= \frac{\left[4\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right) + \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} - 1\right]t - \left[2\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right) + \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} + 1\right]}{2} \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1} - 2}{4}\right)t - \left(\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1} + 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(\frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2}{4} + \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{2\sqrt{2}}\right)t - \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} - \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2}{4} - 1 \\
&= (t_n + 2s_n)t - s_n - t_n - 1
\end{aligned}$$

dir. Diğer eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

3.2.11 ve 3.2.12 Teoremlerine göre, $t-$balans sayıları ile kare üçgensel sayılar arasında da birebir bir ilişki kurulmuş olur.

KAYNAKLAR

Barbeau, E.J. 2003. Pell's Equation. Problem Books in Mathematics, Springer, New-York, NY, USA.

Behera A. ve Panda G. K. 1999. On the Square Roots of Triangular Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* 37(2): 98-105.

Dash K.K., Ota R.S. ve Dash S. 2012. $t-$balancing Numbers. *Int. J. Contemp. Math. Sci.* 7(41):199-201.

Flath, D.E. 1989. Introduction to Number Theory. Wiley.

Gözeri G. K., Özkoç A. ve Tekcan A. 2017. Some Algebraic Relations on Balancing Numbers. *Utilitas Mathematica* dergisinde yayına kabul edildi.

Koshy, T. 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. A. Wiley-Intersence Pub.

Kovacs T., Liptai K. ve Olajos P. 2010. On $(a,b)-$Balancing Numbers. *Publ. Math. Debrecen* 77/3-4: 485-498.

Liptai K. 2004. Fibonacci Balancing Numbers. *The Fibonacci Quar*. 42(4): 330-340.

Liptai K. 2006. Lucas Balancing Numbers. *Acta Math. Univ. Ostrav*. 14(1): 43-47.

Panda G. K. 2009. Some Fascinating Properties of Balancing Numbers. *Proceedings of the Eleventh Int. Conf. on Fibonacci Num. and their App.*, Cong. Numer. 194:185-189.

Panda G. K. 2007. Sequence Balancing and Cobalansing Numbers. *The Fibonacci Quarterly* 45:265-271.

Panda G. K. ve Ray P. K. 2011. Some Links of Balancing and Cobalancing Numbers with Pell and Associated Pell Numbers. *Bul. of Inst. of Math. Acad. Sinica* 6(1):41-72.

Ray P. K. 2009. Balancing and Cobalancing Numbers. *PhD thesis*, Department of Mathematics, National Institute of Technology, Rourkela, India.

Ray P.K. 2012. Certain Matrices Associated with Balancing and Lucas-Balancing Numbers. *Matematika* 28(1): 15-22.

Ray P.K. 2013. New Identities for the Common Factors of Balancing and Lucas-Balancing Numbers. *Int. Jour. of Pure and App. Maths*. 85(3): 487-494.

Ray P.K. 2013a. Factorizations of the Negatively Subscripted Balancing and Lucas-Balancing Numbers. *Bol. Soc. Paran. Mat*. 31(2): 161-173.

Ribenboim P. 2000. My Numbers, My Friends, Popular Lectures on Number Theory, Springer-Verlag, New York, Inc. 375p.

Santana S. F., Diaz-Barrero J. L. 2006. Some Properties of Sums Involving Pell Numbers. *Missouri Journal of Mathematical Science* 18(1): 33-40.

Szalay, L. 2007. On the Resolution of Simultaneous Pell Equations. *Ann. Math. Inform*. 34: 77-87.

Tengely, Sz. 2013. Balancing Numbers which are Products of Consecutive Integers. *Publ. Math. Deb.* 83(1-2): 197-205.

Tekcan, A., Tayat, M. 2014. Generalized Pell Numbers, Balancing Numbers and Binary Quadratic Forms. *Creative Mathematics and Inf*. 23(1), 115-122.

Tekcan, A., Tayat, M., Olajos, P. 2015. Balancing, Pell and Square Triangular Functions. *Miskolc Mathematical Notes* 16(2), 1219-1231.

Tekcan, A., Yazla, A. 2017. $t-$balancing numbers, Pell numbers and square triangular numbers. *Acta Math. Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis* dergisinde yayına kabul edildi.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Aziz YAZLA

Doğum Yeri ve Tarihi: 21.06.1986, Bursa

Yabancı Dil: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Ulubatlı Hasan Anadolu Lisesi

Lisans: Uludağ Üniversitesi

Yüksek Lisans: Uludağ Üniversitesi

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl:

İletişim: azizyazla@hotmail.com

Yayınları:

1. Tekcan, A., Yazla, A. $t-$balancing numbers, Pell numbers and square triangular numbers. *Acta Math. Acad. Paedago. Nyíreg*. dergisinde yayına kabul edildi.