LORENTZ UZAYLARINDA
TIMELIKE ve SPACELIKE EĞRİLERE GÖRE OLUŞTURULAN
ALT UZAYLARIN SINIFLANDIRILMASI

ZEYNEP ARSLAN

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYLARINDA TIMELIKE ve SPACELIKE EĞRİLERE GÖRE OLUŞTURULAN ALT UZAYLARIN SINIFLANDIRILMASI

ZEYNEP ARSLAN
0000-0003-3434-8737

Prof. Dr. Esen İYİGÜN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2021

TEZ ONAYI

Zeynep ARSLAN tarafından hazırlanan "LORENTZ UZAYLARINDA TIMELIKE ve SPACELIKE EĞRİLERE GÖRE OLUŞTURULAN ALT UZAYLARIN SINIFLANDIRILMASI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **"YÜKSEK LİSANS TEZİ"** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Esen İYİGÜN

Başkan : Prof. Dr. Esen İYİGÜN İmza
0000-0001-6821-0248
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Atilla AKPINAR İmza
0000-0002-7612-2448
Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. İrem KÜPELİ ERKEN İmza
0000-0003-4471-3219
Bursa Teknik Üniversitesi,
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi,
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
../../….

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…/…/………

ZEYNEP ARSLAN

EK 8

TEZ YAYINLANMA
FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Prof. Dr. Esen İYİGÜN 04.06.2021	Zeynep ARSLAN 04.06.2021
İmza Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.	İmza Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LORENTZ UZAYLARINDA TIMELIKE ve SPACELIKE EĞRİLERE GÖRE OLUŞTURULAN ALT UZAYLARIN SINIFLANDIRILMASI

ZEYNEP ARSLAN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Esen İYİGÜN

Bu çalışmada 1-indeksli 3-boyutlu ve 1-indeksli 4-boyutlu Lorentz uzayında Timelike ve Spacelike eğrilerde teğet, normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanlarının Timelike ve Null olma durumlarına göre bu eğrilerin Frenet çatılarının alt uzaylarında yatıp yatmadığı araştırılmıştır ve bu incelemelere ait bir sınıflandırılması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Frenet çatısı, Spacelike eğri, Timelike eğri.

2021, vi + 124 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

CLASSIFICATION OF SUBSPACES CREATED ACCORDING TO TIMELIKE AND SPACELIKE CURVES IN LORENTZ SPACES

ZEYNEP ARSLAN

Bursa Uludag University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Esen İYİGÜN

The aim of this study is to investigate whether Timelike and Spacelike curves in the 1-index 3-dimensional and 1-index 4-dimensional Lorentz space are lie in the subspaces of their Frenet frames, in accordance with the vector fields of tangent, normal, first binormal and second binormal, state of being Timelike and Null and a classification has been made concerning these investigations.

Key words: Frenet frame, Spacelike curve, Timelike curve.

2021, vi + 124 pages.

TEŞEKKÜR

Çıktığım bu yolda bilgi birikimini benimle fedakârca paylaşan, insani ve ahlaki değerleri ile bana yol gösteren, tecrübelerinden faydalanırken gösterdiği sabrı ve özverisiyle yanımda olduğunu hissettiren saygıdeğer hocam **Prof. Dr. Esen İYİGÜN' e** teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma sürecim boyunca maddi ve manevi desteğini hep üstümde tutan, bana olan inancını asla kaybetmeyen ve bilim yolunda yürümem için teşviklerini asla esirgemeyen sevgili eşim **Yunus Emre ARSLAN' a** teşekkürlerimi sunarım.

Beni bugünlere getiren, hayatımın her anında yanımda olan, benimle daima gurur duyan ve emeklerini karşılıksız bırakmayacağım **annem** ve **babama** teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmama küçük büyük demeden katkı sağlayan ve her koşulda yanımda olan yakınlarıma, dostlarıma, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca üzerimde emeği olan tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

ZEYNEP ARSLAN
…/…/…….

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
L	Birinci binormal vektör alanı
α	Eğri
κ	Eğrinin birinci Frenet eğriliği
τ	Eğrinin ikinci Frenet eğriliği
σ	Eğrinin üçüncü Frenet eğriliği
α'	Eğrinin teğet (tanjant) vektörü
$\{T,N,L\}$	Frenet 3-ayaklısı
$\{T,N,L,W\}$	Frenet 4-ayaklısı
$<,>$	İç çarpım
W	İkinci binormal vektör alanı
$\lVert X \rVert$	Lorentz uzayında X in boyu (normu)
IR_n^m	n-indeksli m-boyutlu Lorentz uzay
IR^n	n-boyutlu Öklid uzayı
N	Normal vektör alanı
z	Reel sayılarda sabit
T	Teğet (tanjant) vektör alanı
IR_1^3	1-indeksli 3-boyutlu Lorentz uzay
IR_1^4	1-indeksli 4-boyutlu Lorentz uzay

Kısaltmalar	**Açıklama**
$IR_1^n = L^n$	n-boyutlu Lorentz uzayı

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Bu tezin amacı 1-indeksli 3-boyutlu Lorentz uzay ile 1-indeksli 4-boyutlu Lorentz uzayda Timelike ve Spacelike eğrilerin sınıflandırılmasının yapılmasıdır. Ele alınan eğrilerin Frenet çatılarına göre hangi alt uzayda yatıp yatmadığı araştırılmış ve bu araştırmalara ilişkin sınıflandırmalar hem Timelike hem de Spacelike eğri için ayrı ayrı birer çizelge halinde gösterilmiştir.

Birinci bölüm Giriş bölümü olarak ele alınmış olup burada tezin ana hatları verilmiş, yapılacak olan işlemlere değinilmiş ve bölümlerin kısaca özeti verilmiştir.

İkinci bölüm olarak sunulan kuramsal temeller bölümünde tezi oluşturan Timelike ve Spacelike eğrilerin hangi temellere dayandığı ve bu temellerin tanımlarına ilişkin bilgilere yer verilmiştir. Burada (Hacısalihoğlu 1983, Hacısalihoğlu 1985, Sabuncuoğlu 2010, O'Neill 1983, Graves 1979) kaynaklarından alınan tanımlar kullanılmıştır.

Üçüncü bölüm olan materyal ve yöntem iki ana başlıkta ele alınmıştır. Birinci olarak 1-indeksli 3-boyutlu Lorentz uzayda Timelike ve Spacelike eğri tanımları verilmiştir. İkinci olarak benzer işlemler 1-indeksli 4-boyutlu Lorentz uzayda Timelike ve Spacelike eğriler için yapılmıştır.

Dördüncü bölüm olan bulgular iki başlıkta ele alınmıştır. 1-indeksli 3-boyutlu Lorentz uzayda Timelike ve Spacelike eğrilerin verilen, Frenet çatıları ve tanımlanan şartlar altında eğrinin alt uzaylarında yatıp yatmadığı araştırılmış ve teoremler verilip ispatlanmıştır. İkinci olarak benzer işlemler 1-indeksli 4-boyutlu Lorentz uzayda Timelike ve Spacelike eğrilerin durumları incelenmiştir. Bölüm sonunda bu incelemeler sonucunda ortaya çıkan durumlar için sınıflandırma yapılmış ve çizelge ile gösterilmiştir.

Beşinci bölümde ise diğer bölümlere ait olan sonuçların bir değerlendirmesine yer verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel kavramlar 3-boyutlu Öklid uzayı ve n-boyutlu Lorentz uzayı için verilecektir.

Tanım 2.1. $I \subset IR$ bir açık aralık olmak üzere, (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan $\alpha : I \subset IR \rightarrow IR^3$ diferensiyellenebilir dönüşümüne IR^3 de eğri denir. Buradaki $I \subset IR$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.2. IR^3 Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow IR^3$ eğrisi için $T(s)=\alpha'(s)$ eşitliği ile belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.3. $\alpha: I \rightarrow IR^3$ bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri, s parametresine de yay uzunluğu parametresi denir. (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.4. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 2.5. IR^3 Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow IR^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \rightarrow IR \ , \quad \kappa(s)=||T'(s)||$$

fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.6. IR^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow IR^3$ eğrisi için

$$N(s)= \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliği ile belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin α (s) noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir. N vektör alanına, α eğrisinin birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı) denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.7. IR^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow IR^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı B(s) vektörüne, α eğrisinin α(s) noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir. B vektör alanına, α eğrisinin ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı) denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.8. T(s), N(s), B(s) vektörlerine, $\alpha: I \to IR^3$ eğrisinin α(s) noktasındaki Frenet vektörleri denir. {T(s), N(s), B(s)} kümesine α eğrisinin α (s) noktasındaki Frenet çatısı denir. T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde Frenet vektör alanları denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.9. Birim hızlı $\alpha: I \to IR^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau: I \to IR \qquad \tau(s) = -< B'(s), N(s) >$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. τ(s) sayısına eğrinin α(s) noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 2.10. V bir reel vektör uzayı olsun. Eğer

$$<,> : V \times V \to IR$$

$$(x, y) \to <,>(x, y) = <x, y>$$

fonksiyonu

i) 2-lineer,

ii) Simetrik,

iii) Pozitif tanımlı

ise <, > ye bir iç çarpım denir (Hacısalihoğlu, 1985).

Tanım 2.11. V bir vektör uzay ve <, > V üzerinde bir iç çarpım olsun. İç çarpımın negatif tanımlı olduğu maksimal boyutlu alt uzayının boyutuna V vektör uzayının indeksi denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.12. V vektör uzayında <, > dejenere olmayan iç çarpım verilsin. Eğer V'nin indeksi 1 ise V'ye bir Lorentz vektör uzayı ve iç çarpımına da Lorentz iç çarpımı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.13. $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in IR^n$ ve $\forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in IR^n$ için

$$<,> = -x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

şeklinde tanımlanan <, > fonksiyonuna IR^n de bir Lorentz iç çarpım ve bu iç çarpım ile IR^n ye bir Lorentz vektör uzayı denir. Bu uzay IR_1^n ile gösterilir. IR_1^n de ki Lorentz iç çarpımının standart baza göre karşılık geldiği matris

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu iç çarpımla birlikte IR_1^n ye n-boyutlu standart Lorentz uzayı denir. L^n ile gösterilir (Graves, 1979).

Tanım 2.14. L^n bir Lorentz uzayı, x Lorentz uzayının bir vektörü ve <, > , L^n üzerinde bir iç çarpım olsun. x'in boyu diye

$$||x||=\sqrt{|<x,x>|}$$

reel sayısına denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.15. L^n bir Lorentz uzayı ve üzerindeki iç çarpım <, > olsun. $x \in L^n$ için;

i) <x, x> < 0 ise x'e Timelike (zaman benzeri) vektör,

ii) <x, x> > 0 veya x=0 ise x'e Spacelike (uzay benzeri) vektör,

iii) <x, x> =0 veya $x \neq 0$ ise x'e Null (ışık benzeri) vektör adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.16. n boyutlu v-indeksli IR_v^n Lorentz uzayında, v=1 ve $n \geq 2$ için IR_1^n Lorentz uzayına Minkowski n-uzay denir. Boyutu 3, indeksi 1 olan IR_1^3 uzayına Minkowski (Lorentz) 3-uzayı denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.17. M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \subset R \to M$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun α eğrisinin teğet vektör alanı $\alpha'(s) = T$ olmak üzere,

i) <T, T> > 0 ise α eğrisine uzay benzeri eğri,

ii) <T, T> = 0 ise α eğrisine null eğri,

iii) <T, T> < 0 ise α eğrisine zaman benzeri eğri denir (O'Neill, 1983).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Lorentz Uzayda Timelike Eğriler

Bu bölümde 1-indeksli 3-boyutlu IR_1^3 Lorentz uzayda timelike eğriler verilmiştir. Burada $X = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in IR_1^3$ ve $Y = (y_1,\ y_2,\ y_3) \in IR_1^3$ olmak üzere bu uzaydaki Lorentz iç çarpımı

$$<X, Y> = = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

biçiminde tanımlanmıştır. $\forall s \in IR$ için {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısında T(s) ile teğet, N(s) ile normal ve L(s) ile binormal vektör alanları, $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ ile birinci ve ikinci Frenet eğrilikleri gösterilmiştir. {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s)}, {T(s), L(s)} ve {N(s), L(s)} alt uzaylarında yatıp yatmadığı araştırılacaktır.

Aynı zamanda bu bölümde 1-indeksli 4-boyutlu IR_1^4 Lorentz uzayda timelike eğriler de incelenmiştir. Burada $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in IR_1^4$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in IR_1^4$ olmak üzere bu uzaydaki Lorentz iç çarpımı

$$<X, Y> = = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

olsun. $\forall s \in IR$ için {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısında sırasıyla ile teğet, normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanları ve $\kappa(s), \tau(s), \sigma(s)$ ile de birinci, ikinci ve üçüncü Frenet eğrilikleri ifade edilmiştir.

Bu bölümde IR_1^4 de bir timelike α eğrisi için sırasıyla teğetin, normalin, birinci binormalin ve ikinci binormal vektör alanlarının timelike olma durumları incelenmiştir. {T(s), N(s), L(s),W(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s)}, {T(s), L(s)}, {T(s),W(s)}, {N(s), L(s)}, {N(s), W(s)}, {L(s),W(s)}, {T(s), N(s), L(s)},{T(s), N(s), W(s)} ve {N(s), L(s), W(s)} alt uzaylarında yatıp yatmadığı araştırılacaktır.

3.2. Lorentz Uzayda Spacelike Eğriler

Bu bölümde 1-indeksli 3-boyutlu IR_1^3 Lorentz uzayda spacelike eğriler verilmiştir. Burada $X = (x_1, x_2, x_3) \in IR_1^3$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3) \in IR_1^3$ olmak üzere bu uzaydaki Lorentz iç çarpımı

$$<X, Y> = = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

biçiminde tanımlanmıştır. $\forall s \in IR$ için {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısında T(s) ile teğet, N(s) ile normal ve L(s) ile binormal vektör alanları, $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ ile birinci ve ikinci Frenet eğrilikleri gösterilmiştir. {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s)}, {T(s), L(s)} ve {N(s), L(s)} alt uzaylarında yatıp yatmadığı araştırılacaktır.

Bununla birlikte bu bölümde 1-indeksli 4-boyutlu IR_1^4 Lorentz uzayda spacelike eğrilere de yer verilecektir. Burada $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in IR_1^4$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in IR_1^4$ olmak üzere bu uzaydaki Lorentz iç çarpımı

$$<X, Y> = = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

olsun. $\forall s \in IR$ için {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısında sırasıyla ile teğet, normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanları ve $\kappa(s)$, $\tau(s)$, $\sigma(s)$ ile de Frenet eğrilikleri ifade edilmiştir.

Bu kısımda IR_1^4 de bir α spacelike eğrisinin normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanlarının timelike aynı zamanda normal ve birinci binormal vektör alanlarının null olması durumları incelenmiştir. {T(s), N(s), L(s),W(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s)}, {T(s), L(s)}, {T(s),W(s)}, {N(s), L(s)}, {N(s), W(s)}, {L(s),W(s)}, {T(s), N(s), L(s)},{T(s), N(s), W(s)} ve {N(s), L(s), W(s)} alt uzaylarında yatıp yatmadığı araştırılacaktır.

4. BULGULAR

4.1. IR_1^3 Lorentz Uzayda Timelike Eğriler

IR_1^3 Lorentz uzayı {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısında

$$\begin{cases} <\mathrm{T(s)},\mathrm{T(s)}> = -1, \\ <\mathrm{N(s)},\mathrm{N(s)}> = <\mathrm{L(s)},\mathrm{L(s)}> = 1, \\ <\mathrm{T(s)},\mathrm{N(s)}> = <\mathrm{T(s)},\mathrm{L(s)}> = <\mathrm{N(s)},\mathrm{L(s)}> = 0 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan timelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathrm{T}'(\mathrm{s}) \\ \mathrm{N}'(\mathrm{s}) \\ \mathrm{L}'(\mathrm{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(\mathrm{s}) & 0 \\ \kappa(\mathrm{s}) & 0 & \tau(\mathrm{s}) \\ 0 & -\tau(\mathrm{s}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{T}(\mathrm{s}) \\ \mathrm{N}(\mathrm{s}) \\ \mathrm{L}(\mathrm{s}) \end{bmatrix}$$

için

$$\mathrm{T}'(\mathrm{s}) = \kappa(\mathrm{s})\mathrm{N}(\mathrm{s}),$$
$$\mathrm{N}'(\mathrm{s}) = \kappa(\mathrm{s})\mathrm{T}(\mathrm{s}) + \tau(\mathrm{s})\mathrm{L}(\mathrm{s}),$$
$$\mathrm{L}'(\mathrm{s}) = -\tau(\mathrm{s})\mathrm{N}(\mathrm{s})$$

şeklinde tanımlanmıştır (Bektaş, Ergüt ve Soylu, 1998).

Teorem 4.1.1. α, IR_1^3 de timelike bir eğri ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} olsun. Burada T(s), N(s), L(s) sırasıyla teğet(tanjant), normal ve binormal vektör alanlarıdır. κ(s)=1 için Frenet denklemleri;

$$\mathrm{T}'(\mathrm{s}) = \mathrm{N}(\mathrm{s}),$$
$$\mathrm{N}'(\mathrm{s}) = \mathrm{T}(\mathrm{s}) + \tau(\mathrm{s})\mathrm{L}(\mathrm{s}),$$
$$\mathrm{L}'(\mathrm{s}) = -\tau(\mathrm{s})\mathrm{N}(\mathrm{s})$$

biçimindedir.

Teorem 4.1.2. α, IR_1^3 de timelike bir eğri olsun. Sırasıyla T(s), N(s), L(s) teğet, normal, binormal vektör alanları için α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} ise o zaman eğrinin birinci ve ikinci Frenet eğrilikleri

$$\begin{cases} \kappa(\mathrm{s}) = <\mathrm{T}'(\mathrm{s}),\mathrm{N}(\mathrm{s})>, \\ \tau(\mathrm{s}) = -<\mathrm{L}'(\mathrm{S}),\mathrm{N}(\mathrm{s})> \end{cases}$$

dir.

İspat: $<\mathrm{T}'(\mathrm{s}),\mathrm{N}(\mathrm{s})> = <\kappa(\mathrm{s})\mathrm{N}(\mathrm{s}),\mathrm{N}(\mathrm{s})>$

$$= \kappa(\mathrm{s})<\mathrm{N}(\mathrm{s}),\mathrm{N}(\mathrm{s})>$$

$$= \kappa(\mathrm{s})$$

ve

$< L'(S), N(s) >=< -\tau(s)N(s), N(s)>$

$=-\tau(s) < N(s), N(s) >$

$=-\tau(s)$

olup

$\tau(s)= = -< L'(S), N(s) >$

elde edilir.

Teorem 4.1.3. α, IR_1^3 de timelike bir eğri ve eğrinin Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} olsun. Burada T(s), N(s), L(s) sırasıyla teğet(tanjant), normal ve binormal vektör alanları ve $\kappa(s)$=1 için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\begin{cases} < T'(s), T(s) >=< T'(s), N(s) >=< T'(s), L(s) > = < N'(s), N(s) > 0, \\ < L'(s), T(s) >=< T'(s), L(s) >=< N'(s), L(s) >=< L'(s), L(s) > = 0, \\ < N'(s), T(s) > = -1, \\ < L'(s), N(s) > = \tau(s). \end{cases}$$

İspat: $<T'(s), T(s) >=0$ olduğunu ispatlamak için Teorem 4.1.1 deki $T'(s) = N(s)$ eşitliği yerine yazılırsa

<T(s),N(s)>=0 elde edilir ve <T(s),N(s)>=0 ise eşitliğinin her iki tarafında s parametresine türev alınırsa $<T'(s), N(s)>+<T(s), N'(s)>=0$

$\Rightarrow<N(s), N(s)>+<T(s), T(s)+ \tau(s)L(s)>=0$

$\Rightarrow1+<T(s),T(s)>+ \tau(s)<T(s), L(s)>=0$

$\Rightarrow <T(s),L(s)>=0$

olduğu görülür. Benzer şekilde <T(s), L(s)>=0 ise her iki tarafın s parametresine göre türevi alındığında ise

$<T'(s), L(s)>+<T(s), L'(s)>=0$

$\Rightarrow<N(s), L(s)>+<T(s), -\tau(s)N(s)>=0$

$\Rightarrow<N(s), L(s)>=0$

bulunur. Diğer eşitliklerde benzer işlemler yapıldığında istenen sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.1.4. IR_1^3 de timelike bir eğri α ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} olsun. Burada T(s), N(s), L(s) sırasıyla teğet(tanjant), normal ve binormal vektör alanlarıdır. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler

$$\begin{cases} < T''(s), T(s) > = -1, \\ < N''(s), N(s) > = -\tau^2(s), \\ < T''(s), N(s) > = < N''(s), L(s) > = < N''(s), T(s) > =< L''(s), N(s) > =< L''(s), L(s) > = 0 \\ < T''(s), L(s) > = \ \tau(s) =< L''(s), T(s) > \end{cases}$$

sağlanır.

İspat: $<T''(s), T(s)>= -1$ olduğunu ispatlamak için, Teorem 4.1.1 den $T''(s) = N'(s)$ olup $<N'(s),T(s)>= -1$ olduğu Teorem 4.1.3 den biliniyor. Bu eşitlik gereğince $<T''(s), T(s)>= -1$

elde edilir. Ayrıca $<N''(s), N(s)>$ iç çarpımında, $N''(s)= T'(s)+ \tau(s)L'(s)$ eşitliği kullanılırsa $<N''(s), N(s)>= -\tau^2(s)$

olduğu görülür.

Benzer şekilde diğer iç çarpımlar için aynı işlemler uygulanırsa istenilen sonuçlar ispatlanır.

Teorem 4.1.5. α, IR_1^3 de timelike bir eğri ve α nın Frenet çatısı $\{T(s), N(s), L(s)\}$ olsun. Bu çatının $\{T(s), N(s)\}$alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinde eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= (\lambda'(s)+ \mu(s))T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+ \tau(s)\ \mu(s))L(s)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \quad \mu(s) = 0 \end{cases}$$

olur. Eğer $\mu(s)=0$ ise $\mu'(s)=0$ dır. İkinci eşitlikte $\mu'(s)=0$ yerine yazılırsa $\lambda(s)=0$ elde edilir. Bulunan bu değerler birinci denklemde yerine yazıldığında bu durum $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ olması ile çelişir. Dolayısıyla α eğrisi $\{T(s), N(s)\}$ nin gerdiği alt uzayda yatmaz.

Teorem 4.1.6. IR_1^3 de α timelike eğri ve eğrinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), L(s)\}$ olsun.

O zaman

$$\alpha(s)=(s+z)T(s)+z_1L(s),\ (z,\ z_1 \text{ sabit })$$

eğrisi {T(s),L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatar.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinde her iki tarafın s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)-\tau(s)\ \mu(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1 \\ \lambda(s) - \tau(s)\mu(s) = 0 \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s)=s+z$, (z bir sabit) ve $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Dolasıyla

$$\alpha(s)=(s+z)T(s)+z_1L(s)$$

eğrisi {T(s),L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatar.

Teorem 4.1.7. α, IR_1^3 de timelike eğrisi olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)}olmak üzere bu çatının {N(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+ z_1L(s),\ \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)-\tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+ \mu'(s))L(s)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{cases} \lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri vardır. Bu denklemler çözüldüğünde $\lambda(s) = 1$ ise $\lambda'(s) = 0$ elde edilir. Bu durumda $\lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0$ denkleminin sağlanması için $\tau(s)\mu(s) = 0$ olmalıdır. Burada iki durum söz konusudur.

i) Eğer $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ dır.

ii) Eğer $\tau(s) = 0$ olursa $\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ buradan $\mu'(s) = 0$ olup $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir.

Böylece $\lambda(s) = 1$ ve $\mu(s)=z_1$ için {N(s), L(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s)=N(s)+ z_1 L(s)$$

şeklinde bulunur.

4.2. R_1^4 Lorentz Uzayda Timelike Eğriler

i) IR_1^4 de {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısı için T(s) teğet vektör alanının Timelike olma durumunda

$$\begin{cases} < T(s), T(s) > = -1, \\ < N(s), N(s) > = < L(s), L(s) > = < W(s), W(s) > = 1 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan bir timelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) & 0 \\ 0 & -\tau(s) & 0 & \sigma(s) \\ 0 & 0 & -\sigma(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ L \\ W \end{bmatrix}$$

için

$T'(s) = \kappa(s)N(s),$

$N'(s) = \kappa(s)T(s) + \tau(s)L(s),$

$L'(s) = -\tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s),$

$W'(s) = -\sigma(s)L(s)$

şeklinde tanımlanmıştır (Önder, Kahraman ve Uğurlu, 2013).

Teorem 4.2.1. α, IR_1^4 de eğri ve eğrinin teğet vektör alanı T(s) timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} ve κ(s)=1 için Frenet denklemleri;

$T'(s) = N(s),$

$N'(s) = T(s) + \tau(s)L(s),$

$L'(s) = -\tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s),$

$W'(s) = -\sigma(s)L(s)$

dir.

Teorem 4.2.2. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisinin Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} ve T(s) teğet vektör alanı timelike olmak üzere aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

$$\begin{cases} < T(s), N(s) > = 0, \\ < N(s), L(s) > = 0, \\ < L(s), W(s) > = 0. \end{cases}$$

İspat: T(s) teğet vektör alanının timelike olması halinde

$< T(s), T(s) > = -1$

eşitliğinde her iki tarafın s ye göre türevi alınırsa $T'(s)=N(s)$ eşitliği için $<T(s),N(s)>=0$ elde edilir. Benzer şekilde

$< N(s), N(s) >=1$

$\Rightarrow< N'(s), N(s) >=0$

$\Rightarrow< T(s)+ \tau(s)L(s), N(s)>=0$

$\Rightarrow<N(s),L(s)>=0$

ve

$< L(s), L(s) >=1$

$\Rightarrow< L'(s), L(s) >=0$

$\Rightarrow< -\tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s), L(s)>=0$

$\Rightarrow<L(s),W(s)>=0$

olduğu görülür.

Teorem 4.2.3. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisi ve timelike teğet vektör alanı, normal, birinci ve ikinci binormal vektör alanları arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\begin{cases} < T(s), L(s) >= 0, \\ < T(s), W(s) >= 0, \\ < N(s), W(s) >= 0. \end{cases}$$

İspat: Teorem 4.2.1 deki sonuçlar kullanılarak eşitliklerin s ye göre türevi alınırsa

$< T(s), N(s) > = 0$

$\Rightarrow<T'(s),N(s)>+<T(s),N'(s)>=0$

$\Rightarrow<N(s),N(s)>+<T(s), T(s)+ \tau(s)L(s)>=0$

$\Rightarrow <T(s),L(s)>=0$

bulunur. Benzer şekilde diğer sonuçlarında türevi alınarak istenilen eşitlikler elde edilir.

Teorem 3.2.4. IR_1^4 de α timelike eğri verilsin. Timelike teğet vektör alanı, normal, birinci ve ikinci binormal vektör alanları arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\begin{cases} < N'(s), L(s) >= \tau(s) = -< L'(s), N(s) >, \\ < L'(s), W(s) >= \sigma(s) = -< W'(s), L(s) >, \\ < T'(s), N(s) > = 1 = -< N'(s), T(s) >, \\ < T'(s), T(s) > =< T'(s), L(s) > =< T'(s), W(s) > =< N'(s), N(s) > = 0, \\ < N'(s), W(s) > = < L'(s), T(s) > =< L'(s), L(S) > =< W'(s), T(s) > = 0, \\ < W'(s), N(s) > =< W'(s), W(s) > = 0. \end{cases}$$

İspat: T(s) teğet vektör alanının timelike olması şartları kullanılarak

$< T'(s), T(s) >$=<T(s),N(s)>=0,

$< T'(s), N(s) >$=<N(s),N(s)>=1,

$< N'(s), L(s) >$=<T(s)+τ(s)L(s),L(s)>

=<T(s),L(s)>+ τ(s)<L(s),L(s)>

=τ(s),

$< L'(s), W(s) >$= <−τ(s)N(s)+ σ(s)W(s),W(s)>

=−τ(s)<N(s),W(s)>+ σ(s)<W(s),W(s)>

= σ(s)

ve

$< W'(s), W(s) >$ =<−σ(s)L(s), W(s)>

=− σ(s)<L(s),W(s)>

=0

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitliklere de aynı işlemler uygulanarak istenilen sonuçlar bulunur.

Teorem 4.2.5. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisi ve T(s) teğet vektör alanı timelike ise o zaman

$$\begin{cases} < T''(s), T(s) > = -1, \\ < L''(s), L(s) > = -\left(\tau^2(s) + \sigma^2(s)\right), \\ < W''(s), W(s) > = -\sigma^2(s), \\ < T''(s), N(s) > =< T''(s), W(s) > =< N''(s), T(s) > =< N''(s), L(s) > = 0, \\ < L''(s), N(s) > =< L''(s), W(s) > =< W''(s), T(s) > =< W''(s), L(s) > = 0, \\ < T''(s), L(s) > = \tau(s) =< L''(s), T(s) >, \\ < N''(s), N(s) > = 1 - \tau^2(s), \\ < N''(s), W(s) > = \tau(s)\sigma(s) =< W''(s), N(s) > \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: $< T''(s), T(s) > =< N'(s), T(s) > =-1$,

$< N''(s), N(s) >$ =< T′(s)+ τ(s)L′(s), N(s)>

=< T′(s), N(s)>+ τ(s)< L′(s), N(s)>

$=1 - \tau^2(s)$,

$< L''(s), W(s) > =< -\tau(s)N'(s) + \sigma(s)W'(s), W(s) >$

$=-\tau(s) < N'(s), W(s) > + \sigma(s) < W'(s), W(s) >$

$=0$

ve

$<W''(s), W(s)> = <-\sigma(s)L'(s), W(s)>$

$= -\sigma(s) <L'(s), W(s)>$

$= -\sigma^2(s)$

bulunur. Benzer şekilde diğer eşitliklerinde ispatı yapılır.

Teorem 4.2.6. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve T(s) teğet vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi mevcut değildir.

İspat: α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)N(s) eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır.

Eşitliğin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s)= (\lambda'(s)+ \mu(s))T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+ \tau(s)\, \mu(s))L(s)$

bulunur. Böylece

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \quad \mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri mevcut olup bu denklemler çözülürse $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ dır. Bu değerler ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s) = 0$ olduğu elde edilir. Bu sonuçlar birinci denklemde yazılırsa $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ olması ile çelişir. Dolayısıyla {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi mevcut değildir.

Teorem 4.2.7. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve T(s) teğet vektör alanı timelike olsun. O zaman α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s) , W(s)} için {T(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s), \quad (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafın s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)-\tau(s)\,\mu(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)+\mu(s)\sigma(s)W(s)$$

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) - \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)\sigma(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Buradan $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_2$, (z_2 bir sabit) olur. O halde aradığımız eğrinin

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.2.8. α, IR_1^4 de timelike bir eğri olsun. T(s) teğet vektör alanı timelike olmak üzere eğrinin Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi mevcut değildir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Bu eğrinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+ \lambda(s)N(s)-\sigma(s)\mu(s)L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ -\sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 0$ olmalıdır. Ancak bu durum birinci denklemdeki $\lambda'(s) = 1$ olması ile çelişir.

Dolasıyla {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {T(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi mevcut değildir.

Teorem 4.2.9. IR_1^4 de α timelike bir eğri olsun. T(s) teğet vektör alanı timelike ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {N(s), L(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+z_1L(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ alınırsa,

$$T(s)= \lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)- \tau(s) \mu(s))N(s)+(\tau(s) \lambda(s)+ \mu'(s))L(s)-\sigma(s)\mu(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ -\sigma(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözülürse $\lambda(s) = 1$ ise $\lambda'(s) = 0$ elde edilir ve bu değerler $\lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa iki durum söz konusu olur. O zaman

i) $\tau(s)=0$ ise $\mu'(s) = 0$ gelir. $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir.

ii) $\mu(s) =0$ ise $\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ olup buradan $\tau(s)\lambda(s) = 0$ olur. $\lambda(s) = 1$ yerine yazılırsa $\tau(s) = 0$ olur. O halde

$$\alpha(s)=N(s)+z_1L(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.10. T(s) teğet vektör alanı timelike ve α IR_1^4 de timelike bir eğri olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {N(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+ z_1W(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlar olup α eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s)= \lambda(s)T(s)+ \lambda'(s)N(s)+(\tau(s)\lambda(s)-\sigma(s)\mu(s))L(s)+ \mu'(s)W(s)$

bulunur. Böylece

$$\begin{cases} \lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) - \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri mevcuttur. O halde $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)= z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\lambda(s) = 1$ ve $\mu(s)= z_1$ değerleri yerine yazılırsa

$$\alpha(s)=N(s)+ z_1W(s)$$

olarak bulunur. Burada $z_1 = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}$, $(\sigma(s) \neq 0)$ dır.

Teorem 4.2.11. α, IR_1^4 de timelike bir eğri olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} ve T(s) teğet vektör alanı timelike olsun. O zaman α eğrisi bu Frenet çatısının germiş olduğu {L(s), W(s)} alt uzayında yatmaz.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)L(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Bu eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)L(s) + \lambda(s)L'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \tau(s)\lambda(s)N(s)+(\lambda'(s)- \sigma(s)\mu(s))L(s)+(\sigma(s)\lambda(s)+ \mu'(s))W(s)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında T(s) timelike teğet vektör alanı bulunmadığı için denklem çözümü mevcut değildir. Dolasıyla α eğrisi {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatının germiş olduğu {L(s), W(s)} alt uzayında yatmaz.

Teorem 4.2.12. IR_1^4 de α timelike eğrisi ve T(s) teğet vektör alanı timelike verilmiş olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)= (e^s + e^{-s})T(s)+ (e^s - (e^{-s} - 1))\, N(s)$$

dır.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)L(s)+ \varphi(s)\, L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$$T(s)=(\lambda'(s)+\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s)-\tau(s)\varphi(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\varphi'(s))L(s)+ \sigma(s)\, \varphi(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) - \tau(s)\varphi(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0, \\ \sigma(s)\, \varphi(s) = 0 \end{cases}$$

dır. $\varphi(s) = 0$ ise $\varphi'(s) = 0$ dır. $\tau(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0$ ise $\tau(s)\mu(s) = 0$ olur. O halde burada iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s) = 0$ ise $\lambda(s) + \mu'(s) - \tau(s)\varphi(s) = 0$ olup buradan $\lambda(s) = 0$ olur. Bu ise birinci denklemdeki $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ olması ile çelişir. Dolasıyla bu şartları sağlayan bir α eğrisi mevcut değildir.

ii) $\tau(s) = 0$ ise $\lambda(s) + \mu'(s) - \tau(s)\varphi(s) = 0$ denkleminde yerine yazıldığında $\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ elde edilir. $\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ ve $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ denklemleri çözülürse $\lambda(s) = e^s + e^{-s}$ ve $\mu(s) = e^s - (e^{-s} - 1)$ bulunur. Bu durumda aranan $\alpha(s)$ eğrisi

$$\alpha(s)= (e^s + e^{-s})T(s)+ (e^s - (e^{-s} - 1))\, N(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.13. α, IR_1^4 de timelike bir eğri olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} ve T(s) teğet vektör alanı timelike olmak üzere bu çatının germiş olduğu {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s + z_2)T(s)+z_1W(s), \ (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

şeklindedir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. Eşitliğin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s)\, W'(s)$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s)=(\lambda'(s)+\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)-\sigma(s)\varphi(s))L(s)+ \varphi'(s)W(s)$

bulunur. Böylece aşağıdaki denklemler mevcuttur:

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \varphi'(s) = 0. \end{cases}$$

Buradan $\varphi'(s) = 0$ ise $\varphi(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\tau(s)\mu(s) - \sigma(s)\,\varphi(s) = 0$ denkleminde $\mu(s) = 0$ ise $\sigma(s)z_1 = 0$ olup $\sigma(s) = 0$ olur. Dahası $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ ve $\mu(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 1$ olup $\lambda(s)= s + z_2$ dir. O halde {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s + z_2)T(s)+z_1W(s)$$

dir.

Teorem 4.2.14. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve T(s) teğet vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)}nin gerdiği {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. α(s) eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s)\, W'(s)$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s)=\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)- \tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)\sigma(s)\varphi(s))L(s)+$

$(\sigma(s)\mu(s)+ \varphi'(s))W(s)$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözülürse $\lambda(s) = 1$ için $\lambda'(s) = 0$ olur. $\lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0$ ise $\tau(s)\mu(s) = 0$ dır. Buradan iki sonuç ortaya çıkmaktadır:

i) $\mu(s) = 0$ ise $\varphi'(s)=0$ olduğundan $\varphi(s)=z_1$, (z_1 sabit) dir.

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s)=0$ ise $\tau(s) - \sigma(s)z_1 = 0$ olur.

ii) $\tau(s) = 0$ ise ($\mu(s) \neq 0$) olmak üzere

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0$ ve $\sigma(s)\varphi(s) = 0$ olur Buradan $\varphi(s) = 0$ olup $z_1=0$ elde edilir. Bu durumda $\lambda(s) = 1$, $\mu(s) = 0$ ve $\varphi(s) = 0$ için {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s)=N(s)$$

dir.

ii) IR_1^4 de {T(s), N(s), L(s), W(s)}Frenet çatısı için N(s) normal vektör alanının timelike olma durumunda

$$\begin{cases} < N(s), N(s) > = -1, \\ < T(s), T(s) > = < L(s), L(s) > = < W(s), W(s) > = 1 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan bir timelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 & \sigma(s) \\ 0 & 0 & -\sigma(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ L \\ W \end{bmatrix}$$

için

$T'(s) = \kappa(s)N(s)$,

$N'(s) = \kappa(s)T(s) + \tau(s)L(s)$,

$L'(s) = \tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s)$,

$W'(s) = -\sigma(s)L(s)$

şeklinde tanımlanmıştır (Önder ve diğerleri, 2013).

Teorem 4.2.15. α, IR_1^4 de timelike bir eğri, N(s) normal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} olsun. $\kappa(s)=1$ için Frenet denklemleri;

$T'(s) = N(s)$,

$N'(s) = T(s) + \tau(s)L(s)$,

$L'(s) = \tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s)$,

$W'(s) = -\sigma(s)L(s)$

dir.

Teorem 4.2.16. IR_1^4 de verilen α timelike bir eğri N(s) normal vektör alanı timelike ve eğrinin Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\begin{cases} < T(s), N(s) > = 0, \\ < N(s), L(s) > = 0, \\ < L(s), W(s) > = 0. \end{cases}$$

İspat: N(s) normal vektör alanının timelike olması durumunda

$< T(s), T(s) > = 1$ şartında eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$< T'(s), T(s) > = 0$ ve buradan $< T(s), N(s) > = 0$

elde edilir.

Benzer şekilde

$< N(s), N(s) >=-1$

$\Rightarrow< N'(s), N(s) >=0$

$\Rightarrow< T(s)+ \tau(s)L(s),N(s)>=0$

$\Rightarrow<N(s),L(s)>=0$

ve

$< W(s), W(s) >=1$

$\Rightarrow< W'(s), W(s) >=0$

$\Rightarrow< -\sigma(s)L(s),W(s)>=0$

$\Rightarrow<L(s),W(s)>=0$

olduğu görülür.

Teorem 4.2.17. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisinin teğet, normal, birinci ve ikinci binormal vektör alanları arasında aşağıdaki bağıntılar N(s) normal vektör alanının timelike olması halinde geçerlidir.

$$\begin{cases} < T(s), L(s) >= 0, \\ < T(s), W(s) >= 0, \\ < N(s), W(s) >= 0. \end{cases}$$

İspat: Teorem 4.2.16 da verilen eşitlikler kullanılarak ifadelerin s ye göre türevi alınırsa

$< N(s), L(s) > = 0$

$\Rightarrow<N'(s),L(s)>+<N(s),L'(s)>=0$

$\Rightarrow< T(s)+ \tau(s)L(s),L(s)>+<N(s),\tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s) >=0$

$\Rightarrow$ <N(s),W(s)>=0

bulunur. Benzer şekilde diğerleri de elde edilir.

Teorem 4.2.18. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisinin teğet, normal, birinci ve ikinci binormal vektör alanları arasında bağıntılar N(s) normal vektör alanı timelike olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} <N'(s),L(s)>=\tau(s)=-<L'(s),N(s)>, \\ <L'(s),W(s)>=\sigma(s)=<W'(s),L(s)>, \\ <T'(s),N(s)>=-1=-<N'(s),T(s)>, \\ <T'(s),T(s)>=<T'(s),L(s)>=<T'(s),W(s)>=<N'(s),N(s)>=0, \\ <N'(s),W(s)>=<L'(s),T(s)>=<L'(s),L(S)>=<W'(s),T(s)>=0, \\ <W'(s),N(s)>=<W'(s),W(s)>=0. \end{cases}$$

İspat: $<T'(s),T(s)>=<T(s),N(s)>=0$,

$<T'(s),N(s)>=<N(s),N(s)>=-1$,

$<N'(s),W(s)>=<T(s)+\tau(s)L(s),W(s)>$

$=<T(s),W(s)>+\tau(s)<L(s),W(s)>$

$=0$,

$<L'(s),W(s)>=<\tau(s)N(s)+\sigma(s)W(s),W(s)>$

$=-\tau(s)<N(s),W(s)>+\sigma(s)<W(s),W(s)>$

$=\sigma(s)$

ve

$<W'(s),T(s)>=<-\sigma(s)L(s),T(s)>$

$=-\sigma(s)<T(s),L(s)>$

$=0$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşikliklere de aynı işlemler uygulanarak istenilen sonuçlar elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.19. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisi ve N(s) normal vektör alanının timelike olması halinde

$$\begin{cases} <T''(s),T(s)>=1, \\ <L''(s),L(s)>=\tau^2(s)-\sigma^2(s), \\ <W''(s),W(s)>=-\sigma^2(s), \\ <T''(s),N(s)>=<T''(s),W(s)>=<N''(s),T(s)>=<N''(s),L(s)>=0, \\ <L''(s),N(s)>=<L''(s),W(s)>=<W''(s),T(s)>=<W''(s),L(s)>=0, \\ <T''(s),L(s)>=\tau(s)=<L''(s),T(s)>, \\ <N''(s),N(s)>=-1-\tau^2(s), \\ <N''(s),W(s)>=\tau(s)\sigma(s)=<W''(s),N(s)> \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: $<T''(s),T(s)>=<N'(s),T(s)>=1$,

$<N''(s),N(s)>=<T'(s)+\tau(s)L'(s),N(s)>$

$=< T'(s),N(s)>+ \tau(s)< L'(s),N(s) >$

$=1-\tau^2(s),$

$< L''(s), N(s) >=< -\tau(s)N'(s) + \sigma(s)W'(s), N(s) >$

$=-\tau(s) < N'(s), N(s) >+ \sigma(s) < W'(s), N(s) >$

$=0$

ve

$<W''(s), W(s) >=<-\sigma(s)L'(s)W(s)>$

$=-\sigma(s)<L'(s),W(s)>$

$=-\sigma^2(s)$

bulunur. Benzer şekilde diğer eşitliklerinde ispatı yapılır.

Teorem 4.2.20. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve N(s) normal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğri yoktur.

İspat: α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)N(s) eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır.

α(s) eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. α′(s)=T(s) ve κ(s)=1 için

$T(s)= (\lambda'(s)+ \mu(s))T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+ \tau(s)\, \mu(s))L(s)$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \quad \mu(s) = 0 \end{cases}$$

dır. Eğer $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ dır. Bu eşitlik ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s) = 0$ olduğu elde edilir. Bu durum $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ olması ile çelişir. Dolayısıyla {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

Teorem 4.2.21. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve N(s) vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s), \quad (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

dir. Burada $\tau(s)=\dfrac{-(s+z_1)}{z_2}$, ($z_2 \neq 0$ bir sabit).

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)+\tau(s)\,\mu(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)+\mu(s)\sigma(s)W(s)$$

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)\sigma(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Buradan $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$ (z_1 bir sabit) dir. $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_2$, (z_2 bir sabit) dir. Ayrıca

$$\lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0 \Rightarrow (s+z_1)+ \tau(s)z_2=0$$

$$\Rightarrow \tau(s) = \frac{-(s+z_1)}{z_2}, \ (z_2 \neq 0 \text{ bir sabit})$$

dir. O halde aradığımız eğri

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.22. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve N(s) normal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s),W(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)= z_1W(s), \ (z_2 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+ \lambda(s)N(s)-\sigma(s)\mu(s)L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ -\sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemlerinin çözümünde $\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 0$ olmalıdır. Bu durum $\lambda'(s) = 1$ olması ile çelişir. Ayrıca $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) dir. O halde aranılan eğri

$$\alpha(s)= z_1 W(s)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.2.23. IR_1^4 de α timelike bir eğri ve N(s) normal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {N(s), L(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+z_1L(s) \text{ , } (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$=T(s) ve $\kappa(s)$=1 olarak alınırsa,

$T(s) = \lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)+ \tau(s) \mu(s))N(s)+(\tau(s) \lambda(s)+ \mu'(s))L(s)+\sigma(s)\mu(s)W(s)$

olur. Böylece aşağıdaki denklemler mevcuttur:

$$\begin{cases} \lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

Bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = 1$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. Bu durumda $\lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0$ da yerine yazılırsa iki durum söz konusudur:

i) $\tau(s)$=0 ise $\mu'(s) = 0$ olur. $\mu(s)$=z_1, (z_1 bir sabit) dir.

ii) $\mu(s)$ =0 ise $\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ olup buradan $\tau(s)\lambda(s) = 0$ olur. $\lambda(s) = 1$ yerine yazılırsa $\tau(s) = 0$ dır. O halde aranılan eğri

$$\alpha(s)=N(s)+z_1L(s)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.2.24. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve N(s) normal vektör alanı timelike olsun. O zaman α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {N(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+z_1W(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: α(s) = λ(s)N(s) + μ(s)W(s) eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. α′(s)=T(s) ve κ(s)=1 olarak alınırsa,

$$T(s)= \lambda(s)T(s)+ \lambda'(s)N(s)+(\tau(s)\lambda(s)- \sigma(s)\mu(s))L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{cases} \lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) - \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözüldüğünde $\mu'(s) = 0$ ise μ(s)= z_1, (z_1 bir sabit) dir. $\lambda(s) = 1$ ve μ(s)= z_1 değerleri yerine yazılırsa

$$\alpha(s)=N(s)+z_1W(s)$$

eğrisi bulunur.

Teorem 4.2.25. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)}olsun. N(s) normal vektör alanı timelike ise o zaman α eğrisi bu çatının germiş olduğu {L(s), W(s)} alt uzayında yatmaz.

İspat: α(s) = λ(s)L(s) + μ(s)W(s) eğrisini alalım. α(s) eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)L(s) + \lambda(s)L'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

bulunur. α′(s)=T(s) ve κ(s)=1 için

$$T(s)= \tau(s)\lambda(s)N(s)+(\lambda'(s)- \sigma(s)\mu(s))L(s)+(\sigma(s)\lambda(s)+ \mu'(s))W(s)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında yer alan denklemde T(s) teğet vektörü bulunmadığı için denklem çözümü mevcut değildir. Dolasıyla α eğrisi {T(s),N(s),L(s),W(s)} çatının germiş olduğu {L(s), W(s)} alt uzayında yatmaz.

Teorem 4.2.26. IR_1^4 de α timelike eğrisi ve N(s) normal vektör alanı timelike olarak verilmiş olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+ z_1 L(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)L(s)+ \varphi(s) L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$$T(s)=(\lambda'(s)+\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s)+\tau(s)\varphi(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\varphi'(s))L(s)+ \sigma(s)\varphi(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) + \tau(s)\varphi(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0, \\ \sigma(s)\,\varphi(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Eğer $\varphi(s) = 0$ ise $\varphi'(s) = 0$ dır. Böylece $\tau(s)\mu(s) = 0$ olur. O halde burada iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s) = 0$ olursa $\mu'(s) = 0$ olur. $\varphi(s)$ ve $\mu'(s)$ eşitlikleri ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s)=0$ elde edilir. $\lambda(s)=0$ ise $\lambda'(s)=0$ dır. Bu durum birinci denklemdeki $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ olması ile çelişir.

ii) $\tau(s)=0$ ise $\varphi'(s) = 0$ ve $\varphi(s) = z_1$ ve $(z_1 = 0)$ dır. Ayrıca $\mu(s) = z_2$,(z_2 bir sabit) için $\mu'(s) = 0$, $\lambda(s)=0$ ve $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ ise $\mu(s) = 1$ olarak bulunur. Böylece bu şartları sağlayan ve {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğri

$$\alpha(s)=N(s)+ z_1 L(s)$$

dir.

Teorem 4.2.27. α, IR_1^4 de timelike bir eğri olsun. N(s) normal vektör alanı timelike ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} olsun. Bu çatının germiş olduğu {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_2)T(s)+z_1W(s), \ (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)=(\lambda'(s)+\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)-\sigma(s)\varphi(s))L(s)+\varphi'(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s)+\mu(s)=1, \\ \lambda(s)+\mu'(s)=0, \\ \tau(s)\mu(s)-\sigma(s)\varphi(s)=0, \\ \varphi'(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\varphi'(s)=0$ ise $\varphi(s)=z_1$,(z_1 bir sabit) dir. $\tau(s)\mu(s)-\sigma(s)\varphi(s)=0$, $\mu(s)=0$ ise $\sigma(s)z_1=0$ olup $\sigma(s)=0$ olur.
$\lambda'(s)+\mu(s)=1$ ve $\mu(s)=0$ ise $\lambda'(s)=1$ olup $\lambda(s)=s+z_2$, (z_2 bir sabit)dir.
O halde buradan hareketle {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s)=(s+z_2)T(s)+z_1W(s)$$

dir.

Teorem 4.2.28. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve N(s) normal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için bu çatının germiş olduğu {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s) W'(s)$

elde edilir. $\alpha'(s)$=T(s) ve $\kappa(s)$=1 için

$T(s)=\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)+\tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)-\sigma(s)\varphi(s))L(s)+$

$(\sigma(s)\mu(s)+ \varphi'(s))W(s)$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse eğer $\lambda(s) = 1$ ise $\lambda'(s) = 0$ olur. $\lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0$ ise $\tau(s)\mu(s) = 0$ dır. Buradan iki sonuç ortaya çıkmaktadır:

i) $\mu(s) = 0$ ise $\varphi'(s)=0$ dır. Böylece $\varphi(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s)=0$ ise $\tau(s) - \sigma(s)z_1 = 0$ olur.

ii) $\tau(s) = 0$ ise ($\mu(s) \neq 0$) olmak üzere

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0$ ve $\sigma(s)\varphi(s) = 0$ olur Buradan $\varphi(s) = 0$ olup $z_1=0$ elde edilir.

Bu durumda $\lambda(s) = 1$, $\mu(s) = 0$ ve $\varphi(s) = 0$ için {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğri

$\alpha(s)=N(s)$

dir.

iii) IR_1^4 de {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısında için L(s) birinci binormal vektör alanının timelike olma durumunda

$$\begin{cases} < L(s), L(s) > = -1, \\ < T(s), T(s) > = < N(s), N(s) > = < W(s), W(s) > = 1 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan bir timelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 & \sigma(s) \\ 0 & 0 & \sigma(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ L \\ W \end{bmatrix}$$

için

$T'(s)= \kappa(s)N(s)$,

$N'(s)=-\kappa(s)T(s)+ \tau(s)L(s)$,

$L'(s)= \tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s)$,

$W'(s)=\sigma(s)L(s)$

şeklinde tanımlanmıştır (Önder ve diğerleri, 2013).

Teorem 4.2.29. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} olmak üzere $\kappa(s)=1$ için Frenet denklemleri;

$T'(s)= N(s)$,

$N'(s)=-T(s)+ \tau(s)L(s)$,

$L'(s)= \tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s)$,

$W'(s)=\sigma(s)L(s)$

dir.

Teorem 4.2.30. IR_1^4 de verilen α timelike bir eğri ve L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olmak üzere eğrinin Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için

$$\begin{cases} < T(s), N(s) > = 0, \\ < N(s), L(s) > = 0, \\ < L(s), W(s) > = 0 \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: <T(s),T(s)>=1 eşitliğinde her iki tarafın s parametresine göre türevi alınırsa

$< T'(s), T(s) >=0$

$\Rightarrow < T(s), N(s) >=0$

bulunur. Benzer şekilde

$< N(s), N(s) >=1$

$\Rightarrow < N'(s), N(s) >=0$

$\Rightarrow < -T(s) + \tau(s)L(s), N(s) >=0$

$\Rightarrow < N(s), L(s) >=0$

ve

$< L(s), L(s) >=-1$

$\Rightarrow < L'(s), L(s) >=0$

$\Rightarrow < \tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s), L(s) >=0$

$\Rightarrow < L(s), W(s) >=0$

elde edilir.

Teorem 4.2.31. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisi ve L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olsun. Teğet, normal, birinci binormal vektör alanı ve ikinci binormal vektör alanları arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\begin{cases} < T(s), L(s) >= 0, \\ < N(s), W(s) >= 0, \\ < T(s), W(s) >= 0. \end{cases}$$

İspat: Teorem 4.2.30 da ki $< N(s), L(s) > = 0$ eşitliğinde s ye türev alınırsa

$< N'(s), L(s) > + < N(s), L'(s) > =0$

$\Rightarrow < -T(s) + \tau(s)L(s), L(s) > + < N(s), \tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s) > =0$

$\Rightarrow -< T(s), L(s) > + \tau(s) < L(s), L(s) > + \tau(s) < N(s), N(s) > + \sigma(s) < N(s), W(s) > =0$

$\Rightarrow < N(s), W(s) > =0$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitliklerinde türevi alınarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.32. IR_1^4 de verilen α timelike eğri ve L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olsun. Teğet, normal, birinci binormal vektör alanı ve ikinci binormal vektörleri arasında

$$\begin{cases} <N'(s),L(s)>=-\tau(s)=-<L'(s),N(s)>, \\ <L'(s),W(s)>=\sigma(s)=<W'(s),L(s)>, \\ <N'(s),T(s)>=-1=-<T'(s),N(s)>, \\ <T'(s),T(s)>=<T'(s),L(s)>=<T'(s),W(s)>=<N'(s),N(s)>=0, \\ <N'(s),W(s)>=<L'(s),T(s)>=<L'(s),L(s)>=<W'(s),T(s)>=0, \\ <W'(s),N(s)>=<W'(s),W(s)>=0 \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: Teorem 4.2.29. ve 4.2.30 da ki eşitliklerin türevleri alınarak

$<T'(s),T(s)>=<T(s),N(s)>=0,$

$<T'(s),N(s)>=<N(s),N(s)>=1,$

$$\begin{aligned} <N'(s),W(s)> &= <-T(s)+\tau(s)L(s),W(s)> \\ &= -<T(s),W(s)>+\tau(s)<L(s),W(s)> \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} <L'(s),N(s)> &= <\tau(s)N(s)+\sigma(s)W(s),N(s)> \\ &= \tau(s)<N(s),N(s)>+\sigma(s)<W(s),W(s)> \\ &= \tau(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} <W'(s),L(s)> &= <\sigma(s)L(s),L(s)> \\ &= \sigma(s)<L(s),L(s)> \\ &= \sigma(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde aynı işlemler tekrarlanarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.33. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisinin tanjant, normal, birinci binormal timelike vektör alanı ve ikinci binormal vektör alanları arasında

$$\begin{cases} <T''(s),T(s)>=-1, \\ <L''(s),L(s)>=-\tau^2(s)+\sigma^2(s), \\ <W''(s),W(s)>=\sigma^2(s), \\ <T''(s),N(s)>=<T''(s),W(s)>=<N''(s),T(s)>=<N''(s),L(s)>=0, \\ <L''(s),N(s)>=<L''(s),W(s)>=<W''(s),T(s)>=<W''(s),L(s)>=0, \\ <T''(s),L(s)>=-\tau(s)=<L''(s),T(s)>, \\ <N''(s),N(s)>=-1+\tau^2(s), \\ <N''(s),W(s)>=\tau(s)\sigma(s)=<W''(s),N(s)> \end{cases}$$

bağıntıları vardır.

İspat: Teorem 3.2.32. de ki eşitliklerin türevi alınırsa

$<T''(s),T(s)>=<N'(s),T(s)>=-1,$

$< N''(s), N(s) > =< -T'(s) + \tau(s)L'(s), N(s) >$

$= < -T'(s), N(s) > + \tau(s) < L'(s), N(s) >$

$= -1 + \tau^2(s),$

$< L''(s), W(s) > = < \tau(s)N'(s) + \sigma(s)W'(s), W(s) >$

$= \tau(s) < N'(s), W(s) > + \sigma(s) < W'(s), W(s) >$

$= 0$

ve

$< W''(s), N(s) > = \sigma(s)L'(s), N(s) >$

$= \sigma(s) < L'(s), N(s) >$

$= \tau(s)\sigma(s)$

bulunur. Benzer şekilde diğer eşitliklerde işlemler tekrarlanarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.34. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır.

$\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$T(s)= (\lambda'(s)-\mu(s))T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+ \tau(s)\, \mu(s))L(s)$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \quad \mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ dır. Bu eşitlik ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s) = 0$ olduğu görülür. Bu durum $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ olması ile çelişir. Dolayısıyla {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

Teorem 4.2.35. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s),\ (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

şeklindedir ve burada $\tau(s)=\dfrac{-(s+z_1)}{z_2}$, ($z_2 \neq 0$ bir sabit) dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)+\tau(s)\ \mu(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)+\mu(s)\sigma(s)W(s)$$

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)\sigma(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur. Buradan $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_2$ dir. Ayrıca $\lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0 \Rightarrow (s+z_1)+ \tau(s)z_2=0$

$$\Rightarrow \tau(s)=\frac{-(s+z_1)}{z_2}\ ,(z_2 \neq 0 \text{ bir sabit})$$

dir. O halde α eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.36. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve birinci binormal vektör alanı L(s) timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)= z_1W(s),\ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+ \lambda(s)N(s)+\sigma(s)\mu(s)L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur ve denklemler çözülürse $\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 0$ olmalıdır. Bu durum $\lambda'(s) = 1$ olması ile çelişir. Ayrıca $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Dolayısıyla

$$\alpha(s)= z_1W(s)$$

bulunur.

Teorem 4.2.37. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {N(s), L(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)+z_1L(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

olup ve diğer α eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için,

$$T(s) = -\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)+ \tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+ \mu'(s))L(s)+\sigma(s)\mu(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. Bu değerler $\lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\tau(s)\mu(s)=0$ için iki durum söz konusudur:

i) $\tau(s)=0$ ise $\mu'(s) = 0$ olur. $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Bu durumda bir eğri

$$\alpha(s)=-N(s)+z_1L(s)$$

olarak bulunur.

ii) $\mu(s)=0$ ise $\mu'(s) = 0$ olur. Bu da diğer bir eğri olan

$$\alpha(s)=-N(s)$$

dir.

Teorem 4.2.38. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {N(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)+ z_1W(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için,

$$T(s)= \lambda(s)T(s)+ \lambda'(s)N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\sigma(s)\mu(s))L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) - \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri mevcuttur. Denklemler çözülürse $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)= z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\lambda(s) = -1$ ve $\mu(s)= z_1$ değerleri yerine yazılırsa

$$\alpha(s)= -N(s)+ z_1W(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.39. α, IR_1^4 de timelike bir eğri birinci binormal vektör alanı L(s) timelike ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)}olsun. α eğrisi bu çatının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında yatmaz.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)L(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)L(s) + \lambda(s)L'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

bulunur. Özel olarak $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \tau(s)\,\lambda(s)N(s)+(\lambda'(s)+ \sigma(s)\mu(s))L(s)+(\sigma(s)\lambda(s)+ \mu'(s))W(s)$$

elde edilir. Eğrinin sağ tarafında yer alan denklemde T(s) teğet vektörü bulunmadığı için denklem çözümü mevcut değildir. Dolasıyla α eğrisi {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında yatmaz.

Teorem 4.2.40. IR_1^4 de birinci binormal vektör alanı L(s) ve α timelike eğrisi verilmiş olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)L(s)+ \varphi(s)\,L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için,

$$T(s)=(\lambda'(s)-\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s)+\tau(s)\varphi(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\varphi'(s))L(s)+ \sigma(s)\,\varphi(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) + \tau(s)\varphi(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0, \\ \sigma(s)\,\varphi(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Denklemler çözülürse $\varphi(s) = 0$ ise $\varphi'(s) = 0$ dır. Buradan $\tau(s)\mu(s) = 0$ elde edilir. O halde burada iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s) = 0$ olursa $\mu'(s) = 0$ olur. $\varphi(s)$ ve $\mu'(s)$ eşitlikleri ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s)=0$ elde edilir. $\lambda(s)=0$ ise $\lambda'(s)=0$ dır. Bu durum birinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ olması ile çelişir.

ii) $\tau(s)=0$ ise $\varphi'(s) = 0$ ve $\varphi(s) = z_1$ olur ($z_1 = 0$). $\mu(s) \neq 0$ bir sabit olduğundan $\mu'(s) = 0$, $\lambda(s)=0$ ve $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ ise $\mu(s) = -1$ olarak bulunur. Böylece bu şartları sağlayan ve {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)$$

dir.

Teorem 4.2.41. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s + z_2)T(s)+z_1W(s)\ , \ (z_1, z_2 \text{ sabitler})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$$T(s)=(\lambda'(s)- \mu(s))T(s)+(\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+ \sigma(s)\varphi(s))L(s)+ \varphi'(s)W(s)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki denklemler mevcuttur:

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) + \sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \varphi'(s) = 0. \end{cases}$$

Eğer $\varphi'(s) = 0$ ise $\varphi(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\tau(s)\mu(s) + \sigma(s)\varphi(s) = 0$
$\mu(s) = 0$ ise $\sigma(s)z_1 = 0$ olup $\sigma(s) = 0$ olur.
$\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ ve $\mu(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 1$ olup $\lambda(s)= s + z_2$, (z_2 sabit) dir.
O halde {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s + z_2)T(s)+z_1W(s)$$

dir.

Teorem 4.2.42. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve L(s) birinci binormal teğet vektör alanı timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s) = -N(s) - z_1 W(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s) + \varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s) + \varphi'(s)W(s) + \varphi(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s)=-\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)+\tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)-\sigma(s)\varphi(s))L(s)+$
$(\sigma(s)\mu(s)+\varphi'(s))W(s)$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri vardır. $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ olur. $\lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0$ ise $\tau(s)\mu(s) = 0$ dır. Burada iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s) = 0$ ise $\varphi'(s)=0$ dır. $\varphi(s)=z_1$, (z_1 sabit) olur.

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s)=0$

$\Rightarrow -\tau(s) - \sigma(s)z_1 = 0$

elde edilir.

ii) $\tau(s) = 0$ ise $\mu(s) \neq 0$ olmak üzere

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0$ ise $\sigma(s)\varphi(s) = 0$ olur

Böylece $\lambda(s) = -1$, $\mu(s) = 0$ ve $\varphi(s) = z_1$ için {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s) = -N(s) - z_1 W(s)$$

dir.

iv) IR_1^4 de {T(s), N(s), L(s), W(s)}Frenet çatısı için W(s) ikinci binormal vektör alanının timelike olma durumunda

$$\begin{cases} \quad\quad\quad < W(s), W(s) > = -1, \\ < T(s), T(s) > = < N(s), N(s) > =< L(s), L(s) > = 1 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan bir timelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) & 0 \\ 0 & -\tau(s) & 0 & \sigma(s) \\ 0 & 0 & \sigma(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ L \\ W \end{bmatrix}$$

için

$T'(s)= \kappa(s)N(s)$,

$N'(s)=-\kappa(s)T(s)+ \tau(s)L(s)$,

$L'(s)= -\tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s)$,

$W'(s)=\sigma(s)L(s)$

şeklinde tanımlanmıştır (Önder ve diğerleri, 2013).

Teorem 4.2.43. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve W(s) ikinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısı ve $\kappa(s)$=1 için Frenet denklemleri;

$T'(s)= N(s)$,

$N'(s)=-T(s)+ \tau(s)L(s)$,

$L'(s)= -\tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s)$,

$W'(s)=\sigma(s)L(s)$

dir.

Teorem 4.2.44. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisinin Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} ve ikinci binormal vektör alanı W(s) timelike olmak üzere

$$\begin{cases} < T(s), N(s) > = 0, \\ < N(s), L(s) > = 0, \\ < L(s), W(s) > = 0 \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: İkinci binormal vektör alanının timelike olma şartları ve Teorem 4.2.43 göz önüne alınarak Teorem 4.2.44 ün ispatı aşağıdaki gibidir.

$<T(s),T(s)>=1$

$\Rightarrow < T'(s)\,, T(s) >=0$

$\Rightarrow <T(s), N(s)>=0$

bulunur. Benzer şekilde

$< N(s), N(s) >=1$

$\Rightarrow < N'(s), N(s) >=0$

$\Rightarrow <-T(s)+ \tau(s)L(s), N(s)>=0$, $(\tau(s) \neq 0)$

$\Rightarrow <N(s), L(s)>=0$

ve

$< W(s), W(s) >=-1$

$\Rightarrow < W'(s), W(s) >=0$

$\Rightarrow < \sigma(s)L(s), W(s)>=0$, $(\sigma(s) \neq 0)$

$\Rightarrow <L(s), W(s)>=0$

dır.

Teorem 4.2.45. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisinin teğet, normal, birinci binormal ve ikinci binormal timelike vektör alanları arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\begin{cases} < T(s), L(s) >= 0, \\ < N(s), W(s) >= 0, \\ < T(s), W(s) >= 0 \end{cases}$$

İspat: İkinci binormal vektör alanının timelike olma durumu ve Teorem 4.2.44 kullanılarak $< N(s), W(s) > = 0$ için her iki tarafın s parametresine göre türevi alınırsa

$<N'(s), W(s)>+<N(s), W'(s)>=0$

$\Rightarrow <-T(s)+ \tau(s)L(s), W(s)>+<N(s), \sigma(s)L(s) >=0$

$\Rightarrow -<T(s), W(s)>+ \tau(s)<L(s), W(s)>+ \sigma(s)<N(s), L(s)>=0$

$\Rightarrow <T(s), W(s)>=0$

elde edilir. Benzer şekilde diğer ifadelerinde türevi alınarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.46. IR_1^4 de verilen α timelike bir eğri olsun. Teğet, normal, birinci binormal ve ikinci binormal timelike vektör alanları arasında bağıntıları geçerlidir:

$$\begin{cases} < N'(s), L(s) >= \tau(s) = -< L'(s), N(s) >, \\ < L'(s), W(s) >= -\sigma(s) = -< W'(s), L(s) >, \\ < N'(s), T(s) > = -1 = -< T'(s), N(s) >, \\ < T'(s), T(s) > =< T'(s), L(s) > =< T'(s), W(s) > =< N'(s), N(s) > = 0, \\ < N'(s), W(s) > = < L'(s), T(s) > =< L'(s), L(S) > =< W'(s), T(s) > = 0, \\ < W'(s), N(s) > =< W'(s), W(s) > = 0. \end{cases}$$

İspat: $< T'(s), T(s) >=<T(s),N(s)>=0$,

$< T'(s), N(s) >=<N(s),N(s)>=1$,

$< N'(s), L(s) >=<-T(s)+\tau(s)L(s),L(s)>$

$=-<T(s),L(s)>+ \tau(s)<L(s),L(s)>$

$=\tau(s)$,

$<L'(s),N(s)> = <-\tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s),N(s)>$

$=-\tau(s) <N(s),N(s)>+\sigma(s)<W(s),W(s)>$

$= -\tau(s)$

ve

$<W'(s), W(s)> = < \sigma(s)L(s),W(s)>$

$= \sigma(s)<L(s),W(s)>$

$= 0$

elde edilir. Diğer ifadelerde benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 4.2.47. IR_1^4 de verilen α timelike eğrisinin tanjant, normal, birinci binormal ve ikinci binormal timelike vektör alanları arasında

$$\begin{cases} < T''(s), T(s) > = -1, \\ < L''(s), L(s) > = -\tau^2(s) + \sigma^2(s), \\ < W''(s), W(s) > = -\sigma^2(s), \\ < T''(s), N(s) > =< T''(s), W(s) > =< N''(s), T(s) > =< N''(s), L(s) > = 0, \\ < L''(s), N(s) > =< L''(s), W(s) > =< W''(s), T(s) > =< W''(s), L(s) > = 0, \\ < T''(s), L(s) > = \tau(s) =< L''(s), T(s) >, \\ < N''(s), N(s) > = -1 - \tau^2(s), \\ < N''(s), W(s) > = -\tau(s)\sigma(s) =< W''(s), N(s) > \end{cases}$$

bağıntıları vardır.

İspat: $< T''(s), T(s) > =< N'(s), T(s) > =-1$,

$< N''(s), N(s) > =< -T'(s)+ \tau(s)L'(s),N(s)>$

$=< -T'(s), N(s)>+ \tau(s)< L'(s), N(s) >$

$$=-1-\tau^2(s),$$

$$< L''(s), W(s) >=< -\tau(s)N'(s)+ \sigma(s)W'(s), W(s) >$$

$$=-\tau(s) < N'(s), W(s) >+ \sigma(s) < W'(s), W(s) >$$

$$=0$$

ve

$$<W''(s), N(s) >=\sigma(s) <L'(s , N(s)>$$

$$=\sigma(s)<L'(s),N(s)>$$

$$=-\tau(s)\sigma(s)$$

dir. Diğer ifadeleri ispatlamak için aynı adımlar izlenir.

Teorem 4.2.48. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve W(s) ikinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

İspat: α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)N(s) eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır.

α(s) eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. Eğrinin hız vektörü T(s) ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s)= (\lambda'(s)-\mu(s))T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+ \tau(s)\, \mu(s))L(s)$

bulunur. Böylece;

$$\begin{cases} \lambda'(s)-\ \mu(s)=1, \\ \lambda(s)+\ \mu'(s)=0, \\ \quad \mu(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri çözülürse $\mu(s)=0$ ise $\mu'(s)=0$ dır. Bu eşitlik ikinci denklemde yerine yazılırsa buradan $\lambda(s)=0$ olduğu elde edilir. Bu ise $\lambda'(s)-\ \mu(s)=1$ olması ile çelişir. Dolayısıyla {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

Teorem 4.2.49. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve W(s) ikinci binormal vektör alanı timelike olsun. O zaman α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s),L(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s)\ , (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. Hız vektörü T(s) ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)-\tau(s)\,\mu(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)+\mu(s)\sigma(s)W(s)$$

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) - \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)\sigma(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Buradan $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$,(z_1 bir sabit) dir. $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_2$,(z_2 bir sabit) dir. Ayrıca $\lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0$ ise

$\tau(s)=\dfrac{-(s+z_1)}{z_2}$, ($z_2 \neq 0$ bir sabit) olur. O zaman aranan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s)$$

olarak bulunur**.**

Teorem 4.2.50. IR_1^4 de α timelike bir eğri ve W(s) timelike vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)= z_1W(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Eğrinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+ \lambda(s)N(s)+\sigma(s)\mu(s)L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ \mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

dır. $\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 0$ olmalıdır. Bu durum $\lambda'(s) = 1$ olması ile çelişir. Ayrıca $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Dolayısıyla

$$\alpha(s)= z_1 W(s)$$

bulunur.

Teorem 4.2.51. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve W(s) timelike vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {N(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrileri

$$\alpha(s)=-N(s)$$

veya

$$\alpha(s)=N(s)+z_1L(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$$T(s) = -\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)- \tau(s) \mu(s))N(s)+(\tau(s) \lambda(s)+ \mu'(s))L(s)+\sigma(s)\mu(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = -1, \\ \lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. Bu değerler $\lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\tau(s)\mu(s)=0$ için iki durum söz konusu olur:

Eğer $\tau(s)=0$ ise $\mu'(s) = 0$ olur. $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Bu durumda bir eğri

$$\alpha(s)=N(s)+z_1L(s)$$

olarak bulunur. İkinci eğri

$\mu(s) =0$ ise $\mu'(s) = 0$ için

$$\alpha(s)=-N(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.52. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve W(s) ikinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {N(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)+z_1W(s), \ \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s)=\lambda(s)N(s)+\mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)N(s)+\lambda(s)N'(s)+\mu'(s)W(s)+\mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$$T(s)=-\lambda(s)T(s)+\lambda'(s)N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\sigma(s)\mu(s))L(s)+\mu'(s)W(s)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} -\lambda(s)=1, \\ \lambda'(s)=0, \\ \tau(s)\lambda(s)+\sigma(s)\mu(s)=0, \\ \mu'(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri mevcuttur. $\mu'(s)=0$ ise $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\lambda(s)=-1$ ve $\mu(s)=z_1$ değerleri yerlerine yazılırsa α eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)+z_1W(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.53. IR_1^4 de α timelike bir eğrisi α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} ve W(s) ikinci binormal vektör alanı timelike olsun. O zaman α eğrisi bu çatının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında yatmaz.

İspat: $\alpha(s)=\lambda(s)L(s)+\mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)L(s)+\lambda(s)L'(s)+\mu'(s)W(s)+\mu(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)=\tau(s)\lambda(s)N(s)+(\lambda'(s)+\sigma(s)\mu(s))L(s)+(\sigma(s)\lambda(s)+\mu'(s))W(s)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında yer alan denklemde T(s) teğet vektörü bulunmadığı için denklem çözümü mevcut değildir. Dolasıyla α eğrisi {T(s),N(s),L(s),W(s)} Frenet çatısının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında yatmaz.

Teorem 4.2.54. IR_1^4 de α timelike eğrisi W(s) timelike vektör alanı verilmiş olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s) = -N(s)$$

dir.

İspat : $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \varphi(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s) + \varphi'(s)L(s) + \varphi(s)\, L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$$T(s)=(\lambda'(s)-\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s)-\tau(s)\varphi(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\varphi'(s))L(s)+\sigma(s)\,\varphi(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) - \tau(s)\varphi(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0, \\ \sigma(s)\,\varphi(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur ve bu denklemler çözülürse $\varphi(s) = 0$ ise $\varphi'(s) = 0$ dır. $\tau(s)\mu(s) = 0$ dır. O halde burada iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s) = 0$ olursa $\mu'(s) = 0$ olur. $\varphi(s)$ ve $\mu'(s)$ eşitlikleri ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s)=0$ elde edilir. $\lambda(s)=0$ ise $\lambda'(s)=0$ dır. Bu durum birinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ olması ile çelişir.

ii) $\tau(s)=0$ ise $\varphi'(s) = 0$ ve $\varphi(s) = z_1$ olur, ($z_1 = 0$). $\mu(s) \neq 0$ bir sabit olduğundan $\mu'(s) = 0$, $\lambda(s)=0$ ve $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ ise $\mu(s) = -1$ elde edilir

Tüm bu şartları sağlayan {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğri

$$\alpha(s) = -N(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.55. α, IR_1^4 de timelike bir eğri ve W(s) timelike vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} nin gerdiği {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_2)T(s)+z_1W(s), \ (z_1, z_2 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$$T(s)=(\lambda'(s)-\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\sigma(s)\varphi(s))L(s)+\varphi'(s)W(s)$$

olup böylece

$$\begin{cases} \lambda'(s)-\mu(s)=1, \\ \lambda(s)+\mu'(s)=0, \\ \tau(s)\mu(s)+\sigma(s)\varphi(s)=0, \\ \varphi'(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur ve denklemler çözülürse $\varphi'(s)=0$ ise $\varphi(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\tau(s)\mu(s)+\sigma(s)\varphi(s)=0$ denkleminde $\mu(s)=0$ ise $\sigma(s)z_1=0$ olup $\sigma(s)=0$ olur ve ayrıca $\lambda'(s)-\mu(s)=1$ ve $\mu(s)=0$ ise $\lambda'(s)=1$ olup $\lambda(s)=s+z_2$, (z_2 sabit) olduğu görülür. O halde buradan {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_2)T(s)+z_1W(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.2.56. α, IR_1^4 de timelike bir eğri, W(s) bir timelike vektör alanı ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)}olsun. Bu çatının gerdiği {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$=T(s) ve $\kappa(s)$=1 olarak alınırsa

$T(s)=-\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)\tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)\sigma(s)\varphi(s))L(s)+$

$(\sigma(s)\mu(s)+\varphi'(s))W(s)$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözülürse $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ olur. $\lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0$ ise $\tau(s)\mu(s) = 0$ dır. O halde iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s) = 0$ ise $\varphi'(s)$=0 ve $\varphi(s)=z_1$ olur.

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s)$=0 ise $-\tau(s) - \sigma(s)z_1 = 0$ bulunur. Burada z_1 bir sabittir.

ii) $\tau(s) = 0$ ve $\mu(s) \neq 0$ olmak üzere

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0$ ise $\sigma(s)\varphi(s) = 0$ elde edilir. Böylece

$\lambda(s) = -1$, $\mu(s) = 0$ ise $\varphi(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) için {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s)=-N(s) - z_1W(s)$$

biçimindedir.

Timelike Eğrilerin Sınıflandırılması

i) Bu kısımda IR_1^3 de bir timelike eğrinin T(s) teğet vektör alanının timelike olması halindeki bir sınıflandırması aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.1. IR_1^3 Lorentz uzayda timelike eğri

Vektör Alanının Durumu	**Alt uzay**	**Eğrinin Durumu**
T(s) Timelike	{T(s), N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar

ii) Bu kısımda IR_1^4 de timelike bir eğrinin teğet, normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanlarının timelike olması halindeki bir sınıflandırılması aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.2. IR_1^4 Lorentz uzayda timelike eğriler

Vektör Alanının Durumu	Alt Uzay	Eğrinin Durumu
T(s) Timelike	{T(s), N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{T(s),W(s)}	Yatmaz
	{N(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), W(s)}	Yatar
	{L(s), W(s)}	Yatmaz
	{T(s), N(s), L(s)}	Yatar
	{T(s), N(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s), W(s)}	Yatar
N(s) Timelike	{T(s), N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{T(s),W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), W(s)}	Yatar
	{L(s), W(s)}	Yatmaz
	{T(s), N(s), L(s)}	Yatar
	{T(s), N(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s), W(s)}	Yatar
L(s) Timelike	{T(s),N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{T(s),W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), W(s)}	Yatar
	{L(s), W(s)}	Yatmaz
	{T(s), N(s), L(s)}	Yatar
	{T(s), N(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s), W(s)}	Yatar

Çizelge 4.2. IR_1^4 Lorentz uzayda timelike eğriler (devam)

Vektör Alanının Durumu	**Alt uzay**	**Eğrinin Durumu**
W(s) Timelike	{T(s), N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{T(s),W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), W(s)}	Yatar
	{L(s), W(s)}	Yatmaz
	{T(s), N(s), L(s)}	Yatar
	{T(s), N(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s), W(s)}	Yatar

4.3. IR_1^3 Lorentz Uzayda Spacelike Eğriler

Durum 1. IR_1^3 de {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısında N(s) normal vektör alanının null olması durumunda

$$\begin{cases} \langle T(s), T(s)\rangle = \langle N(s), L(s)\rangle = 1 \\ \langle N(s), N(s)\rangle = \langle L(s), L(s)\rangle = \langle T(s), N(s)\rangle = \langle T(s), L(s)\rangle = 0 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan spacelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ L(s) \end{bmatrix}$$

için

$$T'(s) = \kappa(s)N(s),$$

$$N'(s) = \tau(s)N(s),$$

$$L'(s) = -\kappa(s)T(s) - \tau(s)L(s)$$

şeklinde tanımlanmıştır (İlarslan ve Kılıç Aslan, 2017).

Teorem 4.3.1. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} olsun. Burada T(s), N(s), L(s) sırasıyla teğet(tanjant), normal ve binormal vektör alanlarıdır. κ(s)=1 ve her s parametresi için Frenet denklemleri;

$$\begin{aligned} T'(s) &= N(s), \\ N'(s) &= \tau(s)N(s), \\ L'(s) &= -T(s) - \tau(s)L(s) \end{aligned}$$

biçimindedir.

İspat: Spacelike eğri tanımında verilen birinci Frenet eğriliği κ(s)=1 alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri olsun. Sırasıyla T(s), N(s), L(s) teğet, normal, binormal vektör alanları için α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} ise o zaman birinci ve ikinci Frenet eğrilikleri

$$\begin{cases} \kappa(s) = \langle T'(s), L(s)\rangle, \\ \tau(s) = \langle N'(s), L(s)\rangle \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: Birinci Frenet eğriliği

$$\langle T'(s), L(s)\rangle = \langle \kappa(s)N(s), L(s)\rangle$$

$= \kappa(s) < N(s), L(s) >$

$= \kappa(s)$

ve ikinci Frenet eğriliği

$< N'(s), L(s) > = < \tau(s)N(s), L(s) >$

$= \tau(s)$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.3.3. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} olsun. Burada T(s), N(s), L(s) sırasıyla teğet(tanjant), normal ve binormal vektör alanlarıdır. Birinci Frenet eğriliği $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa, her s parametresi için

$$\begin{cases} < T'(s), T(s) > = < T'(s), N(s) > = < N'(s), T(s) > = 0, \\ < L'(s), L(S) > = < N'(s), N(s) > = 0, \\ < T'(s), L(s) > = 1 = -< L'(s), T(s) >, \\ < N'(s), L(s) > = \tau(s) = -< L'(s), N(s) > \end{cases}$$

dir.

İspat: Bu ispatta Teorem 4.3.1 deki $T'(s)$, $N'(s)$, $L'(s)$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$<T'(s), T(s)> = 0$

$\Rightarrow <T(s), N(s)> = 0$ ve $< N'(s), L(s) > = < \tau(s)N(s), L(s) >$

$= \tau(s) < N(s), L(s) >$

$= \tau(s)$

ve

$< L'(s), T(s) > = < -T(s) - \tau(s)L(s), T(s) >$

$= -< T(s), T(s) > - \tau(s) < L(s), T(s) >$

$= -1$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitlikler içinde aynı işlemler yapılarak istenen sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.1.4. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri olsun ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} olsun. Burada T(s), N(s), L(s) sırasıyla teğet(tanjant), normal ve binormal vektör alanlarıdır. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\begin{cases} < L''(s), L(s) > = -1, \\ < N''(s), L(s) > = \tau^2(s) =< L''(s), N(s) >, \\ < T''(s), T(s) > = < T''(s), N(s) > = < N''(s), N(s) > =< N''(s), T(s) > = 0, \\ < T''(s), L(s) > = \tau(s) =< L''(s), T(s). \end{cases}$$

İspat: $<T''(s), T(s)>$ için , $T''(s) = N'(s)$ olduğu kullanılırsa

$\Rightarrow <T''(s), T(s)>=0$

ve

$<L''(s), T(s)>$ için $L''(s)=-T'(s) - \tau(s)L'(s)$ eşitliği kullanılırsa

$<L''(s), T(s)> = \tau(s)$

olduğu elde edilir. Böylece benzer şekilde diğerleri de görülür.

Teorem 4.3.5. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri olsun. α nın {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = (s+z_2)T(s)+(-\frac{s^2}{2} - z_2 + z_3)N(s), \ (z_2, z_3 \text{ sabit})$$

veya

$$\alpha(s) = (s+z_2)T(s)+ (\frac{1+\tau(s)+z_2\tau(s)}{\tau^2(s)} + z_1 e^{\tau(s)})N(s), \ (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır.

α eğrisinde eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s)+ \mu(s)\,\tau(s))N(s)$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) + \mu(s)\,\tau(s) = 0 \end{cases}$$

denklemlerinde $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s+z_2$, (z_2 bir sabit) dir. $\lambda(s) + \mu'(s) + \mu(s)\,\tau(s) = 0$ denkleminde;

i) $\tau(s) = 0$ alınırsa $\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ olup buradan

$\mu'(s) = -\lambda(s)$ olur. Buradan denklem çözülürse $\mu(s) = -\frac{s^2}{2} - z_2 + z_3$, ($z_2, z_3$ sabit) olarak bulunur. $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ değerleri denklemde yerine yazılırsa

$$\alpha(s) = (s+z_2)T(s)+(-\frac{s^2}{2} - z_2 + z_3)N(s)$$

elde edilir.

ii) $\tau(s) \neq 0$ olursa $\mu'(s) + \mu(s)\,\tau(s) = -\,(s+z_2)$ olup denklem çözüldüğünde $\mu(s) = \frac{1+\tau(s)+z_2\tau(s)}{\tau^2(s)} + z_1 e^{\tau(s)})$ elde edilir. O halde {T(s), N(s)}alt uzayında yatan bir diğer eğri ise

$$\alpha(s) = (s+z_2)T(s)+ (\frac{1+\tau(s)+z_2\tau(s)}{\tau^2(s)} + z_1 e^{\tau(s)})N(s)$$

dir.

Teorem 4.3.6. IR_1^3 de spacelike eğri α ve α nın {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısının {T(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s) = -L(s)$$

dir.

İspat: α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)L(s) eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. α′(s)=T(s) ve κ(s)=1 olarak alınırsa

$$T(s)= (\lambda'(s)- \mu(s))T(s)+\lambda(s)N(s)+(\mu'(s)-\tau(s)\mu(s))L(s)$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ \mu'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözülürse $\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s)=0$ dır. $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ denkleminden $\mu(s) = -1$ ise $\mu'(s) = 0$ olur. Böylece $\tau(s) = 0$ elde edilir. O halde {T(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğri

$$\alpha(s) = -L(s)$$

dir.

Teorem 4.3.7. α, IR_1^3 de spacelike eğri ve α nın Frenet çatısı $\{T(s), N(s), L(s)\}$olmak üzere bu çatının $\{N(s), L(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)= z_1 N(s)- L(s) , \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$=T(s) ve $\kappa(s)$=1 için

$$T(s)= -\mu(s)T(s)+(\lambda'(s)+\tau(s)\lambda(s))N(s)+(\mu'(s)-\mu(s)\, \tau(s))L(s)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} -\mu(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\lambda(s) = 0, \\ \mu'(s) - \mu(s)\, \tau(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözülürse $\mu(s) = -1$ ise $\mu'(s) = 0$ dır. Burada $\mu'(s) - \mu(s)\tau(s) = 0$ denkleminin sağlanması için $\tau(s) = 0$ olmalıdır.

Bu da $\lambda'(s) + \tau(s)\lambda(s) = 0$ eşitliğinde $\lambda'(s)$=0 ve $\lambda(s)= z_1$ (z_1 bir sabit) olması demektir. O halde $\{T(s), N(s), L(s)\}$ Frenet çatısının $\{N(s), L(s)\}$ alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)= z_1 N(s)- L(s)$$

olarak bulunur.

Durum 2. IR_1^3 de {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısında N(s) normal vektör alanının timelike olması durumunda

$$\begin{cases} <T(s),T(s)> = <L(s),L(s)> = 1 \\ <N(s),N(s)> = -1 \\ <T(s),N(s)> =<T(s),L(s)> =<N(s),L(s)> = 0 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan bir spacelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ L(s) \end{bmatrix}$$

için

$T'(s)= \kappa(s)N(s)$,

$N'(s)=\kappa(s)T(s) + \tau(s)L(s)$,

$L'(s)= \tau(s)N(s)$

şeklinde tanımlanmıştır (İlarslan, 2005).

Teorem 4.3.8. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve N(s) normal vektör alanının timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısının birinci Frenet eğriliği κ(s)=1 için Frenet denklemleri;

$$\begin{aligned} T'(s) &= N(s), \\ N'(s) &= T(s) + \tau(s)L(s), \\ L'(s) &= \tau(s)N(s) \end{aligned}$$

biçimindedir.

İspat: Spacelike bir eğri ve N(s) normal vektörü alanının timelike olması durumu için tanımlanan Frenet denklemlerinde birinci Frenet eğriliği κ(s)=1 olarak alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.9. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve normal vektör alanı timelike olsun. Sırasıyla T(s), N(s), L(s) teğet, normal, binormal vektör alanları için α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} ise o zaman α nın birinci ve ikinci Frenet eğrilikleri

$$\begin{cases} \kappa(s) = -<T'(s),N(s)>, \\ \tau(s) = -<L'(S),N(s)> \end{cases}$$

şeklinde mevcuttur.

İspat: $<T'(s),N(s)> = <\kappa(s)N(s),N(s)>$

$= \kappa(s)<N(s),N(s)>$

$=-\kappa(s)$

ve

$< L'(s), N(s) >=< \tau(s)N(s), N(s)>$

$=\tau(s) < N(s), N(s) >$

$=-\tau(s)$

dir.

Teorem 4.3.10. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve normal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} ve birinci Frenet eğriliği κ(s)=1 için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\begin{cases} < T'(s), T(s) >=< T'(s), L(s) > = < N'(s), N(s) > = 0, \\ < L'(s), T(s) >=< L'(s), L(S) > = 0, \\ < N'(s), T(s) > = -1 =< T'(s), T(s) >, \\ -< L'(s), N(s) > = \tau(s) =< N'(s), L(s) >. \end{cases}$$

İspat: $< T'(s), T(s) >$ = <T(s),N(s)>=0,

$< N'(s), L(s) > =< T(s) + \tau(s)L(s), L(s) >$

$=< T(s), L(s) > + \tau(s) < L(s), L(s) >$

$= \tau(s)$

ve

$< L'(s), L(S) > =< \tau(s)N(s), L(s) >$

$=\tau(s) < N(s), L(s) >$

$=0$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gerçeklenir.

Teorem 4.3.11. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve N(s) normal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\begin{cases} < T''(s), T(s) > = -1, \\ < N''(s), N(s) > = 1 - \tau^2(s), \\ < T''(s), N(s) > = < N''(s), L(s) > = < N''(s), T(s) > =< L''(s), N(s) > = 0, \\ < T''(s), L(s) > = \tau(s) = -< L''(s), T(s) >, \\ < L''(s), L(s) > = \tau^2(s). \end{cases}$$

İspat: $< T''(s), T(s) > =< N'(s), T(s) > = -1,$

$<N''(s), N(s) > = < -T'(s) + \tau(s)L'(s), N(s) >$

$$=-< T(s, N(s) > + \tau(s) < L'(s), N(s) >$$
$$= 1 - \tau^2(s)$$

ve

$$< L''(s), N(s) > = < \tau(s)N'(s), N(s) >$$
$$= \tau(s) < N'(s), N(s) >$$
$$=0$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde ispatlanır.

Teorem 4.3.12. IR_1^3 de spacelike bir eğri α ve α nın normal vektör alanı timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s)}alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

İspat: α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)N(s) eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır.

α eğrisinde eşitliğin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. α′(s)=T(s) ve κ(s)=1 için

$$T(s)= (\lambda'(s)- \mu(s))T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+ \tau(s)\, \mu(s))L(s)$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \quad\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri vardır. Eğer μ(s)=0 ise $\mu'(s)$=0 olur. İkinci eşitlikte $\mu'(s)$=0 yerine yazılırsa λ(s)=0 elde edilir. Bulunan bu değerler birinci denklemde yerine yazıldığında $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ olması ile çelişir. Dolayısıyla seçmiş olduğumuz α spacelike eğrisi {T(s),N(s)} nin gerdiği alt uzayda yatmaz.

Teorem 4.3.13. α, IR_1^3 de spacelike eğri ve onun normal vektör alanı timelike olsun {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısının {T(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z)T(s)+z_1L(s)\ , (z,\ z_1 \text{ sabit })$$

dir.

İspat: α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)L(s) eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)+\tau(s)\, \mu(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)$$

bulunup

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s)=s+z$, (z bir sabit) dir. $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Dolasıyla

$$\alpha(s)=(s+z)T(s)+z_1L(s)$$

eğrisi {T(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatar.

Teorem 4.3.14. α, IR_1^3 de spacelike eğri ve eğrinin normal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)}olmak üzere bu çatının {N(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)+ zL(s), \quad \text{(z bir sabit)}$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= -\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)+\tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+ \mu'(s))L(s)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. Bu durumda $\lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0$ denkleminin sağlanması için $\tau(s)\mu(s) =0$ olmalıdır. Burada iki durum söz konusudur.

i) Eğer $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ dır. $\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ ise $\tau(s) = 0$ dır.

ii) Eğer $\tau(s) = 0$ olursa $\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ dır ve buradan $\mu'(s) = 0$ olup $\mu(s)$=z olup (z bir sabit) bulunur. Dolasıyla $\lambda(s) = -1$ ve $\mu(s)$=z için {N(s), L(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s) = -N(s) + zL(s)$$

dir.

Durum 3. IR_1^3 de {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısında L(s) binormal vektör alanının timelike olma durumunda

$$\begin{cases} < T(s), T(s) > = < N(s), N(s) > = 1, \\ < L(s), L(s) > = -1, \\ < T(s), N(s) > =< T(s), L(s) > =< N(s), L(s) > = 0 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan spacelike bir eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ L(s) \end{bmatrix}$$

için

$T'(s) = \kappa(s)N(s),$

$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)L(s),$

$L'(s) = \tau(s)N(s)$

şeklinde tanımlanmıştır (İlarslan, 2005).

Teorem 4.3.15. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve L(s) binormal vektör alanı timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısının birinci Frenet eğriliği $\kappa(s)=1$ ve her s parametresi için Frenet denklemleri;

$$\begin{aligned} T'(s) &= N(s), \\ N'(s) &= -T(s) + \tau(s)L(s), \\ L'(s) &= \tau(s)N(s) \end{aligned}$$

biçimindedir.

İspat: Spacelike bir eğri ve L(s) binormal vektör alanının timelike olması durumu için tanımlanan Frenet denklemlerinde $\kappa(s)=1$ için ispat yapılmış olur.

Teorem 4.3.16. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri olsun. Sırasıyla T(s), N(s), L(s) teğet, normal, binormal vektör alanları için α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} ise o zaman spacelike eğrinin birinci ve ikinci Frenet eğrilikleri

$$\begin{cases} \kappa(s) =< T'(s), N(s) >, \\ \tau(s) =< L'(s), N(s) > \end{cases}$$

mevcuttur.

İspat: $< T'(s), N(s) > = < \kappa(s)N(s), N(s) >$

$= \kappa(s) < N(s), N(s) >$

$= \kappa(s)$

ve

$< L'(s), N(s) >=< \tau(s)N(s), N(s)>$

$=\tau(s) < N(s), N(s) >$

$=\tau(s)$

biçiminde eğrinin birinci ve ikinci Frenet eğrilikleri bulunur.

Teorem 4.3.17. IR_1^3 de α spacelike bir eğri, binormal vektör alanı L(s) timelike ve Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} olsun. κ(s)=1 ve her s parametresi için

$$\begin{cases} < T'(s), T(s) >=< T'(s), L(s) > = < N'(s), N(s) > = 0, \\ < L'(s), T(s) >=< L'(s), L(S) > = 0, \\ < N'(s), T(s) > = -1 = -< T'(s), T(s) >, \\ < L'(s), N(s) > = \tau(s) = -< N'(s), L(s) > \end{cases}$$

dir.

İspat: Spacelike bir eğrinin binormal vektör alanının timelike olması durumunda ki denklemleri kullanılırsa;

$< T'(s), T(s) > = <T(s),N(s)>=0,$

$< N'(s), L(s) > =< -T(s) + \tau(s)L(s), L(s) >$

$= -< T(s), L(s) > + \tau(s) < L(s), L(s) >$

$=-\tau(s)$

ve

$< L'(s), L(s) > =< \tau(s)N(s), L(s) >$

$=\tau(s) < N(s), L(s) >$

$=0$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitliklerde gerçeklenir.

Teorem 4.3.18. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve L(s) timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} olmak üzere Bu durumda aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\begin{cases} < T''(s), T(s) > = -1 =< N''(s), T(s) >, \\ < N''(s), N(s) > = -1 + \tau^2(s), \\ < T''(s), N(s) > = < N''(s), L(s) > =< L''(s), N(s) > = 0, \\ < T''(s), L(s) > = -\tau(s) =< L''(s), T(s) >, \\ < L''(s), L(s) > = -\tau^2(s). \end{cases}$$

İspat: $< T''(s), T(s) > =< N'(s), T(s) > = -1,$

$$< N''(s), N(s) > = < -T'(s) + \tau(s)L'(s), N(s) >$$
$$= -< T(s, N(s) > + \tau(s) < L(s), N(s) >$$
$$= -1 + \tau^2(s)$$

ve

$$< L''(s), N(s) > = < \tau(s)N'(s), N(s) >$$
$$= \tau(s) < N'(s), N(s) >$$
$$=0$$

bulunur. Benzer şekilde diğer ifadelerde türev alma işlemleri uygulanarak elde edilir.

Teorem 4.3.19. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve L(s) binormal vektör alanı timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s)}alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

İspat: α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)N(s) eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır.

α eğrisinde eşitliğin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. α′(s)=T(s) ve κ(s)=1 olarak alınırsa

$$T(s)= (\lambda'(s)- \mu(s))T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+ \tau(s)\, \mu(s))L(s)$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \quad \mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri mevcuttur. Bu denklemler çözülürse eğer μ(s)=0 ise $\mu'(s)$=0 olur. İkinci eşitlikte yerine yazılırsa λ(s)=0 elde edilir. Bulunan bu değerler birinci denklemde yerine yazıldığında $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ denklemi ile çelişir. Dolayısıyla seçmiş olduğumuz α eğrisi {T(s), N(s)} nin gerdiği alt uzayda yatmaz.

Teorem 4.3.20. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve binormal vektör alanı L(s) timelike olsun. O zaman {T(s), N(s), L(s)} Frenet çatısının {T(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z)T(s)+z_1L(s), \ (z, z_1 \text{ sabit})$$

dir. Burada $\tau(s) = \frac{-(s+z)}{z_1}$ $(z_1 \neq 0)$, (z, z_1 sabit)

olarak bulunur.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)+\tau(s)\,\mu(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s)= s+z$, (z bir sabit) ve $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Bulunan $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ değerleri ikinci denklemde yerine yazılırsa $\tau(s) =\frac{-(s+z)}{z_1}$, $(z_1 \neq 0)$ olduğu elde edilir. Dolasıyla

$$\alpha(s)=(s+z)T(s)+z_1L(s)$$

eğrisi {T(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatar.

Teorem 4.3.21. α, IR_1^3 de spacelike bir eğri ve L(s) timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)}olmak üzere bu çatının {N(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+ z_1L(s) , \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)+\tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+ \mu'(s))L(s)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Denklemler çözülürse $\lambda(s)=1$ ise $\lambda'(s)=0$ dır. Bu durumda $\lambda'(s)+\tau(s)\mu(s)=0$ denkleminin sağlanması için $\tau(s)\mu(s)=0$ olmalıdır. Burada iki durum söz konusudur.

i) Eğer $\mu(s)=0$ ise $\mu'(s)=0$ dır.

ii) Eğer $\tau(s)=0$ olursa $\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)=0$ buradan $\mu'(s)=0$ olup $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Böylece $\lambda(s)=1$ ve $\mu(s)=z_1$ için {N(s), L(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s)=N(s)+z_1 L(s)$$

dir.

4.4. IR_1^4 Lorentz Uzayda Spacelike Eğriler

Durum 1. IR_1^4 de {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısı için W(s) ikinci binormal vektör alanının timelike olma durumunda

$$\begin{cases} < W(s), W(s) > = -1, \\ < T(s), T(s) > = < N(s), N(s) > = < L(s), L(s) > = 1 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan bir spacelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) & 0 \\ 0 & -\tau(s) & 0 & \sigma(s) \\ 0 & 0 & \sigma(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ L \\ W \end{bmatrix}$$

için

$T'(s) = \kappa(s)N(s)$,

$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)L(s)$,

$L'(s) = -\tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s)$,

$W'(s) = \sigma(s)L(s)$

şeklinde tanımlanmıştır (Camcı, 2003).

Teorem 4.4.1. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} olsun. Burada T(s), N(s), L(s) ve W(s) sırasıyla teğet, normal, birinci binormal, ikinci binormal vektör alanlarıdır. Verilen önerme gereği aşağıdaki eşitlikler sağlanır. Birinci Frenet eğriliği κ(s)=1 ve her s parametresi için Frenet denklemleri;

$T'(s) = N(s)$,

$N'(s) = -T(s) + \tau(s)L(s)$,

$L'(s) = -\tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s)$,

$W'(s) = \sigma(s)L(s)$

dir.

İspat: Yukarıda verilen tanımda $\kappa(s) = 1$ alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.2. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} ve W(s) timelike olmak üzere

$$\begin{cases} < T(s), N(s) > = 0, \\ < N(s), L(s) > = 0, \\ < L(s), W(s) > = 0 \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: $<T(s),T(s)>=1$

$\Rightarrow < T'(s)\,,T(s)>=0$

$\Rightarrow <T(s),N(s)>=0$

Benzer şekilde diğer eşitliklerde elde edilir.

Teorem 4.4.3. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin teğet, normal, birinci binormal vektör alanı spacelike ve ikinci binormal vektör alanının timelike olması halinde aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\begin{cases} < T(s), L(s) >= 0, \\ < N(s), W(s) >= 0, \\ < T(s), W(s) >= 0. \end{cases}$$

İspat: Bir önceki teorem de verilen eşitliklerin türevi alınırsa

$< N(s), L(s) > = 0$

$\Rightarrow <N'(s),L(s)>+<N(s),L'(s)>=0$

$\Rightarrow <-T(s)+ \tau(s)L(s),L(s)>+<N(s),-\tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s) >=0$

$\Rightarrow <N(s),W(s)>=0$

olduğu görülür. Benzer şekilde diğer eşitliklerinde türevi alınarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.4. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin teğet, normal, birinci binormal vektör alanının spacelike ve ikinci binormal timelike vektör alanı arasında;

$$\begin{cases} < N'(s), L(s) >= -\tau(s) = -< L'(s), N(s) >, \\ < L'(s), W(s) >= \sigma(s) = -< W'(s), L(s) >, \\ -< N'(s), T(s) > = 1 =< T'(s), N(s) >, \\ < T'(s), T(s) > =< T'(s), L(s) > =< T'(s), W(s) > =< N'(s), N(s) > = 0, \\ < N'(s), W(s) > = < L'(s), T(s) > =< L'(s), L(s) > =< W'(s), T(s) > = 0, \\ < W'(s), N(s) > =< W'(s), W(s) > = 0 \end{cases}$$

bağıntıları mevcuttur.

İspat: $< T'(s), T(s) >=<T(s),N(s)>=0,$

$< T'(s), N(s) >=<N(s),N(s)>=1,$

$< N'(s), W(s) >=<-T(s)+\tau(s)L(s),W(s)>$

$=-<T(s),W(s)>+ \tau(s)<L(s),W(s)>$

$=0,$

$<L'(s),N(s)> = <- \tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s),N(s)>$

$=-\tau(s) <N(s),N(s)>+\sigma(s)<W(s),W(s)>$

$= -\tau(s)$

ve

$<W'(s), L(s)> = < \sigma(s)L(s),L(s)>$

$= \sigma(s)<L(s),L(s)>$

$= \sigma(s)$

elde edilir. Diğer eşitlikler içinde aynı işlemler tekrarlanarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.5. IR_1^4 de α spacelike eğrisinin tanjant, normal, birinci binormal vektör alanı spacelike ve ikinci binormal vektör alanı timelike arasında;

$$\begin{cases} < T''(s), T(s) > = -1, \\ < L''(s), L(s) > = -\tau^2(s) + \sigma^2(s), \\ < W''(s), W(s) > = -\sigma^2(s), \\ < T''(s), N(s) > =< T''(s), W(s) > =< N''(s), T(s) > =< N''(s), L(s) > = 0, \\ < L''(s), N(s) > =< L''(s), W(s) > =< W''(s), T(s) > =< W''(s), L(s) > = 0, \\ < T''(s), L(s) > = \tau(s) =< L''(s), T(s) >, \\ < N''(s), N(s) > = 1 - \tau^2(s), \\ < N''(s), W(s) > = \tau(s)\sigma(s) = -< W''(s), N(s) > \end{cases}$$

bağıntıları vardır.

İspat: $< T''(s), T(s) > =< N'(s), T(s) > =-1,$

$< N''(s), N(s) > =< -T'(s)+ \tau(s)L'(s),N(s)>$

$= -< T'(s),N(s)>+ \tau(s)< L'(s),N(s) >$

$=1 - \tau^2(s),$

$< L''(s), W(s) >=< -\tau(s)N'(s) + \sigma(s)W'(s), W(s) >$

$=\tau(s) < N'(s), W(s) >+ \sigma(s) < W'(s), W(s) >$

$=0$

ve

$<W''(s), N(s) >=\sigma(s)L'(s),N(s)>$

$=\sigma(s)<L'(s),N(s)>$

$=- \tau(s)\sigma(s)$

bulunur. Diğer eşitliklerde de benzer işlemler yapılarak istenilen sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.4.6. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısında W(s) ikinci binormal vektör alanı timelike olmak üzere bu Frenet çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s)= (\lambda'(s) - \mu(s))T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+ \tau(s)\,\mu(s))L(s)$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \quad \tau(s)\,\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ dır. Bu eşitlik ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ ve buradan $\lambda(s) = 0$ olduğu elde edilir. Bu $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ olması ile çelişir. Dolayısıyla {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatısının {T(s),N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

Teorem 4.4.7. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} ve W(s) timelike vektör alanı için Frenet çatısının {T(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s), \ (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)+\tau(s)\,\mu(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)+\mu(s)\sigma(s)W(s)$$

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)\sigma(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Buradan denklemler çözülürse $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_2$, (z_2 bir sabit) dir. Böylece aradığımız α(s) eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.8. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve W(s) timelike vektör alanı olsun. {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)= z_1W(s), \quad (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)W(s) eğrisini alalım. Eğrinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. α′(s)=T(s) ve κ(s)=1 olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+ \lambda(s)N(s)+\sigma(s)\mu(s)L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

olur. Böylece aşağıdaki denklemler mevcuttur:

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

Eğer $\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 0$ olmalıdır. Bu durum $\lambda'(s) = 1$ olması ile çelişir.
$\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Dolayısıyla

$$\alpha(s)= z_1W(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.4.9. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve W(s) timelike vektör alanı olsun. Eğrinin {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {N(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Verilen denkleminin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s) = -\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)-\tau(s)\,\mu(s))N(s)+(\tau(s)\,\lambda(s)+ \mu'(s))L(s)+\sigma(s)\mu(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = -1, \\ \lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur ve bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. Ayrıca $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ olur.

$$\alpha(s)=-N(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.4.10. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve α nın Frenet çatısı $\{T(s), N(s), L(s), W(s)\}$ olsun. İkinci binormal vektör alanı timelike olmak üzere Frenet çatısının $\{N(s), W(s)\}$ alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)+ z_1W(s), \quad (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= -\lambda(s)T(s)+ \lambda'(s)N(s)+(\tau(s)\,\lambda(s)+\sigma(s)\mu(s))L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

bulunur.

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \tau(s)\,\lambda(s) + \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözüldüğünde $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)= z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\lambda(s) = -1$ ve $\mu(s)= z_1$ değerleri için aranılan eğri

$$\alpha(s)= -N(s)+ z_1 W(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.11. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve W(s) timelike vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi mevcut değildir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)L(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)L(s) + \lambda(s)L'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)=-\tau(s)\,\lambda(s)N(s)+(\lambda'(s)+\sigma(s)\mu(s))L(s)+(\sigma(s)\lambda(s)+\mu'(s))W(s)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında yer alan denklemde T(s) teğet vektörü bulunmadığı için denklem çözümü mevcut değildir. Dolasıyla α eğrisi {T(s),N(s),L(s),W(s)} çatının gerdiği {L(s),W(s)} alt uzayında yatmaz.

Teorem 4.4.12. IR_1^4 de α spacelike eğrisi ve W(s) timelike vektör alanı verilmiş olsun. O zaman α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s),N(s),L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+ z_1 L(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)L(s)+ \varphi(s)\,L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)=(\lambda'(s)+\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s)+\tau(s)\varphi(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\varphi'(s))L(s)+ \sigma(s)\,\varphi(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) + \tau(s)\varphi(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0, \\ \sigma(s)\,\varphi(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\varphi(s) = 0$ ise $\varphi'(s) = 0$ dır. $\tau(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0$ ise $\tau(s)\mu(s) = 0$ olur. O halde burada iki durum söz konusudur.

i) $\mu(s) = 0$ olursa $\mu'(s) = 0$ olur. $\varphi(s)$ ve $\mu'(s)$ eşitlikleri ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s)$=0 elde edilir. $\lambda(s)$=0 ise $\lambda'(s)$=0 dır. Bu durum birinci denklemdeki $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ olması ile çelişir.

ii) $\tau(s)$=0 ise $\varphi'(s) = 0$ ve $\varphi(s) = z_1$ olur, ($z_1 = 0$). $\mu(s) = z_2$, (z_2 bir sabit) $\mu'(s) = 0$, $\lambda(s)$=0 ve $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ ise $\mu(s) = 1$ olur. Böylece çatının bu şartları sağlayan ve {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s) = N(s) + z_1 L(s)$$

dir.

Teorem 4.4.13. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve W(s) timelike vektör alanı ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)}olsun. Bu çatının gerdiği {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s) = (z_1 e^{s} + z_2 e^{-s})T(s) + \left(z_1 e^{s} + z_2 (e^{-s} - 1)\right)N(s) + z_3 W(s)$$

dir.

İspat : $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s) + \varphi'(s)W(s) + \varphi(s)\,W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$=T(s) ve $\kappa(s)$=1 olarak alınırsa,

$$T(s) = (\lambda'(s) - \mu(s))T(s) + (\lambda(s) + \mu'(s))N(s) + (\tau(s)\mu(s) + \sigma(s)\,\varphi(s))L(s) + \varphi'(s)W(s)$$

olup aşağıdaki denklemler mevcuttur

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) + \sigma(s)\,\varphi(s) = 0, \\ \varphi'(s) = 0. \end{cases}$$

Eğer $\varphi'(s) = 0$ ise $\varphi(s) = z_3$, (z_3 bir sabit) dir. $\mu(s)=\lambda'(s) - 1$olup $\mu'(s) = \lambda''(s)$ dir. Bu eşitlikler ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s) + \lambda''(s) = 0$ elde edilir. Bu denklem çözüldüğünde $\lambda(s) = z_1e^s + z_2e^{-s}$ olur. Bu $\lambda(s)$ değeri birinci denklemde yerine yazılırsa $\mu(s) = z_1e^s + z_2(e^{-s} - 1)$ olarak bulunur. Burada z_1 ve z_2 sabittir. O halde bu çatının gerdiği {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(z_1e^s + z_2e^{-s})T(s) + \left(z_1e^s + z_2(e^{-s} - 1)\right)N(s) + z_3W(s)$$

dir.

Teorem 4.4.14. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve ikinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan bir α eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s) + z_1W(s) \text{ , } (z_1 \text{ bir sabit})$$

ve diğer bir eğrisi ise

$$\alpha(s)=N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s) W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s)= -\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)- \tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)+\sigma(s)\varphi(s))L(s)+$
$(\sigma(s)\mu(s)+ \varphi'(s))W(s)$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = -1, \\ \lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir ve bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ olur. Bu değerler ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0$ ise $\tau(s)\mu(s) = 0$ için iki sonuç ortaya çıkmaktadır:

i) $\mu(s) = 0$ ise $\varphi'(s)=0$ ve $\varphi(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) olur.

Bu durumda

$$\alpha(s) = -N(s) + z_1\, W(s)$$

ii) $\tau(s) = 0$ ise

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\varphi(s) = 0$ ve $\sigma(s)\varphi(s) = 0$ olur Buradan $\varphi(s) = 0$ olup $z_1=0$ elde edilir.

Bu durumda $\lambda(s) = 1$, $\mu(s) = 0$ ve $\varphi(s) = 0$ için {N(s),L(s),W(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s) = N(s)$$

dir.

Durum 2. IR_1^4 de {T(s), N(s), L(s), W(s)}Frenet çatısında L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olma durumunda

$$\begin{cases} < T(s), T(s) > = < N(s), N(s) > =< W(s), W(s) > = 1 \\ \qquad\qquad\qquad < L(s), L(s) > = -1 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan spacelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 & \sigma(s) \\ 0 & 0 & \sigma(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ L \\ W \end{bmatrix}$$

için

$T'(s)= \kappa(s)N(s)$,

$N'(s)=-\kappa(s)T(s)+ \tau(s)L(s)$,

$L'(s)= \tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s)$,

$W'(s)=\sigma(s)L(s)$

şeklinde tanımlanmıştır (Camcı, 2003).

Teorem 4.4.15. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve birinci binormal vektör alanı L(s) timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s),N(s),L(s),W(s)} ve $\kappa(s)=1$ olarak alırsak, her s parametresi için Frenet denklemleri;

$T'(s)= N(s)$,

$N'(s)=-T(s)+ \tau(s)L(s)$,

$L'(s)= \tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s)$,

$W'(s)=\sigma(s)L(s)$

dir.

Teorem 4.4.16. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin Frenet çatısı {T(s),N(s),L(s),W(s)} ve L(s) timelike vektör alanı ise o zaman

$$\begin{cases} < T(s), N(s) > = 0, \\ < N(s), L(s) > = 0, \\ < L(s), W(s) > = 0 \end{cases}$$

bağıntıları mevcuttur.

İspat: $<T(s),T(s)>=1$

$\Rightarrow < T'(s) , T(s)>=0$

$\Rightarrow <T(s),N(s)>=0$

olduğu görülür. Ayrıca

$< N(s), N(s) >=1$

$\Rightarrow < N'(s), N(s) >=0$

$\Rightarrow <-T(s)+ \tau(s)L(s),N(s)>=0$

$\Rightarrow <N(s),L(s)>=0$

ve

$< L(s), L(s) >=-1$

$\Rightarrow < L'(s), L(s) >=0$

$\Rightarrow < \tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s),L(s)>=0$

$\Rightarrow <L(s),W(s)>=0$

elde edilir.

Teorem 4.4.17. IR_1^4 de ki α spacelike eğrisinin teğet, normal, birinci binormal vektör alanı ve ikinci binormal vektör alanları arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$\begin{cases} < T(s), L(s) >= 0, \\ < N(s), W(s) >= 0, \\ < T(s), W(s) >= 0 \end{cases}$$

İspat: Bir önceki teorem de verilen sonuçlar kullanılarak ifadelerin türevi alınırsa

$< N(s), L(s) > = 0$

$\Rightarrow <N'(s),L(s)>+<N(s),L'(s)>=0$

$\Rightarrow <-T(s)+ \tau(s)L(s),L(s)>+<N(s),\tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s) >=0$

$\Rightarrow -<T(s),L(s)>+ \tau(s)<L(s),L(s)>+ \tau(s)<N(s),N(s)>+ \sigma(s)<N(s),W(s)>=0$

$\Rightarrow <N(s),W(s)>=0$

dir. Benzer şekilde diğerleri de ispatlanır

Teorem 4.4.18. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin teğet, normal, birinci timelike binormal vektör alanı ve ikinci binormal vektör alanları arasında

$$\begin{cases} < N'(s), L(s) >= -\tau(s) = -< L'(s), N(s) >, \\ < L'(s), W(s) >= \sigma(s) =< W'(s), L(s) >, \\ < N'(s), T(s) > = -1 = -< T'(s), N(s) >, \\ < T'(s), T(s) > =< T'(s), L(s) > =< T'(s), W(s) > =< N'(s), N(s) > = 0, \\ < N'(s), W(s) > = < L'(s), T(s) > =< L'(s), L(S) > =< W'(s), T(s) > = 0, \\ < W'(s), N(s) > =< W'(s), W(s) > = 0 \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: $< T'(s), T(s) > = < T(s), N(s) > = 0$,

$< T'(s), N(s) > = < N(s), N(s) > = 1$,

$< N'(s), W(s) > = < -T(s) + \tau(s)L(s), W(s) >$

$= -< T(s), W(s) > + \tau(s) < L(s), W(s) >$

$= 0$,

$< L'(s), N(s) > = < \tau(s)N(s) + \sigma(s)W(s), N(s) >$

$= \tau(s) < N(s), N(s) > + \sigma(s) < W(s), W(s) >$

$= \tau(s)$

ve

$< W'(s), L(s) > = < \sigma(s)L(s), L(s) >$

$= \sigma(s) < L(s), L(s) >$

$= \sigma(s)$

elde edilir. Diğer eşitlikler içinde aynı işlemler tekrarlanarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.19. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin tanjant, normal, birinci binormal timelike ve ikinci binormal vektör alanları arasında

$$\begin{cases} < T''(s), T(s) > = -1, \\ < L''(s), L(s) > = -\tau^2(s) + \sigma^2(s), \\ < W''(s), W(s) > = \sigma^2(s), \\ < T''(s), N(s) > = < T''(s), W(s) > = < N''(s), T(s) > = < N''(s), L(s) > = 0, \\ < L''(s), N(s) > = < L''(s), W(s) > = < W''(s), T(s) > = < W''(s), L(s) > = 0, \\ < T''(s), L(s) > = -\tau(s) = < L''(s), T(s) >, \\ < N''(s), N(s) > = -1 + \tau^2(s), \\ < N''(s), W(s) > = \tau(s)\sigma(s) = < W''(s), N(s) > \end{cases}$$

bağıntıları vardır.

İspat: $< T''(s), T(s) > = < N'(s), T(s) > = -1$,

$< N''(s), N(s) > = < -T'(s) + \tau(s)L'(s), N(s) >$

$= < -T'(s), N(s) > + \tau(s) < L'(s), N(s) >$

$= -1 + \tau^2(s)$,

$< L''(s), W(s) > = < \tau(s)N'(s) + \sigma(s)W'(s), W(s) >$

$= \tau(s) < N'(s), W(s) > + \sigma(s) < W'(s), W(s) >$

$=0$

ve

$<W''(s), N(s)> = \sigma(s)L'(s), N(s)>$

$= \sigma(s) < L'(s), N(s)>$

$= \tau(s)\sigma(s)$

bulunur. Benzer şekilde diğer eşitliklerde benzer işlemler tekrarlanarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.20. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) timelike vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s)= (\lambda'(s)- \mu(s))T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+ \tau(s)\, \mu(s))L(s)$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \quad \tau(s)\, \mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ dır. Bu eşitlik ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s) + \mu'(s) = 0$ ve buradan $\lambda(s) = 0$ olduğu elde edilir. Bu $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ olması ile çelişir. Dolayısıyla {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

Teorem 4.4.21. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} nin gerdiği {T(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s), \quad (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

ve $\tau(s)=\dfrac{-(s+z_1)}{z_2}$, ($z_2 \neq 0$ bir sabit) dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)+\tau(s)\,\mu(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)+\mu(s)\sigma(s)W(s)$$

eşitliğinden

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ \mu(s)\sigma(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Buradan $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_2$, (z_2 bir sabit) dir. Ayrıca

$$\lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0 \Rightarrow (s+z_1)+ \tau(s)z_2=0$$

$$\Rightarrow \tau(s)=\frac{-(s+z_1)}{z_2}, \ (z_2 \neq 0 \text{ bir sabit})$$

dir. O halde aranılan eğri

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.22. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)= z_1W(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+ \lambda(s)N(s)+\sigma(s)\mu(s)L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözülürse $\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 0$ olmalıdır. Bu durum $\lambda'(s) = 1$ olması ile çelişir. Böylece $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Dolayısıyla aradığımız eğri

$$\alpha(s)= z_1 W(s)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.4.23. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} nin gerdiği {N(s), L(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)+z_1 L(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

ve diğer eğride eğrisi de

$$\alpha(s)=-N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s) = -\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)+ \tau(s) \mu(s))N(s)+(\tau(s) \lambda(s)+ \mu'(s))L(s)+\sigma(s)\mu(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur ve bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. Bu değerler $\lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\tau(s)\mu(s)=0$ için iki durum söz konusudur:

i) $\tau(s)=0$ ise $\mu'(s) = 0$ ve $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Bu durumda aranılan eğrilerden biri

$$\alpha(s)=N(s)+z_1L(s)$$

olarak bulunur. Diğer eğride

ii) $\mu(s)=0$ ise $\mu'(s)=0$ olduğundan

$$\alpha(s)=-N(s)$$

dir.

Teorem 4.4.24. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) timelike vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {N(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)+z_1W(s)\ ,\ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s)=\lambda(s)N(s)+\mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)N(s)+\lambda(s)N'(s)+\mu'(s)W(s)+\mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)=\lambda(s)T(s)+\lambda'(s)N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\sigma(s)\mu(s))L(s)+\mu'(s)W(s)$$

bulunur.

$$\begin{cases} -\lambda(s)=1, \\ \lambda'(s)=0, \\ \tau(s)\lambda(s)-\sigma(s)\mu(s)=0, \\ \mu'(s)=0 \end{cases}$$

olur. $\mu'(s)=0$ ise $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\lambda(s)=-1$ ve $\mu(s)=z_1$ değerleri $\alpha(s)$ eğrisinde yerine yazılırsa

$$\alpha(s)=-N(s)+z_1W(s)$$

eğrisi bulunur.

Teorem 4.4.25. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve birinci binormal vektör alanı L(s) timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)}olmak üzere bu çatının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi bulunmamaktadır.

İspat: $\alpha(s)=\lambda(s)L(s)+\mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)L(s)+\lambda(s)L'(s)+\mu'(s)W(s)+\mu(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)=\tau(s)\lambda(s)N(s)+(\lambda'(s)+\sigma(s)\mu(s))L(s)+(\sigma(s)\lambda(s)+\mu'(s))W(s)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında yer alan denklemde T(s) teğet vektörü bulunmadığı için denklem çözümü mevcut değildir. Dolasıyla α eğrisi {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatısının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında bulunmamaktadır.

Teorem 4.4.26. IR_1^4 de α spacelike eğrisi ve L(s) timelike vektör alanı verilmiş olsun. Eğrinin {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısı tarafından {T(s),N(s),L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)=-N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)L(s)+ \varphi(s) L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)=(\lambda'(s)-\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s)+\tau(s)\varphi(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\varphi'(s))L(s)+\sigma(s)\varphi(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s)-\mu(s)=1, \\ \lambda(s)+\mu'(s)+\tau(s)\varphi(s)=0, \\ \tau(s)\mu(s)+\varphi'(s)=0, \\ \sigma(s)\varphi(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri çözülürse $\varphi(s)=0$ ise $\varphi'(s)=0$ dır. $\tau(s)\mu(s)+\varphi'(s)=0$ ise $\tau(s)\mu(s)=0$ olur. O halde burada iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s)=0$ olursa $\mu'(s)=0$ olur. $\varphi(s)$ ve $\mu'(s)$ eşitlikleri ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s)=0$ elde edilir. $\lambda(s)=0$ ise $\lambda'(s)=0$ dır. Bu durum birinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda'(s)-\mu(s)=1$ olması ile çelişir. Böylece burada bir eğri mevcut değildir.

ii) $\tau(s)=0$ ise $\varphi'(s)=0$ ve $\varphi(s)=z_1$ olur, ($z_1=0$). $\mu(s)\neq 0$ bir sabit olduğundan $\mu'(s)=0$, $\lambda(s)=0$ ve $\lambda'(s)-\mu(s)=1$ ise $\mu(s)=-1$ olur.

bu şartları sağlayan ve {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğri

$$\alpha(s)=-N(s)$$

dir.

Teorem 4.4.27. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) birinci binormal vektör alanı timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_2)T(s)+z_1W(s), \ (z_1, z_2 \text{ birer sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s) W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$=T(s) ve $\kappa(s)$=1 için

$$T(s)=(\lambda'(s)-\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\sigma(s)\varphi(s))L(s)+\varphi'(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s)-\mu(s)=1, \\ \lambda(s)+\mu'(s)=0, \\ \tau(s)\mu(s)+\sigma(s)\varphi(s)=0, \\ \varphi'(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\varphi'(s)=0$ ise $\varphi(s)=z_1$ (z_1 bir sabit) dir. $\tau(s)\mu(s)+\sigma(s)\varphi(s)=0$ ve $\mu(s)=0$ ise $\sigma(s)z_1=0$ olup $\sigma(s)=0$ olur.
$\lambda'(s)-\mu(s)=1$ ve $\mu(s)=0$ ise $\lambda'(s)=1$ için $\lambda(s)= s+z_2$ dir.
O halde {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_2)T(s)+z_1W(s)$$

dir.

Teorem 4.4.28. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve birinci binormal vektör alanı L(s) timelike olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} tarafından gerdiği {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s) W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$T(s)=-\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)+\tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)\sigma(s)\varphi(s))L(s)+$ $(\sigma(s)\mu(s)+ \varphi'(s))W(s)$

bulunur. Böylece aşağıdaki denklemler mevcuttur.

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0 \end{cases}$$

$\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ olur. $\lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0$ ise $\tau(s)\mu(s) = 0$ dır. Buradan iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s) = 0$ ise $\varphi'(s)=0$ dır. $\varphi(s)=z_1$, (z_1 sabit) olur.

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\varphi(s)=0$ ise $-\tau(s) + \sigma(s)z_1 = 0$ olur.

Burada $z_1 = \frac{-\tau(s)}{\sigma(s)}$ $(\sigma(s) \neq 0)$ dır.

ii) $\tau(s) = 0$ ise $\mu(s) \neq 0$ olmak üzere

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\varphi(s) = 0$ ve $\sigma(s)\varphi(s) = 0$ olur

Bu durumda $\lambda(s) = -1$, $\mu(s) = 0$ ve $\varphi(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) için {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s)= -N(s) -z_1W(s)$$

dir.

Durum 3. IR_1^4 de {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısı için L(s) birinci binormal vektör alanının null olması durumunda

$$\begin{cases} < T(s), T(s) > = < N(s), N(S) > =< L(s), W(s) > = 1, \\ < L(s), L(s) > = < W(s), W(s) > =< T(s), N(s) > =< T(s), L(s) > = 0, \\ < T(s), W(s) > =< N(s), L(s) > = < N(s), W(s) > = 0 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan spacelike eğri Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(s) & 0 \\ 0 & -\tau(s) & 0 & -\sigma(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ L \\ W \end{bmatrix}$$

için

$T'(s)= \kappa(s)N(s),$

$N'(s)=-\kappa(s)T(s)+ \tau(s)L(s),$

$L'(s)= \sigma(s)L(s),$

$W'(s)=-\tau(s)N(s) - \sigma(s)W(s)$

biçiminde tanımlanmıştır (Camcı, 2003).

Teorem 4.4.29. IR_1^4 de verilen spacelike eğrinin Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} olsun. L(s) birinci binormal vektör alanı null ve $\kappa(s)$=1 için Frenet denklemleri

$T'(s)= N(s),$

$N'(s)=-T(s)+ \tau(s)L(s),$

$L'(s)= \sigma(s)L(s),$

$W'(s)=-\tau(s)N(s) - \sigma(s)W(s)$

şeklindedir.

İspat: Spacelike eğrinin birinci binormal vektör alanının null olması halinde birinci Frenet eğriliği $\kappa(s) = 1$ alınırsa ispat elde edilir.

Teorem 4.4.30. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin teğet, normal, birinci binormal vektör alanı null ve ikinci binormal vektör alanları arasında

$$\begin{cases} <N'(s),W(s)>=\tau(s)=-<W'(s),N(s)>, \\ <L'(s),W(s)>=\sigma(s)=-<W'(s),L(s)>, \\ <T'(s),N(s)>=1=-<N'(s),T(s)>, \\ <T'(s),T(s)>=<T'(s),L(s)>=<T'(s),W(s)>=<N'(s),N(s)>=0, \\ <N'(s),L(s)>=<L'(s),T(s)>=<L'(s),N(s)>=0, \\ <L'(s),L(s)>=<W'(s),T(s)>=<W'(s),W(s)>=0 \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: $<T'(s),T(s)>=<T(s),N(s)>=0$,

$<T'(s),N(s)>=<N(s),N(s)>=1$,

$<N'(s),W(s)>=<-T(s)+\tau(s)L(s),W(s)>$

$=-<T(s),W(s)>+\tau(s)<L(s),W(s)>$

$=\tau(s)$,

$<L'(s),N(s)>=<\sigma(s)L(s),N(s)>$

$=\sigma(s)<L(s),N(s)>$

$=0$

ve

$<W'(s),L(s)>=<-\tau(s)N(s)-\sigma(s)W(s),L(s)>$

$=-\tau(s)<N(s),L(s)>-\sigma(s)<W(s),L(s)>$

$=-\sigma(s)$

elde edilir. Diğer eşitlikler içinde benzer işlemler yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.31. IR_1^4 de verilen α Spacelike eğrisinin tanjant, normal, birinci null binormal vektör alanı ve ikinci binormal vektör alanları arasında

$$\begin{cases} <T''(s),N(s)>=1=-<N''(s),N(s)>, \\ <L''(s),W(s)>=\sigma^2(s)=<W''(s),L(s)>, \\ <T''(s),T(s)>=<T''(s),L(s)>=<T''(s),W(s)>=<N''(s),T(s)>=0, \\ <N''(s),L(s)>=<L''(s),T(s)>=<L''(s),N(s)>=<L''(s),L(s)>=0, \\ <W''(s),T(s)>=\tau(s), \\ <W''(s),W(s)>=-\tau^2(s), \\ <N''(s),W(s)>=\tau(s)\sigma(s)=<W''(s),N(s)> \end{cases}$$

bağıntıları vardır.

İspat: $<T''(s),T(s)>=<T(s),N(s)>=0$,

$<N''(s),N(s)>=<-T'(s)+\tau(s)L'(s),N(s)>$

$=-<T'(s),N(s)>+\tau(s)<L'(s),N(s)>$

$$=-1,$$

$$< L''(s), W(s) > = < \sigma(s)L'(s), W(s) >$$

$$= \sigma(s) < L'(s), W(s) >$$

$$=0$$

ve

$$<W''(s), N(s)> = < -\tau(s)N'(s) - \sigma(s)W'(s), N(s)>$$

$$= -< \tau(s)N'(s), N(s) > - \sigma(s) < W'(s), N(s)>$$

$$= \tau(s)\sigma(s)$$

bulunur. Diğer eşitliklerde benzer işlemler yapılarak istenilen sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.4.32. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) null vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır.

Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= (\lambda'(s) - \mu(s))T(s)+ (\lambda(s)+ \mu'(s))N(s)+ \tau(s)\, \mu(s))L(s)$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \quad \mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri çözülürse $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ dır. Bu değer ikinci denklemde yerine yazılırsa buradan $\lambda(s) = 0$ olur. Bu durum $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ olması ile çelişir. Dolayısıyla {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi mevcut değildir.

Teorem 4.4.33. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) null vektör alanı olmak üzere olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi mevcut değildir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+ \lambda(s)N(s)+ (\mu'(s)+ \mu(s)\sigma(s))L(s)$$

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ \mu'(s) + \mu(s)\sigma(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur. Burada $\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. Bu durum $\lambda'(s) = 1$ olması ile çelişir. Dolasıyla $\{T(s), L(s)\}$ alt uzayında yatan α eğrisi mevcut değildir.

Teorem 4.4.34. IR^4_1 de spacelike bir eğri α ve L(s) null vektör alanı olmak üzere {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = (s + z_1)T(s)+ e^{\sigma(s)s}W(s), \ (z_1 \text{ sabit})$$

dir.

İspat : $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Eğrinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)-\tau(s)\mu(s))N(s)+ (\mu'(s)-\sigma(s)\mu(s))W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) - \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) - \sigma(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur ve denklemler çözülürse $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$, (z_1 sabit) dir. $\mu'(s) - \sigma(s)\mu(s) = 0$ denklemi çözüldüğünde $\mu(s) = e^{\sigma(s)s}$ elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = (s + z_1)T(s)+ e^{\sigma(s)s}W(s)$$

eğrisi {T(s), W(s)} alt uzayında yatar.

Teorem 4.4.35. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) null vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {N(s), L(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s) = -N(s) + \frac{\tau^2(s)}{2} L(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ nin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa;

$T(s) = -\lambda(s)T(s)+\lambda'(s)N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)+\sigma(s)\mu(s))L(s)$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = -1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur ve bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. $\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\mu(s) = 0$ denkleminde $\lambda(s) = -1$ değerini yerine yazarsak $-\tau(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\mu(s) = 0$ elde edilir. $\sigma(s) = 0$ olursa $-\tau(s) + \mu'(s) = 0$ ve $\mu'(s) = \tau(s)$ bulunur. Buradan $\mu(s) = \frac{\tau^2(s)}{2}$ elde edilir.

O halde {T(s), N(s), L(s), W(s)} uzayının gerdiği {N(s), L(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s) = -N(s) + \frac{\tau^2(s)}{2} L(s)$$

dir.

Teorem 4.4.36. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) null vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {N(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s) = -N(s) + z_1 W(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$=T(s) ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= -\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)-\tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s))L(s)+(\mu'(s)W(s)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{cases} -\lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri mevcuttur. Bu denklemler çözülürse $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)= z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\lambda(s) = -1$ ve $\mu(s)= z_1$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\alpha(s)= -N(s)+ z_1W(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.37. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) null vektör alanı olsun. . α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)L(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)L(s) + \lambda(s)L'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)$=T(s) ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)=-\tau(s)\mu(s)N(s)+(\lambda'(s)+\sigma(s)\lambda(s))L(s)+(\sigma(s)\mu(s)+\mu'(s))W(s)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında T(s) teğet vektörü bulunmadığı için denklem çözümü mevcut değildir. Dolasıyla α eğrisi {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {L(s),W(s)} alt uzayında yatmaz.

Teorem 4.4.38. IR_1^4 de α spacelike eğrisi ve L(s) null vektör alanı verilmiş olsun. O zaman α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)= (z_1e^s + z_2e^{-s})T(s) + \left(z_1e^s - z_2(e^{-s} - 1)\right)N(s) + \left(-\tau(s)\frac{z_1}{1+\sigma(s)}e^s + \frac{\tau(s)z_2}{\sigma(s)-1}e^{-s} + \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} + z_3e^{\sigma(s)s}\right)L(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)L(s)+ \varphi(s) L'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s)=(\lambda'(s)-\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\varphi'(s)+\sigma(s)\varphi(s))L(s)$

olup

$$\begin{cases} \lambda'(s)-\mu(s)=1, \\ \lambda(s)+\mu'(s)=0, \\ \tau(s)\mu(s)+\varphi'(s)+\sigma(s)\varphi(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \lambda''(s)-\mu'(s)=0 \\ \lambda(s)=-\mu'(s) \end{cases}$$

bulunur. $\lambda''(s)+\lambda(s)=0$ denklemi çözülürse

$\lambda(s)=z_1e^s+z_2e^{-s}$ ve $\mu(s)=z_1e^s-z_2(e^{-s}-1)$ dir. Bulunan değerler üçüncü denklemde yerine yazılırsa $\varphi'(s)+\sigma(s)\varphi(s)=-\tau(s)[z_1e^s-z_2(e^{-s}-1)]$ olur. Burada ($e^{\int\sigma(s)ds}=e^{\sigma(s)s}$) olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\varphi(s)e^{\sigma(s)s}=-\tau(s)\int e^{\sigma(s)s}\,[z_1e^s-z_2(e^{-s}-1)]ds+z_3$$

$$=-\tau(s)\left(z_1\frac{1}{1+\sigma(s)}e^{(1+\sigma(s))s}-z_2\frac{1}{\sigma(s)-1}e^{(\sigma(s)-1)s}-\frac{1}{\sigma(s)}e^{\sigma(s)s}\right)+z_3$$

$$=\varphi(s)=-\tau(s)\frac{z_1}{1+\sigma(s)}e^s+\frac{\tau(s)z_2}{\sigma(s)-1}e^{-s}+\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}+z_3e^{\sigma(s)s}$$

elde edilir. O halde {T(s),N(s),L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğri

$$\alpha(s)=(z_1e^s+z_2e^{-s})T(s)+\big(z_1e^s-z_2(e^{-s}-1)\big)N(s)+\Big(-\tau(s)\frac{z_1}{1+\sigma(s)}e^s+\frac{\tau(s)z_2}{\sigma(s)-1}e^{-s}+\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}+z_3e^{\sigma(s)s}\Big)L(s)$$

dir. (Burada z_1, z_2, z_3 birer sabit sayıdır).

Teorem 4.4.39. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve L(s) null vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)}olsun. Bu çatının gerdiği {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrileri

$$\alpha(s)=(z_1e^s+z_2e^{-s})T(s)+\big(z_1e^s-z_2(e^{-s}-1)\big)N(s)+z_3\,e^{\sigma(s)s}W(s)$$

veya

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2e^{\sigma(s)s}W(s)$$

dir. Burada (z_1, z_2, z_3 birer sabit) dir.

İspat : $\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)N(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)T(s)+\lambda(s)T'(s)+\mu'(s)N(s)+\mu(s)N'(s)+\varphi'(s)W(s)+\varphi(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$T(s)=(\lambda'(s)-\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s)-\tau(s)\varphi(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s))L(s)+$
$(\varphi'(s)-\sigma(s)\varphi(s)W(s)$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s)-\mu(s)=1, \\ \lambda(s)+\mu'(s)-\tau(s)\varphi(s)=0, \\ \tau(s)\mu(s)=0, \\ \varphi'(s)-\sigma(s)\varphi(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri vardır. Üçüncü denklemi ele alacak olursak $\tau(s)\mu(s)=0$ olması için iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s)=0$ ise bu değer birinci denklemde yerine yazıldığında $\lambda'(s)=1$ ve buradan $\lambda(s)=(s+z_1)$ bulunur. Burada z_1 bir sabittir.

Ayrıca $\varphi'(s)-\sigma(s)\varphi(s)=0$ denklemini çözersek $\varphi(s)=z_2e^{\sigma(s)s}$ elde edilir, (z_2 sabittir). O halde buradan bulunan değerler yerine yazılırsa Frenet çatısının gerdiği {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2e^{\sigma(s)s}W(s)$$

bulunur. Ayrıca

ii) $\tau(s)=0$ ise $\lambda'(s)-\mu(s)=1$ ve $\lambda(s)+\mu'(s)=0$ denklemlerini ortak çözersek $\lambda(s)=z_1e^s+z_2e^{-s}$ ve $\mu(s)=z_1e^s-z_2(e^{-s}-1)$ olarak elde edilir. Benzer işlemi son denklemde uygular ve çözersek $\varphi(s)=z_3e^{\sigma(s)s}$ bulunur.

Bu ispatta verilen z_1 , z_2 ve z_3 birer sabittir. O halde bu çatının gerdiği {T(s),N(s),W(s)} alt uzayında yatan α nın bir diğer eğrisi

$$\alpha(s)=(z_1e^s+z_2e^{-s})T(s)+\left(z_1e^s-z_2(e^{-s}-1)\right)N(s)+z_3e^{\sigma(s)s}W(s)$$

dir.

Teorem 4.4.40. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri L(s) null vektör alanı ve α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} olsun. Bu çatının gerdiği {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)= -N(s)+ z_1 e^{-\sigma(s)s} L(s)+ z_2 e^{\sigma(s)s}\ W(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s) W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= -\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)-\tau(s)\varphi(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)+\sigma(s)\mu(s))L(s)+(\varphi'(s)-\sigma(s)\varphi(s))W(s)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{cases} \lambda(s) = -1, \\ \lambda'(s) - \tau(s)\varphi(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \varphi'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri mevcuttur. Bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = -1$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. Bu eşitlik ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda'(s) - \tau(s)\varphi(s) = 0$ ve $\tau(s)\varphi(s) = 0$ elde edilir. Bu eşitlik için iki durum söz konusudur.

i) $\varphi(s) = 0$ ise $\varphi'(s) = 0$ olup üçüncü denklem gerçeklenir.

ii) $\tau(s) = 0$ ve $(\lambda(s) = -1)$ için üçüncü denklem çözülürse

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\mu(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\mu'(s) + \sigma(s)\mu(s) = 0$ elde edilir. Bu denklem çözülürse

$\mu(s) = z_1 e^{-\sigma(s)s}$ ve $\varphi(s) = z_2 e^{\sigma(s)s}$

olarak bulunur. Bulunan λ, μ ve φ değerleri yerine yazılırsa {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)= -N(s)+ z_1 e^{-\sigma(s)s} L(s)+ z_2 e^{\sigma(s)s}\ W(s)$$

biçimindedir.

Durum 4. IR_1^4 de $\{T(s), N(s), L(s), W(s)\}$Frenet çatısı için N(s) normal vektör alanının timelike olması halinde

$$\begin{cases} < T(s), T(s) > = < L(s), L(s) > = < W(s), W(s) > = 1, \\ < N(s), N(s) > = -1 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan spacelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 & \sigma(s) \\ 0 & 0 & -\sigma(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ L \\ W \end{bmatrix}$$

için

$T'(s)= \kappa(s)N(s)$,

$N'(s)= \kappa(s)T(s)+ \tau(s)L(s)$,

$L'(s)= \tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s)$,

$W'(s)=-\sigma(s)L(s)$

şeklinde tanımlanmıştır (Camcı, 2003).

Teorem 4.4.41. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) normal vektör alanı timelike olsun. α nın Frenet çatısı $\{T(s), N(s), L(s), W(s)\}$ sırasıyla teğet, normal vektör alanı timelike, birinci binormal, ikinci binormal vektör alanlarıdır. $\kappa(s)=1$ ve her s parametresi için Frenet denklemleri;

$T'(s)= N(s)$,

$N'(s)= T(s)+ \tau(s)L(s)$,

$L'(s)= \tau(s)N(s)+ \sigma(s)W(s)$,

$W'(s)=-\sigma(s)L(s)$

şeklindedir.

İspat: Yukarıda ifade edilen spacelike bir eğrinin N(s) normal vektör alanının timelike olması halindeki Frenet çatısında $\kappa(s) = 1$ olarak seçilirse istenilenler elde edilmiş olur.

Teorem 4.4.42. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin Frenet çatısı $\{T(s), N(s), L(s), W(s)\}$ ve N(s) timelike vektör alanı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\begin{cases} <T(s),N(s)>=0, \\ <N(s),L(s)>=0, \\ <L(s),W(s)>=0. \end{cases}$$

İspat: Spacelike eğrinin normal vektör alanının null olması şartları kullanılırsa

$<T(s),T(s)>=1$

$\Rightarrow <T'(s),T(s)>=0;\ T'(s)=N(s)$

$\Rightarrow <T(s),N(s)>=0,$

$<N(s),N(s)>=-1$

$\Rightarrow <N'(s),N(s)>=0$

$\Rightarrow <T(s)+\tau(s)L(s),N(s)>=0$

$\Rightarrow <N(s),L(s)>=0$

ve

$<W(s),W(s)>=1$

$\Rightarrow <W'(s),W(s)>=0$

$\Rightarrow <-\sigma(s)L(s),W(s)>=0$

$\Rightarrow <L(s),W(s)>=0$

elde edilir.

Teorem 4.4.43. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin teğet, timelike normal, birinci ve ikinci binormal vektör alanları arasında aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\begin{cases} <T(s),L(s)>=0, \\ <T(s),W(s)>=0, \\ <N(s),W(s)>=0. \end{cases}$$

İspat: Bir önceki teoremden elde edilen ifadelerin türevi alınırsa

$<N(s),L(s)>=0$

$\Rightarrow <N'(s),L(s)>+<N(s),L'(s)>=0$

$\Rightarrow <T(s)+\tau(s)L(s),L(s)>+<N(s),\tau(s)N(s)+\sigma(s)W(s)>=0$

$\Rightarrow <N(s),W(s)>=0$

bulunur. Benzer şekilde diğerleri de elde edilir.

Teorem 4.4.44. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin teğet, timelike normal, birinci ve ikinci binormal vektörleri arasında

$$\begin{cases} <N'(s),L(s)>=\tau(s)=-<L'(s),N(s)>, \\ <L'(s),W(s)>=\sigma(s)=<W'(s),L(s)>, \\ <T'(s),N(s)>=-1=-<N'(s),T(s)>, \\ <T'(s),T(s)>=<T'(s),L(s)>=<T'(s),W(s)>=<N'(s),N(s)>=0, \\ <N'(s),W(s)>=<L'(s),T(s)>=<L'(s),L(s)>=<W'(s),T(s)>=0, \\ <W'(s),N(s)>=<W'(s),W(s)>=0 \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: Yukarıdaki son iki teorem kullanılarak

$<T'(s),T(s)>=<T(s),N(s)>=0,$

$<T'(s),N(s)>=<N(s),N(s)>=-1,$

$<N'(s),W(s)>=<T(s)+\tau(s)L(s),W(s)>$

$=<T(s),W(s)>+\tau(s)<L(s),W(s)>$

$=0,$

$<L'(s),W(s)>=<\tau(s)N(s)+\sigma(s)W(s),W(s)>$

$=-\tau(s)<N(s),W(s)>+\sigma(s)<W(s),W(s)>$

$=\sigma(s)$

ve

$<W'(s),T(s)>=<-\sigma(s)L(s),T(s)>$

$=-\sigma(s)<T(s),L(s)>$

$=0$

bulunur. Benzer şekilde diğer eşikliklerde de elde edilir.

Teorem 4.4.45. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisi ve N(s) timelike vektör alanı için

$$\begin{cases} <T''(s),T(s)>=1, \\ <L''(s),L(s)>=\tau^2(s)-\sigma^2(s), \\ <W''(s),W(s)>=-\sigma^2(s), \\ <T''(s),N(s)>=<T''(s),W(s)>=<N''(s),T(s)>=<N''(s),L(s)>=0, \\ <L''(s),N(s)>=<L''(s),W(s)>=<W''(s),T(s)>=<W''(s),L(s)>=0, \\ <T''(s),L(s)>=\tau(s)=<L''(s),T(s)>, \\ <N''(s),N(s)>=-1-\tau^2(s), \\ <N''(s),W(s)>=\tau(s)\sigma(s)=<W''(s),N(s)> \end{cases}$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: Bir önceki teorem kullanılarak

$< T''(s), T(s) > = < N'(s), T(s) > = 1,$

$< N''(s), N(s) > = < T'(s) + \tau(s)L'(s), N(s) >$

$= < T'(s), N(s) > + \tau(s) < L'(s), N(s) >$

$= 1 - \tau^2(s),$

$< L''(s), N(s) > = < -\tau(s)N'(s) + \sigma(s)W'(s), N(s) >$

$= -\tau(s) < N'(s), N(s) > + \sigma(s) < W'(s), N(s) >$

$= 0$

ve

$< W''(s), W(s) > = < -\sigma(s)L'(s)W(s) >$

$= -\sigma(s) < L'(s), W(s) >$

$= -\sigma^2(s)$

bulunur. Benzer şekilde diğer eşitliklerinde ispatı yapılır.

Teorem 4.4.46. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) timelike vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} nin {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

İspat: α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)N(s) eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır.

α(s) eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$T(s) = (\lambda'(s) + \mu(s))T(s) + (\lambda(s) + \mu'(s))N(s) + \tau(s)\,\mu(s))L(s)$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Eğer $\mu(s) = 0$ ise $\mu'(s) = 0$ dır. Bu eşitlik ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s) = 0$ olur fakat bu durum $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ denklemiyle çelişir. Dolayısıyla {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi yoktur.

Teorem 4.4.47. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) timelike vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {T(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi;

$$\alpha(s) = (s+z_1)T(s) + z_2L(s), \quad (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

olup burada

$$\tau(s)=\frac{-(s+z_1)}{z_2}, \ (z_2 \neq 0 \text{ bir sabit) dir.}$$

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)+\tau(s)\mu(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)+\mu(s)\sigma(s)W(s)$$

olup

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1 \\ \lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0 \\ \mu'(s) = 0 \\ \mu(s)\sigma(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri mevcuttur. Buradan $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$,(z_1 bir sabit) dir. Ayrıca $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_2$, (z_2 bir sabit) dir. Ayrıca

$$\lambda(s) + \tau(s)\mu(s) = 0 \Rightarrow (s+z_1)+ \tau(s)z_2=0$$

$$\Rightarrow \tau(s)=\frac{-(s+z_1)}{z_2}, \ (z_2 \neq 0 \text{ bir sabit})$$

dir. O halde aranılan eğri

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.48. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) timelike vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s) ,L(s), W(s)} için {T(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)= z_1W(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+ \lambda(s)N(s)-\sigma(s)\mu(s)L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ -\sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri vardır. Bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 0$ olur. Bu durum $\lambda'(s) = 1$ olması ile çelişir. Ayrıca $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) dir. O halde aranılan eğri

$$\alpha(s)= z_1W(s)$$

şeklindedir.

Teorem 4.4.49. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) timelike vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {N(s), L(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+z_1L(s), \quad (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s) = \lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)+ \tau(s) \mu(s))N(s)+(\tau(s) \lambda(s)+ \mu'(s))L(s)+\sigma(s)\mu(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri için $\lambda(s) = 1$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. Bu durumda $\lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0$ da denkleminde yerine yazılırsa iki durum söz konusudur:

i) $\tau(s)=0$ ise $\mu'(s) = 0$ ve $\mu(s)=z_1$,(z_1 bir sabit) olur.

ii) $\mu(s)=0$ ise $\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)=0$ olup buradan $\tau(s)\lambda(s)=0$ bulunur. $\lambda(s)=1$ yerine yazılırsa $\tau(s)=0$ olur. Böylece

$$\alpha(s)=N(s)+z_1L(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.4.50. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) timelike vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} için {N(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+z_1W(s),\ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s)=\lambda(s)N(s)+\mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)N(s)+\lambda(s)N'(s)+\mu'(s)W(s)+\mu(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)=\lambda(s)T(s)+\lambda'(s)N(s)+(\tau(s)\lambda(s)-\sigma(s)\mu(s))L(s)+\mu'(s)W(s)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s)=1, \\ \lambda'(s)=0, \\ \tau(s)\lambda(s)-\sigma(s)\mu(s)=0, \\ \mu'(s)=0 \end{cases}$$

olur. Eğer $\mu'(s)=0$ ise $\mu(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\lambda(s)=1$ ve $\mu(s)=z_1$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\alpha(s)=N(s)+z_1W(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.51. IR_1^4 de spacelike bir eğri α ve N(s) timelike vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} olmak üzere bu çatının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrisi mevcut değildir.

İspat: $\alpha(s)=\lambda(s)L(s)+\mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s)=\lambda'(s)L(s)+\lambda(s)L'(s)+\mu'(s)W(s)+\mu(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= \tau(s)\ \lambda(s)N(s)+(\ \lambda'(s)-\ \sigma(s)\mu(s))L(s)+(\ \sigma(s)\lambda(s)+\ \mu'(s))W(s)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında yer alan denklemde T(s) teğet vektörü bulunmadığı için denklem çözümü mevcut değildir. Dolasıyla α eğrisi {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatının gerdiği {L(s),W(s)} alt uzayında yatmaz.

Teorem 4.4.52. IR_1^4 de α spacelike eğrisi ve N(s) timelike vektör alanı verilmiş olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+ z_1 L(s),\ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)L(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)L(s)+ \varphi(s)\ L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$$T(s)=(\lambda'(s)+\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s)+\tau(s)\varphi(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\varphi'(s))L(s)+ \sigma(s)\ \varphi(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) + \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) + \tau(s)\varphi(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0, \\ \sigma(s)\ \varphi(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Eğer $\varphi(s) = 0$ ise $\varphi'(s) = 0$ olup $\tau(s)\mu(s) = 0$ elde edilir. O halde burada iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s) = 0$ olursa $\mu'(s) = 0$ olur. $\varphi(s)$ ve $\mu'(s)$ eşitlikleri ikinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda(s)=0$ elde edilir. $\lambda(s)=0$ ise $\lambda'(s)=0$ dır. Bu durum birinci denklemdeki $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ olması ile çelişir.

ii) $\tau(s)=0$ ise $\varphi'(s) = 0$ ve $\varphi(s) = z_1$ olur. $(z_1 = 0)$. $\mu(s) = z_2$ (z_2 bir sabit) $\mu'(s) = 0$, $\lambda(s)=0$ ve $\lambda'(s) + \mu(s) = 1$ ise $\mu(s) = 1$ olur.

Bu şartları sağlayan Frenet eğrisinin {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)+ z_1 L(s)$$

dir.

Teorem 4.4.53. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) timelike vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_2)T(s)+z_1W(s),\ (z_1, z_2 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$$T(s)=(\lambda'(s)-\mu(s))T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\sigma(s)\varphi(s))L(s)+\varphi'(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s)-\mu(s)=1, \\ \lambda(s)+\mu'(s)=0, \\ \tau(s)\mu(s)+\sigma(s)\varphi(s)=0, \\ \varphi'(s)=0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\varphi'(s)=0$ ise $\varphi(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\tau(s)\mu(s)+\sigma(s)\varphi(s)=0$ ve $\mu(s)=0$ ise $\sigma(s)z_1=0$ olup $\sigma(s)=0$ olur.
$\lambda'(s)-\mu(s)=1$ ve $\mu(s)=0$ ise $\lambda'(s)=1$ olup $\lambda(s)=s+z_2$, (z_2 sabit) dir.
O halde Frenet çatısının gerdiği {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_2)T(s)+z_1W(s)$$

dir.

Teorem 4.4.54. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) normal vektör alanı timelike olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=N(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s) + \varphi'(s)W(s) + \varphi(s)W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)=\lambda(s)T(s)+(\lambda'(s)-\tau(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s)+\mu'(s)-\sigma(s)\varphi(s))L(s)+(\sigma(s)\mu(s)+\varphi'(s))W(s)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda(s) = 1, \\ \lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \sigma(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = 1$ ise $\lambda'(s) = 0$ olur. $\lambda'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0$ ise $\tau(s)\mu(s) = 0$ dır. Buradan iki sonuç ortaya çıkmaktadır:

i) $\mu(s) = 0$ ise $\varphi'(s)=0$ ve $\varphi(s)=z_1$, (z_1 bir sabit) dir.

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s)=0$ ise $\tau(s) - \sigma(s)z_1 = 0$ olur.

ii) $\tau(s) = 0$ ise $\mu(s) \neq 0$ olmak üzere

$\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0$ ve $\sigma(s)\varphi(s) = 0$ olur Buradan $\varphi(s) = 0$ olup $z_1=0$ elde edilir. Böylece $\lambda(s) = 1$, $\mu(s) = 0$ ve $\varphi(s) = 0$ için {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğri

$$\alpha(s)=N(s)$$

dir.

Durum 5. IR_1^4 de {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısı için N(s) normal vektör alanının null olması halinde

$$\begin{cases} < T(s), T(s) > = < L(s), L(S) > =< N(s), W(s) > = 1, \\ < T(s), W(s) > =< N(s), L(s) > =< L(s), W(s) > = 0, \\ < N(s), N(s) > =< W(s), W(s) > =< T(s), N(s) > =< T(s), L(s) >= 0 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan spacelike eğrinin Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ L'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau(s) & 0 \\ 0 & \sigma(s) & 0 & -\tau(s) \\ -\kappa(s) & 0 & -\sigma(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ L \\ W \end{bmatrix}$$

için

$$T'(s) = \kappa(s)N(s),$$
$$N'(s) = \tau(s)L(s),$$
$$L'(s) = \sigma(s)N(s) - \tau(s)W(s),$$
$$W'(s) = -\kappa(s)T(s) - \sigma(s)L(s)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Camcı, 2003).

Teorem 4.4.55. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) normal vektör alanı null olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} ve κ(s)=1 için Frenet denklemleri;

$$T'(s) = N(s),$$
$$N'(s) = \tau(s)L(s),$$
$$L'(s) = \sigma(s)N(s) - \tau(s)W(s),$$
$$W'(s) = -T(s) - \sigma(s)L(s)$$

dir.

İspat: N(s) normal vektör alanının null olması halinde bir Spacelike eğrinin Frenet denklemlerinde birinci Frenet eğriliği $\kappa(s) = 1$ olarak seçilirse teoremin ispatı elde edilir.

Teorem 4.4.56. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin teğet, normal null vektör alanı, birinci ve ikinci binormal vektör alanları arasında

$$
\begin{cases}
< N'(s), L(s) >= \tau(s) = -< L'(s), N(s) >, \\
< L'(s), W(s) >= \sigma(s) = -< W'(s), L(s) >, \\
< T'(s), W(s) > = 1 = -< W'(s), T(s) >, \\
< T'(s), T(s) > =< T'(s), N(s) > =< T'(s), L(s) > =< N'(s), N(s) > = 0, \\
< N'(s), T(s) > = < N'(s), W(s) > =< L'(s), T(s) > = 0, \\
< L'(s), L(s) > =< W'(s), N(s) >=< W'(s), W(s) > = 0
\end{cases}
$$

bağıntıları geçerlidir.

İspat: Bir önceki teorem kullanılarak

$< T'(s), N(s) >=<N(s),N(s)>=0,$

$< T'(s), W(s) >=<N(s),W(s)>=1,$

$< N'(s), L(s) >=<\tau(s)L(s),L(s)>$

$= \tau(s)<L(s),L(s)>$

$=\tau(s),$

$<L'(s),L(s)> = < \sigma(s)N(s)- \tau(s)W(s),L(s)>$

$= \sigma(s)<N(s),L(s)> - \tau(s)<W(s),L(s)>$

$= 0$

ve

$<W'(s), L(s)> = <-T(s) - \sigma(s)L(s),L(s)>$

$=-< T(s), L(s) > - \sigma(s) < L(s) ,L(s)>$

$=-\sigma(s)$

elde edilir. Diğer eşitlikler içinde benzer işlemler yapılıp ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.57. IR_1^4 de verilen α spacelike eğrisinin tanjant, null normal vektör alanı, birinci ve ikinci binormal vektör alanları arasında

$$
\begin{cases}
< W''(s), W(s) > = -1 - \sigma^2(s), \\
< T''(s), T(s) > =< T''(s), N(s) > =< T''(s), W(s) > =< N''(s), T(s) > = 0, \\
< N''(s), L(s) > =< L''(s), N(s) > =< L''(s), W(s) > =< W''(s), T(s) > = 0, \\
< W''(s), L(s) > = 0, \\
< T''(s), L(s) > = \tau(s) =< L''(s), T(s) >, \\
< L''(s), L(s) > = 2\tau(s)\sigma(s), \\
< N''(s), N(s) > = -\tau^2(s), \\
< N''(s), W(s) > = \tau(s)\sigma(s) =< W''(s), N(s) >
\end{cases}
$$

bağıntıları vardır.

İspat: Bir önceki teoremden her s parametresi için türev alınırsa

$< T''(s), W(s) > = < N'(s), W(s) > = 0,$

$< N''(s), N(s) > = < \tau(s)L'(s), N(s) >$

$= \tau(s) < L'(s), N(s) >$

$= -\tau^2(s),$

$< L''(s), W(s) > = < \sigma(s)N'(s) - \tau(s)W'(s), W(s) >$

$= \sigma(s) < N'(s), W(s) > - \tau(s) < W'(s), W(s) >$

$= 0$

ve

$< W''(s), W(s) > = < -T'(s) - \sigma(s)L'(s), W(s) >$

$= -< T'(s), W(s) > - \sigma(s) < L'(s), W(s) >$

$= -1 - \sigma^2(s)$

bulunur. Diğer eşitlikler içinde benzer işlemler yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.58. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) null normal vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s) = (s+z_1)T(s) - \left(\frac{s^2}{2} + sz_1 + z_2\right)N(s), \quad (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$ eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre türevi alınabilen fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa;

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ ve $\kappa(s) = 1$ olarak alınırsa

$$T(s) = \lambda'(s)T(s) + (\lambda(s) + \mu'(s))N(s) + \tau(s)\,\mu(s))L(s)$$

bulunur. Buradan;

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri mevcuttur. Bu denklemler çözülürse $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$, (z_1 sıfırdan farklı bir sabit). $\lambda(s) = s + z_1$ değeri ikinci denklemde yerine yazılıp çözülürse

$$\mu(s) = -\left(\frac{s^2}{2} + sz_1 + z_2\right)$$

elde edilir.

O halde bu çatının {T(s), N(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)-\left(\frac{s^2}{2}+sz_1+z_2\right)N(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.59. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve null normal vektör alanı N(s) olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s),\ (z_1, z_2 \text{ sabit})$$

dir. Burada $\sigma(s)=\frac{-(s+z_1)}{z_2}$, ($z_2 \neq 0$ bir sabit) olarak bulunur.

İspat : α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)L(s) eğrisini alalım. Burada λ ve μ; s parametresine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. α(s) eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

elde edilir. α′(s)=T(s) ve κ(s)=1 için

$$T(s)= \lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)+ \mu(s)\sigma(s))N(s)+ \mu'(s)L(s)+\tau(s)\, \mu(s)W(s)$$

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu(s)\sigma(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0, \\ \tau(s)\,\mu(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur. Buradan $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$, (z_1 bir sabit) dir. $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s)=z_2$, (z_2 bir sabit) olur. Ayrıca $\lambda(s) + \mu(s)\sigma(s) = 0 \Rightarrow (s+z_1)+ \sigma(s)z_2=0$

$$\Rightarrow \sigma(s)=\frac{-(s+z_1)}{z_2},\ (z_2 \neq 0 \text{ bir sabit})$$

dir. O halde aranılan eğri

$$\alpha(s)=(s+z_1)T(s)+z_2L(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.60. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) null normal vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)=-W(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

elde edilir. Özel olarak $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa

$$T(s)= (\lambda'(s) - \mu(s))T(s)+ \lambda(s)N(s) - \sigma(s)\mu(s)L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \mu(s) = 1, \\ \lambda(s) = 0, \\ -\sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler çözülürse $\lambda(s) = 0$ ise $\lambda'(s) = 0$ dır. $\lambda'(s) - \mu(s) = 1$ ise $\mu(s) = -1$ olarak bulunur. Ayrıca $\mu'(s) = 0$ ise $\mu(s) = z_1$, (z_1 bir sabit) dir. Buradan da $z_1 = -1$ olduğu kolayca görülür. O halde aradığımız eğri

$$\alpha(s) = -W(s)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.61. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) null normal vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {N(s), L(s)} alt uzayında yatan eğrisi mevcut değildir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)$ eğrisini alalım. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)=(\lambda'(s) + \sigma(s)\mu(s))N(s)+(\lambda(s)\tau(s) + \mu'(s))L(s)+ \tau(s)\mu(s)W(s)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafında T(s) teğet vektörü bulunmadığı için denklem çözümü mevcut değildir. Dolasıyla α eğrisi {T(s), N(s), L(s), W(s)} çatısının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında yatmaz.

Teorem 4.4.62. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) null normal vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {N(s), W(s)} alt uzayında yatan bir eğrisi

$$\alpha(s)= z_1N(s) - W(s), \ (z_1 \text{ bir sabit})$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafının s parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

olur ve $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ olarak alınırsa,

$$T(s)=-\mu(s)T(s)+ \lambda'(s)N(s)+(\tau(s)\lambda(s)- \sigma(s)\mu(s))L(s)+ \mu'(s)W(s)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{cases} -\mu(s) = 1, \\ \lambda'(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) - \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri vardır. Bu denklemler çözülürse $\mu(s)=-1$ ve $\lambda'(s) = 0$ ise $\lambda(s) = z_1$, (z_1 bir sabit). Değerleri yerlerine yazılırsa

$$\alpha(s)= z_1N(s)-W(s)$$

elde edilir.

Teorem 4.4.63. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) null normal vektör alanı olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının gerdiği {L(s), W(s)} alt uzayında yatan eğrileri

$$\alpha(s)=-W(s)$$

veya

$$\alpha(s)=z_1L(s)-W(s), \text{ (z_1 sıfırdan farklı sabit)}$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)L(s) + \mu(s)W(s)$ eğrisini alalım. Eğrinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)L(s) + \lambda(s)L'(s) + \mu'(s)W(s) + \mu(s)W'(s)$$

bulunur. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)=-\mu(s)T(s)+ \lambda(s)\sigma(s)N(s)+(\lambda'(s)- \sigma(s)\mu(s))L(s)+(\mu'(s) - \tau(s)\lambda(s))W(s)$$

dir. Buradan

$$\begin{cases} -\mu(s) = 1, \\ \lambda(s)\sigma(s) = 0, \\ \lambda'(s) - \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \mu'(s) - \tau(s)\lambda(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur. $\mu(s) = -1$ ise $\mu'(s) = 0$ olur. Buna göre bulunan $\mu'(s)$ değeri dördüncü denklemde yerine yazılırsa $\tau(s)\lambda(s)$ =0 olup iki durum söz konusudur:

i) $\lambda(s) = 0$ olursa $\mu(s) = -1$ olduğundan

$$\alpha(s)=-W(s)$$

dir.

ii) $\tau(s) = 0$ olursa $\lambda(s) \neq 0$ olduğundan $\lambda'(s) = 0$ olur. Dolayısıyla $\lambda(s) = z_1$, (z_1 sabit) bulunur. Bu şartları sağlayan bir diğer eğri ise

$$\alpha(s)=z_1L(s)-W(s)$$

dir.

Teorem 4.4.64. IR_1^4 de α spacelike eğrisi ve N(s) null normal vektör alanı verilmiş olsun. α nın {T(s), N(s), L(s), W(s)} Frenet çatısının {T(s), N(s), L(s)} nin gerdiği alt uzayda yatan eğrileri

$$\alpha(s)=(s + z_1)\ T(s)+(-\left(\frac{s^2}{2} - z_1 s\right) + z_2)N(s)$$

veya

$$\alpha(s)=(s + z_1)T(s) + (-\frac{s^2}{2} - z_1 s+-z_2\ \sigma(s)s)\ N(s)+ z_2L(s)$$

dir.

İspat: α(s) = λ(s)T(s) + μ(s)N(s)+φ(s)L(s) eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. α(s) eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s)+\varphi'(s)L(s)+ \varphi(s)\ L'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)$=T(s) ve $\kappa(s)$=1 olarak alınırsa,

$$T(s)=\lambda'(s)T(s)+(\lambda(s)+\mu'(s)+\sigma(s)\varphi(s))N(s)+(\tau(s)\mu(s)+\varphi'(s))L(s)+\tau(s)\varphi(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) + \sigma(s)\ \varphi(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) + \ \varphi'(s) = 0, \\ \tau(s)\ \varphi(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri vardır. Denklemler çözülürse $\lambda'(s) = 1$ ise $\lambda(s) = s + z_1$, (z_1 sıfırdan farklı sabit) dir. $\tau(s)\ \varphi(s) = 0$ ise iki durum söz konusudur:

i) $\varphi(s) = 0$ ise $\lambda(s) = s + z_1$ ifadeleri ikinci denklemde yerine yazılırsa

$$\mu'(s) = -(s + z_1) \text{ olduğundan } \mu(s) = -\left(\frac{s^2}{2} - z_1 s\right) + z_2$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(s) = (s + z_1)\, T(s) + \left(-\left(\frac{s^2}{2} - z_1 s\right) + z_2\right) N(s)$$

eğrisi bulunur. Burada z_1, z_2 sıfırdan farklı sabitlerdir.

ii) $\varphi(s) \neq 0$ ve $\tau(s) = 0$ değerleri $\tau(s)\mu(s) + \varphi'(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\varphi(s) = z_2$ elde edilir. Buradan

$$\mu'(s) = -(s + z_1) - z_2\, \sigma(s)$$

olup $\mu(s) = (-\frac{s^2}{2} - z_1 s - z_2\, \sigma(s) s)$ bulunur.

Dolayısıyla bu şartları sağlayan diğer bir eğri

$$\alpha(s) = (s + z_1) T(s) + (-\frac{s^2}{2} - z_1 s + -z_2\, \sigma(s) s)\, N(s) + z_2 L(s)$$

dir.

Teorem 4.4.65. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) null normal vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} olsun. Bu çatının gerdiği {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s) = ((1 + z_1)s) T(s) + ((-\frac{s^2}{2} - z_1 \frac{s^2}{2}) + z_2) N(s) + z_1 W(s) \;,\; (z_1, z_2 \text{ birer sabit})$$

şeklindedir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s) + \varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. $\alpha(s)$ eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)N(s) + \mu(s)N'(s) + \varphi'(s)W(s) + \varphi(s)\, W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s) = T(s)$ ve $\kappa(s) = 1$ olarak alınırsa

$$T(s) = (\lambda'(s) - \varphi(s))T(s) + (\lambda(s) + \mu'(s))N(s) + (\tau(s)\mu(s) - \varphi(s)\, \sigma(s))L(s) + \varphi'(s)W(s)$$

olup buradan

$$\begin{cases} \lambda'(s) - \varphi(s) = 1, \\ \lambda(s) + \mu'(s) = 0, \\ \tau(s)\mu(s) - \varphi(s)\, \sigma(s) = 0, \\ \varphi'(s) = 0 \end{cases}$$

bulunur. Eğer $\varphi'(s) = 0$ ise $\varphi(s) = z_1$ dir. Bu değer birinci denklemde yerine yazılırsa $\lambda'(s) - \varphi(s) = 1$ için $\lambda'(s) = 1 + z_1$ olur. O halde $\lambda(s) = ((1 + z_1)s)$ olarak bulunur. Bulunan $\lambda(s)$ değeri ikinci denklemde yerine yazılırsa $\mu'(s) = -(1 + z_1)s$ dir. Böylece $\mu(s) = (-\frac{s^2}{2} - z_1\frac{s^2}{2}) + z_2$ olur. Burada (z_1, z_2 birer sabit) dir. O halde {T(s), N(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrisi

$$\alpha(s)=((1 + z_1)s)T(s)+((-\frac{s^2}{2} - z_1\frac{s^2}{2}) + z_2)N(s)+z_1W(s)$$

dir.

Teorem 4.4.66. α, IR_1^4 de spacelike bir eğri ve N(s) null normal vektör alanı olsun. α nın Frenet çatısı {T(s), N(s), L(s), W(s)} olsun. Bu çatının gerdiği {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan α eğrileri

$$\alpha(s)= -z_1N(s)-W(s),\ (z_1 \text{ bir sabit})$$

veya

$$\alpha(s)= (-\sigma^2(s)s)\,N(s) + (-\sigma(s)s)L(s) - W(s)$$

dir.

İspat: $\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)L(s)+\varphi(s)W(s)$ eğrisini alalım. Burada λ, μ ve φ; s parametresine göre türevlenebilir fonksiyonlardır. α(s) eğrisinin her iki tarafında s parametresine göre türev alınırsa

$$\alpha'(s) = \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) + \mu'(s)L(s) + \mu(s)L'(s)+\varphi'(s)W(s)+ \varphi(s)\,W'(s)$$

elde edilir. $\alpha'(s)=T(s)$ ve $\kappa(s)=1$ için

$$T(s)= -\varphi(s)T(s)+(\lambda'(s) + \sigma(s)\mu(s))N(s)+(\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s))L(s)$$
$$+(\varphi'(s) - \tau(s)\mu(s))W(s)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{cases} -\varphi(s) = 1, \\ \lambda'(s) + \sigma(s)\mu(s) = 0, \\ \tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0, \\ \varphi'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0 \end{cases}$$

denklemleri vardır. Bu denklemler çözülürse $\varphi(s) = -1$ ise $\varphi'(s) = 0$ değerleri son denklemde yerine yazılırsa $\varphi'(s) - \tau(s)\mu(s) = 0$ için $\tau(s)\mu(s)=0$ elde edilir. Burada iki durum söz konusudur:

i) $\mu(s) = 0$ ise ikinci denklemde yerine yazıldığında $\lambda'(s) = 0$ olup $\lambda(s) = z_1$ elde edilir. Burada z_1 sıfırdan farklı sabittir. Bu şartları sağlayan eğri

$$\alpha(s) = -z_1 N(s) - W(s)$$

olarak bulunur. Ayrıca

ii) $\tau(s) = 0$ ve $\varphi(s) = -1$ değerleri $\tau(s)\lambda(s) + \mu'(s) - \sigma(s)\varphi(s) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa $\mu'(s) + \sigma(s) = 0$ elde edilir. Bu denklemi çözer ve aranan değerler yerlerine yazılırsa {N(s), L(s), W(s)} alt uzayında yatan diğer bir α eğrisi

$$\alpha(s) = (-\sigma^2(s)s)\, N(s) + (-\sigma(s)s) L(s) - W(s)$$

şeklindedir.

Spacelike Eğrilerin Sınıflandırılması

i) Bu kısımda IR_1^3 de spacelike bir eğrisinin normal ve binormal vektör alanlarının null ve timelike olma durumundaki bir sınıflandırma aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.3. IR_1^3 Lorentz uzayda spacelike eğriler

Vektör Alanının Durumu	**Alt uzay**	**Eğrinin Durumu**
N(s) Null	{T(s), N(s)}	Yatar
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar
N(s) Timelike	{T(s), N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar
L(s) Timelike	{T(s), N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar

ii) Bu kısımda IR_1^4 de Spacelike eğrinin birinci binormal, ikinci binormal ve normal vektör alanlarının timelike ve null olması durumunun bir sınıflandırılması aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.4. IR_1^4 Lorentz uzayda spacelike eğriler

Vektör Alanının Durumu	Alt uzay	Eğrinin Durumu
W(s) Timelike	{T(s), N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{T(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), W(s)}	Yatar
	{L(s), W(s)}	Yatmaz
	{T(s), N(s), L(s)}	Yatar
	{T(s), N(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s), W(s)}	Yatar
L(s) Timelike	{T(s), N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{T(s),W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), W(s)}	Yatar
	{L(s), W(s)}	Yatmaz
	{T(s), N(s), L(s)}	Yatar
	{T(s), N(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s), W(s)}	Yatar
L(s) Null	{T(s), N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatmaz
	{T(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), W(s)}	Yatar
	{L(s), W(s)}	Yatmaz
	{T(s), N(s), L(s)}	Yatar
	{T(s), N(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s), W(s)}	Yatar

Çizelge 4.4. IR_1^4 Lorentz uzayda spacelike eğriler (devam)

Vektör Alanının Durumu	Alt uzay	Eğrinin Durumu
N(s) Timelike	{T(s), N(s)}	Yatmaz
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{T(s),W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatar
	{N(s), W(s)}	Yatar
	{L(s), W(s)}	Yatmaz
	{T(s), N(s), L(s)}	Yatar
	{T(s), N(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s), W(s)}	Yatar
N(s) Null	{T(s), N(s)}	Yatar
	{T(s), L(s)}	Yatar
	{T(s),W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s)}	Yatmaz
	{N(s), W(s)}	Yatar
	{L(s), W(s)}	Yatar
	{T(s), N(s), L(s)}	Yatar
	{T(s), N(s), W(s)}	Yatar
	{N(s), L(s), W(s)}	Yatar

5. SONUÇ

Timelike ve Spacelike eğriler Lorentz uzay için büyük önem arz etmektedir. Bu yüksek lisans tezinde Timelike ve Spacelike eğriler ve bu eğriler için belirlenen şartlar ile seçilmiş alt uzaylarda yatıp yatmadıklarına ilişkin teoremler verilip ispatlanmıştır. En temel hatlarıyla konuya ilişkin merak edilenler sonuçlandırılmıştır. Tezin sonunda oluşturulan sınıflandırma çizelgeleri incelenmek istenen eğriler ve araştırılmak istenen problemler için kolaylık sağlamıştır.

Bu tezin diğer tezlerden ayrılan en büyük özelliği teğet, normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanlarının timelike ve null olma durumlarına göre IR_1^3 ve IR_1^4 Lorentz uzaylarındaki timelike ve spacelike eğrilerin Frenet çatısının alt uzaylarında yatıp yatmadığına göre sınıflandırma çizelgelerinin oluşturulmasıdır.

Bu konuya ilişkin ileriki çalışmalarda daha büyük yol kat edileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Bektaş, M., Ergüt, M., Soylu, D. 1998. The Characterization of the Spherical Timelike Curves in 3Dimensional Lorentzian Space. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Society*. Second Series, 21.

Camcı, Ç. 2003. On Pseudohyperbolical Curves in Minkowski Space-Time. *Turkish Journal of Mathematics*, 27(2): 315-328.

Graves, L. 1979. Codimension One Isometric Immersions Between Lorentz Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society,* 252: 367-392.

Hacısalihoğlu, H. 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniv. Fen-Edb. Fak., Yayınları Mat., No:2, Malatya, 895s.

Hacısalihoğlu, H. 1985. Lineer Cebir. Gazi Üniv. Fen-Edb. Fak., No:7, Ankara, 765s.

İlarslan, K. 2005. Spacelike Normal Curves in Minkowski Space E31. *Turkish Journal of Mathematics*, 29(1): 53-63.

İlarslan, K., Kılıç Aslan, N. 2017. On Spacelike Bertrand Curves In Minkowski 3-Space. *Konuralp Journal of Mathematics,* 5(1): 214-222.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian geometry with applications to relativity, Academic Press, New York, 468pp.

Önder, M., Kahraman, T., Uğurlu, H. 2013. Differential Equations and Integral Characterizations of Timelike and Spacelike Spherical Curves in the Minkowski Space-time. *Matematychni Studii*, 40: 30-37.

Sabuncuoğlu, A. 2010. Diferensiyel geometri. Nobel Yayınları, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Zeynep ARSLAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bursa / 10.09.1993
Yabancı Dil	: İngilizce
Eğitim Durumu	
Lise	: Çelebi Mehmet Anadolu Lisesi
Lisans	: Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	: Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı
Çalıştığı Kurum/Kurumlar	: Bursa Birey Anadolu Lisesi (2015-2016) Bursa Kız Anadolu Lisesi- Staj (2016) Bursa Bilim Özel Öğretim Kursu (2017-2018) Bursa Elit Özel Öğretim Kursu (2017-2020) Bursa Bilgi Dora Özel Öğretim Kursu(2017-2018) Bursa Fkm Çamlıca Kolej (2020)
İletişim (e-posta)	: zeynepparrslan@gmail.com