

## MATEMATİKSEL, VEYA "DOĞRUSAL", PROGRAMLAMA: MATEMATİKSEL OLMAYAN BİR AÇIKLAMA\*

Robert DORFMAN  
Çev.: Sacit ERTAŞ\*\*

Bu makale matematiksel programlamanın temel düşüncelerini <sup>1</sup>, bunların yaygın bir şekilde kabulünü ve takdirini engelleyen cebrik simge ve ifadelerden arındırılmış olarak, ortaya koymayı amaçlamaktadır. Bu metodu grafikte temsiline ağırlık verilerek yapılacaktır. Genel olarak, matematiksel programlama problemlerinin iki boyutlu grafiklerde resimlendirilmesi olanak dışı olmasına karşın grafiklerden çıkaracağımız sonuçlar genel geçerliliği olan sonuçlar olacaktır. Kuşkusuz, iktisatta çok boyutlu problemlerin grafikte temsilinin geleneksel ve önemli bir yeri vardır.

İktisattaki temel formel problem kıt kaynakları önceden belirlenen bir hedefe ulaşımı maksimize edecek şekilde dağıtmaktadır. Bu problemin standart formüle ediliş biçimi — buna marjinal analiz adı verilmektedir — sosyal ve iktisadi politikaya ilişkin birçok soruyu anlamamızda ve çok önemli sonuçlar çıkarmada yönlendirici bir rol oynamıştır. Fakat herkes tarafından bilindiği gibi bu analiz biçimi iş hayatında fiilen çalışan kişilere karşılaştıkları iktisadi problemlerin ve işletme problemlerinin pratik çözümünde yararlı bir araç olarak kendini kabul ettirememiştir. Matematiksel programlama aynı formel problemin iş hayatında ve iktisadi hayatta pratik kararlar almada yararlı olacak bir kalıp içinde yeniden ifadesine dayanmaktadır. Matematiksel programlamanın standart iktisadi problemin ve onun çözümünün yeniden formüle edilmesinden başka birşey olmadığı görüşü bu açıklama yazısının temel tezi olmaktadır.

\* R. Dorfman, "Mathematical, or 'Linear', Programming: A Nonmathematical Exposition", *American Economic Review*, December 1953, 797-825. W. Breit and H.M. Hockman (eds.) *Readings in Microeconomics*, London: Holt, Rinehart and Winston, 1969, Ch. 13 içinde yeniden basılmıştır.

\*\* S. Ertaş (Lisans: İstanbul Üniversitesi; D. Phil.: University of York) Uludağ Üniversitesinde Öğretim Üyesidir.

1 Tartışmakta olduğumuz tekniklerle ilgili terminoloji tatmin edici olmayan bir durumdadır. Söz konusu ilişkiler her zaman doğrusal olmamakla birlikte bu tekniklere çoğunlukla "doğrusal programlama" adı verilmektedir. Bazen bunlar için "aktivite analizi" adı da kullanılmaktadır, fakat bu da iyi fikir veren bir ad değildir. Bu tekniklerin belirgin özelliği analizden çok programlama ile ilgili olmalarıdır. Nitekim "aktivite analizi" terimi pek rağbet görmemiştir. Şimdi burada "matematiksel programlama" terimini deniyoruz, belki bu uygun görülecektir.



Matematiksel programlamadaki yönlendirici fikir "süreç" veya "aktivite" fikridir. Süreç bir iktisadi işi gerçekleştirmek için kullanılan belirli bir metodtur. Örneğin, belirli bir formül aracılığı ile sabun imalatı bir süreçtir. Keza belirli tipteki dokuma tezgahında belirli tipte pamuklu kumaş dokuma işi de bir süreçtir. Geleneksel üretim fonksiyonu verilen bir işin gerçekleştirilebileceği tüm süreçlerin girdileri ve çıktıları ile ilgili bir formül olarak düşünülebilir.

Bazı işler için, örneğin sabun üretimi, sonsuz sayıda süreç mevcuttur. Diğer bazıları için ise, örneğin kumaş dokuma, sadece sınırlı sayıda süreç vardır. Bazı hallerde, bir tesis veya endüstri için sadece tek bir süreç mevcut olabilir.

Süreçler açısından üretim faaliyetindeki süreçler, hangi süreçlerin kullanılacağı ve bunlardan herbirinin hangi ölçüde istihdam edileceği ile ilgili kararlardır. Fakat bir endüstri veya firma bazı işlerini farklı bir şekilde yapmadıkça, diğer bir deyimle Faktör A'yı görece olarak daha yüksek oranda kullanan bir süreci Faktör B'yi kullanan süreç yerine ikame etmedikçe Faktör A'yı Faktör B yerine ikame edemez. Dolayısıyla ile, girdiler bir işin yapılış şeklinde bir değişme yapılmadan — çoğu kez bu temel nitelikte bir değişiklik — değiştirilemez. Matematiksel programlama iktisadi seçimin bu yönü üzerine eğilmektedir.

Matematiksel programlamanın amacı veri koşullar altında verimli süreçlerin optimal düzeylerini belirlemektedir. Bu verimli ilişkilerin süreçler cinsinden yeniden ifadesini ve faktör kısıtlılarının üretim seçenekleri üzerindeki etkilerinin yeniden ele alınmasını gerektirmektedir.

### I. Bir Matematiksel Programlama Örneği

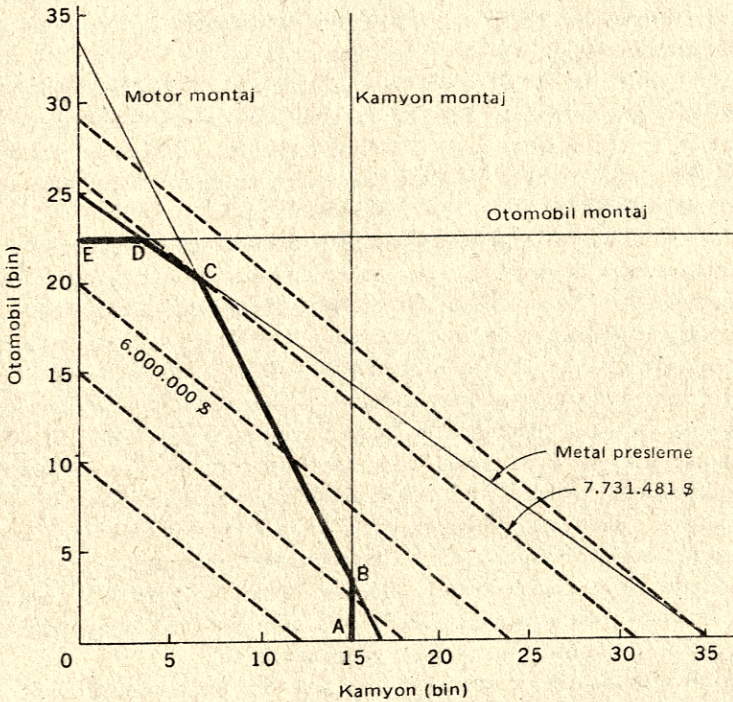
Hem otomobil ve hem de kamyon üretimi için donatılmış hayali bir otomobil işletmesini ele alalım. Buradan işletmenin iki iktisadi iş yapabileceği ortaya çıkmaktadır. Bu işlerden herbirini gerçekleştirmek için işletmenin tek bir sürece sahip olduğunu varsayıyoruz. Bu iki iş, otomobil üretimi ve kamyon üretimi, firmanın olanaklarından yararlanmada birbiri ile rekabet etmektedir. İşletmenin tesisinin dört bölümde organize edildiğini varsayalım: (1) metal presleme, (2) motor montaj, (3) otomobil montaj ve (4) kamyon montaj — ham maddeler, işgücü ve diğer tüm parçalar açık piyasadaki sabit fiyatlarla ve hemen hemen sınırsız miktarlarda temin edilebilmektedir.

Kuşkusuz tesisin her bölümündeki kapasite sınırlıdır. Metal presleme bölümünün ayda 25.000 otomobil veya 35.000 kamyon için yeterli presleme yapabileceği varsayıyoruz. Bunlardan bu bölümün üretebileceği otomobil ve kamyon presleri kombinasyonunu hesaplayabiliriz. Bu bölüm ayda 25.000 otomobillik bir kapasiteye sahip olduğundan her bir otomobil  $1/25.000$  veya yüzde 0,004'lük aylık kapasite gerektirmektedir. Benzer şekilde her kamyon aylık kapasitesinin yüzde 0,00286'sını gerektirir. Örneğin, 15.000 otomobil imal edilecek olsa bunlar metal presleme kapasitesinin yüzde 60'ını gerektirecektir ve artı kalan yüzde 40, 14.000 kamyon için pres üretmeye yeterli olacaktır. Bu durumda tamamen faal olduğunda bu bölüm tarafından 15.000 otomobil ve 14.000 kamyon üretilebilecektir. Kuşkusuz, bu presleme bölümü tarafından tam kapasite ile çalıştığı zaman üretilebilecek tek otomobil ve kamyon kombinasyonu değildir. Şekil 1'de, "Metal Presleme" olarak adlandırılan doğru bu tipteki tüm kombinasyonları temsil etmektedir.



Benzer şekilde motor montaj bölümünün aylık kapasitesinin 33.333 otomobil motoru veya 16.667 kamyon motoru veya, yukarıda olduğu gibi, daha az sayıda otomobil ve kamyon motorundan oluşan bir kombinasyon olduğunu varsayıyoruz. Motor montaj bölümünün tüm kapasitesini massedecek kombinasyonlar Şekil 1'de "Motor Montaj" doğrusu ile gösterilmektedir. Keza otomobil montaj bölümünün ayda 22.500 otomobil ve kamyon montaj bölümünün ayda 15.000 kamyonluk kapasitelere sahip olduğunu varsayıyoruz. Bu sınırlayıcı koşullar da Şekil 1 de gösterilmektedir.

Bu varsayımlar kümesinin iki süreci —otomobil üretimi ve kamyon üretimi — tanımladığını düşünüyoruz. Otomobil üretme süreci, çıktı olarak, bir otomobil çıkarmakta ve girdi olarak metal presleme kapasitesinin yüzde 0,004'ünü, motor montaj kapasitesinin yüzde 0,003'ünü ve otomobil montaj kapasitesinin yüzde 0,00444'ünü emmektedir. Benzer şekilde kamyon üretme süreci, çıktı olarak, bir kamyon çıkarmakta ve girdi olarak, metal presleme kapasitesinin yüzde 0,00286'sını, motor montaj kapasitesinin yüzde 0,006'sını ve kamyon montaj kapasitesinin yüzde 0,00667'sini massetmektedir.



Şekil: 1  
Otomobil Firması İçin Tercih Olanakları



Bu firmanın karşı karşıya bulunduğu tercih, herhangi bir bölümün kapasitesinin yüzde 100'den fazlasının kullanılmayacağı koşulu altında, her ay üretilen otomobil ve kamyon sayısını saptamaktır. Veya, daha teknik deyimle, tercih mevcut iki süreçten herbirinin hangi düzeyde istihdam edileceğine karar vermektir. Açıkça görüldüğü gibi sadece otomobil üretildiğinde, ayda en fazla 22.500 otomobil yapılabilir. Bu durumda otomobil montajı etkin sınırlayıcı koşul olmaktadır. Sadece kamyon üretildiğinde, kamyon montajındaki sınırlama nedeniyle ayda maksimum 15.000 ünite üretilir. Bu alternatiflerden hangisinin kabul edileceği veya otomobil ve kamyonun belirli bir kombinasyonunun mu üretilmesi gerektiği konusundaki karar otomobil ve kamyon üretiminin görece kârlılığına bağlıdır. Somut olması için, bir otomobilin satış değerinin, satın alınan hammaddeler, işgücü ve otomobil imalatına atfedilebilecek diğer tüm harcamaların toplam maliyetinden 300 dolar daha fazla olduğunu varsayalım ve benzer şekilde, bir kamyonun satış değeri onun imalatının gerektirdiği direkt maliyetten 250 dolar daha fazla olsun. Bu durumda herhangi bir ayda tesisin sağlayacağı net kazanç 300 çarpı üretilen otomobil sayısı artı 250 çarpı üretilen kamyon sayısı kadar olacaktır. Örneğin, 15.000 otomobil ve 6.000 kamyon 6.000.000 dolarlık bir net kazanç sağlayacaktır. Aynı net kazancı sağlayacak çok sayıda otomobil ve kamyon kombinasyonları mevcuttur; 10.000 otomobil ve 12.000 kamyon diğer bir örnektir. Şekil 1 açısından bakıldığında 6.000.000 dolarlık tüm kombinasyonlar düz bir doğru üzerinde yer alacaktır, daha belirgin olması için şekildeki doğru 6.000.000 \$ olarak simgelenmiştir.

Mümkün her net kazanç düzeyine tekabül eden az önce tasvir ettiğimiz doğruya benzer bir doğru mevcuttur. Tüm bu doğrular birbirine paraleldir, çünkü bunların eğimleri sadece iki aktivitenin görece kârlılığına bağlıdır. Kuşkusuz, net kazanç ne kadar büyükse doğru o kadar yüksekte olacaktır. Net kazanç doğrularından bir kaçış şekilde kesikli paralel doğrular olarak gösterilmiştir.

Üretilen otomobil ve kamyonların tasavvur edilebilecek her sayısı şekil üzerinde bir noktaya tekabül etmekte ve her noktadan net kazanç doğruları ailesinin bir üyesi geçmektedir. Üretilen otomobil ve kamyon sayısına tekabül eden nokta mümkün en yüksek net kazanç doğrusu üzerinde yer aldığı net kazanç maksimize edilmektedir. Bu durumda, kapasite tehditlerinin etkisi, tercihler kümesini eksenler ve ABCDE kırık doğrusu tarafından hudutları çizilen alan içinde yer alan noktalara tekabül eden çıktılarla sınırlamaktır. Noktalar orijinden dışa doğru hareket ettikçe net kazanç arttığına göre, sadece kırık doğru üzerinde yer alan noktaların ele alınması gerekmektedir. Dolayısı ile A noktasından başlayarak kırık doğru boyunca hareket edildiğinde ulaşılabilir bölgenin hududunun gitgide daha yüksek net kazanç doğrusunu kestiğini görmekteyiz, bu aynı şekilde C noktasına ulaşmaya devam etmektedir. Bu noktadan sonra, hudut net kazanç doğruları boyunca aşağı doğru kaymaktadır. C noktasında çıktı 20.370 otomobil ve 6.481 kamyon oluşmakta ve ayda 7.731.481 dolarlık net kazanç sağlamaktadır.

Büyük bir ihtimalle okur, bu diyagramın pek yeni birşey olmadığını farketmiştir. Kırık doğru, ABCDE, veri olarak alınan herhangi bir sayıdaki kamyonla birlikte üretilen otomobillerin maksimum sayısının ne olacağını söylemektedir. Dolayısı ile bu eğri, köşeli oluşu bir yana, Irving Fisher adıyla birlikte aşına olduğumuz üretim imkânları veya transformasyon eğrisinin bir çeşididir ve eğime sahip ol-



duğu herhangi bir noktada bu eğrinin eğimi otomobil ve kamyon üretimi arasındaki ikame oranı olmaktadır. Yeni olan özellik burada gösterilen üretim imkânları eğrisinin beş noktada tanımlanmış bir eğime sahip olmaması ve bu beş noktadan birinin kritik nokta olmasıdır. Standart üretim teorisi fiyat doğrusunun üretim imkânları eğrisine teğet olduğu noktada kârın maksimize edildiğini öğretmektedir. Fakat, az önce belirttiğimiz gibi, üretim imkânları eğrimizin hiç teğete sahip olmadığı beş nokta vardır. Bu nedenle teğetlik kriteri başarısız olmaktadır. Bunun yerine kâr bir köşede maksimize edilmektedir, söz konusu köşenin solunda fiyat doğrusunun eğimi üretim imkânları eğrisinin eğiminden daha küçük olmadığı gibi sağında da fiyat doğrusunun eğimi üretim imkânları eğrisinin eğiminden büyük değildir.

Dolayısı ile, şekilsel olarak, standart iktisadın eğrileri kullandığı yerde matematiksel programlama açıları kullanmaktadır. İktisadi açıdan yenilik nerededir? Standart iktisadi analizde, eğer iki ürün mevcut ise, üretim ilişkilerini bu ürünlerden birinin diğeri yerine gittikçe daha zor ikame edilebildiği üretim ilişkileri şeklinde gözümüzün önünde canlandırıyoruz. Matematiksel programlamada, herhangi bir çıktı için, belirli faktörlerin etkin bir şekilde sınırlayıcı fakat diğer faktörlerin bol miktarda mevcut bulunduğu bir üretim rejimini gözümüzün önünde canlandırıyoruz. Bu nedenle, Şekil 1'de, her noktada üretimi etkin olarak sınırlayan faktörler noktanın hangi sınırlama doğrusu üzerinde bulunduğuna bakarak teşhis edilebilir. Ürünler arasındaki ikame oranı sadece sınırlayıcı faktörlere bakarak belirlenir ve bu oran sadece sınırlayıcı faktörlerin adı değiştiğinde değişmektedir. Sınırlayıcı faktör adındaki değişme diyagramda üretim imkânları eğrisi üzerindeki bir köşeyi dönme şeklinde temsil edilmektedir.

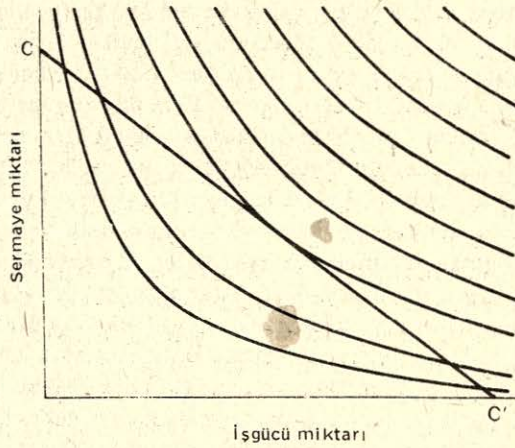
Bu örneğe daha sonra tekrar döneceğiz, çünkü tüm önemli yönleri henüz tamamen incelenmemiştir. Fakat şimdi matematiksel programlamada kullanılan bazı kavramları daha genel olarak geliştirecek bir duruma gelmiş bulunuyoruz.

## II. Matematiksel Programlamadaki Üretim Modeli

İktisatın klasik problemlerinden biri iki üretim faktörünün —kolaylık sağlamak amacıyla ile bunlara sermaye ve işgücü adı verilir— optimal kullanımudur. Geleneksel analizde, iki faktörün bir üretim fonksiyonuna uygun olarak birbiri ile işbirliği yaptığı tasavvur edilerek problem formüle edilmektedir; üretim fonksiyonu iki faktörün belirtilen miktarlarının kullanımı ile elde edilebilecek maksimum ürün miktarını ifade eder. Böyle bir üretim fonksiyonunun Şekil 2'deki gibi bir "eş-ürün diyagramı" ile temsili uygun bir yol olmaktadır. Bu bilinen şekilde, işgücü miktarları yatay eksen boyunca ve sermaye miktarları dikey eksen boyunca gösterilmektedir. Diyagramdaki bükümlü eğrilerden herbiri belirli bir çıktı miktarına tekabül eder, daha yüksek bükümlü eğri daha büyük miktar demektir.

Eğer ünite sermaye ve işgücü fiyatları biliniyorsa, belirli bir sabit harcama ile satın alılabilecek işgücü ve sermaye kombinasyonları şekilde CC' gibi aşağı doğru inen düzgün bir doğru ile gösterilebilir. Bu şekile dayanarak hemen iki yorum yapabiliriz. Birincisi, herhangi bir eş-ürün eğrisi tarafından temsil edilen çıktının minimum ünite maliyetle üretimi, sözkonusu eş-ürün eğrisinin bir fiyat doğrusuna teğet olduğu noktaya tekabül eden işgücü ve sermaye kombinasyonları kullanılarak gerçekleş-





Şekil: 2  
Bir Eş-Ürün Diyagramı

tirilebilir. İkincisi, veri olarak alınan herhangi bir harcama ile ulaşılabilecek en büyük çıktı miktarı söz konusu harcamaya tekabül eden fiyat doğrusunun teğet olduğu eş-ürün eğrisi ile temsil edilmektedir.

Bu diyagram ve analizi iki faktörün sürekli olarak birbiri yerine ikame edilebileceğini ve bu ikamenin, işgücü miktarı az bir miktar azaltıldığında istihdam edilen sermaye miktarındaki *ufak* bir artışla, çıktı miktarının aynı düzeyde korunabileceği şekilde olduğu varsayımına dayanmaktadır. Buna ilaveten, bu analiz çıktının sabit kalabilmesi için işgücü miktarındaki birbirini izleyen ünite azalışların sermaye miktarında biraz daha büyük bir artışı gerektirdiğini varsaymaktadır. Aksi halde eş-ürün eğrileri gerekli biçime sahip olamayacaktır.

Bunların tümü bilinen şeylerdir. Bunları hatırlatıyoruz; çünkü hemen aşağıda matematiksel programlamaya temel teşkil eden benzer bir diyagramı geliştireceğiz. Fakat, ilk önce yeni bir diyagrama ve yeni bir yaklaşıma neden gerek duyulduğunu görmeye çalışalım.

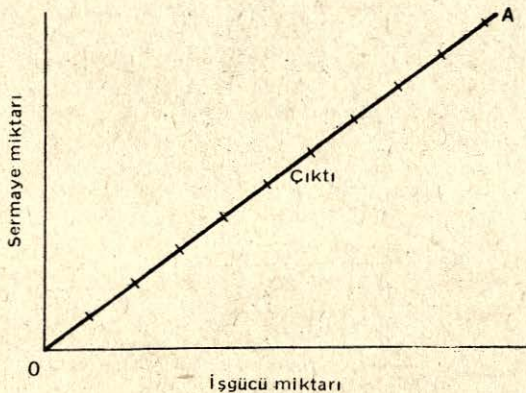
Yukarda kısaca özetlediğimiz üretim modelinin bazı üretim tipleri için geçerli olması çok muhtemeldir. Fakat imalat endüstrilerinin çoğunluğu için ve gerçekte gelişmiş makinelerin kullanıldığı tüm üretim için, bu üretim modeli ciddi eleştirilere açık bir modeldir. Modern makinaların çoğunluğunun karakteristik özelliği her tipteki makinanın sadece sınırlı bir aralık içinde belirtilen hızlarla etkin bir şekilde çalışması ve makina ile işbirliği yapan miktarların hareket veren gücün, hammadde-lerin ve diğer faktörlerin makinanın kendine has karakteristiği tarafından esnek olmayan bir şekilde belirlenmesidir. Buna ilaveten, herhangi bir anda verilen bir işi gerçekleştirmek için ancak az sayıda farklı makina tipi mevcuttur. Birkaç örnek belirtilen noktaları daha somut hale getirebilir. Toprak el küreği, buhar veya akaryakıtla işleyen küreklerle, veya buldozer ile kazılabilir. Buhar veya akaryakıt ile işleyen kürekler ve buldozerlerin ancak az sayıda çeşitli modeli mevcuttur ve bunlardan her biri saat başına akaryakıt tüketimi, gerekli operatör ve yardımcı sayısı, saat başı-



na kazılan toprağın metre kübü vs. açısından kendine has özelliklere sahiptir. Dizgi el-fontları, linotip veya monotip makinalar kullanılarak yapılabilir. Gene, her makinanın sadece birkaç tipi mevcuttur ve bunlardan herbirinin kendine has çalışma hızı, güç ve alan gereksinimi ve değiştirilmesi güç diğer özellikleri vardır. Biraz düşünülürse akla çok sayıda başka örnekler gelecektir: Baskı makineleri, dokuma tezgahları, demiryolu ve karayolu taşımacılığı, istatistik ve muhasebe ile ilgili hesaplamalar, maden arıtımı, metal üretimi, v.s. Birçok iktisadi iş için mevcut süreçlerin sayısı sınırlıdır. Faktörler teknik süreçlerin tümünün kullanım düzeyleri değiştirilmeden birbiri yerine ikame edilemez, çünkü her süreç faktörleri kendi karakterinin gerektirdiği sabit oranlarda kullanılmaktadır. Matematiksel programlamada, buna paralel olarak, süreç ikamesi geleneksel analizdeki faktör ikamesine benzer bir rol oynamaktadır.

Şimdi süreç ikamesi analizi için bir teknik geliştireceğiz. Kolaylık sağlamak amacı ile tartışmamızı sermaye ve işgücü adı verilen iki faktör kullanan ve bir tek çıktı üreten süreçlerle sınırlayacağız. Şekil 3 böyle bir süreci temsil etmektedir. Şekil 2'de olduğu gibi yatay eksen işgücü üniteleri ve dikey eksen sermaye ünitelerine göre ölçeklendirilmiştir. Süreç çıktı ünitelerine göre ölçeklendirilen OA ışını ile temsil edilmektedir. Her çıktıya tekabül eden emek gereksinimi süreç ışını üzerindeki uygun işaretli noktadan yatay eksene indirilen dikmenin ekseni kestiği noktadaki ünite sayısı okunarak bulunur. Sermaye gereksinimi de aynı şekilde süreç doğrusu üzerindeki söz konusu noktadan dikey eksene çizilen dikmenin bu ekseni kestiği noktadaki ünite olarak bulunur. Benzer şekilde, her emek miktarına bir çıktı miktarı — bu doğrudan yukarı doğru giderek okunur — ve bir sermaye miktarı — bu çıktı noktasından doğrudan sola giderek okunur — tekabül etmektedir.

Dikkat edilirse bu diyagramdaki sermaye miktarı ekonomik birimin sahip olduğu sermaye miktarı değil sürecin kullandığı sermaye miktarıdır; diğer bir deyişle buradaki miktar sermayenin kendisi değil onun hizmetidir. Bunun için mevcut bir makina ile daha fazla veya daha az işgücü kombine edilebilirse de — bu makina daha fazla veya daha az saat kullanılarak gerçekleştirilebilir — sermaye girdisinin emek girdisine oranı, diğer bir deyimle makina saatinin işgücü saatine oranı teknolojik olarak sabit kabul edilmektedir.

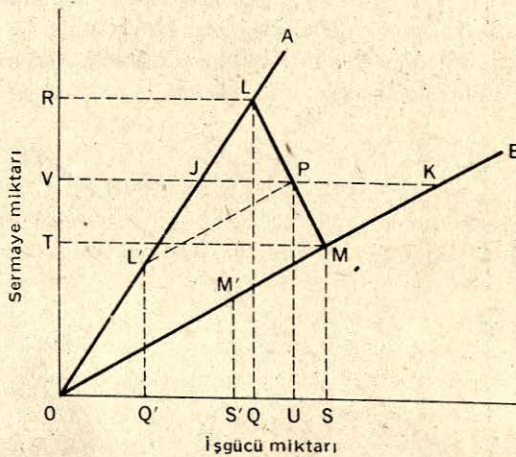


Şekil: 3  
Bir Süreç



Şekil 3 iki önemli varsayımı içermektedir. OA doğrusunun düzgünlüğü sermaye girdisi ve emek girdisi arasındaki oranın tüm çıktı düzeyleri için aynı olduğunu ve bunun doğrunun eğimi tarafından verildiğini ima etmektedir. Çıktı doğrusu üzerindeki işaretler arasındaki aralıkların birbirine eşit olması sürecin kullanımında ölçek ekonomilerinin veya ölçek eksi-ekonomilerinin bulunmadığını, yani çıktı miktarı ve herhangi bir girdi miktarı arasında kesin bir oransallığın bulunduğunu, belirtmektedir. Bu varsayımların doğruluğu süreç fikri baz alınarak oldukça basit bir şekilde belirlenebilir. Eğer bir süreç bir kez kullanılabiliyorsa, iki defa veya faktör arzları izin verdiği sürece istenildiği kadar tekrarlanarak kullanılabilir. İki linotip makinesi aynı becerideki operatörlerle bir saatte birinin yaptığıın iki misli tip çıkarabilir. Birbirinin aynı iki dokuma tezgahı birinin bir ayda çıkardığından iki kat fazla ham bez çıkarabilir. Faktörler mevcut olduğu sürece, bir süreç tekrarlanabilir. Kuşkusuz bunun ekonomik olup olmayacağı başka bir sorundur.

Eğer veri olarak alınan bir iktisadi iş için sadece tek bir süreç mevcut ise pek fazla iktisadi tercih olanağı yoktur. Bununla birlikte, çoğunlukla birden fazla süreç mevcuttur. Şekil 4 iki sürecin mevcut bulunduğu bir durumu yansıtmaktadır. Süreç A ve Süreç B sırası ile OA ve OB doğruları tarafından belirtilmektedir. OA ve OB doğruları üzerindeki noktaların nasıl yorumlanacağını daha önce gördük. Bu iki doğru üzerinde çıktının ölçüldüğü ölçeklerin birbirinin aynı olması gerekmez. Her doğru üzerindeki ölçek, faktörlerin doğrunun temsil ettiği süreçte kullanılması halindeki verimliliklerini yansıtmaktadır ve bu ölçeğin diğer herhangi bir süreç doğrusu üzerindeki çıktı ölçeği ile hiçbir ilişkisi yoktur. Şimdi L ve M noktalarının iki süreç için aynı çıktı üretimini temsil ettiğini farzedelim. Bu halde bu iki nokta arasındaki düzgün doğru, LM, bir eş ürün eğrisini temsil edecektir ve bu doğru üzerindeki her nokta Süreç A'nın OL ünitesi veya Süreç B'nin OM ünitesi ile aynı çıktıyı üreten bir Süreç A ve Süreç B kombinasyonuna tekabül edecektir.



Şekil: 4  
İki Süreç



Bunu görmek için, LM doğrusu üzerindeki herhangi bir P noktasını ele alalım ve bu noktadan OB ye paralel bir doğru çizelim. Bu doğrunun OA yı kestiği nokta L' olsun. Son olarak OB üzerinde OM' = L'P olacak şekilde M' noktasını işaretleyelim. Şimdi Süreç A nın OL' düzeyinde ve Süreç B nin OM' düzeyinde kullanımını içeren üretim planını ele alalım <sup>2</sup>. Bu üretim planının OU ünite işgücü ve OV ünite sermaye kullandığı kolaylıkla gösterilebilir. Burada U ve V sırası ile P noktasının işgücü ve sermaye koordinatlarıdır <sup>3</sup>.

P nin koordinatları Süreç A nın OL' ünitesi ve Süreç B nin OM' ünitesi tarafından tüketilen faktör miktarlarına tekabül ettiğinden, P nin iki sürecin belirtilen düzeylerinden oluşan kombine üretim planını temsil ettiğini söylüyoruz. Bu yorum önemli bir iktisadi varsayımı ima etmektedir. İki süreç eşanda kullanıldığında bunlar ne birbirini engellemekte ne de birbirini güçlendirmektedir. Dolayısı ile iki sürecin herhangi bir düzeyde eşanlı kullanımından kaynaklanan çıktılar ve girdiler her sürecin çıktı ve girdileri birbirine eklenerek bulunabilir.

P nin L ve M noktalarından geçen eşürün eğrisi üzerinde yer aldığını gösterebilmek için geriye sadece L' ve M' noktalarına tekabül eden çıktılar toplamının L noktasına veya M noktasına tekabül eden çıktı ile aynı olduğunun gösterilmesi kalmaktadır. Bir süreç ışını üzerindeki herhangi bir noktaya tekabül eden çıktının, ışının bu noktaya kadarki uzunluğu ile doğrudan orantılı olduğu ve Şekil 4'teki LL'P ve LOM üçgenlerinin benzer olduğu dikkate alındığında sonuç hemen ortaya çıkmaktadır <sup>4</sup>. Bunun için, eğer OA ve OB gibi iki süreç doğrusuna sahip isek ve bunlar üzerinde aynı çıktı üretimini temsil eden L ve M gibi iki nokta bulursak, bu durumda iki eşit çıktı noktasını birbirine bağlayan doğru parçası bir eş ürün eğrisi olacaktır.

- 2 Alternatif bir çizim P noktasından geçen OA ya paralel bir doğru çizmek olabilir. Bu doğru OB yi M' de kesecektir. Daha sonra OA üzerinde M'P ye eşit OL' mesafesini bulabiliriz. Bu çizim metinde kullanılan çizimle tamamen aynı sonuçları verecektir. Bu durum fizikteki "güçler paralelkenarı" na benzer bir durumdur.
- 3 İspat: OL' düzeyinde Süreç A, OQ' ünite işgücü, OM' düzeyinde Süreç B, OS' ünite işgücü kullanmaktadır; iki sürecin birlikte kullandığı işgücü OQ'+OS' ünitedir. Fakat, çizim gereği, L'P, OM' ne eşit ve paraleldir. Bu nedenle Q'U = OS'. Dolayısı ile, OQ'+OS' = QO'+Q'U = OU ünite işgücüdür. Argüman sermaye için benzer şekildedir.
- 4 İspat: Çıktı (X) diyagram üzerindeki herhangi bir noktaya tekabül eden çıktıyı simgelesin. Bu durumda Çıktı (M')/Çıktı (M) = OM'/OM ve Çıktı (L')/Çıktı (L) = OL'/OL. Varsayım gereği: Çıktı (L) = Çıktı (M). Dolayısı ile Çıktı (M')/Çıktı (L) = OM'/OM. Birbirine eklediğimizde;

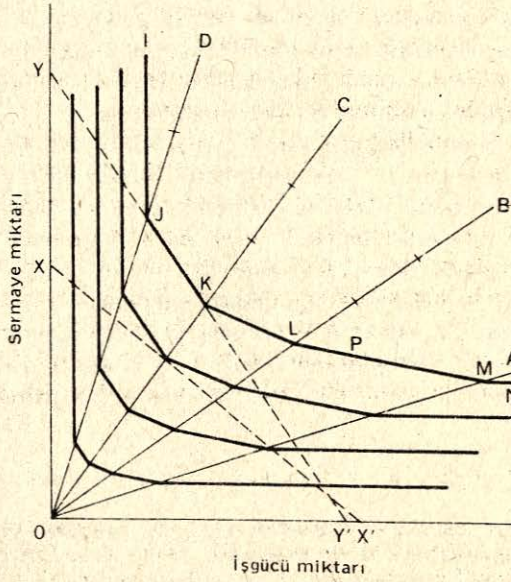
$$\frac{\text{Çıktı (M')} + \text{Çıktı (L')}}{\text{Çıktı (L)}}$$

$$= \frac{OM'}{OM} + \frac{OL'}{OL} = \frac{L'P}{OM} + \frac{OL'}{OL} = \frac{L'L}{OL} + \frac{OL'}{OL} = 1$$

olduğunu buluruz.



Şimdi artık matematiksel programlama için bilinen eşürün diyagramına benzer bir diyagramı çizebiliriz. Dört süreç doğrusu ile gösterilen Şekil 5'teki diyagram böyle bir diyagramdır. M noktası Süreç A'nın kullanımı ile elde edilen belirli bir çıktıyı temsil etmektedir ve L, K, J sırası ile Süreç B, C ve D aracılığı ile elde edilen aynı çıktıyı temsil etmektedir. Bu dört noktayı bağlayan birbirini izleyen doğru parçaları aynı çıktı için eşürün eğrisidir. Keza MLKJ ye sıra ile paralel diğer doğru parçalarının da bir eşürün eğrisi olduğu kolaylıkla görülebilir. Şekilde bu tipteki eğri-lerden üçü gösterilmiştir. Şekil 5'i Şekil 2 ile karşılaştırmak ve yorum yanında görünümündeki güçlü benzerliği görmek aydınlatıcı olmaktadır.



Şekil: 5  
Dört Süreç

Aynen geleneksel eşürün diyagramında olduğu gibi Şekil 5 üzerinde de fiyat doğrularını gösterebiliriz. Kesikli  $XX'$  ve  $YY'$  doğruları mümkün iki fiyat doğrusunu temsil etmektedir. İlk önce  $XX'$  ünü ele alalım. Bu doğrunun çizilmiş olan hali ile, veri olarak alınan bir harcama için maksimum çıktı sadece Süreç C kullanılarak elde edilebilir ve aksi yönde bakıldığında, veri olarak alınan bir çıktı için minimum maliyet keza sadece Süreç C kullanılarak elde edilmektedir. Bu şekilde,  $XX'$  tarafından temsil edilen görelî fiyat rejimi için, Süreç C optimaldir.  $YY'$  fiyat doğrusu eşürün eğrisinin JK parçasına paralel olarak çizilmiştir. Bu durumda Süreç C gene optimaldir, fakat Süreç D ve keza bu iki sürecin herhangi bir kombinasyonu da optimaldir.

Bu iki fiyat doğrusundan ve okurun gözönüne almak isteyeceği diğer birçok fiyat doğrusundan optimal üretim programının her zaman tek bir süreç yardımı ile gerçekleştirilebileceği açıkça görülmektedir. Bunun hangi süreç olduğu kuşkusuz,



fiyat doğrusunun eğimine bağlıdır. Bununla birlikte, geleneksel teğetlik kriterinin artık uygulanamaz olduğunu belirtmemiz gerekir.

Şekil 5'ten optimal bir iktisadi planın, çıktılarında herbiri için hiçbir zaman tek süreçten fazla süreç kullanmasına gerek olmadığını bulduk<sup>5</sup>. Bu sonuç tasvir edilen durum için geçerlidir, söz konusu durum iki faktörün hizmetlerinin sabit gö-reli fiyatlarda arzu edilen herhangi bir miktarda temin edilebileceğini varsaymaktadır. Bu varsayım pek çok iktisadi problem için geçerli olmadığı gibi matematiksel programlamada da pek fazla kullanılmamaktadır. Bu nedenle şimdi faktör arz koşullarını dikkate almamız gerekmektedir.

### III. Faktör Arzları ve Maliyetler

Matematiksel programlamada tüm üretim faktörlerini iki gruba ayırmak gelenekselidir: Sabit ünite maliyeti ile istenilen miktarda temin edilebilen sınırsız faktörler ve belirlenen maksimum miktara kadar sabit ünite maliyeti ile fakat bu miktardan sonra hiç temin edilemeyen sınırlı veya kıt faktörler. Otomobil örneği bu sınıflandırmayı yansıtmaktadır. Sıfır değişir maliyetle mevcut bulunan, sabit faktörler olarak ele alınmış, dört tip kapasite vardır; tüm diğer faktörler, beher çıktı ünitesi için sabit olduğu kabul edilen, direkt maliyetler altında gruplandırılmıştır.

Otomobil örneği bu faktör sınıflandırmasının rekabetçi piyasalarda iş yapan bir firmanın maksimizasyon problemini ifade etmek için yeterli olduğunu göstermektedir. Son kesimde tüm faktörlerin sınırsız olduğu durumda, bu formüllendirmenin minimum ortalama maliyet noktasını bulmak için kullanılabilirliğini gördük.

Bu uygulamalardan her ikisi de sınırlandırıcı varsayımları gerektirmekte ve bunun ötesinde, bu varsayımlar kaynak dağılımını incelerken yapılan geleneksel varsayımlara ters düşmektedir. Geleneksel analizde bir firmanın, endüstrinin veya ekonominin üretim düzeyi arttığında ortalama birim maliyetin de belirli bir noktadan sonra arttığı tasavvur edilmektedir. Ortalama maliyetlerdeki artış kısmen değişen oranlar yasaasının çalışmasına atfedilmektedir<sup>6</sup>, bu yasa üretim faktörlerinin tümü değil fakat bazıları artırıldığında işlemektedir. Tüm değilde bazı inputları arttırmanın sonuçları söz konusu olduğunda, matematiksel programlama ve marjinal analiz arasındaki farklılık temel bir farklılık olmaktan çok sözde bir farklılıktır. Şekil 4'e bakılırsa bu tipteki değişmelerin nasıl ele alındığı görülecektir. Şekil 4'teki J noktası sadece Süreç A kullanımı ile belirli bir çıktı üretimini temsil etmektedir. Çıktı üretimi sermaye kullanımını arttırılmaksızın yükseltmek isteniyorsa, bu noktali doğru JK boyunca sağ doğru hareket edilerek gerçekleştirilebilir, çünkü bu doğru, sağa doğru gittikçe daha yüksek eş-ürün eğrilerini kesmektedir. Böyle bir hareket gittikçe artan miktarlarda daha fazla Süreç B ve gittikçe artan miktarlarda daha az Süreç A kullanımına tekabül etmekte ve bu şekilde, dolaylı olarak, işgücünü serma-

5 Bununla birlikte, ne müşterek üretim ne de talep yönünden gelecek etkilerin gözönüne alınmadığı unutulmamalıdır.

6 Bakınız J.M. Cassels, "On the Law of Variable Proportions", W. Fellner and B.F. Haley, ed. *Readings in the Theory of Income Distribution* içinde (Philadelphia, 1946), s. 103-18.



ye yerine ikame etmektedir. Eğer, ilaveten, Süreç A için ünite üretim maliyetinin Süreç B için olan maliyetten daha düşük olduğunu varsayarsak bu hareket aynı zamanda ortalama üretim maliyetinin artması demektir. Bu şekilde hem marjinal analiz ve hem de matematiksel programlama faktör oranları değiştirildiğinde aynı sonuca ulaşmaktadır: Eğer değişme minimum maliyet noktasından başlarsa ikame gittikçe artan üretim maliyetlerine neden olacaktır.

Fakat geleneksel tipteki analiz açısından bakıldığında faktör oranlarının değiştirilmesi hikayenin sadece bir bölümüdür. Eğer çıktı arttırılacaksa üç şeyden herhangi biri olabilir. Birincisi, ünite fiyatlarında bir değişme ile karşılaşmaksızın tüm girdilerin tüketimini arttırmak mümkün olabilir. Bu durumda hem matematiksel programlama ve hem de marjinal analiz çıktının girdi miktarları arasındaki oran değiştirilmeksizin genişletilebileceği ve ortalama üretim maliyetinin artmayacağı konusunda hemfikirdir <sup>7</sup>. İkincisi, bazı inputların kullanımını arttırmak mümkün olabilir. Bu biraz önce analizini yaptığımız durumdur. Her iki analiz tipine göre bu durumda girdi oranları değişecek ve ortalama ünite maliyetleri artacaktır. İki yaklaşım arasındaki tek farklılık şudur: Ortalama maliyet çıktıya karşı bir diyagram üzerinde işaretliğin marjinal analizi kullananlar maliyeti düzgün bir şekilde sürekli olarak artan bir eğri ile, öte yandan matematiksel programlamayı kullananlar maliyeti artan eğimli doğru parçalarından oluşan bir kırık doğru ile resimlendirecektir. Üçüncüsü, tüm girdi miktarlarını ancak ünite fiyatlarını arttırarak veya belirli tipte ölçek eksi ekonomileri yaratarak arttırmak mümkün olabilir. Üçüncü durum marjinal analizde ortaya çıkmaktadır, gerçekte bu uzun dönem maliyet eğrilerine aşina olduğumuz biçimi veren durumdur, fakat matematiksel programlamada bunun karşılığı yoktur.

Sonuçta ulaştığımız önemli temel farklılık marjinal analizin ölçekteki değişmelerle ilgili olarak parasal ve teknik eksi ekonomileri tasavvur etmesi matematiksel programlamanın ise bunu gözönüne almamasıdır <sup>8</sup>. Ölçekteki değişmeler karşısında faktör fiyatlarının ve verimliliklerin değişmediği veya bu tipteki değişmelerin ihmal edilebileceği çok sayıda iktisadi problem mevcuttur. Örneğin, sanayi kapasitesi ile ilgili araştırmaların çoğunluğu bu niteliktedir. Bu tipteki çalışmalarda bir endüstrinin çıktısını onun fiziki teçhizat stoklarını veri olarak ve teçhizatla işbirliği yapacak yardımcı faktörleri: teçhizatın özellikleri tarafından belirlenen miktarlarda temin edileceğini varsayarak maksimize etmeye çalışırız. İşgücü gereksinimleri ile ilgili çalışmalar da aynı tiptedir. Bu tipteki çalışmalarda hem çıktı ve hem de teçhizatı veri olarak alır ve teçhizatı arzulanan çıktıyı verecek şekilde işletmek için gerekli işgücünü hesaplarız. Tam istihdam çıktı düzeyi ile ilgili çalışmalar da aynı çerçeve içinde yer almaktadır. Bu tipteki çalışmalarda her faktörün tam istihdam düzeyi olarak

7 Bakınız F.H. Knight, *Risk, Uncertainty and Profit* (Boston, 1921) s. 98.

8 Marjinal analiz çatısı içinde dahi ölçek eksi-ekonomileri kavramının geçerliliği hem teorik ve hem de ampirik açıdan eleştirilere maruz kalmaktadır. Ampirik eleştiri örnekleri için bakınız *Committee on Price Determination, Conference on Price Research, Cost Behavior and Price Policy* (New York, 1943). En detaylı teorik eleştiri yapan kaynak şudur: Piero Sraffa, "The Laws of Returns Under Competitive Conditions," *Econ. Jour.*, Dec. 1926 XXXVI, 535-50.



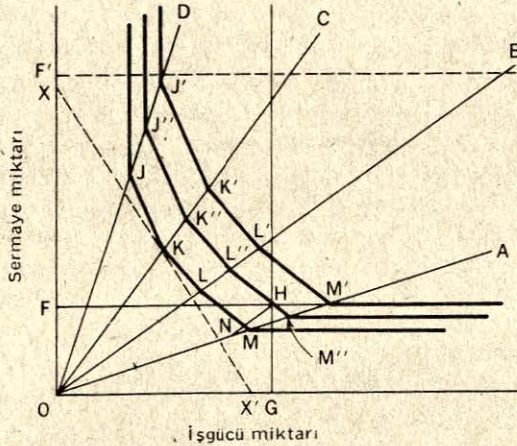
kabul edilen miktarını önceden belirleriz. Daha sonra faktörlerin bu miktarlarda kullanımı ile elde edilecek optimum çıktıyı hesaplarız.

Bu örnekler matematiksel programlamada yapılan varsayımların çok geniş çeşitliliği olan önemli iktisadi problemi içine aldığını göstermeye yeterlidir. Matematiksel programlamanın en yararlı uygulamaları belki de biraz önce tasvir ettiğimiz tipteki problemlerdir, yani ilgili bazı veya tüm kaynakları belirli miktarlarda kullanarak optimal üretim planlarını bulma problemleridir.

#### IV. Sınırlı Faktörlerle Üretim Analizi

Geliştirdiğimiz diyagramlar faktör arzları üzerine konan sınırlamaların doğuracağı sonuçların analizine kolaylıkla uyarlanabilir. Bu sınırlamalar, kuşkusuz, Şekil 1'in özüdür; buradaki dört temel doğru gözönüne alınan dört faktörün miktarlarına ilişkin tahditlerden kaynaklanan süreç düzeyleri ile ilgili sınırlamaları temsil etmektedir. Fakat Şekil 1, ikiden fazla süreç ele alınması gerektiğinde kullanılamaz. Bu tipteki problemler için Şekil 3, 4 ve 5'teki gibi diyagramların kullanılması gerekmektedir.

Şekil 6 aşağıda açıklayacağımız bazı ek verilerle Şekil 5'te resimlendirilen durumu yeniden sunmaktadır. OF kullanılabilir maksimum sermaye miktarını temsil etsin, bu şekilde OF' bir faktör sınırlamasını göstermektedir. F den çizilen yatay doğru diyagramı iki kesime ayırmaktadır: Doğrunun yukarsındaki tüm noktalar mevcut olandan daha fazla sermaye gerektiren programlara tekabül etmektedir; doğru üzerindeki ve aşağısındaki tüm noktalar aşırı sermaye gereksinimi olmayan programları temsil eder. Bu yatay doğruya sermaye sınırlama doğrusu adı verilecektir. Bu doğru üzerindeki ve aşağısındaki noktalara "gerçekleştirilmesi mümkün" ve yukarsındakilere "gerçekleştirilmesi mümkün olmayan" noktalar adı verilmektedir.



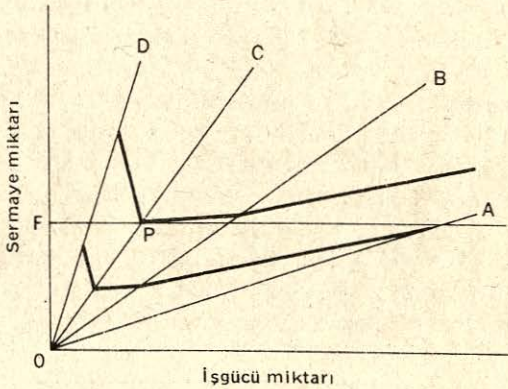
Şekil: 6  
Sınırlamalarla Dört Süreç



Şekil 6'da resimlendirilen ekonomik birim gerçekleştirilmesi mümkün noktalardan herhangi birinde faaliyet gösterme seçeneğine sahiptir. Eğer birimin amacı maksimum çıktı ise, mümkün en yüksek eş-ürün eğrisi, yani sermaye tahdid doğrusuna değen en yüksek eş-ürün eğrisi, üzerinde yer alan bir noktayı seçecektir. Bu eş-ürün eğrisi J'K'L'M' olarak adlandırılan eş-ürün eğrisidir ve mümkün en yüksek çıktı, Süreç A kullanılarak elde edilmektedir.

Kuşkusuz, amaç maksimum çıktı olmayabilir. Amaç, örneğin, çıktı değerinden işgücü maliyetleri çıktıktan sonra arta kalan kısmı maksimum yapmak olabilir. Böyle bir fazlalığa "net değer" olarak atıfta bulunacağız. Net değer için çözüm yapmak için aynı tipte bir diyagram kullanılabilir; yeter ki her birim çıktı değeri üretilen ünite sayısından bağımsız olsun<sup>9</sup> ve benzer şekilde her emek ünitesinin maliyeti sabit olsun. Eğer bu koşullar gerçekleşirse bir süreç ışını üzerindeki her nokta belirli bir fiziki çıktıya fakat aynı zamanda belirli çıktı değerine, işgücü maliyetine ve net çıktı değerine tekabül edecektir. İlaveten, herhangi bir süreç ışını boyunca net çıktı değeri fiziki çıktı çarpı ünite başına net değere eşittir ve dolayısı ile fiziki çıktı ile oransal olacaktır. Bunun için Şekil 6'ya benzer bir diyagram kullanabiliriz. Böyle bir diyagramın Şekil 6'dan farklılığı süreç ışını boyunca fiziki çıktı yerine net değer ölçüldüğünün düşünülmesi ve eş-ürün eğrileri yerine eş-değer eğrilerinin gösterilmesidir. Bu şekil 7'de yapılmıştır; burada ulaşılabilecek maksimum net değer P noktasından geçen eşdeğer eğrisinin karşı geldiği değerdir ve buna Süreç C kullanılarak ulaşılmaktadır.

Burada dikkat edilmesi gereken noktalar, hem Şekil 6 ve hem de Şekil 7'de optimal programın tek bir süreci içerdiği, mevcut sermaye miktarındaki kaymaların optimal sürecin adını değiştirmeyeceği fakat düzeyini değiştirebileceği ve Şekil 5'te önemli bir rolü olan fiyat doğrularının burada hiç bir role sahip olmamasıdır.



Şekil: 7  
Eş Değer Eğrileri İle Dört Süreç

9 Özellikle bu varsayım rahatsız edici bir varsayımdır. Bu varsayımı buradan metodu en az karmaşık biçimi ile açıklamak için kullanıyoruz.



Şimdi ele alacağımız karmaşıklık — bu üzerinde duracağımız son karmaşıklık olmaktadır — her iki faktörün arzlarının sınırlı olduğunu varsaymaktır. Bu durum, Şekil 6'ya işgücü sınırlamasını temsil etmek üzere G noktasından geçen dikme eklenerek resimlendirilmektedir. Mevcut emek miktarı, kuşkusuz, OG uzunluğu ile gösterilmektedir. Bu halde OFGH dikdörtgeni içindeki noktalar, her iki faktörün mevcut miktarlarından fazlasını gerektirmeksizin gerçekleştirilebilen programları temsil etmektedir. Bu gerçekleştirilmesi mümkün programlar dikdörtgenidir. Ulaşılabilecek en yüksek çıktı gerçekleştirilmesi mümkün programlar dikdörtgenine değen en yüksek eş-ürün eğrisine tekabül eden çıktıdır. Bu J"K"L"M" eş-ürün eğrisidir, ayrıca, maksimum eş-ürün eğrisi söz konusu dikdörtgene H noktasında değdiğinden, H maksimum çıktıyı üretebilmek için kullanılacak programı temsil etmektedir.

Bu çözüm, çözüm noktasının herhangi bir süreç ışını üzerinde değilde Süreç A ve Süreç B nin ışınları arasında yer alması açısından, bundan önceki çözümlerden farklıdır. Daha önce gördüğümüz gibi H gibi bir nokta Süreç A nın ON düzeyinde ve Süreç B nin NH düzeyinde kullanımını temsil etmektedir.

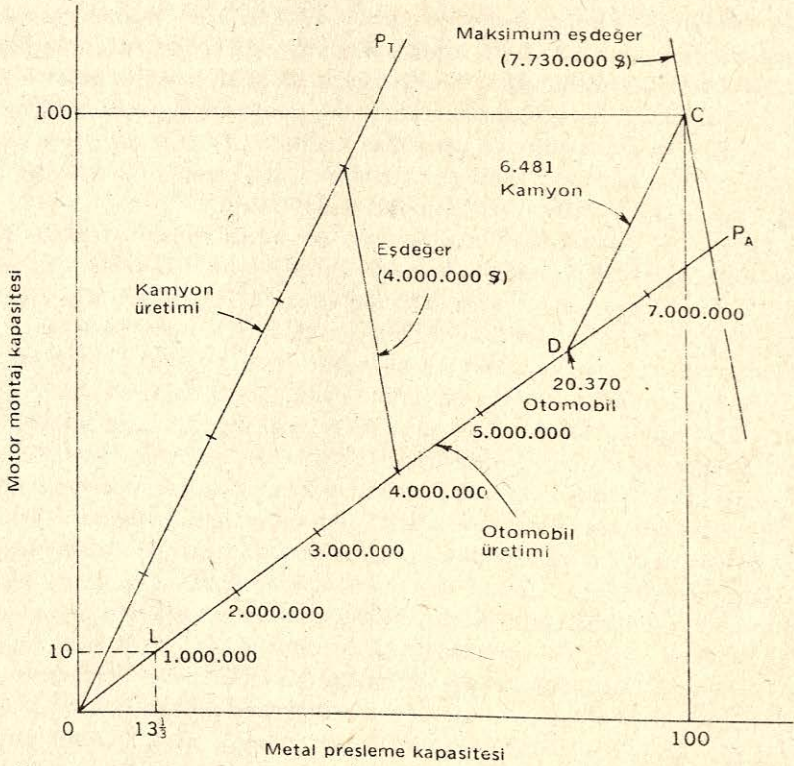
Bu çözüme ilişkin olarak iki noktanın vurgulanması yararlı olacaktır. Birincisi; çizilen durumdaki faktör tahdit doğruları ile, maksimum çıktı iki süreci gerektirmektedir. Eğer faktör tahdit doğruları süreç ışınlarından biri üzerinde keşişecek şekilde çizilmiş olsa idi sadece tek bir süreç gerekli olurdu. Eğer faktör tahdit doğruları Süreç D nin solunda veya Süreç A nın sağında keşişmiş olsaydı, maksimize edici üretim planı gene tek bir süreci gerektirirdi. Fakat, tahdit doğruları nasıl çizilirse çizilsin, çıktı maksimizasyonu için en fazla iki sürece gerek duyulacaktır. Bu bizi önemli bir genelleştirmeye yöneltmektedir: Eğer arzı sınırlı olan faktörlerin sayısı sıfırdan büyük ise, maksimum çıktı her zaman sınırlı faktör sayısını aşmayan sayıda süreç ile elde edilebilir. Şekil 6 ve Şekil 7'den çıkardığımız sonuçların her ikisi bu kurala uymaktadır. Bu matematiksel programlamanın temel teoremlerinden biridir.

İkincisi; maksimum çıktıyı elde etmek için en fazla iki sürece gereksinme olmasına karşın, bunların hangi iki süreç olduğu faktör tahditlerinin konumuna bağlıdır. Gösterilen durumda, maksimum çıktıyı sağlamak için kullanılan süreçler Süreç A ve Süreç B olmaktadır. Eğer, OF' miktarı ile temsil edilen, daha fazla bir miktarda sermaye mevcut olsaydı, maksimumu sağlayıcı süreçler Süreç C ve Süreç D olurdu. Eğer iki faktör sınırlı ise optimum programdaki süreçleri belirleyen şey iki süreçten herhangi birinin mutlak miktarı değil iki faktörün arzları arasındaki orandır. Bu sadece tek faktörün sınırlı olduğu durumdan farklıdır. Nasıl sadece tek faktörün sınırlı olduğu duruma kıyasla iki faktörün sınırlı olduğu durumda optimum süreç kümesini belirlenmesi daha karmaşık hale geliyorsa, üç veya daha fazla faktörün sınırlı olması halinde optimum koşullar daha da karmaşık hale gelmekte ve çabuk bir şekilde zihinde canlandırılabilme sınırını aşmaktadır. Gerçekten de, bu güçlü matematiksel programlama aracının *raison d'etre*'i, yani var oluş nedenidir.

Gözönüne alınan bu düşünceler otomobil örneği aracılığı ile somutlaştırılabilir. Şekil 1'e baktığımızda, optimum üretim noktasının, C, motor montaj ve metal presleme doğruları üzerinde ve otomobil montaj ve kamyon montaj tahditlerinin çok altında yer aldığını görüyoruz. Dolayısı ile otomobil ve kamyon montaj kapasiteleri etkin değildir ve bunlar ihmal edilebilir. İki etkin sınırlayıcı kapasite tipi açısından durum Şekil 8'de gösterilmiştir.



Şekil 8'de  $P_A$  ışıını otomobil üretme sürecini ve  $P_T$  kamyon üretme sürecini temsil etmektedir. Bu iki süreç metal presleme veya motor montaj kapasitelerinin yüzde 100'ünden fazlasının kullanımını gerektirmeyen düzeylerin herhangi bir kombinasyonunda işletilebilir. Bu nedenle diyagramdaki dikdörtgen gerçekleştirilmesi mümkün programlar alanı almaktadır. Optimal üretim programı gerçekleştirilmesi mümkün alan içindeki mümkün en yüksek net kazanç tekabül eden programdır <sup>10</sup>. Bu nedenle, Şekil 7'de yaptığımız gibi, eş-kazanç eğrilerini oluşturmak yararlı ola-



Şekil: 8  
Otomobil Örneği, Optimal Plan

caktır. Bunu yapmak için ilk olarak otomobil üretimini ele alalım.  $P_A$  üzerindeki her nokta bir ayda üretilen belirli otomobil sayısına tekabül etmektedir. Ölçeğin, örneğin, L noktası aylık 3.333 otomobil üretimini temsil edecek şekilde belirlendiğini farzedelim. Hatırlanacağı gibi her otomobil 300 ₺'lik bir net kazanç sağlamak-

10 Firmanın hedefi, varsayım gereği, fiziki çıktıdan ziyade kazancı maksimize etmek olduğundan, otomobil ve kamyon üretimini birbirinden ayrı çıktılar olan iki süreç olarak değilde kazanç üreten iki alternatif süreç olarak ele alabiliriz.



tedir. Dolayısı ile 3.333 otomobil 1.000.000 \$'lık bir net kazanç sağlamaktadır. Bu durumda, L noktası aylık 3.333 otomobillik bir çıktıya ve aynı zamanda 1.000.000 \$'lık bir net kazançta tekabül etmektedir. 3.333 otomobil (bakınız Şekil 1) metal presleme kapasitesinin yüzde 13 1/3'üne ve motor montaj kapasitesinin yüzde 10'una ihtiyaç duyduğundan  $P_A$  üzerindeki 1.000.000 \$'lık net kazanç noktasının koordinatları hemen saptanabilir. Benzer bir argümanla, koordinatları metal presleme kapasitesinin yüzde 26 2/3'ü ve motor montaj kapasitesinin yüzde 20'si olan noktanın  $P_A$  üzerindeki 2.000.000 \$'lık net kazanç noktası olduğu bulunur. Eş-kazanç eğrilerinin yönünü göstermek amacı ile iki süreç doğrusu üzerindeki 4.000.000 \$'lık noktalar birbiri ile bağlanarak diyagram tamamlanmaktadır.

Optimum program C noktasındadır, bu noktada iki kapasite tahdidi kesişmektedir. Bunun nedeni C'nin gerçekleştirilmesi mümkün alana değen en yüksek eş-kazanç eğrisi üzerinde yer almasıdır. C noktasından kamyon üretim doğrusuna paralel olan ve otomobil üretim doğrusu ile D noktasında buluşan bir doğru çiziyoruz. Daha önceki tartışmalarımız açısından bakıldığında, OD uzunluğu optimal programdaki otomobil üretiminden sağlanan net kazancı ve DC uzunluğu kamyonlardan sağlanan net kazancı temsil etmektedir. Eğer bu uzunluklar ölçeklendirilirse, sonuç, kuşkusuz daha önce bulduğumuz çözümlerle aynı olacaktır.

#### V. Faktör Değerlerinin Anlamlılığının Belirlenmesi

Matematiksel programlamanın en önemli uygulama alanının bir veya birden fazla üretim faktörünün arzının mutlak olarak sınırlı olduğu problemler olduğunu daha önce belirtmiştik. Bu tipteki kısıtlılar olağan analizde değerler başlangıç noktasını oluşturmakta ve matematiksel programlamada bunlar değerleri yaratmaktadır. Gerçekte, olağan analizde, çıktıların belirlenmesi ve fiyatların belirlenmesi, aynı problemin — kıt kaynakların optimal dağılımı problemi — iki farklı yönden başka bir şey değildir. Aynı şey matematiksel programlama için geçerlidir.

Buraya kadar fiyatlarla sadece süreçlerin direkt maliyetlerini ve çıktının net değerini belirlemek için kullanılan veriler olarak karşılaştık. Fakat kuşkusuz sınırlayıcı üretim faktörleri de, şimdiye dek bunlara fiyat vermemize rağmen, değere sahiptir. Bu kesimde, bir matematiksel programlama probleminin çözümünün sınırlayıcı üretim faktörlerine zimni olarak değerler atfettiğini göreceğiz. Buna ilaveten, zimni fiyatlama probleminin doğrudan doğruya çözülebileceğini ve bu şekilde çözüldüğünde, onun optimal dağıtım probleminin bir çözümünü oluşturduğunu göreceğiz.

Otomobil örneğini ele alarak şu soruyu soralım: Kapasite tiplerinden her birinin bir ünitesinin (yüzde 1) firma açısından değeri nedir? Bu soruya yaklaşım özü itibari ile marjinal analizdekine benzemektedir. Her kapasite tipi açısından, fazladan bir ünite eklendiğinde maksimum kazancın ne kadar artacağını veya bir ünite geri alındığında kazancın ne kadar azalacağını hesaplarız. Bir otomobil montaj kapasitesi fazlalığı olduğundan, bu kapasite tipinden bir ünite eklenmesi veya çıkarılması optimum programı veya maksimum net kazancı etkilemeyecektir. Kamyon montajı için analiz ve sonuç aynıdır.



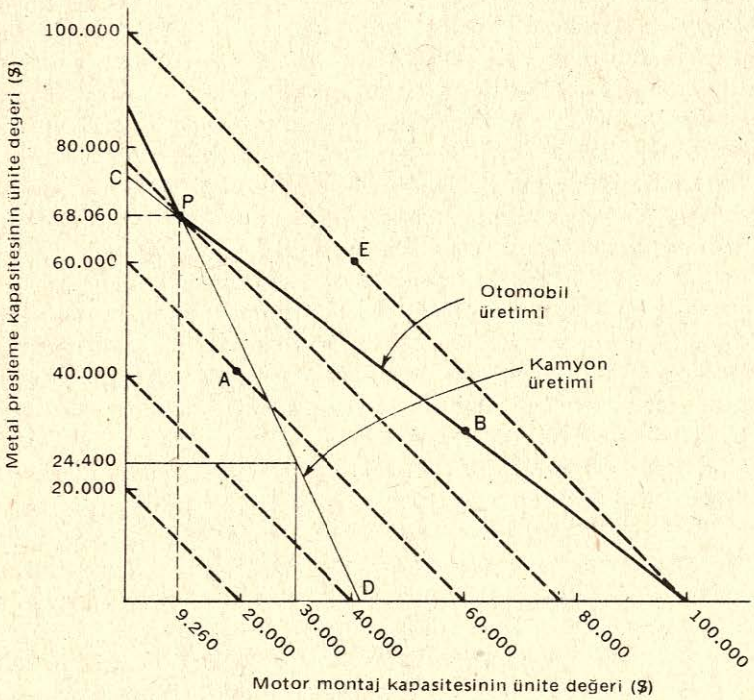
Bu şekilde, bu iki kapasite tipinin serbest mallar olduğunu buluyoruz. Bu, nasıl havanın serbest bir mal olması ondan vazgeçilebileceği anlamına gelmiyorsa, bir otomobil montaj hattına sahip olmanın herhangi bir değer ifade etmediği anlamına gelmemektedir. Bununla ifade edilmek istenen bu tipteki kapasiteleri herhangi bir pozitif fiyatla arttırmanın net kazanç açısından bir katkı sağlamayacağı ve bu tipteki kapasitelerin belirli bir bölümünün herhangi bir kayıpla karşılaşmaksızın elden çıkarılabileceğidir.

Diğer tipteki kapasitelerin değerlendirilmesi bu kadar basit değildir. Şekil 9'da beher montaj kapasitesi yüzdesi için mümkün değerler yatay eksen boyunca ve beher metal presleme kapasitesi için değerler dikey eksen boyunca ölçeklendirilerek gösterilmiştir. Şimdi mümkün herhangi iki değer çiftini, örneğin ünitesi 20.000\$ değerindeki motor montaj kapasitesini ve ünitesi 40.000\$ değerindeki metal presleme kapasitesini, ele alalım. Bunu şekil üzerindeki A noktası temsil etmektedir. Bu değerleri sayfa 3-4'teki verilere uyguladığımızda bir otomobil üretmek için gerekli kapasite değerlerinin  $(0,004 \times 40.000\$) + (0,003 \times 20.000\$) = 220\$$  olduğu bulunur. Bu bir otomobil üretme değerinin veya 300\$'in oldukça altındadır<sup>11</sup>. Aynı şekilde, eğer motor montaj kapasitesinin ünitesi 60.000\$ değerinde ve metal presleme kapasitesinin ünitesi 30.000\$ değerinde ise (B noktası), bir otomobil üretmek için gerekli olan kıt kaynakların maliyeti tam olarak ürünün değerine eşit olacaktır. Kaynakların otomobil üretiminde kullanılması halinde, çıktının değerini tam olarak maddedecek kaynak değerleri kombinasyonunun sadece bu olmadığı açıktır. Şekilde B noktasından geçen otomobil üretim doğrusu bu tipteki değer kombinasyonlarının geometrik yeri olmaktadır. Benzer şekilde, kamyon üretiminde kullanılan kaynakların toplam değerinin çıktı değerine eşit olduğu kaynak değer kombinasyonlarını temsil eden bir kamyon üretim doğrusu çizilmiştir. Açıkça görüldüğü gibi, bu iki doğrunun kesiştiği noktadaki değerler ilave bir otomobil üretmenin marjinal kaynak maliyetinin bir otomobilin net değerine ve ilave bir kamyon üretmenin marjinal kaynak maliyetinin bir kamyonun net değerine eşit olduğu tek kaynak değerleri çiftidir. Söz konusu değerler çifti çizim yolu ile veya, daha hassas olarak, cebrik yoldan bulunabilir. Yüzde 1'lik motor montaj kapasitesinin 9.259\$ değerinde ve yüzde 1'lik metal presleme kapasitesinin 68.056\$ değerinde olduğu bulunmaktadır.

İki tipteki kapasite ile ilgili her değerler çiftine karşı gelen bir tüm tesis değeri mevcuttur. Örneğin A noktası ile temsil edilen değerler çiftine karşı gelen tesis değeri  $(100 \times 20.000\$) + (100 \times 40.000\$) = 60.000.000\$$  olmaktadır. Bu 60.000.000\$'lik bir toplam tesis değeri veren tek kaynak değerleri çifti değildir. Gerçekten, A dan geçen noktalı doğru üzerindeki her kaynak değerleri çifti aynı toplam tesis değerine tekabül etmektedir (Bu aşamaya gelindiğinde Şekil 9'un büyük ölçüde Şekil 1'deki tartışmaları hatırlattığına dikkat edilmelidir). Şimdi biraz önce tasvir ettiğimiz doğruya paralel çok sayıda noktalı doğrular çiziyoruz, bunlardan herbiri belirli bir tesis değerine tekabül etmektedir. İki üretim doğrusunun kesiştiği nokta-

11 Üretim maliyetleri sabit olduğundan bu ünite değerleri aynı zamanda marjinal değerlerdir.





Şekil: 9  
Otomobil Örneği, Zimni Değer

dan geçen noktalı doğru özel bir öneme sahiptir. Ölçüm yolu ile veya başka yoldan bu doğrunun 7.731.500\$'lık tesis değerine tekabül ettiği bulunabilir, bu değer, hatırlanacağı gibi, ulaşılabilecek maksimum net kazanç olarak bulunmuş idi.

İki sınırlayıcı faktöre değerler atfetmenin neyi ima ettiği sorunu şimdi biraz farklı bir açıdan ele alalım. Faktörlere ünite değerleri verilir verilmez tesise bir toplam değer verilmiş olduğunu gördük. Toplam tesis değerini, basitçe çeşitli faktörlere düşük değerler vererek arzu ettiğimiz kadar düşük yapabiliriz. Fakat verilen değerler çok düşük olduğunda bazı süreçler neye atfedileceği belli olmayan fazlalıkların ortaya çıkmasına neden olacaktır. Bu tatmin edici olmayan bir sonuçtur. Bu nedenle, hiçbir sürecin neye atfedileceği belli olmayan bir fazlalık yaratmaması koşulu altında verilebilecek en düşük toplam tesis değerini bulmaya çalışırız. Otomobil örneğinde söz konusu değer 7.731.500\$'dır. En düşük kabul edilebilir tesis değerini bulma süreci içinde kaynaklardan her birine verilecek olan belirli ünite değerlerini buluruz.

Örneğimizde iki süreç ve dört sınırlı kaynak vardır. Gerçekte kaynaklardan sadece ikisinin etkin bir şekilde sınırlı olduğu, diğerlerin görece olarak bol miktarda mevcut bulunduğu, ortaya çıkmaktadır. Genel olarak, bir doğrusal programlama problemi çözümünün özellikleri sınırlı kaynakların sayısı ile gözönüne alınan süreçlerin sayısı arasındaki ilişkiye bağlıdır. Eğer, burada ele alınan durumda ol-



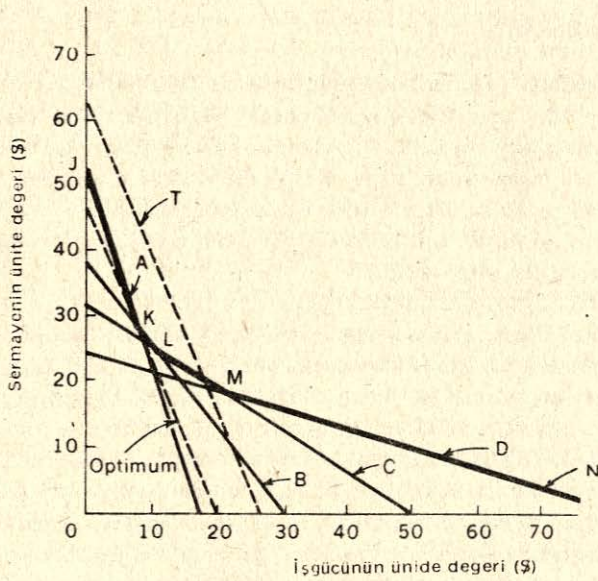
duğu gibi, sınırlı kaynakların sayısı süreçlerin sayısından fazla ise genellikle bazı kaynakların yüklenmiş değerlerinin sıfır olacağı ve pozitif yüklenmiş değerlere sahip olan kaynakların sayısının süreçlerin sayısına eşit olacağı ortaya çıkmaktadır<sup>12</sup>. Eğer sınırlı kaynakların sayısı süreçlerin sayısına eşit ise tüm kaynaklar pozitif yüklenmiş değerlere sahip olacaktır. Son olarak, eğer süreçlerin sayısı sınırlı kaynakların sayısından fazla ise, süreçlerin bazılarını optimal programda kullanılmayacaktır. Sık karşılaşılan bu durum Şekil 6'da gösterilmiştir. Bu durumda massedilen kaynakların toplam yüklenmiş değeri bazı süreçlerin net kazancına eşit olacak ve bazı süreçlerin net kazancından fazla olacaktır. Massedilen kaynakların yüklenmiş değerinin net kazanca eşit olduğu süreçler sayısı sınırlı kaynakların sayısına tam olarak eşit olacak ve eşitliğin geçerli olduğu süreçler optimal programda pozitif düzeylerde görünen süreçler olacaktır. Kısaca, minimum kabul edilebilir tesis değerinin belirlenmesi optimal üretim programının belirlenmesi ile aynı şey olmaktadır. Programlama problemi ve değerlendirme problemi sadece birbiri ile yakından ilişkili şeyler değil, bunlar esas itibarıyla aynı şeydir.

Bu, geometrik olarak, Şekil 1 ve Şekil 9 birbiri ile karşılaştırılarak görülebilir. Şekillerden herbiri iki eksen ve iki köşegen biçiminde tahdit doğrusunu içermektedir. Fakat Şekil 9'daki tahdit doğruları Şekil 1'de eksenlerin atıfta bulunduğu süreçlerle aynı süreçlere atıfta bulunmakta ve Şekil 9'daki eksenler Şekil 1'deki köşegen biçimindeki tahdit doğrularının atıfta bulunduğu kaynaklarla aynı kaynaklara atıfta bulunmaktadır. Bunun ötesinde, Şekil 1'i kullanarak tahdidin deydiği en yüksek noktalı doğruya tekabül eden net kazancı bulmaya çalıştık; Şekil 9'u kullanarak tahdit doğrusu üzerinde veya dışında herhangi bir noktaya sahip olan en düşük noktalı doğruya tekabül eden toplam değeri bulmaya çalıştık ve sonunda iki bulgunun aynı şey olduğu ortaya çıktı. Formel olarak ifade edersek, bu iki şekil ve bunların temsil ettiği problemler birbirinin dualleridir.

Matematiksel programlama problemlerinin çözümünde dualizm özelliği çok yararlı bir özellik olmaktadır. Bu, en basit bir şekilde, bir matematiksel programlama problemi ile karşı karşıya geldiğimizde, kolaylık derecesine göre, problemi doğrudan doğruya çözmek veya onun dualini çözmek şeklinde bir seçim hakkına sahip olduğumuz gözönüne alınarak görülebilir. Her iki yoldan aynı sonucu elde ederiz. Şimdi bu özelliği tartışmamızı biraz daha genelleştirmek için kullanabiliriz. Şimdiye dek ikiden fazla süreç söz konusu olduğunda görelilik olarak karmaşık Şekil 6 gibi diyagramlar kullanmamız gerekiyordu. Çünkü Şekil 1 gibi kolay uygulanabilir diyagramlar süreçlerin düzeylerini temsil etmeye yeterli sayıda eksen içermiyordu. Şimdi Şekil 9'da resimlendirilen tipteki diyagramları herhangi bir sayıda süreci içeren problemleri yansıtmak için kullanabiliriz yeter ki, bu problemler ikiden fazla kısıt kaynağı içermesin. Şekil 10 dört süreci içeren bir problemi resimlendirmektedir ve gerçekten bu, Şekil 6'dan türetilmiştir. Şekil 10'da A doğrusu Süreç A'nın net bir kâr net de bir zarar sağladığı tüm faktör değerleri çiftini temsil etmektedir. B, C ve D doğruları benzer şekilde yorumlanmaktadır. Noktalı T doğrusu firmanın (veya

12 Bu cümlede "genellikle" diyoruz çünkü bazı özel durumlarda pozitif yüklenmiş değerli kaynakların sayısı süreçlerin sayısından fazla olabilir.





Şekil: 10  
Değerlendirme Problemi, Dört Süreç

endüstrinin) elinde mevcut işgücü ve sermayenin toplam değerinin sabit olduğu bir geometrik yerdir. Bu doğrunun pozisyonu analiz açısından önemli değildir; anlamlı olan sadece onun eğimidir ve bu mevcut işgücü miktarı ile mevcut sermaye miktarı arasındaki oramı temsil etmektedir. Kırıklı JKLMN doğrusu grafiği iki bölgeye ayırmaktadır. Bunun üzerindeki veya yukarsındaki tüm noktalar hiçbir sürecin yüklenmemiş bir fazlalık ortaya çıkarmadığı kaynak değerleri çiftlerini temsil etmektedir. Buna kabul edilebilir bölge adını verelim. Bu kırıklı doğrunun aşağısındaki her noktada yüklenmemiş bir fazlalığa sahip olan en az bir süreç vardır. Bu kabul edilemeyen bölgedir. Daha sonra kabul edilebilir bölge içinde en düşük toplam tesis değerine tekabül eden noktayı bulmaya çalışırız. Bu nokta, kuşkusuz, herhangi bir yüklenmemiş gelirin ortaya çıkmasına neden olmaksızın firmanın muhasebe kârını mümkün olduğu kadar en yüksek düzeye çıkararak kaynak değerleri kümesini verecektir. Bu koşulları tatmin eden nokta K noktasıdır ve kabul edilebilir minimum tesis değerini belirtmek için K dan geçen T ye paralel bir doğru çizilmiştir.

K noktasında A ve B süreçleri sıfır kâr sağlamakta ve C ve D süreçleri zarara neden olmaktadır. Bu nedenle kullanılması gereken süreçler, aynen Şekil 6'da olduğu gibi A ve B süreçleridir. Bu diyagram, nasıl Şekil 6 iki kaynak üzerine konacak değerleri kesin olarak söylemiyorsa, A ve B süreçlerinin hangi düzeylerde kullanılacağını kesin olarak belirtmemektedir. Fakat süreçler seçildikten sonra düzeylerin bulunması oldukça basit bir problemdir. Yapılması gereken tek şey serbest mal olmayan kaynakları tam olarak kullanacak düzeylerin bulunmasıdır. Bu cebrik olarak yapılabileceği gibi Şekil 8'e benzer bir diyagram aracılığı ile de yapılabilir.



## VI. Uygulamalar

Birinci kesimde matematiksel programlamanın ardında yatan temel yönlendirici gücün genel ekonominin ve işletmelerin karşılaştığı güncel problemleri çözmeye uygun bir analiz metoduna karşı duyulan gereksinme olduğu savını ileri sürdük. Bu iddiayı yaptıktan hemen sonra yapay bir problemi ele aldık ve daha sonra soyut ve formel ilişkileri oldukça detaylı bir şekilde tartıştık. Şimdi artık matematiksel programlamanın pratik bir analiz metodu olmasının dayanağının ne olduğunu belirtmenin zamanı gelmiş olmaktadır.

Matematiksel programlama ile sağlanan temel basitleştirme üretim fonksiyonu fikri yerine süreç fikrinin ikame edilmesidir. Süreç gözlenebilirliği oldukça yüksek bir faaliyet ünitesidir ve bunu karakterize eden ampirik sabitler kapsamlı analize gerek kalmaksızın hesaplanabilir. Ayrıca birçok endüstride üretim yapısı, burada tasavvur edildiği gibi, çeşitli süreçlerin birbirini izleyen bir biçimde işletilmesinde tekabül etmektedir. Birçok endüstriyel kararlar, örneğin belirli bir makina kümesinin faaliyetinin durdurulması veya ek bir vardiyanın faaliyete geçirilmesi, tabii olarak bir sürecin faaliyet düzeyinin seçimi kavramımıza tekabül etmektedir. Özetle, matematiksel programlama gerçek üretim yapısı gözönüne alınarak modelleştirilmektedir. Bu nedenle onun sadece gözlenebilir sabitleri ve direkt olarak kontrol edilebilir değişkenleri içereceği ümit edilmektedir.

Bu ümit doğrulanmış mıdır? Literatür halihazırda başarılı bir uygulama ile ilgili bir raporu içermektedir <sup>13</sup>. Bu satırların yazarı tarafından da benzer bir uygulama yapılmıştır. Bunu kısaca tasvir etmek uygun olacaktır. Uygulama normal ve süper kalite motorlu vasıta benzini üreten orta ölçekli bir firmaya yapılmıştır. İncelenen temel faaliyet harmanlama faaliyetidir. Harmanlamada, harmanlama stokları adı verilen kimyasal olarak farklı on türde yarı-rafine petrol karıştırılmaktadır. Sonuç özellikleri yaklaşık olarak harmanlama stokları özelliklerinin ağırlıklı ortalamalarına tekabül eden satılabilir bir benzindir. Örneğin; 80 oktan dereceli bir stoktan 500 galon, 86 oktan dereceli bir stoktan 1000 galon ile harmanlandığında sonuç  $(1/3 \times 80) + (2/3 \times 86) = 84$  oktan dereceli  $500 + 1000 = 1500$  galonluk ürün olacaktır.

Buradaki amaçlarımız açısından benzin harmanlamanın önemli olan yanı harmanın temel özelliklerinin — vuruş derecesi, buhar basıncı, kükürt içeriği, v.s. — kullanılan çeşitli harmanlama stokları miktarlarının doğrusal fonksiyonları olarak ifade edilebilmesidir. Eğer harmanlama stoklarından herbiri galon başına belirli bir fiyata sahip ise keza harmanın maliyeti de doğrusal fonksiyonlar olarak ifade edilebilir. Bu şekilde verilen kalite niteliklerini karşılayacak minimum maliyetli harmanı bulma problemi matematiksel programlama kapsamı içine giren bir problem olmaktadır.

Bunun ötesinde, bu rafineride harmanlama stoklarından bazılarının miktarları kontratlar ve rafine kapasitesi tarafından kesin bir şekilde sınırlandırılmıştır. Bu durumda ortaya şu problem çıkmaktadır: En kârlı normal ve süper benzin miktarları nedir? ve her nihai ürün için her harmanlama stoğundan ne miktarda kullanılması

13 A. Charnes, W.W. Cooper and B. Mellon, "Blending Aviation Gasolines," *Econometrica*, Apr. 1952, XX, 135-59.



gerekmektedir? Bu problem yapay otomobil örneğine benzemektedir, buradaki ilave karmaşıklık kalite nitelikleridir. Grafik yolu ile analiz için problem çok karmaşıktır, fakat matematiksel yöntemlerle kolaylıkla çözülmüştür. Bilindiği kadarıyla matematiksel programlama bu tipteki problemleri çözmek için tek yoldur. Kısa bir süre önce Charnes ve Cooper bir metal imalat firmasının faaliyetinde karşılaşılan benzer bir problemin çözümünü yayınlamıştır<sup>14</sup>.

Matematiksel programlama ile yönlendirilmeye uygun tamamen farklı bir problem baskı kağıdı üretiminde ortaya çıkmaktadır. Taşımacılık baskı kağıdı maliyeti içinde çok önemli bir öge olmaktadır. Bir büyük baskı kağıdı işletmesi, Kanada'nın çeşitli bölgelerine dağılmış, altı fabrikaya ve Amerika Birleşik Devletleri'nin çeşitli bölgelerine dağılmış, aşağı yukarı ikiyüz müşteriye sahiptir. İşletmenin karşılaştığı problem, birincisi, her müşteri ile yapılan kontratların gerektirdiği miktarları karşılayacak, ikincisi, her fabrikanın kapasite sınırlarını aşmayacak ve üçüncüsü, toplam nakliye faturasını mümkün olduğunca düşük düzeyde tutacak şekilde her fabrikadan her müşteriye ne kadar baskı kağıdı yollanacağına karar vermektir. Tartışmakta olduğumuz iki veya dört değişkenli problemlerden tamamen farklı olarak bu problem 1.200 değişkeni (6 fabrika  $\times$  200 müşteri) içermektedir. Nihai çözümde bu değişkenlerin çoğunluğunun sıfır olduğu ortaya çıkacaktır — esas soru hangi değişkenlerin sıfır olduğudur. Bu problem matematiksel programlama ile çözülmektedir ve oldukça güç olmasına karşın, değişkenlerin sayısının ima ettiği kadar güç değildir.

Bu birkaç örnek matematiksel programlamanın işletme planlamasında pratik bir araç olduğunu belirtme açısından yeterlidir. Bunlar, aynı zamanda, matematiksel programlamanın esnek bir araç olduğunu göstermektedir, çünkü her iki örnek açıklamamızda kullandığımız örneğin kalıbından sapmalar göstermektedir. Rafineri uygulamasının kalite özelliklerinin belirtilmesi şeklinde farklı ilave bir cephesi vardır. Baskı kağıdı uygulamasında girdilerin miktarları üzerindeki sınırlamalar yanında çıktı miktarı üzerinde de sınırlamalar vardır. Her şeye rağmen matematiksel programlama kolaylıkla bunların üstesinden gelmiştir.

Öte yandan, bunların her ikisinin de bir tek firmanın faaliyet alanı içindeki tek bir aşamayı ele alan ufak-ölçekli uygulamalar olduğunu belirtilmesi gerekir. Bugüne dek yapılan tüm başarılı uygulamalar için bunun bu böyle olduğu kanısındayım. Matematiksel programlamacılar tüm endüstrilerin veya bir ekonominin bütününe kapsamlı planlama problemini çözmekten henüz çok uzaktadırlar. Fakat bu tipteki kapsamlı problemlerin çoğunluğu tek firma çatısı içinde karşılaştığımız ve çözdüğümüz problemlerin sadece genişletilmiş uyarlamalarıdır. Matematiksel programlamanın optimal iktisadi programları bulmada pratik bir araç olduğunu söylemek artık çok erken sayılmamaktadır.

14 A. Charnes, W.W. Cooper and Donald Farr and Staff, "Linear Programming and Profit Preference Scheduling for a Manufacturing Firm", *Jour. Operations Research Society of America* May 1953, I, 114-129.



## VII. Sonuç

Amacımız sadece matematiksel programlamanın temel fikirlerini ortaya koymak ve bunları olabilirlik ve anlamlılık açısından zenginleştirmek idi. Bir programlama problemini — en basitini dahi — çözmeyi öğrenmek isteyen okurun başka yere bakması gerekecektir <sup>15</sup>, bununla birlikte bu yazı yararlı bir başlangıç olarak hizmet görebilir.

Çözüm metodları bu açıklama yazısı dışında bırakılmış olmasına karşın, bu metodların matematiksel programlama kavramının temelini oluşturduğunu vurgulamamız gerekir. Aşağı yukarı seksen yıl önce Walras üretimi matematiksel programlamacılarla aşağı yukarı aynı şekilde tasavvur etmiş ve daha yakın geçmişte A. Wald ve J. Von Neumann bu üretim görüşünü ve matematiksel programlama metodları ile çok yakından ilgili metodları genel iktisadi denge koşullarını analiz etmek için kullanmıştır <sup>16</sup>. Bununla birlikte, bu gelişmelerin sadece matematiksel programlamanın öncüleri olarak mütalaa edilmesi gerekir. Programlama bir ekonomik analiz tipi olarak G.B. Dantzig'in pratik uygulamayı gerçekleştirilebilir hale getiren "simpleks" çözüm metodunu açıkladığı 1947'ye kadar hiçbir bağımsız varlığa sahip bulunmuyordu <sup>17</sup>. İktisadi optimumların açık bir şekilde hesaplanmasında kullanılabilir bir metodun mevcudiyeti matematiksel programlamanın iktisadi yorumu ile ilgili araştırmaları teşvik etmiş ve aynı zamanda alması çözüm metodlarının geliştirilmesine ön ayak olmuştur. Matematiksel programlama cinsinden formüle edildiğinde iktisadi problemlerin ve işletme problemlerinin çözümlenebileceği gerçeği bu metodun önemini dayanak noktası olmaktadır. Bu nedenle çözüm metodlarının bu tartışmanın dışında bırakılması onların ikinci derecede önemli olduğuna işaret eden bir delil olarak düşünülmemelidir.

Matematiksel programlamada kullanılan kavramlardan sadece birkaçı üzerinde durduk ve sadece tek tip bir programlama problemini ele aldık. Bununla birlikte, üzerinde durduğumuz bu birkaç kavram temel kavramlardır; matematiksel programlamanın geri kalan kısmı bu kavramların geliştirilmesini ve olgunlaştırılmasını

- 15 T.C. Koopmans, ed., *Activity Analysis of Production and Allocation* (New York, 1951) standart kaynaktır. Konu daha az geliştirilmiş bir biçimde A. Charnes, W.W. Cooper and A. Henderson, *An Introduction to Linear Programming* (New York, 1953) ve benim kendi kitabım *Application of Linear Programming to the Theory of the Firm* (Berkeley, 1951) içinde ele alınmaktadır.
- 16 Walras'ın formüllendirmesi *Éléments d'économie politique pure on théorie de la richesse sociale*, 2d ed. (Lausanne, 1889), 20<sup>e</sup> Leçon içindedir. A. Wald ve J. Von Neumann'ın katkıları ilk kez *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Nos. 6, 7, 8 içinde çıkmıştır. Wald'un en az teknik olan yazısı *Zeitschrift für Nationalökonomie*, VII (1936) içinde çıkmış ve bu "On some Systems of Equations of Mathematical Economics," olarak *Econometrica*, Oct. 1951, XIX, 368-403 içinde tercüme edilmiştir. Von Neumann'ın temel makalesi çeviri şeklinde "A Model of General Economic Equilibrium," olarak *Rev. Econ. Stud.*, 1945-46, XIII, 1-9 içinde yayımlanmıştır.
- 17 G.B. Dantzig, "Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities", T.C. Koopmans, ed., *op. cit.*, 339-47.



icermektedir. Burada yapılan en sınırlayıcı varsayımları ortadan kaldırdığı veya zayıflattığı için geliştirmelerin yöneldiği iki alandan kısaca söz etmek yararlı olacaktır.

Bu geliştirmelerden birincisi zamanın analize katılmasıdır. Buradaki incelemede tek bir üretim dönemi soyutlanmış olarak ele alınmıştır. Fakat birçok hallerde üretim dönemleri birbiri ile bağımlıdır. Örneğin bazı süreçlerin bir dönemdeki faaliyetinin bunlara hammadde sağlayan diğer bazı süreçlerin bir önceki dönemdeki faaliyet düzeyleri tarafından sınırlandırıldığı dikey olarak entegre edilmiş bir firmada durum böyledir. Bu tipteki "dinamik" problemleri analiz için etkin metodlar, özellikle George Dantzig tarafından, araştırılmaktadır<sup>18</sup>. Buradaki tartışma statik olmasına karşın analiz metodu bir zaman boyutunu içeren problemlere uygulanabilir.

Bu geliştirmelerden ikincisi faktör ve nihai ürün fiyatlarındaki değişmelerin dikkate alınmasıdır. Buradaki tartışmalarımızda tüm fiyatların değiştirilemez ve göz-önüne alınan iktisadi birimin faaliyetinden bağımsız olduğunu kabul ettik. Sabit fiyatların analiz yapan açısından büyük bir kolaylık olduğu tartışılmaz bir gerçektir, fakat gerekli olduğunda metod bu varsayımın dışına çıkabilmektedir. Değişir fiyatları ele almaya uygun genel matematiksel teori üzerinde çalışılmıştır<sup>19</sup> ve talep ve arz eğrilerinin doğrusal olduğu problemler için pratik çözüm metodları geliştirilmiştir<sup>20</sup>. Sabit fiyatlar varsayımı — bu yaptığımız varsayımlardan en sınırlayıcı olanı gibi görünmektedir — gerekliliğinden çok basitlik ve kolaylık sağladığı için benimsenmiştir.

Matematiksel programlama iktisadi planlama ve işletme planlaması için bir araç olarak geliştirilmiştir, bu nedenle marjinal analizi ortaya çıkaran tasvir edici ve dolayısı ile tahmin edici olma amacı onun önde gelen amacı değildir. Buna rağmen matematiksel programlama tahmin niteliğinde sonuçlar doğurmaktadır. Firmalar matematiksel programlamada varsayılan koşullar altında faaliyet gösterdiği sürece onların sanki marjinal analiz tarafından varsayılan koşullarda faaliyet gösteriyormuş gibi davranışlarını varsaymak mantıklı olmayacaktır. Örneğin, Şekil 1'de resimlendirilen otomobil firmasını ele alalım. Otomobil fiyatları, örneğin birim başına 50\$, düştüğünde bu firma nasıl tepki gösterecektir? Bu durumda, aynen ünite kamyon- dan sağlanan net kazanç gibi, ünite otomobilden sağlanan net kazanç 250\$ olacaktır. Diyagram açısından bunun sonucu eşit kazanç doğrularının eğimleri 45 derece oluncaya dek döndürülmesi demek olacaktır. Bu döndürmeden sonra, C noktası gene optimum noktası olacaktır ve fiyatlardaki bu değişme optimum çıktıda hiçbir

18 "A Note on a Dynamic Leontief Model with Substitution" (abstract), *Economica*, Jan. 1953, XXI, 179.

19 Bakınız H.W. Kuhn and A.W. Tucker, "Non-Linear Programming", J. Neyman ed., *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley, 1951), 481-92 içinde.

20 Bu problemin bir çözümünü September 1952'de the Massachusetts Institute of Technology'deki bir seminerde sundum. Başka çözümler de biliniyor olabilir.



değişmeye neden olmayacaktır. Matematiksel programlama bu şekilde bükümlü bir arz eğrisinin ortaya çıkmasına neden olmaktadır.

Öte yandan otomobillerin fiyatının 50\$ artmış olduğunu farzedelim. Diyagram açısından bakıldığında bu fiyat değişimi eşit kazanç doğrularının dikliğini, bunlar metal presleme doğrusuna paralel oluncaya dek azaltacaktır. Bu halde firma Şekil 5'te YY' doğrusu ile gösterilen pozisyona benzer bir pozisyonda olacaktır. Şekil 1'deki DC doğru parçası üzerindeki noktalara tekabül eden üretim planlarının tümü aynı net kazancı sağlayacak ve tümü optimal olacaktır. Otomobillerin fiyatının 50\$'dan daha fazla artması veya otomobillerin fiyatındaki 50\$'lık bir artmaya kamyon fiyatındaki herhangi bir azalmanın eşlik etmesi halinde optimal noktası birden C noktasından D noktasına atlayacaktır.

Bu şekilde, matematiksel programlama seçimleri birbirinden ayrı süreçlerle sınırlı olan firmaların fiyat değişmelerine sürekli olmayan bir biçimde tepki göstereceğini belirtmektedir: Belirli bir aralık içinde firmalar fiyat değişmelerine karşı duyarlı olmayacak ve bu aralık geçilir geçilmez çıktı düzeylerini aniden değiştirecektir. Bu teorik sonucun gerçek hayatta karşılaşılan durumları yansıttığı bir gerçektir.

Matematiksel programlama ile refah iktisadı arasındaki ilişki özellikle yakın bir ilişkidir. Refah iktisadı ekonomik çabaların optimal organizasyonunu incelemektedir; aynı şey matematiksel programlama için geçerlidir. Bu ilişki özellikle Koopmans ve Samuelson tarafından araştırılmıştır <sup>21</sup>. Ulaşılan sonuç, genel olarak ifade edersek, tam rekabet koşulları altında faaliyet gösteren bir ekonominin denge pozisyonu ile aynı verileri içeren matematiksel programlama için bulunan optimal çözümün birbiri ile aynı olduğudur.

Matematiksel programlamanın, matematiksel olarak, geniş çapta W.W. Leontief tarafından geliştirilen girdi-çıkıtı analizi veya endüstriler arası analiz olarak adlandırılan metod ile yakın bir akrabalığı vardır <sup>22</sup>. Bununla birlikte, bu iki metod birbirinden bağımsız olarak geliştirilmiştir ve bunları kavramsal olarak birbirinden ayırmak önemlidir. Girdi-çıkıtı analizi uygulama alanını hemen hemen tamamen genel iktisadi denge ile ilgili çalışmalarda bulmaktadır. Bu analiz metodu çok sayıda endüstriyel sektöre bölünmüş bir ekonomi tasavvur etmektedir, burada sektörlerden her biri matematiksel programlamada kullanılan süreç terimine benzer bir anlam taşımaktadır. Daha sonra girdi-çıkıtı analizi iki değişik kalıptan birine bürünmektedir. "Açık modeller" de girdi-çıkıtı analizi sektörlerden her birinin ürünü için belirlenen bir nihai taleple analize başlamakta ve her sektör-sürecin bu nihai talebi karşılayabilmek için hangi düzeyde faaliyet göstermesi gerektiğini hesaplamaktadır.

"Kapalı modeller" de nihai talep görünmemekte ve her sektör-sürecin gerek sinme duyduğu girdilerin diğer bazı sektör-süreçleri tarafından çıktı olarak arz edil-

21 T.C. Koopmans, "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities", T.C. Koopmans, ed., *op.cit.*, 33-97 içinde; P.A. Samuelson, "Market Mechanisms and Maximization" (the Rand Corp için hazırlanan bir makale, 1949).

22 W.W. Leontief, *The Structure of American Economy 1919-1939*, 2nd ed. (New York, 1951).



mesi gerektiği gerçeği üzerinde durulmaktadır. Girdi-çıkıtı analizi daha sonra çeşitli sektörler için çıkıtı düzeylerinin müşterek olarak uyumlu bir kümesini hesaplamaktadır. Matematiksel programlamanın aksine girdi-çıkıtı analizinde konulan koşullar süreçlerin düzeylerini belirlemede yeterli olmaktadır ve bir optimal çözüm veya bir "en iyi" düzeyler kümesini bulmaya yönelik bir faaliyet alanı mevcut değildir. Başka bir ifade ile, girdi-çıkıtı analizi matematiksel programlamanın, ürün sayısı süreç sayısına eşit olan, özel bir durumu olarak düşünülebilir. Öte yandan, matematiksel programlamada çok önemli bir rol oynayan kaynak arzları üzerindeki sınırlamalar girdi-çıkıtı analizinde açıkça ele alınmamaktadır. Genel olarak bu iki tekniği birbiri ile akraba fakat farklı problemleri çözmeye yönelik ayrı analiz metodları olarak düşünmek en iyi yol olarak görünmektedir.

Matematiksel programlama, dolayısı ile, işletme planlaması ve iktisadi planlama için olduğu kadar iktisadi düşünce ve iktisat teorisi için de anlamlıdır. Bu anlamlılıktan sadece kısa bir şekilde söz edebildik. Gerçekten, refah açısından neleri ima ettiğini incelemenin dışında matematiksel programlamanın iktisat açısından ne gibi sonuçlar doğuracağı konusu üzerinde çok az durulmuştur. Bunun nedeni şimdiye dek yapılan çabaların çoğunluğunun matematiksel programlamanın ortaya çıkardığı çok sayıda pratik problemin çözümüne yöneltmiş olmasıdır. Matematiksel programlamanın hem neler ima ettiği ve hem de uygulamaları ile ilgili faydalı araştırmalar geleceğe yönelik bekleyişler olmaktadır.