t-KOBALANS VE

LUCAS *t*-KOBALANS SAYILARI

Alper ERDEM

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

t-KOBALANS VE LUCAS t-KOBALANS SAYILARI

Alper ERDEM
0000-0001-8429-0612

Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANSTEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA– 2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

t-KOBALANS VE LUCAS t-KOBALANS SAYILARI

Alper ERDEM

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

Bu çalışmada kobalans sayılarının genelleştirilmişi olan t-kobalans sayıları ele alınmış ve bu sayılar ile Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri elde edilmiştir.

Birinci bölümde balans sayıları ve kobalans sayıları hakkında bazı önemli kavramlara ve gösterimlere yer verilmiş ve literatürde bu sayılar ile ilgili yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas tam sayı dizileri hakkında genel bir bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde materyal ve yöntem belirtilmiştir.

Dördüncü bölüm tezin orijinal kısmı olup bu bölümde kobalans sayılarının genelleştirilmişi olan t-kobalans sayıları ele alınmıştır. Lucas t-kobalans ve t-kobalansır sayılarının genel terimlerinin elde edilebilmesi için ilk olarak $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri kümesi belirlenmiş ve bu küme yardımıyla t-kobalans, Lucas t-kobalans ve t-kobalansır sayılarının genel terimleri elde edilmiştir. Tüm bu işlemler $t = 1$ ve $t \geq 2$ için $2t^2 - 1$ in tam kare olup olmamasına göre üç farklı durumda ele alınmıştır.

Beşinci bölümde ise sonuç verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Balans Sayıları, Kobalans Sayıları, t-Kobalans Sayıları, Pell Denklemleri, Çözüm Temsilcileri Kümesi.

2021, vi+66 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

t-COBALANCING AND LUCAS t-COBALANCING NUMBERS

Alper ERDEM

Bursa Uludağ University
Graduate Scool of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet TEKCAN

In this thesis, the general terms of all t-cobalancing numbers, Lucas t-cobalancing numbers and t-cobalancers are determined.

In the first section, some notations and definitions on balancing and cobalancing numbers are given. Further some new results obtained recently on balancing numbers and cobalancing numbers are given.

In the second section, general information on Fibonacci, Lucas, Pell and Pell-Lucas integer sequences are given.

In the third section, the material and method are given.

In the fourth section, which is the original part of the thesis, the general terms of all t-cobalancing numbers, Lucas t-cobalancing numbers and t-cobalancers are given. For this reason, we first determined the set of all positive integer solutions of the Pell equation $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ by using its set of representatives. Later we determined the general terms of all t-cobalancing numbers, Lucas t-cobalancing numbers and t-cobalancers. The problem is considered in three cases: $t = 1$ and $2t^2 - 1$ is a perfect square or not for $t \geq 2$.

In the last section, result is given.

Keywords: Balancing Numbers, Cobalancing Numbers, t-Cobalancing Numbers, Pell Equations, Set of Representatives.

2021, vi+66 pages

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tez çalışmamın her aşamasında bilgisiyle ve desteğiyle beni yönlendiren, tecrübelerinden yararlandığım, hoşgörüsüyle her zaman yanımda olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ahmet TEKCAN' a teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışması boyunca bana her türlü manevi desteği veren eşime ve aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Alper ERDEM

29/06/2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
F_n	Fibonacci sayısı
L_n	Lucas sayısı
P_n	Pell sayısı
Q_n	Pell-Lucas sayısı
B_n	Balans sayısı
b_n	Kobalans sayısı
C_n	Lucas balans sayısı
c_n	Lucas kobalans sayısı
R_n	Balansır
r_n	Kobalansır
B_n^t	t-balans Sayısı
b_n^t	t-kobalans sayısı
C_n^t	Lucas t-balans sayısı
c_n^t	Lucas t-kobalans sayısı
R_n^t	t-balansır
$r_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{t}}$	t-kobalansır
α, β	Pell sayılarının karakteristik denkleminin kökleri
Rep	Çözüm temsilcileri kümesi
M	Çözüm matrisi
F	Kuadratik form
$M(F)$	F formunun modülü
$\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$	Kuadratik sayı cismi
$x^2 - dy^2 = \mp n$	Pell denklemi
(x_1, y_1)	Pell denkleminin temel çözümü
ε_Δ	Temel birim

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge

Sayfa

1.GİRİŞ

Kobalans sayıları ilk defa Panda ve Ray (2005) tarafından özel bir Diophantine denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri elde edilirken ortaya çıkartılmıştır. Şöyle ki

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r) \tag{1.1}$$

Diophantine denklemini gerçekleyen pozitif n tam sayısına kobalans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise kobalansır denir. Örneğin 2, 14, 84 birer kobalans sayısı iken bu sayılara karşılık gelen kobalansırlar sırasıyla 1, 6, 35 dir.

(1.1) eşitliğinden

$$r = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2}$$

olduğu görülür.

Kobalans sayılarının tanımına dikkat edilirse bu sayıların 1 den büyük veya eşit olması gerekir. Ancak

$$8(0)^2 + 8(0) + 1 = 1$$

tam kare olduğundan 0 bir kobalans sayısı olarak kabul edilir.

Kobalans sayıları b_n ile gösterilirse, bu sayılarının başlangıç terimleri $b_0 = b_1 = 0$, $b_2 = 2$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$$

dir. Benzer şekilde kobalansırlar r_n ile gösterilirse, bu sayıların başlangıç terimleri $r_0 =$ ri $r_0 = r_1 = 0, r_2 = 1$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$r_{n+1} = 6r_n - r_{n-1}$$

dir.

Dikkat edilirse b_n nin bir kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8b_n^2 + 8b_n + 1$ in tam kare olmasıdır. Dolayısıyla $\sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$ bir tam sayı olup bu sayıya Lucas-kobalans sayısı denir ve c_n ile gösterilir. O hâlde

$$c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$$

dir. Örneğin 1, 7, 41, 239, 1393 birer Lucas-kobalans sayısıdır.

Lucas-kobalans sayılarının ise başlangıç terimleri $c_0 = c_1 = 1, c_2 = 7$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}$$

dir.

$t \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere (1.1) eşitliğine benzer şekilde

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1 + t) + (n + 2 + t) + \cdots + (n + r + t) \qquad (1.2)$$

Diophantine denklemini gerçekleyen pozitif n tam sayısına t-kobalans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise t-kobalansır denir. Örneğin

- 5, 34, 203, 1188 birer 1-kobalans sayısıdır ve bu sayılara karşılık gelen 1-kobalansırlar 2, 14, 84, 492 dir.
- 3, 8, 25, 54 birer 2-kobalans sayısıdır ve bu sayılara karşılık gelen 2-kobalansırlar 1, 3, 10, 22 dir.
- 6, 11, 45, 74 birer 3-kobalans sayısıdır ve bu sayılara karşılık gelen 3-kobalansırlar 2, 4, 18, 30 dur.

t-kobalans sayıları b_n^t ve t-kobalansırlar da r_n^t ile gösterilirse (1.2) eşitliğinden

$$b_n^t = \frac{2r_n^t - 1 + \sqrt{8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1}}{2}$$

ve

$$r_n^t = \frac{-2b_n^t - 2t - 1 + \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8(t+1)b_n^t + (2t+1)^2}}{2}$$

elde edilir. Bu son denkleme göre b_n^t nin bir t-kobalans olması için gerek ve yeter şart $8(b_n^t)^2 + 8(t+1)b_n^t + (2t+1)^2$ in bir tam kare olmasıdır. Bu hâlde

$$c_n^t = \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8(t+1)b_n^t + (2t+1)^2}$$

bir tam sayı olup bu sayıya Lucas t-kobalans sayısı denir.

Bu çalışmada tüm $t \geq 1$ tam sayıları için t-kobalans, t-kobalansır ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri balans sayılarına bağlı olarak elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezin ilerideki bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlara ve gösterimlere yer verilmiştir.

2.1. Fibonacci ve Lucas Tam Sayı Dizileri

Fibonacci tam sayı dizisi ilk olarak Leonardo Fibonacci (1170-1250) tarafından tanımlanmıştır. Fibonacci matematiği Araplardan alıp Avrupa'ya tanıtan kişi ve 13. yüzyıl başlarında yayınlanan “Liber Abaci” isimli kitabın yazarı olarak bilinmektedir. On dokuzuncu yüzyılın başlarından itibaren Fibonacci tam sayı dizisi üzerine yapılan araştırmaların sayısı giderek artmış ve en meşhur tam sayı dizisi olarak tarihe geçmiştir. Hatta dizi ile alakalı Fibonacci Derneği kurulmuş ve 1963’ten itibaren “The Fibonacci Quartery” isimli dergi bu konu ile ilgili yapılan çalışmaları yayınlamaya başlamıştır.

Fibonacci dizisi, ilk iki terimi haricinde diğer tüm terimleri arasında kendisinden hemen önce gelen ilk iki terim toplamı olarak ifade edilebilen bir dizidir. Bu dizi F_n ile gösterilirse dizinin başlangıç terimleri $F_0 = 0, F_1 = 1$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

dir. Bu dizinin karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ olup bu denklemin kökleri

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. Bunlardan α_1 “altın oran” olarak bilinmektedir. Dizinin Binet formülü $n \geq 1$ için

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{\alpha_1 - \beta_1}$$

dir. Üstelik Fibonacci dizisinin genel terimi

$$F_n = \sum_{i=0}^{[\![(n-1)/2]\!]} \binom{n-1-i}{i}$$

olarak da verilebilir.

Fibonacci tam sayı dizisinden başka önemli bir tam sayı dizisi de Lucas tam sayı dizisidir. Bu dizi de Fibonacci dizisine benzemekle birlikte sadece başlangıç değerleri farklıdır. Lucas dizisi L_n ile gösterilirse, dizinin başlangıç terimleri $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

dir. Bu dizinin de karakteristik denklemi, Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi ile aynı olup Binet formülü $n \geq 1$ için

$$L_n = \alpha_1^n + \beta_1^n$$

dir. Üstelik Lucas dizisinin genel terimi

$$L_n = \sum_{i=0}^{[\![n/2]\!]} \left[\binom{n-i}{i} + \binom{n-1-i}{i-1}\right]$$

olarak da verilebilir.

Bu iki tam sayı dizisi arasında birçok cebirsel bağıntı olup bu bağıntılardan en önemlisi

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

dir. Diğer bazı bağıntılar ise aşağıdaki gibidir:

$$F_{2n} - F_n = F_n L_n$$

$$
\begin{aligned}
F_{2n} &= F_n L_n \\
L_n^2 - 5F_n^2 &= 4(-1)^n \\
L_{2m} L_{2n} &= L_{m+n}^2 + 5F_{m-n}^2 \\
F_{m+n} &= L_n F_m + (-1)^n F_{m-n}
\end{aligned}
$$

2.2. Pell ve Pell-Lucas Tam Sayı Dizileri

Fibonacci ve Lucas tam sayı dizilerinden farklı olarak bilinen iki önemli tam sayı dizisi daha vardır. Bu iki tam sayı dizisinden ilki Pell tam sayı dizisi olup bu dizi P_n ile gösterilir. Bu dizinin başlangıç terimleri $P_0 = 0,\ P_1 = 1$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

dir. Diğer tam sayı dizisi ise Pell-Lucas tam sayı dizisi olup bu dizi Q_n ile gösterilir. Bu dizinin başlangıç terimleri $Q_0 = Q_1 = 2$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

dir. Bu iki tam sayı dizisinin karakteristik denklemi

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

olup bu denklemin kökleri

$$\alpha = 1 + \sqrt{2} \quad \text{ve} \quad \beta = 1 - \sqrt{2} \tag{2.1}$$

dir. Bu diziler için Binet formülleri ise $n \geq 1$ için sırasıyla

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad Q_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir. Üstelik bu dizilerinin genel terimleri

$$P_n = \sum_{i=0}^{[|(n-1)/2|]} \binom{n}{2i+1} 2^i \quad \text{ve} \quad Q_n = 2\sum_{i=0}^{[|n/2|]} \binom{n}{2i} 2^i$$

olarak da verilebilir.

Bu iki tam sayı dizisi arasında da birçok cebirsel bağıntı olup bu bağıntılardan en önemlisi

$$Q_n = P_{n-1} + P_{n+1}$$

dir. Diğer bazı cebirsel bağıntılar ise aşağıdaki gibidir.

$$P_{2n+1} = \frac{P_n Q_{n+1} + Q_n P_{n+1}}{2}$$

$$Q_{2n+1} = \frac{8P_n P_{n+1} + Q_n Q_{n+1}}{2}$$

$$P_n^2 = \frac{Q_{2n} + (-1)^{n+1}}{8}$$

$$P_n Q_m = P_{n+m} + (-1)^m P_{n-m}$$

$$P_n P_{n+m} = \frac{(Q_{2n+m} + (-1)^{n+1})Q_m}{8}$$

2.3. Balans Tam Sayı Dizisi

Balans tam sayı dizisi ilk olarak Behera ve Panda (1999) tarafından birinci dereceden

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+r) \qquad (2.2)$$

Diophantine denkleminin tam sayı çözümleri incelenirken ortaya çıkmıştır. (2.2) deki denklemi sağlayan pozitif n tam sayısına balans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise balansır (balans sayısının dengeleyicisi) denir. Örneğin 6, 35, 204, 1189, 6930 birer balans sayısı iken bu sayılara karşılık gelen balansırlar sırasıyla 2, 14, 84, 492, 2870 dir.

(2.2) eşitliği r ve n ye göre çözülürse

$$r = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 1}}{2} \tag{2.3}$$

ve

$$n = \frac{2r + 1 + \sqrt{8r^2 + 8r + 1}}{2} \tag{2.4}$$

olarak elde edilir. (2.3) eşitliğine göre n nin bir balans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8n^2 + 1$ in bir tam kare olmasıdır.

(2.2) eşitliğine dikkat edilirse, balans sayılarının 2 den büyük veya eşit olması gerektiği görülür. Ancak (2.3) eşitliğine göre

$$8(0)^2 + 1 = 1 \quad \text{ve} \quad 8(1)^2 + 1 = 3^2$$

birer tam kare olduğundan 0 ve 1 de birer balans sayısı olarak kabul edilir. Benzer şekilde (2.4) eşitliğine göre r nin bir balansır olması için gerek ve yeter şart $8r^2 + 8r + 1$ in bir tam kare olmasıdır. Ancak

$$8(0)^2 + 8(0) + 1 = 1$$

tam kare olduğundan 0 bir balansır olarak kabul edilir.

Balans sayıları B_n ve bu sayılara karşılık gelen balansırlar da R_n ile gösterilirse bu sayıların başlangıç terimleri $B_0 = 0,\ B_1 = 1,\ B_2 = 6$ ve $R_0 = R_1 = 0,\ R_2 = 2$ olup genel terimleri $n \geq 2$ için

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \quad \text{ve} \quad R_{n+1} = 6R_n - R_{n-1} + 2$$

dir.

Daha sonra Panda ve Ray (2005) ise kobalans sayısını tanımlamışlardır. Kobalans sayısı

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r) \tag{2.5}$$

Diophantine denklemini gerçekleyen pozitif n tam sayısına denir. Denklemdeki pozitif r tam sayısına ise kobalansır (kobalans sayısının dengeleyicisi) denir. Örneğin 2, 14, 84 birer kobalans sayısı iken bu sayılara karşılık gelen kobalansırlar sırasıyla 1, 6, 35 dir.

(2.5) eşitliği r ve n ye göre çözülürse

$$r = \frac{-2n - 1 + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2} \tag{2.6}$$

ve

$$n = \frac{2r - 1 + \sqrt{8r^2 + 1}}{2} \tag{2.7}$$

olarak elde edilir. (2.6) eşitliğine göre n nin bir kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8n^2 + 8n + 1$ in bir tam kare olmasıdır. Kobalans sayılarının tanımına dikkat edilirse bu sayıların da 1 den büyük veya eşit olması gerektiği görülür. Ancak (2.6) dan

$$8(0)^2 + 8(0) + 1 = 1$$

tam kare olduğundan 0 da bir kobalans sayısı olarak kabul edilir. Benzer şekilde (2.7) eşitliğinden r nin bir kobalansır olması için gerek ve yeter şart $8r^2 + 1$ in bir tam kare olmasıdır. Ancak

$$8(0)^2 + 1 = 1$$

tam kare olduğundan 0 da bir kobalansır olarak kabul edilir.

Kobalans sayıları b_n ile gösterilirse, buna sayıların sayılarının başlangıç terimleri $b_0 =$

$b_1 = 0, b_2 = 2$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2$$

dir. Benzer şekilde kobalansırlar da r_n ile gösterilirse bu sayıların başlangıç terimleri $r_0 = r_1 = 0, r_2 = 1$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$r_{n+1} = 6r_n - r_{n-1}$$

dir.

(2.2) ve (2.5) eşitlikleri göz önüne alındığında, her bir balansırın bir kobalans sayısı ve benzer şekilde her bir kobalansırın da bir balans sayısı olduğu görülür, yani $n \geq 1$ için

$$B_n = r_{n+1} \quad \text{ve} \quad R_n = b_n$$

dir. Buna göre (2.2) eşitliğinden

$$b_n = \frac{-2B_n - 1 + \sqrt{8B_n^2 + 1}}{2} \quad \text{ve} \quad B_n = \frac{2b_n + 1 + \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}}{2} \tag{2.8}$$

elde edilir.

(2.8) eşitliğine göre B_n nin bir balans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8B_n^2 + 1$ in bir tam kare ve benzer şekilde b_n nin bir kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8b_n^2 + 8b_n + 1$ in bir tam kare olmasıdır. Dolayısıyla $\sqrt{8B_n^2 + 1}$ ve $\sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1}$ birer tam sayı olup bu tam sayılara sırasıyla Lucas-balans ve Lucas-kobalans sayıları denir ve sırasıyla C_n ve c_n ile gösterilir. O hâlde

$$C_n = \sqrt{8B_n^2 + 1} \quad \text{ve} \quad c_n = \sqrt{8b_n^2 + 8b_n + 1} \tag{2.9}$$

dir. Örneğin 3, 17, 99, 577, 3363 birer Lucas-balans sayısı iken, 1, 7, 41, 239, 1393 birer Lucas-kobalans sayısıdır.

Lucas-balans sayılarının başlangıç terimleri $C_0 = 1, C_1 = 3, C_2 = 17$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$C_{n+1} = 6C_n - C_{n-1}$$

dir. Benzer şekilde Lucas-kobalans sayılarının başlangıç terimleri $c_0 = c_1 = 1, c_2 = 7$ olup genel terimi $n \geq 2$ için

$$c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}$$

dir. Dikkat edilirse balans sayılarının karakteristik denklemi $x^2 - 6x + 1 = 0$ olup bu denklemin kökleri

$$\gamma = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{ve} \quad \delta = 3 - 2\sqrt{2} \tag{2.10}$$

dir. Bu kökler yardımıyla balans sayılarının Binet formülü $n \geq 1$ için

$$B_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{4\sqrt{2}} \tag{2.11}$$

dir. Benzer şekilde kobalans, Lucas-balans ve Lucas-kobalans sayılarının Binet formülleri ise $n \geq 1$ için sırasıyla

$$b_n = \frac{\gamma^n(-1+\sqrt{2}) + \delta^n(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, \; C_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

ve

$$c_n = \frac{(-1+\sqrt{2})\gamma^n - (1+\sqrt{2})\delta^n}{2}$$

dir.

Balans sayıları ile Pell sayıları arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki ilk olarak Ray (2009) tarafından ortaya çıkartılmıştır. Ray (2009)

"x bir balans sayısıdır $\Leftrightarrow 8x^2+1$ bir tam kare"

gerçeğini göz önüne alarak belli bir ise $y \geq 1$ tam sayısı için $8x^2+1=y^2$ demiş ve buradan $y^2-8x^2=1$ Pell denklemini elde etmiştir (Barbeau (2003) ve Mollin (1996)). Bu Pell denkleminin en küçük pozitif tam sayı çözümü (temel çözüm) $(y_1,x_1)=(3,1)$ olup denklemin diğer tüm tam sayı çözümleri $n \geq 1$ için

$$y_n + x_n\sqrt{8} = (3+\sqrt{8})^n \tag{2.12}$$

olmak üzere (y_n, x_n) şeklindedir. Benzer şekilde

$$y_n - x_n\sqrt{8} = (3-\sqrt{8})^n \tag{2.13}$$

olup (2.12) ve (2.13) den

$$x_n = \frac{(3+\sqrt{8})^n-(3-\sqrt{8})^n}{4\sqrt{2}} \tag{2.14}$$

elde edilir ki bu balans sayıları için Binet formülüdür. Diğer yandan (2.10) ve (2.1) den

$$\alpha^2 = 3+2\sqrt{2} = \gamma \quad \text{ve} \quad \beta^2 = 3-2\sqrt{2} = \delta$$

olduğundan, (2.11) ve (2.14) ten balans sayılarının Binet formülünün $n \geq 1$ için

$$B_n = \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \tag{2.15}$$

şeklinde olduğu görülür. Diğer yandan Pell sayılarının Binet formülünün $P_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{2}}$ olduğu göz önüne alınırsa (2.15) eşitliğinden

$$B_n = \frac{P_{2n}}{2}$$

olduğu açıktır. Böylece balans sayıları ile Pell sayıları arasında bir ilişki kurulmuş olur. Benzer şekilde diğer balans sayılarının Binet formülleri ise

$$b_n = \frac{\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2},\ C_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} \quad \text{ve} \quad c_n = \frac{\alpha^{2\mathrm{n}-1} + \beta^{2\mathrm{n}-1}}{2}$$

olup bu sayıların genel terimleri yine Pell sayılarına bağlı olarak

$$b_n = \frac{P_{2n-1} - 1}{2},\ C_n = P_{2n} + P_{2n-1} \quad \text{ve} \quad c_n = P_{2n-1} + P_{2n-2}$$

şeklinde verilebilir. Böylelikle tüm balans sayılarının genel terimleri Pell sayılarına bağlı olarak elde edilmiş oldu, yani tüm balans sayıları ile Pell sayıları arasında bir ilişki kurulmuş olur. (Olajos 2010, Panda ve Ray 2011, Panda 2017).

Gözeri ve ark. (2017) ise balans ve kobalans sayılarının genel terimlerini Pell sayılarına bağlı olarak

$$B_n = P_n^2 + P_n P_{n-1}$$

ve n nin sırasıyla tek ve çift olması durumunda

$$b_n = P_{n-1}^2 + P_n P_{n-1} \quad \text{ve} \quad b_n = P_{n-1}^2 + P_n P_{n-1} - 1$$

olarak elde etmişlerdir. Ayrıca n.balans ve kobalans sayılarının toplamının, n nin tek olması durumunda bir tam kare, yani

$$B_n + b_n = (P_n + P_{n-1})^2$$

çift olması durumunda ise

$$B_n + b_n = (P_n + P_{n-1})^2 - 1$$

olduğunu ve benzer şekilde farklarının ise n nin tek olması durumunda iki kare farkı

$$B_n - b_n = P_n^2 - P_{n-1}^2$$

çift olması durumunda ise iki kare farkının 1 fazlası, yani

$$B_n - b_n = P_n^2 - P_{n-1}^2 + 1$$

olduğunu, bu sayıların oranının ise n nin tek olması durumunda

$$\frac{B_n}{b_n} = \frac{P_n}{P_{n-1}}$$

çift olması durumunda ise

$$\frac{B_n}{b_n} = \frac{P_n + P_{n-1}}{P_{n-1} + P_{n-2}}$$

olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Lucas-balans ve Lucas-kobalans sayılarının genel terimlerini balans sayılarına bağlı olarak aşağıdaki gibi elde etmişleridir.

$$C_n = 2B_n + 2b_n + 1 \quad \text{ve} \quad c_n = 2B_n - 2b_n - 1$$

Ardışık Pell sayılarının toplamının n nin tek olması durumunda

$$P_n + P_{n+1} = 1 + 2\left(B_{\frac{n+1}{2}} + b_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

çift olması durumunda ise

$$P_n + P_{n+1} = B_{\frac{n+2}{2}} - b_{\frac{n+2}{2}} - 1$$

ve kareleri farkının yine n nin tek olması durumunda

$$P_n^2 - P_{n-1}^2 = b_n + B_{n-1} + 1$$

çift olması durumunda ise

$$P_n^2 - P_{n-1}^2 = b_n + B_{n-1}$$

olduğunu göstermişlerdir.

$n \geq 1$ tam sayı olmak üzere $\frac{n(n+1)}{2}$ şeklindeki sayılara üçgensel sayılar denir ve T_n ile gösterilir. O halde

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

dir. Örneğin 1, 3, 6, 10, 15, 21 birer üçgensel sayıdır.

Üstelik ardışık iki üçgensel sayının toplamı bir tam kare olup

$$T_{n-1} + T_n = n^2 = (T_n - T_{n-1})^2$$

dir.

Üçgensel sayılar ile balans ve kobalans sayıları arasında yakın bir ilişki vardır. Gerçekten de (2.2) eşitliği

$$\frac{(n+r)(n+r+1)}{2} = n^2$$

olarak yazılabileceğinden, n nin bir balans sayısı olması için gerek ve yeter şart n^2 nin bir üçgensel sayı olması, yani

$$T_{B_n+R_n} = B_n^2$$

dir. Benzer şekilde (2.5) eşitliği de

$$\frac{(n+r)(n+r+1)}{2} = n^2 + n$$

olarak yazılabileceğinden, n nin bir kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $n^2 + n$ nin bir üçgensel sayı olması, yani

$$T_{b_n+r_n} = b_n^2 + b_n$$

dir.

Üçgensel sayılardan bazıları tam kare olup bu sayılara kare üçgensel sayılar denir ve S_n ile gösterilir. Örneğin 1, 36, 1225, 41616 birer kare üçgensel sayılardır.

Belli t_n ve s_n tam sayı dizileri için kare üçgensel sayılar

$$S_n = \frac{t_n(t_n+1)}{2} = s_n^2 \tag{2.16}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda tüm bu tam sayı dizilerinin Binet formülleri $n \geq 1$ için

$$S_n = \left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right)^2, s_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad t_n = \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2}{4} \tag{2.17}$$

dir.

(2.15) eşitliğine göre balans sayılarının Binet formülünün

$$B_n = \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}$$

olduğu göz önüne alınırsa (2.17) eşitliğinden

$$S_n = B_n^2$$

olduğu görülür.

Oblong sayıları ise, üçgensel sayıların iki katı olan sayılardır ve bu sayılar O_n ile gösterilir. Buna göre

$$O_n = n(n+1)$$

dir.

Oblong sayıları ile balans, kobalans, Lucas-balans ve Lucas-kobalans sayıları arasında da yakın bir ilişki vardır. Gerçekten de $\left(\frac{3B_n - B_{n-1} - 1}{2}\right)$. oblong sayısının yarısı, n.balans sayısının karesine eşit, yani

$$\frac{O_{\left(\frac{3B_n - B_{n-1} - 1}{2}\right)}}{2} = B_n^2$$

dir. Benzer şekilde $\left(\frac{b_{n+1} - 3b_n - 2}{2}\right)$. oblong sayısının yarısı, n.kobalans sayısının karesi ile kendisinin toplamına eşit, yani

$$\frac{O_{\left(\frac{b_{n+1} - 3b_n - 2}{2}\right)}}{2} = b_n^2 + b_n$$

dir. Üstelik $\left(\frac{C_n - 1}{2}\right)$.oblong sayısının dört katının bir fazlası,n.Lucas-balans sayısının karesine eşit, yani

$$4O_{\frac{C_n - 1}{2}} + 1 = C_n^2$$

ve $\left(\frac{C_n - 1}{2}\right)$. oblong sayısının dört katının bir fazlası, n. Lucas-kobalans sayısının karesine eşit, yani

$$4O_{\frac{c_n-1}{2}}+1=c_n^2$$

dir (Gözeri ve ark. 2017).

Panda ve Ray (2011), Pell sayılarının bazı toplamlarının

$$\sum_{i=1}^{2n} P_i = B_n + b_{n+1}, \quad \sum_{i=1}^{n} P_{2i-1} = B_n \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} P_{2i} = b_{n+1}$$

şeklinde olduğunu göstermişlerdir. Üstelik 1 den $(2n-1)$ e kadar Pell sayılarının toplamının, n. balans sayısı ile n. kobalans sayısının toplamına eşit, yani

$$\sum_{i=1}^{2n-1} P_i = B_n + b_n \tag{2.18}$$

olduğunu göstermişlerdir. Gözeri ve ark. (2017) ise yukarıdaki (2.18) eşitliğine benzer şekilde, Pell-Lucas sayıları için

$$\sum_{i=0}^{2n-1} Q_i = \mathrm{C}_n + \mathrm{c}_n$$

olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca bu eşitlikten farklı olarak, balans, kobalans, Lucas-balans ve Lucas-kobalans sayılarının basit sürekli kesirli açılımlarını ele almışlar ve

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = [5; \underbrace{1,4}_{n-2 \text{ tane}}, 1, 5]$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \begin{cases} [5; \underbrace{1,4}_{\frac{n-5}{2} \text{ tane}}, 1, 5] & n \geq 5 \text{ tek} \\ [5; \underbrace{1,4}_{\frac{n-5}{2} \text{ tane}}, 1, 6] & n \geq 4 \text{ çift} \end{cases}$$

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = [5; \underbrace{1,\ 4}_{n-1 \text{ tane}},\ 1,\ 2]$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = [5; \underbrace{1,\ 4}_{n-2 \text{ tane}},\ 1,\ 6]$$

olduğunu göstermişlerdir.

Santana ve Diaz-Barrero (2006), ilk $(4n+1)$ Pell sayısının toplamının bir tam kare ve

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = \left[\sum_{i=1}^{4n+1} \binom{2n+1}{2i} 2^i\right]^2 \tag{2.19}$$

şeklinde olduğunu göstermişlerdir. Esasında bu toplam

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = c_{n+1}^2$$

dir. Ayrıca Pell, Pell-Lucas ve balans sayılarının bazı toplamları da yine tam kare olup

$$1 + \sum_{i=1}^{4n-1} P_i = C_n^2, \quad \sum_{i=1}^{2n} Q_{2i-1} = (4B_n)^2 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{2n} B_{2i-1} = B_{2n}^2$$

dir. Daha sonra Tekcan ve Tayat (2014), aynı problemi ilk $(2n+1)$ Pell sayısının toplamı için ele almışlar ve ilk $(2n+1)$ Pell sayısının toplamının n nin çift olması durumunda bir tam kare, n nin tek olması durumunda ise bir tam karenin yarısı, yani

$$\sum_{i=1}^{2n+1} P_i = \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2}\right)^2 & n \geq 2 \text{ çift} \\ \dfrac{\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} & n \geq 1 \text{ tek} \end{cases}$$

olduğunu göstermişlerdir. Bu eşitliği göz önüne alarak

$$X_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{2} \quad \text{ve} \quad Y_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{2}}$$

tam sayı dizilerini tanımlayarak, (2.19) daki eşitliğin X_n ve Y_n tam sayı dizilerine bağlı olarak

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = [2X_n^2 - 2X_nY_{n-1} + (-1)^{n+1}]^2$$

şeklinde olduğunu belirtmişlerdir.

Balans sayıları daha sonraları birçok matematikçi tarafından değişik balans sayılarına genelleştirilmiştir. Liptai (2004) balans sayıları ile Fibonacci ve Lucas sayıları arasında bir ilişki olup olmadığını ele almış ve 1 in hem balans hem de Fibonacci sayısının olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde Liptai (2006), hiçbir Lucas balans sayısının Fibonacci sayısı olmadığını belirtmiştir. Szalay (2007) ise benzer problemi ele alarak, farklı bir yöntem kullanmış ve yine aynı sonuçları elde etmiştir. Kovacs ve ark. (2010) ise balans sayılarını genelleştirmişler ve bu sayılar ile ilgili bazı cebirsel bağıntılar elde etmişlerdir. $a > 0$ ve $b \geq 0$ aralarında asal tam sayılar olmak üzere

$$(a+b) + (2a+b) + \cdots + (a(n-1)+b) = (a(n+1)+b) + \cdots + (a(n+r)+b)$$

Diophantine denklemini gerçekleyen pozitif n tam sayısı için $an+b$ sayısına (a,b)-balans, eşitliği gerçekleyen pozitif r tam sayısı için $ar+b$ sayısına (a,b)-balansır demişler ve bu sayıları $B_n^{(a,b)}$ ve $R_n^{(a,b)}$ ile göstermişlerdir. (a,b)-balans ve (a,b)-balansır sayıları ile ilgili bazı cebirsel özdeşlikler elde etmişlerdir. Liptai ve ark. (2009) balans sayılarını ele almışlar ve bu sayıları şu şekilde genelleştirmişlerdir. $y, k, l \geq 4$ özelliğindeki tam sayılar olmak üzere

$$1^k + \cdots + (x-1)^k = (x+1)^l + \cdots + (y-1)^l$$

denklemini sağlayan $x \leq y-2$ özelliğindeki x tam sayısına y için (k,l)-kuvveti demişler ve bununla ilgili bazı önemli cebirsel bağıntılar elde etmişlerdir. Kovacs ve ark. (2010) ise k, x pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\Pi_k(x) = x(x+1)\dots(x+k-1)$$

eşitliği tanımlamışlar ve $B_m = \Pi_k(x)$ eşitliğinin sadece $k \in \{2,3,4\}$ için sonsuz sayıda tam sayı çözümünün olduğunu göstermişlerdir. Tengely (2013) ise $k=5$ durumunu ele almış ve

$$B_m = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

denkleminin hiçbir tam sayı çözümünün olmadığını göstermiştir. Panda ve ark. (2018) ise balans ve Lucas-balans sayılarının bazı özel toplamları ile ilgilenmişlerdir. Patel ve ark. (2018) ise tam olmayan balans ve Lucas-balans sayılarını ele almışlar ve bu sayılar ile ilgili bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Ray (2015) ise balans ve Lucas-balans sayılarının toplamlarını matris yöntemiyle ele almış ve ilgili sonuçlar elde etmiştir. Gözeri ve ark. (2017) balans sayıları ve bu sayıların Pell ve üçgensel sayılar ile olan ilişkisi üzerinde durmuşlar ve $\left(\frac{Q_{2n-1}-2}{4}\right)$. üçgensel sayının $\frac{P_{2n-1}^2-1}{4}$, yani

$$T_{\frac{Q_{2n-1}-2}{4}} = \frac{P_{2n-1}^2-1}{4}$$

ve benzer şekilde $\left(\frac{14B_n-P_{n-1}Q_{n-1}-2}{4}\right)$. üçgensel sayının ise $\frac{P_{4n+2}+P_{4n+1}-3}{16}$, yani

$$T_{\frac{14B_n-P_{n-1}Q_{n-1}-2}{4}} = \frac{P_{4n+2}+P_{4n+1}-3}{16}$$

olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca kare üçgensel sayıları dikkate alarak $\left(\frac{s_n+s_{n+1}-1}{2}\right)$. üçgensel sayının $\frac{Q_{4n+2}-6}{32}$, yani

$$T_{\frac{s_n+s_{n+1}-1}{2}} = \frac{Q_{4n+2}-6}{32}$$

ve $\left(\frac{s_n+s_{n-1}-1}{2}\right)$. üçgensel sayının da $\frac{P_{2n-1}^2-1}{4}$, yani

$$T_{\frac{s_n+s_{n-1}-1}{2}} = \frac{P_{2n-1}^2 - 1}{4}$$

olduğunu belirtmişlerdir. Kare üçgensel sayıların genel teriminin ise

$$S_n = \left(\frac{b_{n+1} - b_n}{2}\right)^2$$

veya

$$S_n = \left(\frac{P_{2n+1} - P_{2n-1}}{4}\right)^2$$

olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca üçgensel sayılar ile kare üçgensel sayılar arasındaki ilişkiyi de ele alarak $\left(\frac{s_{n+1}-s_{n-1}-2}{4}\right)$. üçgensel sayının n. kare üçgensel sayıya eşit, yani

$$T_{\frac{s_{n+1}-s_{n-1}-2}{4}} = S_n$$

ve (2.19) daki eşitliğin ise

$$\sum_{i=1}^{4n+1} P_i = (4s_n + 2t_n + 1)^2$$

olduğunu göstermişlerdir.

Özkoç ve Tekcan (2017) ise $k \geq 1$ tam sayı olmak üzere

$$B_0^k = 0,\ B_1^k = 1,\ B_{n+1}^k = 6kB_n^k - B_{n-1}^k,\ \ n \geq 1$$

$$b_1^k = 0,\ b_2^k = 2,\ b_{n+1}^k = 6kb_n^k - b_{n-1}^k + 2,\ \ n \geq 2$$

$$C_0^k = 1,\ C_1^k = 3,\ C_{n+1}^k = 6kC_n^k - C_{n-1}^k,\ \ n \geq 1$$

$$c_1^k = 1,\ c_2^k = 7,\ c_{n+1}^k = 6kc_n^k - c_{n-1}^k,\ \ n \geq 2$$

k-balans sayılarını tanımlamışlar ve bunlarla ilgili bazı cebirsel sonuçlar elde etmişlerdir. Şöyle ki $(n+1)$. ve $(n-1)$. k-balans sayılarının çarpımının 1 fazlasının ve benzer şekilde k-kobalans sayılarının çarpımının 1 fazlasının bir tam kare olduğunu belirterek

$$B_{n+1}^k B_{n-1}^k + 1 = (B_n^k)^2 \quad \text{ve} \quad b_{n+1}^k b_{n-1}^k + 1 = (b_n^k - 1)^2$$

olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca $n \geq 1$ için

$$\left(B_{n+1}^k + B_n^k\right)\left(B_{n+1}^k - B_n^k\right) = B_{2n+1}^k$$

ve her bir pozitif n ve m tam sayıları için

$$B_{n+m}^k = B_n^k B_{m+1}^k - B_{n-1}^k B_m^k$$

eşitliklerinin gerçeklendiğini göstermişlerdir. Üstelik Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayılarının yukarıda bahsedilen genel terimlerine benzer şekilde, tüm k-balans sayılarının genel terimlerinin

$$B_n^k = \sum_{i=0}^{[\![(n-1)/2]\!]} (-1)^i \binom{n-1-i}{i} (6k)^{n-1-2i}$$

$$b_n^k = \sum_{i=0}^{[\![(n-1)/2]\!]} 2(-1)^i \left[\binom{n-2-i}{i} (6k)^{n-2-2i} + \binom{n-3-i}{i} (6k)^{n-3-2i}\right] + b_{n-2}^k$$

$$C_n^k = \sum_{i=0}^{[\![(n-1)/2]\!]} (-1)^i \left[3\binom{n-1-i}{i} (6k)^{n-1-2i} - \binom{n-2-i}{i} (6k)^{n-2-2i}\right]$$

$$c_n^k = \sum_{i=0}^{[\![(n-1)/2]\!]} (-1)^i \left[7\binom{n-2-i}{i} (6k)^{n-2-2i} - \binom{n-3-i}{i} (6k)^{n-3-2i}\right]$$

şeklinde olduğunu göstermişlerdir.

Daha sonra Panda ve Panda (2015) ise balans sayılarını hemen hemen balans sayılarına genişletmişlerdir. Panda ve Panda (2015)

$$|\ [(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)]-[1+2+\cdots+(n-1)]\ |=1 \quad (2.20)$$

Diophantine denklemini gerçekleyen pozitif n tam sayısına hemen hemen balans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise hemen hemen balansır demişlerdir. (2.20) deki eşitliğe göre iki durumda problemi ele almışlardır:

(i) Eğer $nr+\frac{r(r+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=1$ ise n ye birinci tip hemen hemen balans, r ye ise birinci tip hemen hemen balansır demişlerdir. Bu durumda

$$r=\frac{-2n-1+\sqrt{8n^2+9}}{2} \quad (2.21)$$

dir.

(ii) Eğer $nr+\frac{r(r+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=-1$ ise n ye ikinci tip hemen hemen balans, r ye ise ikinci tip hemen hemen balansır demişlerdir. Bu durumda ise

$$r=\frac{-2n-1+\sqrt{8n^2-7}}{2} \quad (2.22)$$

dir.

B_n^* birinci tip hemen hemen balans sayısı ve B_n^{**}da ikinci tip hemen hemen balans sayısı olmak üzere (2.21) eşitliğine göre B_n^* ın birinci tiphemen hemen balans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8(B_n^*)^2+9$ un bir tam kare ve benzer şekilde (2.22) eşitliğine göre B_n^{**} ın ikinci tip hemen hemen balans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8(B_n^{**})^2-7$ nin bir tam kare olmasıdır. O hâlde

$$C_n^*=\sqrt{8(B_n^*)^2+9} \quad \text{ve} \quad C_n^{**}=\sqrt{8(B_n^{**})^2-7} \quad (2.23)$$

birer tam sayı olup bu tam sayılara sırasıyla birinci ve ikinci tip hemen hemen Lucas-balans sayıları demişlerdir.

Panda (2017) ise hemen hemen kobalans sayılarını tanımlamıştır. Yukarıdaki hemen hemen balans sayılarının tanımına benzer şekilde

$$|\ [(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r)]-[1+2+\cdots+n]\ |=1 \tag{2.24}$$

Diophantine denklemini gerçekleyen pozitif n tam sayısına hemen hemen kobalans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise hemen hemen kobalansır demiştir. Yine (2.24) eşitliğine göre problemi iki durumda ele almıştır.

(i) Eğer $nr+\frac{r(r+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=1$ ise n ye birinci tip hemen hemen kobalans, r ye ise birinci tip hemen hemen kobalansır demişlerdir. Bu durumda

$$r=\frac{-2n-1+\sqrt{8n^2+8n+9}}{2} \tag{2.25}$$

dir.

(ii) Eğer $nr+\frac{r(r+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=-1$ ise n ye ikinci tip hemen hemen kobalans, r ye ise ikinci tip hemen hemen kobalansır demişlerdir. Bu durumda

$$r=\frac{-2n-1+\sqrt{8n^2+8n-7}}{2} \tag{2.26}$$

dir.

b_n^* birinci tip hemen hemen kobalans sayısı ve b_n^{**} da ikinci tip hemen hemen kobalans sayısı olmak üzere (2.25) eşitliğine göre b_n^* ın birinci tip hemen hemen kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8(b_n^*)^2+8b_n^*+9$ un bir tam kare ve benzer şekilde

(2.26) eşitliğine göre b_n^{**} ın ikinci tip hemen hemen kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8(b_n^{**})^2 + 8b_n^{**} - 7$ nin bir tam kare olmasıdır. O halde

$$c_n^* = \sqrt{8(b_n^*)^2 + 8b_n^* + 9} \quad \text{ve} \quad c_n^{**} = \sqrt{8(b_n^{**})^2 + 8b_n^{**} - 7} \tag{2.27}$$

birer tam sayı olup bu tam sayılara sırasıyla birinci ve ikinci tip hemen hemen Lucas-kobalans sayıları demiştir.

Tekcan (2019) ise birinci tip hemen hemen tüm balans sayılarının genel terimlerinin

$$B_n^* = 3B_n, \quad b_{2n}^* = 2b_{n+1} - b_n, \quad b_{2n-1} = 4b_n - b_{n-1} + 1,$$

$$C_n^* = 3C_n, \quad c_{2n} = c_{n+2} - 4c_{n+1}, \quad c_{2n-1}^* = c_{n+1} - 2c_n$$

ve ikinci tip hemen hemen tüm balans sayılarının genel terimlerinin ise

$$B_{2n-1}^{**} = B_{n-1} + C_{n-1}, \; B_{2n}^{**} = -B_n + C_n, \; b_n^{**} = 3b_n + 1,$$

$$C_{2n-1}^{**} = 8B_{n-1} + C_{n-1}, \; C_{2n}^{**} = 8B_n - C_n, \; c_n^{**} = 3c_n$$

olduğunu göstermiştir. Üstelik balans, kobalans, balansır ve kobalansır arasındaki

$$B_n = r_{n+1} \;\; \text{ve} \quad R_n = b_n$$

ilişkisine benzer bir ilişkinin, hemen hemen tüm balans sayıları arasında da olduğunu belirtmiştir. R_n^* birinci tip hemen hemen balansır, R_n^{**} ikinci tip hemen hemen balansır, r_n^* birinci tip hemen hemen kobalansır ve r_n^{**} ikinci tip hemen hemen kobalansır olmak üzere $n \geq 1$ için

$$B_n^* = r_{n+1}^{**}, \; B_n^{**} = r_n^*, \; b_n^* = R_{n+2}^* \text{ ve } \; b_n^{**} = R_n^*$$

dir. Ayrıca tüm balans sayılarının genel terimlerinin birinci ve ikinci tip hemen hemen tüm balans sayılarına bağlı olarak

$$B_n = \frac{B_n^*}{3}, b_n = \frac{b_{2n-1}^* - b_{2n-2}^* - 1}{2},\ C_n = \frac{C_n^*}{3},\ \ c_n = \frac{c_{2n-1}^* - c_{2n-2}^*}{2}$$

ve

$$B_n = \frac{B_{2n+1}^{**} - B_{2n}^{**}}{3}, b_n = \frac{b_n^{**} - 1}{3},\ C_n = \frac{C_{2n+1}^{**} - C_{2n}^{**}}{2},\ \ c_n = \frac{c_n^{**}}{3}$$

şeklinde verilebileceğini ve Pell sayılarının genel terimlerinin de

$$P_{2n} = \frac{2B_n^*}{3}, P_{2n-1} = b_{2n-1}^* - b_{2n-2}^*$$

veya

$$P_{2n} = B_{2n+1}^{**} - B_{2n}^{**},\ P_{2n-1} = \frac{2b_n^{**} + 1}{3}$$

şeklinde olduğunu göstermiştir. Bunlardan farklı olarak hemen hemen balans sayıları ile üçgensel ve kare üçgensel sayıları ele almış ve bu ikisi arasındaki bağıntıları elde etmiştir. (2.16) da tanımlanan kare üçgensel sayıların genel terimlerini, birinci tip hemen hemen balans sayılarına bağlı olarak

$$S_n = \left(\frac{b_{2n+1}^* - b_{2n}^* - b_{2n-1}^* + b_{2n-2}^*}{4}\right)^2,\ s_n = \frac{B_n^*}{3}\ \text{ ve }\ t_n = \frac{C_n^* - 3}{6}$$

şeklinde ve ikinci tip hemen hemen balans sayılarına bağlı olarak

$$S_n = \left(\frac{b_{n+1}^{**} - b_n^{**}}{6}\right)^2,\ \ s_n = \frac{B_{2n+1}^{**} - B_{2n}^{**}}{2},\ \ t_n = \frac{C_{2n+1}^{**} - C_{2n}^{**} - 2}{4}$$

şeklinde elde etmiştir. Ayrıca kare üçgensel sayıların genel teriminin

$$S_n = \left(\frac{-2B_{n-1}^* + C_n^* - C_{n-1}^*}{6}\right)^2$$

veya

$$S_n = \left(\frac{-2B_{2n-1}^{**} + 2B_{2n-2}^{**} + C_{2n+1}^{**} - C_{2n}^{**} - C_{2n-1}^{*\,ast} + C_{2n-2}^{**}}{4}\right)^2$$

şeklinde olduğunu göstermiştir. Tersine birinci tip hemen hemen tüm balans sayılarının genel terimlerinin

$$
\begin{aligned}
B_n^* &= 3s_n \\
b_{2n}^* &= -2s_{n+1} + s_n + 2t_{n+1} - t_n \\
b_{2n-1}^* &= -4s_n + s_{n-1} + 4t_n - t_{n-1} + 1 \\
C_n^* &= 6t_n + 3 \\
c_{2n}^* &= 3s_{n+1} - 5s_n \\
c_{2n-1}^* &= 5s_n - 3s_{n-1}
\end{aligned}
$$

ve ikinci tip hemen hemen tüm balans sayılarının genel terimlerinin de

$$
\begin{aligned}
B_{2n}^{**} &= -s_n + 2t_n + 1 \\
B_{2n-1}^{**} &= s_{n-1} + 2t_{n-1} + 1 \\
b_n^{**} &= -3s_n + 3t_n + 1 \\
C_{2n}^{**} &= 8s_n - 2t_n - 1 \\
C_{2n-1}^{**} &= 8s_{n-1} + 2t_{n-1} + 1 \\
c_n^{**} &= 3s_n + 3s_{n-1}
\end{aligned}
$$

olduğunu göstermiştir. Böylelikle kare üçgensel sayılar ile birinci ve ikinci tip hemen hemen tüm balans sayıları arasında bir ilişki kurmuştur. Ayrıca üçgensel sayılar ile kare üçgensel sayılar arasında birinci ve ikinci tip hemen hemen balans sayılarını kullanarak

$$T_{\frac{B_{n+1}^* - B_{n-1}^* - 6}{12}} = S_n \quad \text{ve} \quad T_{\frac{B_{2n+3}^{**} - B_{2n+2}^{**} - B_{2n-1}^{**} + B_{2n-2}^{**} - 4}{8}} = S_n$$

şeklinde olduğunu göstermiştir.

Behera ve Panda (1999), verilen herhangi bir x balans sayısı için

$$F(x) = 2x\sqrt{8x^2+1},\ G(x) = 3x + \sqrt{8x^2+1} \text{ ve } H(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2+1}$$

fonksiyonlarının değerlerinin de birer balans sayısı ve

$$K(x) = 6x\sqrt{8x^2+1} + 16x^2 + 1$$

fonksiyonunun değerinin de tek balans sayısı olduğunu göstermişlerdir. Üstelik verilen herhangi iki x ve y balans sayısı için

$$f(x,y) = x\sqrt{8y^2+1} + y\sqrt{8x^2+1}$$

fonksiyonlarının değerlerinin de birer balans sayısı ve verilen herhangi üç x, y, z balans sayısı için de

$$f(x,y,z) = x\sqrt{8y^2+1}\sqrt{8z^2+1} + y\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8z+1} + z\sqrt{8x^2+1}\sqrt{8y^2+1} + 8xyz$$

fonksiyonunun değerlerinin de birer balans sayısı olduğunu göstermişleridir. Ray (2009) ise benzer problemi kobalans sayıları için ele almış ve verilen herhangi iki x ve y kobalans sayıları için

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2+8x+1} + 1$$

$$g(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2+8x+1} + 8$$

$$h(x) = 8x^2 + 8x + 1 + (2x+1)\sqrt{8x^2+8x+1}$$

$$t(x,y) = \frac{1}{2}[2(2x+1)(2y+1) + (2x+1)\sqrt{8y^2+8y+1}$$
$$+(2y+1)\sqrt{8x^2+8x+1} + \sqrt{8x^2+8x+1}\sqrt{8y^2+8y+1} - 1]$$

fonksiyonlarının değerlerinin de birer kobalans sayısı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Tekcan ve ark. (2015) bu fonksiyonların hangi balans ve hangi kobalans sayılarını gösterdiğini belirlemişler ve yukarıda bahsedilen balans ve kobalans fonksiyonları için

$$F(B_n) = B_{2n}, \quad G(B_n) = B_{n+1}, \quad H(B_n) = B_{n+2}, \quad K(B_n) = B_{2n+1},$$
$$f(B_n, B_k) = B_{n+k}, \quad f(B_n, B_k, B_l) = B_{n+k+l}$$

ve

$$f(b_n) = b_{n+1}, \quad g(b_n) = b_{n+2}, \quad h(b_n) = b_{2n}, \quad t(b_n, b_m) = b_{n+m}$$

olduğunu göstermişlerdir. Bu fonksiyonlardan başka

$$B_1(x, y) = \frac{-8xy + \sqrt{8x^2 + 1}\sqrt{8y^2 + 8y + 1} + 1}{4}$$

$$B_2(x, y) = x + 2y + \sqrt{8x^2 + 1} + \sqrt{8y^2 + 1} + 1$$

fonksiyonlarını tanımlayarak

$$B_1(B_n, b_n) = B_n \quad \text{ve} \quad B_2(B_n, b_n) = B_{n+1}$$

olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca $k \geq 0$ tam sayısı için

$$B_k^1(x) = B_k x\sqrt{8x^2 + 1} + C_k x^2 + 1 + 2b_{2n+k} - \sum_{i=0}^{n-2} B_{2i+k+1}$$

fonksiyonunu tanımlamışlar ve

$$B_k^1(B_n) = B_{2n+k}$$

olduğunu göstermişlerdir. Yine

$$b_k^1(x) = C_k x + B_k\left(\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1\right) + b_k$$

fonksiyonunu tanımlayarak

$$b_k^1(b_n) = b_{n+k}$$

olduğunu göstermişlerdir. Bu fonksiyonlardan farklı olarak

$$b_1(x) = \frac{2x + \sqrt{8x^2 + 1} - 1}{2}$$
$$b_2(x, y, z) = \frac{2x\sqrt{8y^2 + 8y + 1} + 2y\sqrt{8x^2 + 1} + z - 1}{2}$$

fonksiyonlarını tanımlamışlar ve

$$b_1(B_n) = b_{n+1} \quad \text{ve} \quad b_2(B_n, b_m, C_n) = b_{n+m}$$

olduğunu göstermişlerdir. Bu fonksiyonlara benzer şekilde $k \geq 0$ tam sayısı için

$$C_k(x, y) = C_{k-1}\sqrt{8x^2 + 1} + c_{k-1}\sqrt{8y^2 + 8y + 1} + c_{n+k-1}$$
$$c_k(x, y) = C_{k-1}\sqrt{8y^2 + 8y + 1} + c_{k-1}\sqrt{8x^2 + 1} + C_{n-k+1}$$

fonksiyonlarını tanımlamışlar ve

$$C_k(B_n, b_n) = C_{n+k-1} \quad \text{ve} \quad c_k(B_n, b_n) = c_{n+k-1}$$

olduğunu göstermişlerdir. Benzer şekilde

$$P_k^1(x, y) = \frac{8B_k(x + y) + C_k(\sqrt{8x^2 + 1} + \sqrt{8y^2 + 8y + 1})}{2} + P_{2k}$$
$$P_k^2(x, y) = \frac{C_k\sqrt{8x^2 + 1} + c_k\sqrt{8y^2 + 8y + 1}}{2}$$
$$P_1(x, y, z, w) = \frac{z\sqrt{8x^2 + 1} + w\sqrt{8y^2 + 8y + 1}}{2}$$
$$Q_k(x) = 32C_kx^2 + 32B_kx\sqrt{8x^2 + 1} + Q_{2k}$$

Pell ve Pell-Lucas fonksiyonlarını tanımlayarak bu fonksiyonlar için

$$P_k^1(B_n, b_n) = P_{2n+2k}, \quad P_k^2(B_n, b_n) = P_{2n+2k-1}, \quad P_1(B_n, b_n, C_n, c_n) = P_{4n-1}$$

ve

$$Q_k(B_n) = Q_{4n+2k}$$

olduğunu göstermişlerdir. Son olarak üçgensel sayılar ile ilgili olarak

$$S(x,y) = \frac{4x^2 + 4y(y+1) + \sqrt{8x^2+1}\sqrt{8y^2+8y+1} + 1}{8}$$

$$s(x,y) = \frac{6y - 2\sqrt{8x^2+1} + 3\sqrt{8y^2+8y+1} + 3}{2}$$

$$t(x,y) = \frac{2(x-y-1) + \sqrt{8x^2+1} - \sqrt{8y^2+y+1}}{2}$$

fonksiyonlarını tanımlayarak

$$S(B_n, b_n) = S_n, \quad s(B_n, b_n) = s_{n-1} \ \text{ ve } \ t(B_n, b_n) = t_n$$

olduğunu belirtmişlerdir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Kobalans sayıları ve bu sayıların genelleştirilmişi olan diğer kobalans sayıları ve bu sayıların daha önceden bilinen özel sayılar ile olan ilişkisi, analitik sayılar teorisinde çok önemli bir yere sahip olup bu konuda oldukça fazla makale ve kitap vardır. Çalışmanın en önemli amacı, son zamanlarda kobalans sayılarda önemli bir yere sahip olan t-kobalans, t-kobalansır ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimlerini t ye bağlı elde edebilmektir.

b_n^t bir t-kobalans sayısı ise (1.2) eşitliğinden

$$b_n^t = \frac{2r_n^t - 1 + \sqrt{8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1}}{2}$$

olduğu görülür. Buna göre r_n^tnin bir t-kobalansır olması için gerek ve yeter şart $8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1$ in bir tam kare olmasıdır. O halde belli bir $y \geq 1$ tam sayısı için $8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1 = y^2$ denilirse buradan

$$2(2r_n^t + t)^2 - y^2 = 2t^2 - 1$$

olur. Eğer bu son denklemde

$$x = 2r_n^t + t$$

değişken değişimi yapılırsa

$$2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$$

Pell denklemi elde edilmiş olur.

Bu çalışmada ilk olarak bu Pell denkleminin (x_n, y_n) tam sayı çözümleri elde edildi. Daha sonra ise

$$x_n = 2r_n^t + t \Leftrightarrow r_n^t = \frac{x_n - t}{2}$$

eşitliğinden t-kobalansırların genel terimleri elde edildi. r_n^t belirlendikten sonra

$$b_n^t = \frac{2r_n^t - 1 + \sqrt{8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1}}{2}$$

eşitliğinden t-kobalans sayılarının genel terimleri elde edildi. b_n^t belirlendikten sonra son olarak

$$c_n^t = \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8(t+1)b_n^t + (2t+1)^2}$$

eşitliğinden Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri elde edildi.

Tüm bu problem, $t = 1$ ve $t \geq 2$ için $2t^2 - 1$ in tam kare olup olmamasına göre üç farklı durumda ele alındı.

4. t-KOBALANS SAYILARI

Bu bölümde, kobalans sayılarının daha genel bir hâli olan t-kobalans sayılarından, t-kobalansırlardan ve Lucas t-balans sayılarından bahsedilecek ve bu sayıların genel terimleri balans sayılarına bağlı olarak elde edilecektir.

(2.5) eşitliğinde kobalans sayıları

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r)$$

Diophantine denklemini sağlayan pozitif n tam sayısına denilmiş, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise kobalansır denilmişti. Bu eşitlik dikkate alınırsa $t \geq 1$ tam sayısı için

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1 + t) + (n + 2 + t) + \cdots + (n + r + t) \tag{4.1}$$

Diophantine denklemini gerçekleyen pozitif n tam sayısına t-kobalans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise t-kobalansır denir. Örneğin 5, 34, 203, 1188 birer 1-kobalans sayısı iken bu sayılara karşılık gelen 1-kobalansırlar 2,14,84, 492 dir. Benzer şekilde 3, 8, 25 birer 2-kobalans sayısı iken bu sayılara karşılık gelen 2-kobalansırlar 1, 3, 10 dur.

(4.1) eşitliği n ve r ye göre çözülürse

$$n = \frac{2r - 1 + \sqrt{8r^2 + 8tr + 1}}{2} \tag{4.2}$$

ve

$$r = \frac{-2n - 2t - 1 + \sqrt{8n^2 + 8(t + 1)n + (2t + 1)^2}}{2} \tag{4.3}$$

olur.

Kobalans sayıları ve kobalansırlara uyumluluk sağlaması açısından t-kobalans sayıları

b_n^t ve t-kobalansırlar da r_n^t ile gösterilirse (4.2) ve (4.3) eşitliklerinden sırasıyla

$$b_n^t = \frac{2r_n^t - 1 + \sqrt{8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1}}{2} \tag{4.4}$$

ve

$$r_n^t = \frac{-2b_n^t - 2t - 1 + \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8(t+1)b_n^t + (2t+1)^2}}{2} \tag{4.5}$$

elde edilir.

(4.5) eşitliğine göre, b_n^t nin bir t-kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $(b_n^t)^2 + 8(t+1)b_n^t + (2t+1)^2$ nin bir tam kare olmasıdır. Bu hâlde

$$c_n^t = \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8(t+1)b_n^t + (2t+1)^2} \tag{4.6}$$

bir tam sayı olup bu sayıya Lucas t-kobalans sayısı denir.

4.1. $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell Denklemi

Bu alt bölümde $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri kümesi ele alınacaktır. Çünkü t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimlerinin belirlenebilmesi için bu Pell denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerinin belirlenmesi gerekir. Şöyle ki (4.4) eşitliğine dikkat edilirse, r_n^t nin bir t-kobalansır olması için gerek ve yeter şart $8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1$ in tam kare olmasıdır. Buna göre belli bir $y \geq 1$ tam sayısı için

$$8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1 = y^2 \tag{4.7}$$

denilirse buradan $2(2r_n^t + t)^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ elde edilir. Bu son eşitlikte

$$x = 2r_n^t + t \tag{4.8}$$

olarak alınırsa

$$2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1 \tag{4.9}$$

Pell denklemi elde edilmiş olur. Bu Pell denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri için bazı kavramlara ve gösterimlere ihtiyaç vardır.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

şeklindeki polinomlara kuadratik form denir ve bu form $F = (a, b, c)$ ile gösterilir. F nin diskriminantı Δ ile gösterilir ve $\Delta = b^2 - 4ac$ olarak tanımlanır.

Üstelik

1. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dir $\Leftrightarrow$ F tam formdur.
2. $a, c > 0$ ve $\Delta < 0$ $\Leftrightarrow$ F pozitif tanımlı formdur.
3. $\Delta > 0$ $\Leftrightarrow$ F indefinite (belirsiz) formdur.
4. $\text{obeb}(a, b, c) = 1$ $\Leftrightarrow$ F ilkel (primitive) formdur.

Verilen bir F formunun diskriminantı mod 4 te sıfıra 0 a veya 1 e denktir. Bu durum b nin çift veya tek olması ile ilgilidir. Gerçekten de b çift, yani belli bir k tam sayısı için $b = 2k$ ise

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2k)^2 - 4ac = 4(k^2 - ac) \equiv 0 \pmod 4$$

ve b tek, yani $b = 2k + 1$ ise

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2k + 1)^2 - 4ac = 1 + 4(k^2 + k - ac) \equiv 1 \pmod 4$$

dir. Yani diskriminantın mod 4 de 0 veya 1 e denk olup olmaması b nin tek veya çift olmasına bağlıdır.

$a, c > 0$ ve $\Delta < 0$ olması durumunda verilen form

$$F(x,y) = a(x + \frac{b}{2a}y)^2 - \frac{\Delta}{4a}y^2 \text{ veya } F(x,y) = c(y + \frac{b}{2c}x)^2 - \frac{\Delta}{4c}x^2$$

olarak yazılabileceğinden her $(x,y) \neq (0,0)$ için $F(x,y) > 0$ dır. Bu nedenle F ye pozitif tanımlı form denir. $\Delta > 0$ olması durumunda bazı (x,y) değerleri için $F(x,y) > 0$ olabileceği gibi, bazı (x,y) değerleri için $F(x,y) < 0$, hatta bazı (x,y) değerleri için $F(x,y) = 0$ olabilir. Bu nedenle F ye indefinite form denir.

Δ bir diskriminant olmak üzere

$$F_\Delta(x,y) = \begin{cases} x^2 - \frac{\Delta}{4}y^2 & \Delta \equiv 0 \pmod 4 \\ x^2 + xy - \frac{\Delta-1}{4}y^2 & \Delta \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

olarak tanımlanan forma Pell form denir. Dikkat edilirse F_Δ Pell formu diskriminantı Δ olan bir tam formdur.

$\Delta \neq 0$ herhangi bir diskriminant olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) = \{x + y\sqrt{\Delta} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ kuadratik sayı cisminde bir $\alpha = x + y\sqrt{\Delta}$ elemanının eşleniği ve normu sırasıyla $\bar{\alpha}$ ve $N(\alpha)$ ile gösterilir ve sırasıyla

$$\bar{\alpha} = x - y\sqrt{\Delta} \text{ ve } N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$$

olarak tanımlanır.

$$\rho_\Delta = \begin{cases} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} & \Delta \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} & \Delta \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

için $O_\Delta = \{x + y\rho_\Delta : x, y \in \mathbb{Z}\}$ kümesi, $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ nın bir alt halkası olup O_Δ halkasındaki herhangi bir α elemanın normu ile F_Δ Pell formu arasında aşağıdakigibi bir ilişki vardır.

Teorem 4.1.1. $\alpha \in O_\Delta$ elemanın normu bir Pell form belirtir, yani $N(\alpha) = F_\Delta(x,y)$ dir (Flath 1989).

İspat. $\Delta \equiv 0 \pmod 4$ ise belli bir k tam sayısı için $\Delta = 4k$ olup $\rho_\Delta = \sqrt{k}$ ve böylece $\alpha = x + y\sqrt{k}$ elemanın normu

$$N(\alpha) = (x + y\sqrt{k})(x - y\sqrt{k}) = x^2 - ky^2 = F_\Delta(x,y)$$

Pell formdur. Benzer şekilde $\Delta \equiv 1 \pmod 4$, yani belli bir k tam sayısı için $\Delta = 1 + 4k$ ise $\rho_\Delta = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$ ve böylece

$$\alpha = x + y\left(\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}\right) = \frac{2x + y + y\sqrt{1+4k}}{2}$$

elemanını normu

$$\begin{aligned} N(\alpha) &= \left(\tfrac{2x+y+y\sqrt{1+4k}}{2}\right)\left(\tfrac{2x+y-y\sqrt{1+4k}}{2}\right) \\ &= x^2 + xy - ky^2 \\ &= F_\Delta(x,y) \end{aligned}$$

Pell formdur. Buna göre her iki halde de $N(\alpha) = F_\Delta(x,y)$ olduğundan, $\alpha \in O_\Delta$ elemanın normu bir Pell form belirtir.

Teorem 4.1.2. $\alpha \in O_\Delta$ birimdir $\Leftrightarrow N(\alpha) = \pm 1$ dir (Flath 1989).

İspat. Eğer α birim ise $\alpha\beta = 1$ olacak şekilde bir $\beta \in O_\Delta$ vardır. Norm fonksiyonunun çarpımsal, yani herhangi iki α ve β için $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ olduğu dikkate alınırsa

$$\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow N(\alpha\beta) = 1 \Leftrightarrow N(\alpha)N(\beta) = 1 \Leftrightarrow N(\alpha) = \pm 1$$

olur. Tersine eğer $N(\alpha) = \pm 1$ ise $\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{N(\alpha)} \in O_\Delta$ olacağından α birim olmak zorundadır.

O_Δ nın birimlerinin kümesi O_Δ^* ile gösterilirse bu küme $O_\Delta^* = \{\alpha \in O_\Delta : N(\alpha) = \pm 1\}$ dir. F_Δ Pell formu için

$$\text{Pell}^{\pm}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : F_\Delta(x, y) = \pm 1\}$$

kümesinde herhangi iki (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) elemanının çarpımı (ikili işlem)

$$x + y\rho_\Delta = (x_1 + y_1\rho_\Delta)(x_2 + y_2\rho_\Delta)$$

olmak üzere $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x, y)$ dir. Burada dikkat edilirse

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \begin{cases} \left(x_1x_2 + \dfrac{\Delta}{4}y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2\right) & \Delta \equiv 0 \pmod 4 \\ \left(x_1x_2 + \dfrac{\Delta - 1}{4}y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2\right) & \Delta \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

dir. Bu çarpma işlemine göre, $\text{Pell}^{\pm}(\Delta)$ bir grup olup bu grup ile O_Δ^* arasında

$$\Psi : \text{Pell}^{\pm}(\Delta) \to O_\Delta^*, \ \ \Psi(x, y) = x + y\rho_\Delta$$

şeklinde bir grup izomorfizmi vardır. O_Δ da normu 1 olan elemanların kümesi $O_{\Delta,1}^* = \{\alpha \in O_\Delta : N(\alpha) = 1\}$ olup $\text{Pell}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : F_\Delta(x, y) = 1\}$ olarak tanımlanan küme için

$$\Psi^1 : \text{Pell}(\Delta) \to O_{\Delta,1}^*$$

bir grup izomorfizmidir.

O_Δ halkasının 1 den büyük en küçük birimine temel birim denir ve bu temel birim ε_Δ ile gösterilir. Örneğin O_5 halkasının temel birimi $\varepsilon_5 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ iken O_{20} halkasının temel birimi $\varepsilon_{20} = 9 + 4\sqrt{5}$ dir.

ε_Δ temel birimi için

$$\tau_\Delta = \begin{cases} \varepsilon_\Delta & N(\varepsilon_\Delta) = 1 \quad \text{ise} \\ \varepsilon_\Delta^2 & N(\varepsilon_\Delta) = -1 \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlansın. Bu takdirde $\text{Pell}^{\pm}(\Delta) \cong O_\Delta^*$ ve $\text{Pell}(\Delta) \cong O_{\Delta,1}^*$ dir.

$F = (a, b, c)$ diskiriminantı Δolan bir indefinite form olsun. Bu takdirde F formu

$$F(x, y) = \frac{\left(ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right)\left(ax + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2}y\right)}{a}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$M(F) = \left\{ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2} : \ x, y \in \mathbb{Z}\right\}$$

olarak tanımlanan kümeye F nin modülü denir.

$F = (a, b, c)$ formu ve rastgele bir n tam sayısı için $ax^2 + bxy + cy^2 = n$ Diophantine denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi ile Fnin $M(F)$ modülü arasında yakın bir ilişki vardır. $x_1 + y_1\rho_\Delta \in O_\Delta$ ve $ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y \in M(F)$ için

$$[x' \quad y'] = \begin{cases} [x \ \ y]\begin{bmatrix} x_1 - \frac{b}{2}y_1 & ay_1 \\ -cy_1 & x_1 + \frac{b}{2}y_1 \end{bmatrix} & \Delta \equiv 0 \ (\text{mod} 4) \\ [x \ \ y]\begin{bmatrix} x_1 + \frac{1-b}{2}y_1 & ay_1 \\ -cy_1 & x_1 + \frac{1+b}{2}y_1 \end{bmatrix} & \Delta \equiv 1 \ (\text{mod} 4) \end{cases} \tag{4.10}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

$$(x_1 + y_1\rho_\Delta)\left(ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y\right) = ax' + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y' \in M(F)$$

olup $\Psi(x,y) = ax + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2}y$ olarak tanımlanan dönüşüm için kolayca görüleceği üzere

$$\Psi = \{(x,y) : F(x,y) = n\} \rightarrow \{\alpha \in M(F) : N(\alpha) = an\}$$

dir. Buna göre $ax^2 + bxy + cy^2 = n$ Diophantine denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulmak demek esasında $M(F)$ nin normu an olan elemanlarını bulmak demektir.

$ax^2 + bxy + cy^2 = n$ denkleminin her iki tarafı önce $4a$ ileçarpılır ve sonra her iki tarafa b^2y^2 eklenirse

$$\begin{aligned} n = ax^2 + bxy + cy^2 &\Leftrightarrow 4an = 4a^2x^2 + 4abxy + 4acy^2 \\ &\Leftrightarrow 4an - 4acy^2 = 4a^2x^2 + 4abxy \\ &\Leftrightarrow 4an - 4acy^2 + b^2y^2 = 4a^2x^2 + 4abxy + b^2y^2 \\ &\Leftrightarrow (b^2 - 4ac)y^2 + 4an = 4a^2x^2 + 4abxy + b^2y^2 \\ &\Leftrightarrow \Delta y^2 + 4an = (2ax + by)^2 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yukarıda tanımlanan τ_Δ için

$$0 \leq y \leq h = \begin{cases} \left|\frac{an\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau_\Delta - 1}{\tau_\Delta}\right) & an > 0 \quad \text{ise} \\ \left|\frac{an\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\tau_\Delta + 1}{\tau_\Delta}\right) & an < 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

aralığındaki y değerleri için $\Delta y^2 + 4an$ nin tam kare olup olmadığına bakılır. Eğer belli bir y_0 değeri için tam kare ise

$$\Delta y_0^2 + 4an = (2ax_0 + by_0)^2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{-by_0 \pm \sqrt{\Delta y_0^2 + 4an}}{2a}$$

elde edilir. Böylece $ax^2 + bxy + cy^2 = n$ denklemi için bir Rep = $\{[x_0 \;\; y_0]\}$ çözüm temsilcileri kümesi elde edilmiş olur. Bu çözüm temsilcileri kümesi ve (4.10) dan elde edilecek olan M çözüm matrisi için denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{\pm(x,y):\; [x \;\; y] = [x_0 \;\; y_0]M^t,\; t \in \mathbb{Z}\}$$

dir. $\Delta y^2 + 4an$ tam kare olacak şekilde bir y_0 tam sayı değeri yoksa denklemin tam sayı çözümleri yoktur. Örneğin, $17x^2 + 32xy + 14y^2 = 9$ Diophantine denklemi ele alınsın. Burada $F = (17, 32, 14)$ olup $\Delta = 4 \cdot 18$ dir. $x^2 - 18y^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1) = (17,4)$ olduğundan O_{72} halkasınıntemel birimi $\varepsilon_{72} = 17 + 4\sqrt{18}$ dir. Buna göre $N(\varepsilon_{72}) = 1$ olduğundan $\tau_{72} = 17 + 4\sqrt{18}$ ve böylece

$$0 \leq y \leq h = \left|\frac{17 \cdot 9 \cdot \left(17 + 4\sqrt{18}\right)}{72}\right|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{16 + 4\sqrt{18}}{17 + 4\sqrt{18}}\right) \cong 8.246$$

olur. $0 \leq y \leq 8$ aralığındaki y değerleri için $\Delta y^2 + 4an = 72y^2 + 612$ ifadesi $y_0 = 2$ ve $y_1 = 4$ için tam karedir ve y nin değerleri için sırasıyla $x_0 = -1$ ve $x_1 = -5$ olarak elde edilir. O halde çözüm temsilcileri kümesi Rep = $\{[-1 \;\; 2], [-5 \;\; 4]\}$ tür. (4.10) dan çözüm matrisi ise $M = \begin{bmatrix} -47 & 68 \\ -56 & 81 \end{bmatrix}$ olarak elde edilir. Dolayısıyla denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{\pm(x,y) :\; [x \;\; y] = [-1 \;\; 2]M^t,\;\; [-5 \;\; 4]M^t,\; t \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

Bu açıklamalardan sonra esas konuya geçilebilir. (4.9) daki Pell denklemi için indefinite form $F = (2,0,-1)$ olup bu formun diskriminantı $\Delta = 8$ dir. Dolayısıyla $\tau_8 = 3 + 2\sqrt{2}$ olup çözüm matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

dir. Bu çözüm matrisi için ilk olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.3. $n \geq 1$ için M matrisinin $n.$ kuvveti

$$M^n = \begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix}$$

dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. $n = 1$ için $C_1 = 3, B_1 = 1$ olduğundan $n = 1$ için doğrudur. Eşitliğin $n - 1$ için doğru olduğu kabul edilsin, yani

$$M^{n-1} = \begin{bmatrix} C_{n-1} & 4B_{n-1} \\ 2B_{n-1} & C_{n-1} \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde $8B_{n-1} + 3C_{n-1} = C_nve3B_{n-1} + C_{n-1} = B_n$ olduğundan

$$\begin{aligned} MM^{n-1} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{n-1} & 4B_{n-1} \\ 2B_{n-1} & C_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8B_{n-1} + 3C_{n-1} & 12B_{n-1} + 4C_{n-1} \\ 6B_{n-1} + 2C_{n-1} & 8B_{n-1} + 3C_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix} \\ &= M^n \end{aligned}$$

dir. Yani eşitlik her n için doğrudur.

(4.9) daki Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi

1. $t = 1$
2. $t \geq 2$ için $2t^2 - 1$ tam kare
3. $t \geq 2$ için $2t^2 - 1$ tam kare değil

olmak üzere üç farklı durumda ele alınacaktır.

1. Durum: $t = 1$.

Teorem 4.1.4. $t = 1$ ise $2x^2 - y^2 = 1$ Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi $\{(-2B_n + C_n, 4B_n - C_n) : \ n \geq 1\}$ dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. $t = 1$ için $2x^2 - y^2 = 1$ Pell denklemi elde edilir. Buna göre

$$0 \leq y \leq U = \left|\frac{am\tau_\Delta}{\Delta}\right|^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{\tau_\Delta}\right) = \left|\frac{2(1)\left(3 + 2\sqrt{2}\right)}{8}\right|^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}\right) = 1$$

aralığındaki y değerlerinden sadece $y_0 = 1$ için $\Delta y_0^2 + 4am = 8y_0^2 + 8$ bir tam karedir ve y_0 ın bu değeri için

$$x_0 = \frac{\pm\sqrt{\Delta y_0^2 + 4am}\ - by_0}{2a} = \frac{\pm\sqrt{8(1)^2 + 8}}{4} = \pm 1$$

olarak elde edilir. Buna göre çözüm temsilcileri kümesi Rep = $\{[\pm 1 \quad 1]\}$ dir. Burada $n \geq 1$ için $[1 \quad -1]M^n$ denklemin tüm (x_n, y_n) tam sayı çözümlerini üretir. Diğer yandan Teorem 4.1.3 gereği

$$M^n = \begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$[1 \quad -1]\begin{bmatrix} C_n & 4B_n \\ 2B_n & C_n \end{bmatrix} = [-2B_n + C_n \quad 4B_n - C_n]$$

yani denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi $\{(-2B_n + C_n, 4B_n - C_n) : n \geq 1\}$ dir.

Örnek 4.1.5. $t = 1$ için $2x^2 - y^2 = 1$ Pell denkleminin çözüm temsilcileri kümesi Rep = $\{[\pm 1 \quad 1]\}$ olup denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{(1,1), (5,7), (29,41), (169,239), (985,1393), (5741,8119, \dots\}$$

dir.

2. Durum: $t \geq 2$ için $2t^2 - 1$in tam kare olması hâli.

Bu durumda ilk olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.6. $h \geq 2$ tam sayısı için $2t^2 - 1 = h^2$ denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi $\{(P_{2n-1}, c_n) : n \geq 1\}$ dir (Tekcan ve Erdem 2020).
İspat.$2t^2 - 1 = h^2$ eşitliğinden $2t^2 - h^2 = -1$ Pell denklemi elde edilir. Bu denklemin çözüm temsilcileri kümesi Rep $= \{[\pm 1 \quad 1]\}$ olup burada $n \geq 1$ için $[1 \quad -1]M^n$ denklemin tüm (t_n, h_n) tam sayı çözümlerini üreteceğinden, denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi $\{(-2B_n + C_n, 4B_n - C_n : n \geq 1\}$ dir. Ancak dikkat edilirse

$$-2B_n + C_n = P_{2n-1} \text{ ve } 4B_n - C_n = c_n$$

olduğundan denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi $\{(P_{2n-1}, c_n) : n \geq 1\}$ dir.

4.1.6 Teoremine göre, P_{2n-1}-kobalans, P_{2n-1}-kobalansır ve Lucas P_{2n-1}-kobalans sayılarının genel terimleri ele alınmış olacaktır.

$2t^2 - 1$ nin tam kare olması durumunda çözüm temsilcileri kümesindeki elemanların sayısına göre iki hâl söz konusudur: #Rep $= 4$ veya #Rep > 4.

Teorem 4.1.7. #Rep $= 4$ ise $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$(x_{3n+1}, y_{3n+1}) = (2B_n + tC_n, 4tB_n + C_n)$$
$$(x_{3n+2}, y_{3n+2}) = (2hB_n + hC_n, 4hB_n + hC_n)$$
$$(x_{3n}, y_{3n}) = (-2B_n + tC_n, 4tB_n - C_n)$$

olmak üzere

$$\{(x_{3n+1}, y_{3n+1}), (x_{3n+2}, y_{3n+2}) : n \geq 0\} \cup \{(x_{3n}, y_{3n}) : n \geq 1\}$$

dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. #Rep $= 4$ durumunda çözüm temsilcileri kümesi Rep $= \{[\pm t \quad 1], [\pm h \quad h]\}$ olup

1. $n \geq 0$ için $[t \quad 1]M^n$ denklemin tüm (x_{3n+1}, y_{3n+1}) tam sayı çözümlerini
2. $n \geq 1$ için $[t \quad -1]M^n$ denklemin tüm (x_{3n}, y_{3n}) tam sayı çözümlerini
3. $n \geq 0$ için $[h \quad h]M^n$ denklemin tüm (x_{3n+2}, y_{3n+2}) tam sayı çözümlerini

üretir. Dolayısıyla denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi teoremdeki gibidir.

Örnek4.1.8. $t = 5$ için $2x^2 - y^2 = 49$ Pell denkleminin çözüm temsilcileri kümesi Rep $= \{[\pm 5 \quad 1], [\pm 7 \quad 7]\}$ olup denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{(5,1),(7,7),(13,17),(17,23),(35,49),(73,103),(97,137),\dots\}$$

dir.

Teorem 4.1.9. #Rep $= 2k > 4$ ise $1 \leq i \leq k-2$ için t_{2i-1} ve $t_{2i}, t < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-5} < h, 1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-4} < h$ ve $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 - 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar olsun. Bu takdirde $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$(x_{(2k-1)n+1}, y_{(2k-1)n+1}) = (2B_n + tC_n, 4tB_n + C_n)$$

$$(x_{(2k-1)n+i+1}, y_{(2k-1)n+i+1}) = (2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n, 4t_{2i-1}B_n + t_{2i}C_n)$$

$$(x_{(2k-1)n+k}, y_{(2k-1)n+k}) = (2hB_n + hC_n, 4hB_n + hC_n)$$

$$(x_{(2k-1)n}, y_{(2k-1)n}) = (-2B_n + tC_n, 4tB_n - C_n)$$

$$(x_{(2k-1)n-i}, y_{(2k-1)n-i}) = (-2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n, 4t_{2i-1}B_n - t_{2i}C_n)$$

olmak üzere

$$\{(x_{(2k-1)n+1}, y_{(2k-1)n+1}), (x_{(2k-1)n+i+1}, y_{(2k-1)n+i+1}), (x_{(2k-1)n+k}, y_{(2k-1)n+k}) :$$

$$n \geq 0\} \cup \{(x_{(2k-1)n}, y_{(2k-1)n}), (x_{(2k-1)n-i}, y_{(2k-1)n-i}) : n \geq 1\}$$

dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. $\#\mathrm{Rep} = 2k > 4$ olması durumunda çözüm temsilcileri kümesi

$$\mathrm{Rep} = \{[\pm t \quad 1], [\pm t_{2i-1} \quad t_{2i}], [\pm h \quad h]\}$$

olup bu durumda

1. $n \geq 0$ için $[t \quad 1]M^n$ denklemin tüm $(x_{(2k-1)n+1}, y_{(2k-1)n+1})$ tam sayı çözümlerini
2. $n \geq 1$ için $[t \quad -1]M^n$ denklemin tüm $(x_{(2k-1)n}, y_{(2k-1)n})$ tam sayı çözümlerini
3. $n \geq 0$ için $[h \quad h]M^n$ denklemin tüm $(x_{(2k-1)n+k}, y_{(2k-1)n+k})$ tam sayı çözümlerini
4. $1 \leq i \leq k-2$ olmak üzere
   $n \geq 0$ için $[t_{2i-1} \quad t_{2i}]M^n$ denklemin tüm $(x_{(2k-1)n+i+1}, y_{(2k-1)n+i+1})$ tam sayı çözümlerini
   $n \geq 1$ için $[t_{2i-1} \quad -t_{2i}]M^n$ denklemin tüm $(x_{(2k-1)n-i}, y_{(2k-1)n-i})$ tam sayı çözümlerini

üretir. Buradan sonuç görülür.

$\#\mathrm{Rep} = 2k > 4$ olması durumunda çözüm temsilcileri kümesi ve bu sınıftaki elemanların t ye bağlı tek türlü olarak yazılması mümkün değildir. Örneğin, Çizelge 4.1 de bazı t değerleri için çözüm temsilcileri kümesi verilmiştir. Çizelgeden de görüleceği üzere bu çözüm temsilcileri kümesindeki elemanlar arasında t ye bağlı belli bir düzen yoktur. Bu nedenle $1 \leq i \leq k-2$ için t_{2i-1} ve $t_{2i}, t < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-5} < h, 1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-4} < h,$ $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 - 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar olmak üzere çözüm temsilcileri kümesi

$$\mathrm{Rep} = \{[\pm t \quad 1], [\pm t_{2i-1} \quad t_{2i}], [\pm h \quad h]\}$$

olarak alındı.

Çizelge 4.1 $2t^2 - 1$ tam kare

t	Çözüm Temsilcileri Kümesi
985	$\{[\pm 985 \;\; 1], [\pm 995 \;\; 199], [\pm 1025 \;\; 401], [\pm 1267 \;\; 1127], [\pm 1393 \; 1393]\}$
5741	$\{[\pm 5741 \; 1], [\pm 6001 \; 2471], [\pm 6739 \; 4991], [\pm 6805 \; 5167], [\pm 8119 \;\; 8119]\}$
33461	$\{[\pm 33461 \;\; 1], [\pm 35155 \;\; 15247], [\pm 38935 \; 28153],$ $[\pm 40409 \;\; 32039], [\pm 47321 \;\; 47321]\}$
195025	$\{[\pm 195025 \;\; 1], [\pm 195083 \;\; 6767], [\pm 195257 \;\; 13457],$ $[\pm 197005 \; 39401], [\pm 197743 \; 46207], [\pm 199547 \; 59737],$ $[\pm 202985 \; 79601], [\pm 205933 \;\; 93527], [\pm 205973 \; 93703],$ $[\pm 207607 \; 100657], [\pm 209405 \; 107849], [\pm 211327 \;\; 115103],$ $[\pm 219883 \; 143623], [\pm 222425 \;\; 151249], [\pm 227837 \; 166583],$ $[\pm 236623 \; 189503], [\pm 243355 \;\; 205849], [\pm 243443 \; 206057],$ $[\pm 246977 \; 214303], [\pm 250747 \; 222887], [\pm 254665 \; 231601],$ $[\pm 271133 \; 266377], [\pm 275807 \; 275807]\}$

Örnek 4.1.10. $t = 985$ için $2x^2 - y^2 = 190449 = 1393^2$ Pell denkleminin çözüm temsilcilerinin kümesi $\mathrm{Rep} = \{[\pm 985 \;\; 1], [\pm 995 \;\; 199], [\pm 1025 \; 401], [\pm 1267 \;\; 1127],$ $[\pm 1393 \;\; 1393]\}$ olup denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{(985,\ 1),\ (995,\ 199),\ (1025,\ 401),\ (1267,\ 1127),\ (1393,\ 1393),$$
$$(1547,\ 1687), (2273,\ 2897), (2587,\ 3383),\ (2953,\ 3937),\ (2957,\ 3943),\ \cdots\}$$

dir.

3. Durum. $2t \geq 2$ için $2t^2 - 1$ in tam kare olmaması hâli. Bu durumda da iki hâl söz konusudur: $\#\mathrm{Rep} = 2$ veya $\#\mathrm{Rep} > 2$.

Teorem 4.1.11. #Rep $= 2$ ise denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$(x_{2n+1}, y_{2n+1}) = (2B_n + tC_n, 4tB_n + C_n)$$
$$(x_{2n}, y_{2n}) = (-2B_n + tC_n, 4tB_n - C_n)$$

olmak üzere

$$\{(x_{2n+1}, y_{2n+1}) : n \geq 0\} \cup \{(x_{2n}, y_{2n}) : n \geq 1\}$$

dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. #Rep $= 2$ ise çözüm temsilcileri kümesi Rep $= \{[\pm t \quad 1]\}$ olup burada

1. $n \geq 0$ için $[t \quad 1]M^n$ denklemin tüm (x_{2n+1}, y_{2n+1}) tam sayı çözümlerini
2. $n \geq 1$ için $[t \quad -1]M^n$ denklemin tüm (x_{2n}, y_{2n}) tam sayı çözümlerini

üretir. Dolayısıyla denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi $\{(x_{2n+1}, y_{2n+1}) : n \geq 0\} \cup \{(x_{2n}, y_{2n}) : n \geq 1\}$ dir.

Örnek 4.1.12. $t = 4$ için $2x^2 - y^2 = 31$ denkleminin çözüm temsilcileri kümesi Rep $= \{[\pm 4 \quad 1]\}$ olup denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi aşağıdaki gibidir.

$$\{(4,1), (10,13), (14,19), (56,79), (80,113), (326,461), (466,659), \ldots\}$$

Teorem 4.1.13. #Rep $= 2k > 2$ ise $1 \leq i \leq k-1$ için t_{2i-1} ve $t_{2i}, t < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-3}$, $1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-2}$ ve $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 - 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar olsun. Bu takdirde $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$(x_{2kn+1}, y_{2kn+1}) = (2B_n + tC, 4tB_n + C_n)$$
$$(x_{2kn+i+1}, y_{2kn+i+1}) = (2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n, 4t_{2i-1}B_n + t_{2i}C_n)$$
$$(x_{2kn}, y_{2kn}) = (-2B_n + tC_n, 4tB_n - C_n)$$

$$(x_{2kn-i}, y_{2kn-i}) = (-2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n, 4t_{2i-1}B_n - t_{2i}C_n)$$

olmak üzere

$$\{(x_{2kn+1}, y_{2kn+1}), (x_{2kn+i+1}, y_{2kn+i+1}) : n \geq 0\} \cup$$
$$\{(x_{2kn}, y_{2kn}), (x_{2kn-i}, y_{2kn-i}) : n \geq 1\}$$

dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. #Rep $= 2k > 2$ olması durumunda çözüm temsilcileri kümesi

$$\text{Rep} = \{[\pm t \quad 1], [\pm t_{2i-1} \; t_{2i}]\}$$

olup burada

1. $n \geq 0$ için $[t \quad 1]M^n$ denklemin tüm (x_{2kn+1}, y_{2kn+1}) tam sayı çözümlerini
2. $n \geq 1$ için $[t \quad -1]M^n$ denklemin tüm (x_{2kn}, y_{2kn}) tam sayı çözümlerini
3. $n \geq 0$ için $[t_{2i-1} \quad t_{2i}]M^n$ denklemin tüm $(x_{2kn+i+1}, y_{2kn+i+1})$ tam sayı çözümlerini
4. $n \geq 1$ için $[t_{2i-1} \quad -t_{2i}]M^n$ denklemin tüm (x_{2kn-i}, y_{2kn-i}) tam sayı çözümlerini

üretir. O halde denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi $\{(x_{2kn+1}, y_{2kn+1}), (x_{2kn+i+1}, y_{2kn+i+1}) : n \geq 0\} \cup \{(x_{2kn}, y_{2kn}), (x_{2kn-i}, y_{2kn-i}) : n \geq 1\}$ dir.

#Rep $= 2k > 2$ olması durumunda da çözüm temsilcileri kümesi ve bu sınıftaki elemanların t ye bağlı tek türlü olarak yazılması mümkün değildir. Örneğin Çizelge 4.2 de bazı t değerleri için çözüm temsilcileri kümeleri verilmiştir. Çizelgeden de görüleceği üzere çözüm temsilcileri kümesindeki elemanlar arasında t ye bağlı bir düzen yoktur. Bu nedenle $1 \leq i \leq k-1$ için t_{2i-1}, t_{2i}, $t < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-3}, 1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-2}$, $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 - 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar olmak üzere çözüm temsilcileri kümesi

$$\text{Rep} = \{[\pm t \quad 1], [\pm t_{2i-1} t_{2i}]\}$$

olarak alındı.

Çizelge 4.2 $2t^2 - 1$ tam kare değil

t	Çözüm Temsilcileri Kümesi
58	{[±58 1], [±62 31], [±74 65]}
142	{[±142 1], [±148 59], [±182 161]}
54	{[±54 1], [±56 21], [±60 37], [±70 63]}
135	{[±135 1], [±137 33], [±173 153], [±187 183]}
152	{[±152 1], [±154 35], [±158 61], [±178 131], [±196 175], [±212 209]}
299	{[±299 1], [±301 49], [±311 121], [±359 281], [±385 343], [±415 407]}
275	{[±275 1], [±277 47], [±293 143], [±295 151], [±307 193], [±317 223], [±353 313], [±383 377]}

Örnek 4.1.14. $t = 58$ için $2x^2 - y^2 = 6727$ Pell denkleminin çözüm temsilcileri kümesi Rep = $\{[\pm 58 \;\; 1], [\pm 62 \;\; 31], [\pm 74 \;\; 65]\}$ olup denklemin tüm tam sayı çözümleri kümesi

$$\{(58,\ 1),\ (62,\ 31),\ (74,\ 65),\ (92,\ 101),\ (124,\ 155),\ (172,\ 229),\ \cdots\}$$

dir.

4.2. t-Kobalansır, t-Kobalans ve Lucas t-Kobalans Sayıları

Bu alt bölümde t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri ele alınacaktır. Bir önceki kısımda $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm pozitif (x_n, y_n) tam sayı çözümleri belirlenmişti. x_n ler belirlendikten sonra (4.8) den $x_n = 2r_n^t + t$ eşitliği göz önüne alınarak, ilk olarak

$$r_n^t = \frac{x_n - t}{2}$$

eşitliğinden t-kobalansırların genel terimleri belirlenecektir. r_n^t belirlendikten sonra

$$b_n^t = \frac{2r_n^t - 1 + \sqrt{8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1}}{2}$$

eşitliğinden t-kobalans sayılarının genel terimleri belirlenecektir. b_n^t belirlendikten sonra son olarak

$$c_n^t = \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8(t+1)b_n^t + (2t+1)^2}$$

eşitliğinden Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri belirlenecektir. Yine burada da $t = 1$ ve $t \geq 2$ için $2t^2 - 1$ in tam kare olup olmamasına göre üç durum söz konusudur.

1. Durum: $t = 1$ hâli.

Teorem 4.2.1. 1-kobalansır, 1-kobalans ve Lucas 1-kobalans sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$r_n^1 = b_{n+1}, \ b_n^1 = B_{n+1} - 1 \ \text{ ve } \ c_n^1 = C_{n+1}$$

dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. Teorem 4.1.4 te $t = 1$ için $2x^2 - y^2 = 1$ Pell denkleminin tüm tam sayı çözümleri kümesinin $\{(-2B_n + C_n, 4B_n - C_n) : n \geq 1\}$ olduğu gösterilmişti. Buna göre (4.8) den

$$\begin{aligned}
r_n^1 &= \frac{-2B_{n+1} + C_{n+1} - 1}{2} \\
&= \frac{-2\left(\frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}}\right) + \frac{\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2}}{2}}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \alpha^{2n+2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) + \beta^{2n+2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\
&= b_{n+1}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer yandan $\sqrt{8(r_n^t)^2+8tr_n^t+1}=y_n$ olduğundan (4.4) ten

$$\begin{aligned}
b_n^1 &= \frac{2r_n^1-1+\sqrt{8(r_n^1)^2+8r_n^1+1}}{2} \\
&= \frac{2b_{n+1}-1+4B_{n+1}-C_{n+1}}{2} \\
&= \frac{2(\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2})-1+4(\frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}})-\frac{\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}}{2}}{2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1}(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}-\frac{\alpha}{2})+\beta^{2n+1}(\frac{-1}{2\sqrt{2}}-\frac{\beta}{\sqrt{2}}-\frac{\beta}{2})}{2}-1 \\
&= \frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}}{4\sqrt{2}}-1 \\
&= B_{n+1}-1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre (4.6) dan

$$c_n^1=\sqrt{8(b_n^1)^2+16b_n^1+9}=\sqrt{8(B_{n+1}^1)^2+1}=\mathrm{C}_{n+1}$$

olur.

Örnek 4.2.2. 1-kobalansır, 1-kobalans ve Lucas 1-kobalans sayıları aşağıdaki gibidir.

$$r_n^1: 2,\ 14,\ 84,\ 492,\ 2870,\ 16730,\ 97512,\ 568344, \cdots$$

$$b_n^1: 5,\ 34,\ 203,\ 1188,\ 6929,\ 40390,\ 235415,\ 1372104, \cdots$$

$$c_n^1: 17,\ 99,\ 577,\ 3363,\ 19601,\ 114243,\ 665857,\ 3880899, \cdots$$

2. Durum: $t \geq 2$ tam sayısı için $2t^2-1$ in tam kare olması hâli. Yine burada da iki hâl söz konusudur: $\#\mathrm{Rep}=4$ veya $\#\mathrm{Rep}>4$.

Teorem 4.2.3. $\#\mathrm{Rep}=4$ ise t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$r_{3n}^{t} = \frac{2B_n + tC_n - t}{2}$$

$$r_{3n-1}^{t} = \frac{-2B_n + tC_n - t}{2}$$

$$b_{3n}^{t} = \frac{2t(B_n + b_{n+1}) + 2B_n + C_n - 1}{2}$$

$$b_{3n-1}^{t} = \frac{2t(B_n + b_{n+1}) - 2B_n - C_n - 1}{2}$$

$$c_{3n}^{t} = \sqrt{8(b_{3n}^{t})^2 + 8(t+1)b_{3n}^{t} + (2t+1)^2}$$

$$c_{3n-1}^{t} = \sqrt{8(b_{3n-1}^{t})^2 + 8(t+1)b_{3n-1}^{t} + (2t+1)^2}$$

ve $n \geq 0$ için

$$r_{3n+1}^{t} = \frac{2hB_n + hC_n - t}{2}$$

$$b_{3n+1}^{t} = \frac{2hB_{n+1} - t - 1}{2}$$

$$c_{3n+1}^{t} = \sqrt{8(b_{3n+1}^{t})^2 + 8(t+1)b_{3n+1}^{t} + (2t+1)^2}$$

dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. #Rep $= 4$ olsun. Bu takdirde Teorem 4.1.7 dikkate alınırsa $x_n = 2r_n^t + t$ olduğundan $n \geq 1$ için

$$r_{3n}^{1} = \frac{2B_n + tC_n - t}{2}$$

olur. Diğer yandan kolayca görüleceği üzere

$$\begin{aligned} 4B_n + C_n - 1 &= 4\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right) + \frac{\alpha^{2n} + \beta^{2n}}{2} - 1 \\ &= \alpha^{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \beta^{2n}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) - 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^{2n}(1+\sqrt{2}) + \beta^{2n}(1-\sqrt{2})}{2} - 1$$

$$= \frac{\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}}{2} - 1$$

$$= 2\left(\frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{4\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2B_n + 2b_{n+1}$$

dir. Bu durumda (4.4) ve (4.7) den

$$b_{3n}^t = \frac{2B_n + tC_n - t - 1 + 4tB_n + C_n}{2}$$

$$= \frac{t(4B_n + C_n - 1) + 2B_n + C_n - 1}{2}$$

$$= \frac{2t(B_n + b_{n+1}) + 2B_n + C_n - 1}{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.6) dan

$$c_{3n}^t = \sqrt{8(b_{3n}^t)^2 + 8(t+1)b_{3n}^t + (2t+1)^2}$$

olduğu görülür. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 4.2.4. 5-kobalansır, 5-kobalans ve Lucas 5-kobalans sayıları

$$r_n^5: 1,\ 4,\ 6,\ 15,\ 34,\ 46,\ 99,\ 210,\ 280,\ 589,\ 1236,\ 1644, \ldots$$
$$b_n^5: 4,\ 12,\ 17,\ 39,\ 85,\ 114,\ 242,\ 510,\ 679,\ 1425,\ 2987,\ 3972, \ldots$$
$$c_n^5: 21,\ 43,\ 57,\ 119,\ 249,\ 331,\ 693,\ 1451,\ 1929,\ 4039,\ 8457, \ldots$$

dir.

Teorem 4.2.5. #Rep $= 2k > 4$ ise $1 \leq i \leq k-2$ için t_{2i-1} ve t_{2i}, $t < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-5} < h, 1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-4} < h$ve $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 - 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar olmak üzere t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$r_{(2k-1)n}^t = \frac{2B_n + tC_n - t}{2}$$

$$r_{(2k-1)n-1}^t = \frac{-2B_n + tC_n - t}{2}$$

$$r_{(2k-1)n-i-1}^t = \frac{-2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n - t}{2}$$

$$b_{(2k-1)n}^t = \frac{2t(B_n + b_{n+1}) + 2B_n + C_n - 1}{2}$$

$$b_{(2k-1)n-1}^t = \frac{2t(B_n + b_{n+1}) - 2B_n - C_n - 1}{2}$$

$$b_{(2k-1)n-i-1}^t = \frac{(-2t_{2i} + 4t_{2i-1})B_n + (t_{2i-1} - t_{2i})C_n - t - 1}{2}$$

$$c_{(2k-1)n}^t = \sqrt{8(b_{(2k-1)n}^t)^2 + 8(t+1)b_{(2k-1)n}^t + (2t+1)^2}$$

$$c_{(2k-1)n-1}^t = \sqrt{8(b_{(2k-1)n-1}^t)^2 + 8(t+1)b_{(2k-1)n-1}^t + (2t+1)^2}$$

$$c_{(2k-1)n-i-1}^t = \sqrt{8(b_{(2k-1)n-i-1}^t)^2 + 8(t+1)b_{(2k-1)n-i-1}^t + (2t+1)^2}$$

ve $n \geq 0$ için

$$r_{(2k-1)n+k-1}^t = \frac{2hB_n + hC_n - t}{2}$$

$$b_{(2k-1)n+i}^t = \frac{(2t_{2i} + 4t_{2i-1})B_n + (t_{2i-1} + t_{2i})C_n - t - 1}{2}$$

$$b_{(2k-1)n+k-1}^t = \frac{6hB_n + 2hC_n - t - 1}{2}$$

$$c^t_{(2k-1)n+i} = \sqrt{8\left(b^t_{(2k-1)n+i}\right)^2 + 8(t+1)b^t_{(2k-1)n+i} + (2t+1)^2}$$

$$c^t_{(2k-1)n+k-1} = \sqrt{8(b^t_{(2k-1)n+k-1})^2 + 8(t+1)b^t_{(2k-1)n+k-1} + (2t+1)^2}$$

dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. Teorem 4.1.9 dikkate alınırsa $x_n = 2r^t_n + t$ olduğundan $n \geq 1$ için

$$r^1_{(2k-1)n} = \frac{2B_n + tC_n - t}{2}$$

olduğu görülür. Diğer yandan $4B_n + C_n - 1 = 2(B_n + b_{n+1})$ olduğundan

$$\begin{aligned} b^t_{(2k-1)n} &= \frac{t(4B_n + C_n - 1) + 2B_n + C_n - 1}{2} \\ &= \frac{2t(B_n + b_{n+1}) + 2B_n + C_n - 1}{2} \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$c^t_{(2k-1)n} = \sqrt{8(b^t_{(2k-1)n})^2 + 8(t+1)b^t_{(2k-1)n} + (2t+1)^2}$$

elde edilir. Diğer tüm eşitlikler de benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 4.2.6. 985-kobalansır, 985-kobalans ve Lucas 985- kobalans sayıları aşağıdaki gibidir.

r^{985}_n : 5, 20, 141, 204, 281, 644, 801, 984, 986, 1199, $\cdots$

b^{985}_n : 104, 220, 704, 900, 1124, 2092, 2492, 2952, 2957, 3487, $\cdots$

c^{985}_n : 2189, 2451, 3661, 4179, 4781, 7443, 8557, 9843, 9857, ...

3. Durum: $t \geq 2$ tam sayısı için $2t^2 - 1$ in tam kare olmaması hâli. Yine burada da iki hâl söz konusudur: $\#\mathrm{Rep} = 2$ veya $\#\mathrm{Rep} > 2$.

Teorem 4.2.7. $\#\mathrm{Rep} = 2$ ise t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$r_{2n}^{t} = \frac{2B_n + tC_n - t}{2}$$

$$r_{2n-1}^{t} = \frac{-2B_n + tC_n - t}{2}$$

$$b_{2n}^{t} = \frac{2t(B_n + b_{n+1}) + 2B_n + C_n - 1}{2}$$

$$b_{2n-1}^{t} = \frac{2t(B_n + b_{n+1}) - 2B_n - C_n - 1}{2}$$

$$c_{2n}^{t} = \sqrt{8(b_{2n}^{t})^2 + 8(t+1)b_{2n}^{t} + (2t+1)^2}$$

$$c_{2n-1}^{t} = \sqrt{8(b_{2n-1}^{t})^2 + 8(t+1)b_{2n-1}^{t} + (2t+1)^2}$$

dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. Teorem 4.1.11 dikkate alınırsa $x_n = 2r_n^t + t$ olduğundan

$$r_{2n}^{t} = \frac{2B_n + tC_n - t}{2}$$

ve buradan

$$b_{2n}^{t} = \frac{2t(B_n + b_{n+1}) + 2B_n + C_n - 1}{2}$$

ve son olarak

$$c_{2n}^{t} = \sqrt{8(b_{2n}^{t})^2 + 8(t+1)b_{2n}^{t} + (2t+1)^2}$$

olduğu görülür. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 4.2.8. $t = 4$ için 4-kobalansır, 4-kobalans ve Lucas4-kobalans sayıları

$$r_n^4 : 3,\ 5,\ 26,\ 38,\ 161,\ 231,\ 948,\ 1356,\ 5535,\ \cdots$$

$$b_n^4 : 9,\ 14,\ 65,\ 94,\ 391,\ 560,\ 2291,\ 3276,\ 13365,\ \cdots$$

$$c_n^4 : 33,\ 47,\ 191,\ 273,\ 1113,\ 1591,\ 6487,\ 9273,\ \cdots$$

dır.

Teorem 4.2.9. $\#\mathrm{Rep} = 2k > 2$ ise $1 \leq i \leq k-1$ için t_{2i-1} ve $t_{2i}, t < t_1 < t_3 < \cdots < t_{2k-3}$, $1 < t_2 < t_4 < \cdots < t_{2k-2}$ ve $2t_{2i-1}^2 - t_{2i}^2 = 2t^2 - 1$ özelliğindeki pozitif tam sayılar olmak üzere t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri $n \geq 1$ için

$$r_{2kn}^t = \frac{2B_n + tC_n - t}{2}$$

$$r_{2kn-1}^t = \frac{-2B_n + tC_n - t}{2}$$

$$r_{2kn-i-1}^t = \frac{-2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n - t}{2}$$

$$b_{2kn}^t = \frac{2t(B_n + b_{n+1}) + 2B_n + C_n - 1}{2}$$

$$b_{2kn-1}^t = \frac{2t(B_n + b_{n+1}) - 2B_n - C_n - 1}{2}$$

$$b_{2kn-i-1}^t = \frac{(-2t_{2i} + 4t_{2i-1})B_n + (t_{2i-1} - t_{2i})C_n - t - 1}{2}$$

$$c_{2kn}^t = \sqrt{8(b_{2kn}^t)^2 + 8(t+1)b_{2kn}^t + (2t+1)^2}$$

$$c_{2kn-1}^t = \sqrt{8(b_{2kn-1}^t)^2 + 8(t+1)b_{2kn-1}^t + (2t+1)^2}$$

$$c_{2kn-i-1}^t = \sqrt{8(b_{2kn-i-1}^t)^2 + 8(t+1)b_{2kn-i-1}^t + (2t+1)^2}$$

ve $n \geq 0$ için

$$r^t_{2kn+i} = \frac{2t_{2i}B_n + t_{2i-1}C_n - t}{2}$$

$$b^t_{2kn+i} = \frac{(2t_{2i} + 4t_{2i-1})B_n + (t_{2i-1} + t_{2i})C_n - t - 1}{2}$$

$$c^t_{2kn+i} = \sqrt{8(b^t_{2kn+i})^2 + 8(t+1)b^t_{2kn+i} + (2t+1)^2}$$

dir (Tekcan ve Erdem 2020).

İspat. Teorem 4.1.13 den görülür.

Örnek 4.2.10. 58-kobalansır, 58-kobalans ve Lucas 58-kobalans sayıları

$$r^{58}_n : 2,\ 8,\ 17,\ 33,\ 57,\ 59,\ 95,\ 147,\ 210,\ 312,\ 458,\ 470,\ 684,\ \cdots$$

$$b^{58}_n : 17,\ 40,\ 67,\ 110,\ 171,\ 176,\ 265,\ 392,\ 545,\ 792,\ 1145,\ 1174,\ \cdots$$

$$c^{58}_n : 155,\ 213,\ 285,\ 403,\ 573,\ 587,\ 837,\ 1195,\ 1627,\ 2325,\ 3323,\ \cdots$$

dir.

5.SONUÇ

Bu tezde kobalans sayılarının daha genel hâli olan t-kobalans sayıları ele alınmış ve t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri elde edilmiştir.

$n \geq 1$ tam sayı olmak üzere

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r)$$

Diophantine denklemini gerçekleyen pozitif n tam sayısına t-kobalans, eşitlikteki pozitif r tam sayısına ise t-kobalansır denir.

t-kobalans sayıları b_n^t ve t-kobalansırlar da r_n^t ile gösterilirse yukarıdaki eşitlikten

$$b_n^t = \frac{2r_n^t - 1 + \sqrt{8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1}}{2}$$

ve

$$r_n^t = \frac{-2b_n^t - 2t - 1 + \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8(t + 1)b_n^t + (2t + 1)^2}}{2}$$

elde edilir. Buna göre b_n^t nin bir t-kobalans sayısı olması için gerek ve yeter şart $8(b_n^t)^2 + 8(t + 1)b_n^t + (2t + 1)^2$ in tam kare olmasıdır. Bu hâlde

$$c_n^t = \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8(t + 1)b_n^t + (2t + 1)^2}$$

bir tam sayı olup bu sayıya Lucas t-kobalans sayısı denir. Benzer şekilde r_n^t nin bir t-kobalansır olması için gerek ve yeter şart $8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1$ in tam kare olmasıdır. Buna göre sıfırdan farklı pozitif y tam sayısı için

$$8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1 = y^2$$

denilirse

$$2(2r_n^t + t)^2 - y^2 = 2t^2 - 1$$

olur. Bu son eşitlikte $x = 2r_n^t + t$ olarak alınırsa

$$2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$$

Pell denklemi elde edilmiş olur. Bu Pell denklemin tüm (x_n, y_n) pozitif tam sayı çözümleri kümesi, $t = 1$ ve $t \geq 2$ tam sayısı için $2t^2 - 1$ in tam kare olup olmamasına göre üç farklı durumda ele alındı. Her üç durumda da denklemin tüm pozitif tam sayı çözümleri kümesi belirlendikten sonra, sırasıyla t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri elde edildi.

Burada $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm (x_n, y_n) pozitif tam sayı çözümü belli olduğundan $x_n = 2r_n^t + t$ eşitliğinden

$$r_n^t = \frac{x_n - t}{2}$$

t-kobalansır sayılarının genel terimleri elde edildi. Daha sonra

$$b_n^t = \frac{2r_n^t - 1 + \sqrt{8(r_n^t)^2 + 8tr_n^t + 1}}{2}$$

eşitliğinden t-kobalans sayılarının genel terimleri elde edildi. Son olarak

$$c_n^t = \sqrt{8(b_n^t)^2 + 8(t+1)b_n^t + (2t+1)^2}$$

eşitliğinden de Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri elde edildi.

Esasında t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimlerinin elde edilmesi problemi, $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denklemi için çözüm temsilcileri kümesinin belirlenmesi problemine dayanır. Eğer çözüm temsilcileri kümesi belli ise bu Pell denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri belirlenerek, t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri kolayca elde edilir. Ancak t ler büyüdükçe, çözüm temsilcileri kümesinin elemanların belirlenmesi zor olabilir veya biraz zaman alabilir. Ancak uygun bir bilgisayar programı ile (Maple gibi) çözüm temsilcileri kümesi kolayca belirlenebilir ve bu çözüm temsilcileri kümesindeki elemanlar yardımıyla, $2x^2 - y^2 = 2t^2 - 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri kümesi belirlenmek suretiyle, t-kobalansır, t-kobalans ve Lucas t-kobalans sayılarının genel terimleri balans sayılarına ve t ye bağlı olarak elde edilir.

KAYNAKLAR

Barbeau, E.J. 2003. Pell's equation. Springer-Verlag New York, Inc.
Behera, A., Panda, G.K. 1999. On the square roots of triangular numbers. *The Fibonacci Quart.* 37(2): 98-105.
Flath, D.E. 1989. Introduction to number theory. Wiley.
Gözeri, G., Özkoç, A., Tekcan, A. 2017. Some algebraic relations on balancing numbers. *Utilitas Mathematica* 103: 217-236.
Kovacs, T., Liptai, K., Olajos, P. 2010. On (a, b)-balancing numbers. *Publ. Math. Deb.* 77(3-4): 485-498.
Liptai, K., Luca, F., Pinter, A., Szalay, L. 2009. Generalized balancing numbers. *Indag. Mathem. N.S.* 20(1): 87-100.
Liptai, K. 2004. Fibonacci balancing numbers. *The Fibonacci Quart.*42(4): 330-340.
Liptai, K. 2006. Lucas balancing numbers. *Acta Math. Univ. Ostrav.* 14: 43-47.
Mollin, R.A. 1996. Quadratics. CRS Press, Boca Raton, New York, London, Tokyo
Olajos, P. 2010. Properties of balancing, cobalancingand generalized balancing numbers. *Annales Mathematicae et Informaticae* 37: 125-138.
Özkoc, A., Tekcan, A. 2017. On k-balancing numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Maths*. 23(3): 38–52.
Panda, G.K., Ray, P.K. 2011. Some links of balancing and cobalancing numbers with Pell and associated Pell numbers. *Bull. of Inst. of Math. Acad. Sinica* 6(1): 41-72.
Panda, K.G., Ray, P.K. 2005. Cobalancing numbers andcobalancers.*Int.Jourof Math. and Math. Sci.* 8: 1189-1200.
Panda, G.K., Panda, A.K. 2015. Almost balancing numbers. *Jour. of the Indian Math. Soc.* 82(3-4): 147-156.
Panda, G.K., Komatsu, T., Davala, R.K. 2018. Reciprocal sums of sequences involving balancing and Lucas-balancing numbers. *Math. Reports* 20(70): 201-214.
Panda, A.K. 2017. Some variants of the balancing sequences. *Ph.D. dissertation.* National Institute of Technology Rourkela, India.
Patel, B.K., Irmak, N., Ray, P.K. 2018. Incomplete balancing and Lucas-balancing numbers. *Mathematical Reports* 20(70): 59-72.
Ray, P.K. 2009. Balancing and cobalancing numbers. *Ph.D. dissertation*. Department of Mathematics, National Institute of Technology, Rourkela, India.
Ray, P.K. 2015. Balancing and Lucas-balancing sums by matrixmethods.*Math. Rep.* 17 (67): 225-233.
Santana, S.F., Diaz-Barrero, J.L. 2006. Some properties of sums involving Pell numbers. *Missouri Journal of Mathematical Science* 18(1): 33-40.
Tekcan, A., Tayat, M. 2014. Generalized Pell numbers, balancing numbers and binary quadratic forms. *Creative Mathematics and Informatics* 23(1): 115-122.
Tekcan, A., Tayat, M., Olajos, P. 2015. Balancing, Pell and square triangular functions. *Miskolc Math. Notes* 16(2): 1219-1231.
Tekcan, A. 2019. Almost balancing, triangular and square triangular numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Maths.* 25(1): 108-121.
Tekcan, A., Erdem, A. 2020.t-cobalancing numbers and Lucas t-cobalancing numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Maths*. 26(1): 45-58.
Tengely, S. 2013. Balancing numbers which are products of consecutive integers. *Publ. Math. Deb.* 83(1-2): 197-205.