

**BAZI AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜNE DAYALI  
FREKANS KESTİRİCİLERİN KARŞILAŞTIRMALI  
PERFORMANS ANALİZİ**

**Mustafa KOÇ**



T.C.  
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜNE DAYALI FREKANS  
KESTİRİCİLERİN KARŞILAŞTIRMALI PERFORMANS ANALİZİ**

**Mustafa KOÇ**  
0000-0002-4576-3971

Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU  
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BURSA – 2021  
**Her Hakkı Saklıdır**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### BAZI AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜNE DAYALI FREKANS KESTİRİCİLERİN KARŞILAŞTIRMALI PERFORMANS ANALİZİ

**Mustafa KOÇ**

Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

Modern kestirim teorisi, bilgiyi ortaya çıkarmak için tasarlanmış birçok elektronik sinyal işleme sisteminin merkezinde bulunabilir. Bu sistemlere haberleşme, kontrol, ses ve görüntü analiz sistemleri örnek olarak verilebilir. Bu sistemlerin hepsi bir grup parametrenin değerlerini kestirme ihtiyacı gibi ortak bir sorunu paylaşır. Sinyal işleme alanında karşılaşılan pek çok önemli problem gürültü içindeki bir veya daha fazla sinüsün parametrelerinin kestirimine dayanmaktadır veya bu probleme dönüştürülebilmektedir. Frekans parametresi sinüslere doğrusal olmayan biçimde bağlı iken faz ve genlik parametreleri doğrusal biçimde bağlıdır. Frekans parametreleri kestirildikten sonra faz ve genlik parametrelerinin kestirimi daha kolay bir şekilde gerçekleştirilebilir.

Bu tez, frekans kestirimi ile ilgilidir. Bu kestirim için FFT enterpolasyon yöntemi kullanılmıştır. Hızlı Fourier dönüşümü (FFT), bir dizinin ayrık Fourier dönüşümünü hesaplayan algoritmalara verilen genel isimdir. Enterpolasyon ise bilinen değerlerden bilinmeyen değerleri bulmaya yarayan bir uygulamadır. Çalışmada veri modeli olarak karmaşık sinüs veri modeli kullanılmıştır. FFT enterpolasyon ile bazı frekans kestiricilerin gürültülü ve gürültüsüz durumda deneysel olarak MATLAB ortamında karşılaştırılması hedeflenmiştir. Bu kestiriciler: Quinn, Jacobsen ve Macleod'a ait kestiricilerin yanı sıra Quinn'e ait kestiricinin iyileştirilmiş halidir. Gürültü varyansı ( $\sigma^2$ ) için 0, 0.5 ve 1 değerleri seçilmiştir. Bu tezde yer alan kestiricilerin temelinde Ligges ve Quinn tarafından sunulan algoritmalar vardır. En iyi yanlılık performansını Jacobsen'e ait kestirici göstermiştir. Jacobsen ve Quinn algoritmaları daha basit bir hesaplama imkanı ve çok iyi varyans performansı sunarken, Macleod ve İyileştirilmiş Quinn yöntemleri mükemmel bir varyans performansı sunar ancak hesaplaması biraz daha karmaşıktır. Kestirici seçimi, uygulama ve tasarım sınırlarına bağlı olarak kestiricinin performansı ve hesaplama karmaşıklığı arasında kabul edilebilir bir denge kurarak yapılabilir.

**Anahtar Kelimeler:** Modern kestirim teorisi, frekans kestirimi, ayrık Fourier dönüşümü, hızlı Fourier dönüşümü, enterpolasyon, Ligges'in algoritması, Quinn algoritması, Jacobsen algoritması, İyileştirilmiş Quinn yöntemi, Macleod yöntemi.

**2021, vii + 48 sayfa.**

## ABSTRACT

MSc Thesis

### A COMPARATIVE PERFORMANCE ANALYSIS OF SOME DISCRETE FOURIER TRANSFORM BASED FREQUENCY ESTIMATORS

**Mustafa KOÇ**

Bursa Uludağ University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Electronics Engineering

**Supervisor:** Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU

Modern estimation theory can be found at the heart of many electronic signal processing systems designed to reveal information. Communication, control, audio and video analysis systems can be given as examples to these systems. All of these systems share a common problem of the need to estimate the values of a set of parameters. Many important problems encountered in the field of signal processing are based on the estimation of the parameters of one or more sinuses in noise or can be converted to this problem. The phase and amplitude parameters are linearly dependent while the frequency parameter is nonlinearly connected to the sinuses. After the frequency parameters are estimated, the estimation of the phase and amplitude parameters can be performed more easily.

This thesis is about frequency estimation. FFT interpolation method is used for this estimation. Fast Fourier transform (FFT) is the general name given to algorithms that compute the discrete Fourier transform of a sequence. Interpolation is an application that is used to find unknown values from known values. In the study, complex sine data model is used as the data model. With FFT interpolation, it is aimed to compare some frequency estimators in the noisy and noiseless conditions experimentally in MATLAB environment. These estimators; It is an improved version of Quinn's estimator, as well as the estimators of Quinn, Jacobsen, and Macleod. 0, 0.5 and 1 values were chosen for the noise variance ( $\sigma^2$ ). The algorithms presented by Ligges and Quinn are the basis of the estimators in this thesis. Jacobsen's estimator showed the best bias performance. The Jacobsen and Quinn algorithms offer simpler computation and very good variance performance, while the Macleod and Improved Quinn methods offer excellent variance performance but are slightly more complicated to compute. The choice of the estimator can be made by striking an acceptable balance between the estimator's performance and computational complexity depending on application and design constraints.

**Key words:** Modern estimation theory, frequency estimation, discrete Fourier transform, fast Fourier transform, interpolation, Ligges algorithms, Quinn algorithm, Jacobsen algorithm, Improved Quinn method, Macleod method.

**2021, vii + 48 pages.**

## TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın konusunun belirlenmesinde bana destek olan ve bir yerden baőlamam için kaynak önerisinde bulunan deneyimli danıőmanım Prof. Dr. Erdoğan DİLAVEROĞLU'na teőekkürlerimi sunarım.

Manevi destekleri ile her zaman yanımda olan sevgili aileme gösterdikleri sabır ve anlayıőtan dolayı teşekkür ederim.

Mustafa KOÇ  
01/07/2021

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	4
2.1. Kestirim Teorisi.....	5
2.2. Frekans Kestirimi.....	10
2.3. Fourier Katsayılarının Enterpolasyonu.....	11
2.4. Yansız Kestirici.....	12
2.5. En Küçük Varyanslı Yansız Kestirici.....	12
2.6. Cramér Rao Sınırı.....	13
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	15
3.1. Veri Modeli.....	15
3.2. Ligges'in Algoritması.....	15
3.3. Quinn'e ait Algoritma.....	17
3.4. Jacobsen'in Algoritması.....	18
3.5. İyileştirilmiş Quinn Yöntemi.....	20
3.6. Macleod Yöntemi.....	21
4. BULGULAR.....	23
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	32
KAYNAKLAR.....	35
EKLER.....	36
EK 1. Fisher Bilgi Matrisi.....	37
EK 2. Frekans Kestiriminin Yer Aldığı Program.....	38
EK 3. Quinn Fonksiyonunun Yer Aldığı Program.....	44
EK 4. Jacobsen Fonksiyonunun Yer Aldığı Program.....	45
EK 5. İyileştirilmiş Quinn Fonksiyonunun Yer Aldığı Program.....	46
EK 6. Macleod Fonksiyonunun Yer Aldığı Program.....	47
ÖZGEÇMİŞ.....	48

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
A	Genlik
b(.)	Bir kestiricinin yanı
c	Jacobsen kestiricisine ait enterpolasyon katsayısı
D	Doğru akım bileşeni
$\hat{D}$	Doğru akım bileşenine ait kestirici
e[n]	Eklenmiş gürültü
E(.)	Ortalama değer
E[.]	Ortalama değer
f	Frekans
$\hat{f}$	Kestirilen frekans
$f(\omega)$	Gürültünün spektral yoğunluğu
g(.)	Kestiriciyi tanımlayan fonksiyon
I(.)	Reel değerli periodogram katsayıları
i	$\sqrt{-1}$
j	Verilerin sıra numarası
k	Periodogramı maksimum yapan indeks
l	Ligges kestiricisine ait enterpolasyon katsayısı
n	Ayrık veri dizisi
N	Toplam veri sayısı
$P_j$	Reel değerli periodogram katsayıları
$P_k$	Maksimum periodogram değeri
$R_m$	İkinci dereceden karmaşık DFT katsayıları
$\Re(\cdot)$	Bir karmaşık sayının reel kısmı
s[n]	Basit sinüs sinyali
$v_n$	Katı anlamda durağan ve ergodik gürültü
w[n]	Gürültü bileşeni
x[n]	Ayrık veri kümesi
y[n]	Karmaşık değerli sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli
$Y_j$	Karmaşık değerli ayrık Fourier katsayıları
$\alpha$	Karmaşık DFT katsayılar oranı
$\gamma$	İkinci derece Jacobsen kestiricinin enterpolasyon katsayısı
$\delta$	Düzeltilme terimi
$\eta$	Sinyal-gürültü oranı
$\theta$	Bilinmeyen parametre
$\hat{\theta}$	Bilinmeyen parametreye ait kestirici
$\kappa$	Düzeltilme fonksiyonu
$\lambda_j$	Ayrık Fourier frekansları
$\sigma^2$	Gürültü bileşeni
$\tau$	Periodogramın maksimum olduğu karmaşık DFT katsayısı
$\tau^*$	$\tau$ ifadesinin konjügesi
$\phi$	Faz
$\omega$	Açısal frekans

<b>Kısaltmalar</b>	<b>Açıklama</b>
C-R	Cramer-Rao sınırı
DFT	Ayrık Fourier dönüşümü
FFT	Hızlı Fourier dönüşümü
MSE	Ortalama karesel hata
MVU	En küçük varyanslı yansız kestirici
PDF	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
SNR	Sinyal-gürültü oranı



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 2.1. PDF'in bilinmeyen $\theta$ (teta) parametresine olan bağımlılığı .....	5
Şekil 2.2. Gürültü içindeki doğru akımın bir uygulaması .....	5
Şekil 2.3. İki kestiricinin histogramları.....	7
Şekil 4.1. Gürültüsüz ortamda kestirilen ortalama frekans ( $\sigma^2 = 0$ ) .....	22
Şekil 4.2. Gürültüsüz ortamda yanlılığın frekansa bağlı değişimi ( $\sigma^2 = 0$ ) .....	23
Şekil 4.3. Gürültüsüz ortamda varyansın frekansa bağlı değişimi ( $\sigma^2 = 0$ ).....	24
Şekil 4.4. Gürültülü ortamda kestirilen ortalama frekans ( $\sigma^2 = 0.5$ ) .....	25
Şekil 4.5. Gürültüsüz ortamda yanlılığın frekansa bağlı değişimi( $\sigma^2 = 0.5$ ).....	26
Şekil 4.6. Gürültüsüz ortamda varyansın frekansa bağlı değişimi ( $\sigma^2 = 0.5$ ).....	27
Şekil 4.7. Gürültülü ortamda kestirilen ortalama frekans ( $\sigma^2 = 1$ ) .....	29
Şekil 4.8. Gürültüsüz ortamda yanlılığın frekansa bağlı değişimi( $\sigma^2 = 1$ ).....	30
Şekil 4.9. Gürültüsüz ortamda varyansın frekansa bağlı değişimi( $\sigma^2 = 1$ ).....	31

## 1. GİRİŞ

Modern kestirim teorisi, bilgiyi ortaya çıkarmak için tasarlanmış birçok elektronik sinyal işleme sisteminin merkezinde bulunabilir. Bu sistemler şunları içerir:

1. Radar
2. Sonar
3. Ses işleme
4. Görüntü işleme
5. Biyomedikal
6. Haberleşme
7. Kontrol
8. Sismoloji

Bilgiyi ortaya çıkarmak için tasarlanmış bu sistemlerin ortak problemi bir grup parametrenin kestirimine olan ihtiyaçlarıdır (Yılmaz 2007).

Sinyal işleme alanında karşılaşılan pek çok önemli problem, gürültü etkisindeki bir ya da daha fazla sönümlü veya sönümsüz sinüs sinyalinin parametrelerinin kestirimi problemine dayanır. Eğer dayanmıyorsa bu probleme dönüştürülebilir (Yılmaz 2007).

Ses sinyallerinin analizinde (Steiglitz 1977) ve doğrusal sistem belirleme problemlerinde (Steiglitz ve McBride 1965) sönümlü sinüslerin parametre kestirimi problemi ile karşılaşılır. Nükleer manyetik rezonans (NMR) sinyalleri güçlü ve zayıf sönüm katsayısına sahip sinüslerin bir karışımı şeklinde modellenir (Berkhaujssen ve ark. 1985). Vektörel sinyal işleme alanında karşılaşılan varış yönü kestirimi (DOA) çok sayıdaki sinüsün frekanslarının kestirimi problemine dönüşür (Van Veen ve Buckley 1988).

Çoklu yol ortamındaki katlı zaman gecikmesinin kestirimi problemini ele alalım. Veri modeli Fourier bölgesine taşınırsa problem sinüsün parametre kestirimine dönüşür. Zayıflama parametresi, genlik parametresinin; zaman gecikmesi frekans parametresinin rolünü üstlenir (Kay 2000).

Sinüs sinyalinin genlik, faz ve frekans parametreleri vardır. Genlik ve faz parametreleri modele doğrusal biçimde bağlı iken frekans parametreleri doğrusal olmayan biçimde bağlıdır. Bir sinyalin doğrusal olmayan biçimde bağlı parametrelerinin kestirimi yapıldıktan sonra doğrusal biçimde bağlı diğer parametrelerinin kestirimi en küçük kareler yöntemi ile kolaylıkla gerçekleştirilebilir (Yılmaz 2007).

Bu tez, frekans kestirimi ile ilgilidir. Bu kestirim için FFT enterpolasyon yöntemi kullanılmıştır. Hızlı Fourier dönüşümü (FFT), bir dizinin bilgisayar ortamında ayrık Fourier dönüşümünü hesaplayan algoritmalara verilen genel isimdir. Enterpolasyon ise bir fonksiyonun bilinen değerlerinden bilinmeyen değerlerini bulmaya yarayan bir uygulamadır. Çalışmada veri modeli olarak karmaşık sinüsler kullanılmıştır. FFT enterpolasyon ile bazı frekans kestiricilerin gürültülü ve gürültüsüz durumda deneysel olarak karşılaştırılması hedeflenmiştir. Bu kestiriciler şunlardır:

1. Quinn
2. İyileştirilmiş Quinn
3. MacLeod
4. Jacobsen

Kestiriciler isimlerini onları tasarlayan kişilerden almaktadır. Bu kestiricileri karşılaştırmak için MATLAB R2013a (8.1.0.604) ortamı kullanılmıştır.

Gürültülü bir sinyalin temel frekansının kestirimini gerçekleştirme problemi, uzun süredir araştırılmıştır. Başta ses işleme ve müzikoloji olmak üzere farklı mühendislik alanlarında birçok uygulamaya sahiptir. Bugüne kadar pek çok algoritma yayınlanmıştır (Kay 1993, Kootsookos 1999). Bu yöntemler genel fikirleri, uygulama alanları, kesinlikleri ve zaman karmaşıklıkları açısından büyük ölçüde farklılık gösterir (Bischi ve ark. 2009).

Bir kestirici, iyi bir kestirici olması için yansız olmalıdır. Yani, ortalama değerinde gerçek değeri vermelidir ancak bu tek başına yeterli değildir. Yansız bir kestiricinin performansı varyansının küçük olması ile ilişkilidir.

Pratik uygulamalarda öne çıkan bir diğer özellik ise hesaplama karmaşıklığıdır. Kestirici performansı ve hesaplama karmaşıklığı arasında kabul edilebilir bir denge kurulmalıdır (Yılmaz, 2007).

Bu çalışmada yer alan bulgulardan ve sonuçlardan yararlanarak frekans kestirimi yapmak isteyen bir araştırmacı, çalışmasına ait uygulama ve tasarım sınırlarına bağlı olarak çalışmasına uygun bir frekans kestirici seçebilir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Jacobsen (2002), kendi kişisel web sitesinde  $f = 9 \text{ Hz}$  ile  $f = 9.9 \text{ Hz}$  frekans aralığında;  $f_s = 64$  örnekleme frekansında;  $\sigma^2 = 0$ ,  $\sigma^2 = 0.5$ ,  $\sigma^2 = 1$  ve  $\sigma^2 = 2$  gürültü varyanslarında; Quinn'e ait kestiricinin, Quinn'e ait kestiricinin iyileştirilmiş halinin Macleod'a ait kestiricinin ve kendi kestiricisinin varyans ve yanlılık performanslarını karşılaştırmış. Macleod ve İyileştirilmiş Quinn kestiricisinin varyans performansının çok yakın olduğunu ve diğer önemli iki teknikten daha iyi olduğunu bildirmiştir. Yanlılık davranışında ise iyileştirilmiş Quinn kestiricisinin dört kestirici arasında en kötü yanlılık performansını sergilediği ve Jacobsen'e ait kestiricinin en iyi yanlılık performansını gösterdiğini bildirmiştir.

Ligges (2006) doktora tezinde kendi kestiricisinin ve bu kestiricinin iyileştirilmiş halinin deneysel bir değerlendirmesini yapar ve kestiricisinin iyileştirilmiş halini kullanırken Bischl ve arkadaşlarına (2009) göre temel frekans için yaklaşık 2.2 Hz değerinde ortalama hata bildirmiştir.

Bischl ve ark. (2009),  $f = 9 \text{ Hz}$  ile  $f = 10 \text{ Hz}$  frekans aralığında;  $f_s = 128$  örnekleme frekansında;  $\sigma^2 = 0$ ,  $\sigma^2 = 0.2$ ,  $\sigma^2 = 0.4$  gürültü varyanslarında; Ligges'e ait kestiricinin, Ligges'e ait kestiricinin iyileştirilmiş halinin, Quinn'e ait kestiricinin ve Jacobsen'e ait kestiricinin deneysel bir değerlendirmesini yapmıştır. Bu değerlendirmesinde kestiricilere ait tahmin hatasının deneysel dağılımına yer vermiştir ve periodogram baz alınarak elde edilen Ligges algoritmalarının hata fonksiyonlarının dağılımının sıfır üzerinde ortalanmadığını, en kötü doğrulukla sonuçlandığını ifade etmiştir. Diğer iki teknik karmaşık DFT katsayıları baz alınarak elde edilmiştir ve bu iki tekniğin hemen hemen aynı kaliteye sahip görüldüğünü bildirmiştir. Ayrıca bu değerlendirmesinde bu dört kestiricinin yanlılık ve varyans performanslarını karşılaştırmış. Ligges'e ait algoritmaların Quinn ve Jacobsen'e göre çok daha büyük varyans sergilediğini ifade etmiştir. Quinn ve Jacobsen'e ait kestiricilerin ise aralığın farklı bölgelerinde varyans ve yanlılıkları biraz farklı olsa da kalite açısından kabaca eşit görüldüğünü bildirmiştir.

## 2.1. Kestirim Teorisi

Modern kestirim teorisi, bilgiyi ortaya çıkarmak için tasarlanan pek çok elektronik sinyal işleme sisteminin merkezinde bulunabilir. Bu sistemlere haberleşme, kontrol, ses ve görüntü işleme sistemleri örnek olarak verilebilir. Bilgiyi ortaya çıkarmak için tasarlanan bu sistemlerin ortak problemi, bir grup parametrenin kestirimine olan ihtiyaçlarıdır. Parametre değerlerinin kestirimi sürekli zamanlı dalga biçimlerinden örneklenen veri kümeleri kullanılarak gerçekleştirilir. Matematiksel olarak ifade edilirse bilinmeyen  $\theta$  (teta) parametresine bağlı  $N$  adet ayırık veriden oluşan  $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$  kümesi kullanılarak  $\hat{\theta}$  (teta şapka) kestiricisi aracılığıyla  $\theta$  (teta) değerini bulmak hedeflenir:

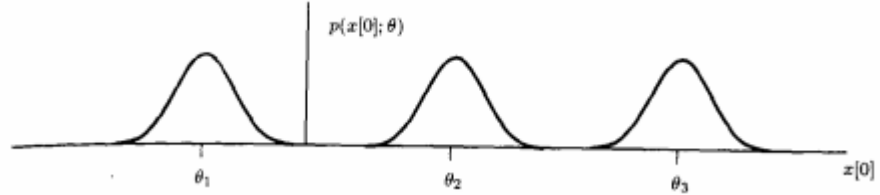
$$\hat{\theta} = g(x[0], x[1], \dots, x[N-1]) \quad (2.1)$$

Burada  $g$ , kestiriciyi tanımlayan fonksiyondur. Kestiriminin iyi olması bu fonksiyonun seçimine bağlıdır.

İyi bir kestiricinin belirlenmesindeki ilk adım verileri matematiksel olarak modellemektir. Veriler doğası gereği rastgele olduklarından dolayı olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) ile ifade edilirler. PDF, bilinmeyen  $\theta$  (teta) parametresinin bir fonksiyonu olarak düzenlenirse farklı  $\theta$  (teta) değerleri için farklı değerler alan PDF kümesi elde edilir. Bir örnek verilirse:  $N=1$  ve  $\theta$  (teta) parametresi ortalama değer olsun. Bu durumda verinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi olabilir:

$$p(x[0]; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x[0] - \theta)^2\right) \quad (2.2)$$

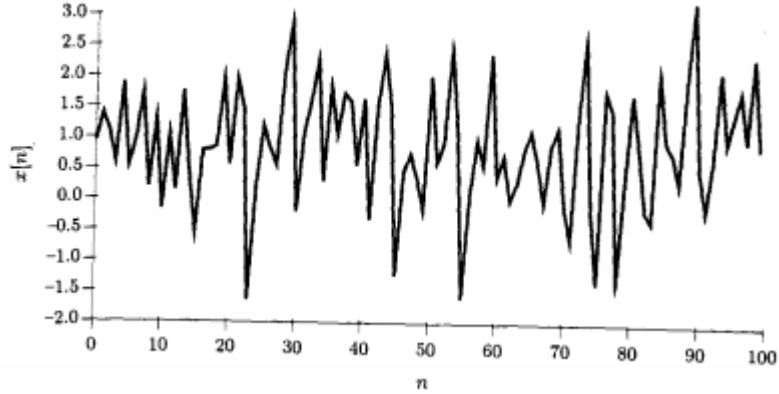
Şekil 2.1'de  $\theta$  (teta) parametresinin farklı değerleri için PDF fonksiyonunun değişimi gösterilmiştir. Şekilden de açıkça görüldüğü gibi  $\theta$  (teta) parametresi  $x[0]$  verisinin olasılığını etkilemektedir. Dolayısıyla  $\theta$  (teta) parametresinin değeri  $x[0]$  gözlemlenerek elde edilebilir. Örnek verilirse eğer  $x[0]$  negatif ise  $\theta = \theta_2$  şüphelidir,  $\theta = \theta_1$  olması daha mantıklıdır.



Şekil 2.1. PDF'in bilinmeyen  $\theta$  (teta) parametresine olan bağımlılığı

PDF fonksiyonunun bu özelliği iyi bir kestirici tasarlamak için büyük önem taşır. Problemin şartlarına ve sınırlarına uygun ve matematiksel olarak pratik bir şekilde hesaplanabilen bir PDF seçilmelidir. Bu PDF seçildikten sonra problem, en iyi kestiricinin belirlenmesi problemine dönüşür. Kestirici, veri kümesinin her bir uygulamasında  $\theta$  (teta) parametresine bir değer atar. Verilen bir uygulama için elde edilen  $\theta$  (teta) değeri ise  $\theta$  (teta) parametresinin kestirim değeridir. Kestirici ve kestirim değeri arasındaki ilişki rastgele değişken ve onun aldığı bir değer arasındaki ilişkiye benzetilebilir.

Şekil 2.2'de verilen veri kümesini ele alalım. İlk bakışta gürültü içindeki bir doğru akım bileşeni  $D$ 'den oluştuğu görülebilir.



Şekil 2.2. Gürültü içindeki doğru akımın bir uygulaması

Yukarıdaki veri kümesi matematiksel olarak aşağıdaki gibi modellenebilir:

$$x[n] = D + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.3)$$

Burada  $w[n]$  ortalaması 0 olan gürültü bileşenidir.

$\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$  veri kümesi kullanılarak  $D$  doğru akım bileşeni kestirilmek istenmektedir.  $D$  değeri  $x[n]$  veri kümesinin ortalama değeri olduğun için  $D$  değerini aşağıdaki gibi kestirmek uygun bir yaklaşım olabilir:

$$\hat{D} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (2.4)$$

Bu durumda akla bazı sorular gelir:

1.  $\hat{D}$ ,  $D$ 'ye ne kadar yakın olacak?
2. Eş. (2.4)'ten daha iyi bir kestirici var mıdır?

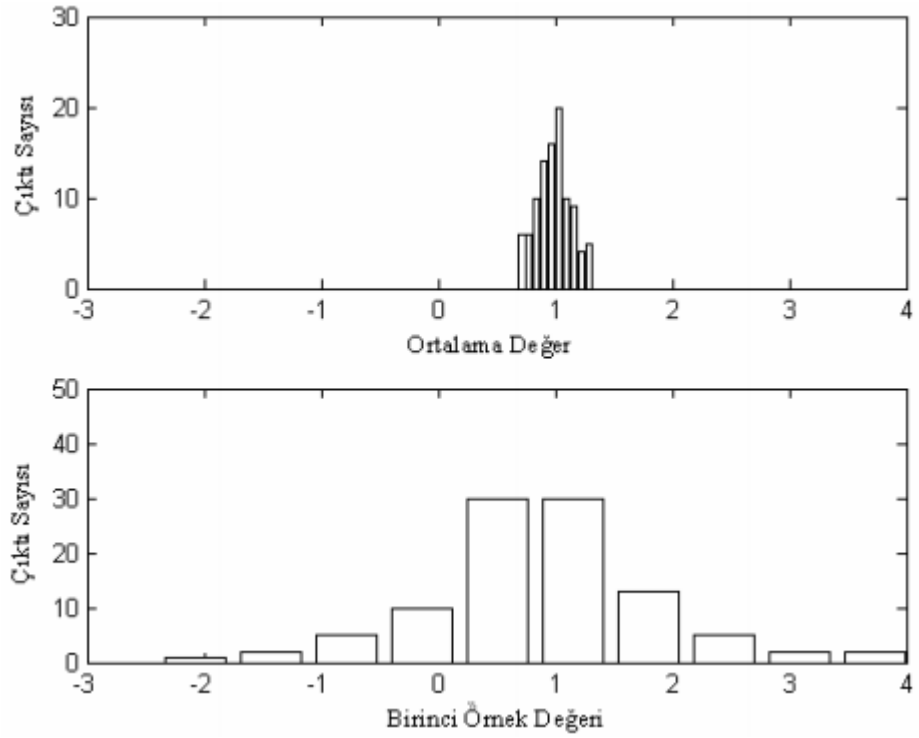
Şekil 2.2'de yer alan veri kümesi için  $\hat{D} = 0.9$  olur, bu değer  $D$ 'nin gerçek değeri olan 1 değerine çok yakındır. Bir başka kestirici olarak veri kümesinin ilk örneği seçilebilir:

$$\tilde{D} = x[0] \quad (2.5)$$

$\tilde{D}$  ( $D$  tilde) sembolüyle ifade edilen ilk örnek kestiricinde veri kümesinin tüm elemanları kullanılmadığından dolayı performansının yüksek olması beklenmez. Gürültü etkisini azaltmak için herhangi bir ortalama değer alınmamasına rağmen Şekil 2.2'deki veri kümesi için  $\tilde{D} = 0.95$  olur. Bu değer  $D$ 'nin gerçek değerine Eş. (2.4)'teki ortalama değer kestiricisinden daha yakındır. Fakat bu değerlerden yola çıkarak Eş. (2.5)'teki ilk örnek kestiricisinin ortalama değer kestiricisinden daha iyi bir kestirici olduğu sonucuna varılamaz. Çünkü kestirici bir fonksiyondur, bir rastgele değişkendir. İlk örnek kestiricisi sadece bir deneme için gerçek değere yakın bir sonuç vermiştir. Kestirici performansı ise istatistiksel olarak değerlendirilir.



İncelenen veri modelinde genlik değeri 1 değerinde tutularak, gürültü bileşeni  $w[n]$  sinyaline farklı değerler vererek  $x[n]$  için bir çıktı kümesi elde edildi. Daha sonra her bir veri kümesi için Eş. (2.4) ve Eş. (2.5)'te yer alan sırasıyla ortalama değer ve ilk örnek kestiricilerinin değerleri belirlenerek histogramları çizildi. 100 deneme için elde edilen histogramlar Şekil 2.3'te verilmiştir.



Şekil 2.3. İki kestiricinin histogramları

Şekil 2.3'ten de görüldüğü gibi ortalama değer kestiricisi daha iyi bir kestiricidir çünkü gerçek değer  $D = 1$  civarında daha fazla sonuç elde edilmiştir. Hatta tüm sonuçlar gerçek değere yakındır. Ortalama değer kestiricisinin daha iyi bir kestirici olduğunu kanıtlamak için varyansının daha az olduğu gösterilmesi gerekir. Bu gösterimden önce modelde yer alan gürültü bileşeni ( $w[n]$ ) için daha önce yapılan varsayıma (ortalamasının sıfır olması) ek olarak ilişiksiz ve eşit  $\sigma^2$  varyansa sahip olduğu varsayımı yapıldı. İlk olarak her iki kestiricinin ortalama değerleri elde edildi:

$$E(\hat{D}) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E(x[n]) = D \quad (2.6a)$$

$$E(\tilde{D}) = E(x[0]) = D \quad (2.6b)$$

Ortalama değer, her iki kestiricide gerçek değeri vermektedir.

Daha sonra kestiricilerin varyansları elde edildi:

$$\text{var}(\hat{D}) = \text{var}\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \text{var}(x[n]) = \frac{\sigma^2}{N} \quad (2.7a)$$

$$\text{var}(\tilde{D}) = \text{var}(x[0]) = \sigma^2 \quad (2.7b)$$

Ortalama değer kestiricinin ( $\hat{D}$ ) varyansı toplam örnek sayısı (N) ile ters orantılı iken,  $\tilde{D}$  (D tilde) sembolüyle ifade edilen ilk örnek kestiricinin varyansı N değeri ne olursa olsun  $\sigma^2$ 'dir yani değişmemektedir.

Sonuç olarak bir kestiricinin iyi bir kestirici olması için ortalama değerde gerçek değeri vermesi yani yansız olması tek başına yeterli değildir. Her iki kestirici de ortalama değerde gerçek değeri vermesine karşın, ortalama değer kestiricisinin varyansı ilk örnek kestiricisine göre daha azdır üstelik örnek sayısı arttıkça ortalama değer kestiricisinin varyansının daha da azaldığı Eş. (2.7a)'da görülmektedir. Yansız bir kestiricinin performansı varyansının küçük olması ile ilişkilidir. Ayrıca uygulama kısmında pratikliği sağlamak için ortaya çıkan bir diğer özellik de hesaplama karmaşıklığıdır. Kestiricinin performansı ve hesaplama karmaşıklığı arasında kabul edilir bir denge kurulmalıdır (Yılmaz 2007).

Sinyal işleme alanında karşılaşılan pek çok önemli problem, gürültü etkisindeki bir ya da daha fazla sönümlü veya sönümsüz sinüs sinyalinin parametrelerinin kestirimi problemine dayanır. Eğer dayanmıyorsa bu probleme dönüştürülebilir (Yılmaz 2007).

Sinüs sinyalinin genlik, faz ve frekans parametreleri vardır. Genlik ve faz parametreleri modele doğrusal biçimde bağlı iken frekans parametreleri doğrusal olmayan biçimde bağlıdır. Bir sinyalin doğrusal olmayan biçimde bağlı parametrelerinin kestirimi yapıldıktan sonra doğrusal biçimde bağlı diğer parametrelerinin kestirimi en küçük kareler yöntemi ile kolaylıkla gerçekleştirilebilir. Reel beyaz Gauss gürültüsü içindeki bir reel sinüsten oluşan zaman dizisi modeli de birden fazla sinyal içeren modeller için bir örnek teşkil eder (Yılmaz 2007).

## 2.2. Frekans Kestirimi

Sinyal basit bir sinüs olsun.

$$s[n] = A \sin(2\pi fn + \phi) + e[n], \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

Burada  $A$ ,  $\phi$  (fi) ve  $f \in (0, 1/2)$  parametreleri sinüsün sırasıyla genliğini, fazını ve frekansını göstermektedir. Sinüs sinyali, eklenmiş gürültüye ( $e[n]$ ) sahip ve zamanda  $N$  noktada örneklenmiştir. Eklenmiş gürültü ( $e[n]$ ) ortalaması 0, varyansı  $\sigma^2$  olan reel beyaz Gauss gürültüsüdür. Diğer tüm parametreler bilinmemekle birlikte, mümkün olduğu kadar gerçek frekansa ( $f$ ) yakın ve zaman bölgesinde hesabı pratik olarak hesaplanabilen bir frekans kestirici ( $\hat{f}$ ) aranır (Bischi ve ark. 2009).

Yansız kestiriciler için C-R sınırı aşağıda gösterilmiştir:

$$\text{var}(\hat{f}) \geq \frac{12}{(2\pi)^2 \eta N(N^2 - 1)} \quad (2.9)$$

Burada  $\hat{f}$  ( $f$  şapka), basit sinüs veri modeli için bir frekans kestiriciyi ifade eder. Eta harfiyle sembolize edilen sinyal-gürültü oranının değeri aşağıda gösterilmiştir:

$$\eta = \frac{A^2}{\sigma^2} \quad (2.10)$$

Bu konuda daha detaylı bilgi edinmek için bakılabilir (Kay 1993).

### 2.3. Fourier Katsayılarının Enterpolasyonu

Frekans kestirimi için karmaşık-değerli ayrık Fourier katsayılarına (DFT) veya reel-değerli periodogram katsayılarına enterpolasyon işlemi uygulayan çok sayıda algoritma vardır.

Bir  $s[n]$  sinyaline ait karmaşık değerli ayrık Fourier katsayıları matematiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilir:

$$Y_j = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \exp\left(-\frac{j2\pi jn}{N}\right) \quad (2.11)$$

Bir  $s[n]$  sinyaline ait reel değerli periodogram katsayıları matematiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilir:

$$I(\lambda) = \frac{2}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-in\lambda) \right|^2; \quad \lambda = \frac{j2\pi}{N}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

$I(\lambda)$ , pratikte yalnızca ayrık Fourier frekanslarında ( $j2\pi/N$ ) mevcuttur:

$$P_j = 2 \frac{|Y_j|^2}{N} = I\left(\frac{j2\pi}{N}\right) = I(\lambda) \quad (2.13)$$

Bu yaklaşımın sebebi, periodogram maksimumunun

$$\hat{\omega}_{max} = \operatorname{argmax} I(\lambda)$$

$\omega$  için asimptotik olarak yansız bir kestirici olmasıdır. Sonuç olarak aşağıdaki ifade asimptotik olarak geçerlidir:

$$N^{\frac{3}{2}} (\hat{\omega}_{max} - \omega) \sim N(0, \frac{48\pi f(\omega)}{A^2}) \quad (2.14)$$

Burada  $f(\omega)$ , eklenmiş gürültünün ( $e[n]$ ) spektral yoğunluğudur. Daha ayrıntılı bilgi için bakılabilir (Bischl ve ark. 2009).

#### 2.4. Yansız Kestirici

Bir kestirici ortalama değerde bilinmeyen parametrenin gerçek değerini veriyorsa o kestirici yansız bir kestiricidir (Yılmaz 2007). Matematiksel olarak aşağıdaki koşulu sağlıyorsa kestirici yansızdır:

$$E(\hat{\theta}) = \theta, \quad a < \theta < b \quad (2.15)$$

Burada  $(a,b)$ ,  $\theta$  'nın değer aralığıdır. Bir kestiricinin yanı matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$b(\theta) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (2.16)$$

#### 2.5. En Küçük Varyanslı Yansız Kestirici (MVU)

En uygun kestirici aranırken bazı uygunluk kriterleri incelenir. Bunlardan bir tanesi aşağıdaki biçimde tanımlanan ortalama karesel hatadır (MSE):

$$MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \quad (2.17)$$

Ortalama karesel hata, kestiricinin gerçek değere göre ortalama karesel sapmasının bir ölçüsüdür. Fakat bu doğal kriterlerin benimsenmesi, uygulanması mümkün olmayan kestiricilere yol açmaktadır. Bu sebepten problemi daha yakından incelenmek için ortalama karesel hata eşitliği tekrar yazılır:

$$\begin{aligned}
MSE(\hat{\theta}) &= E \left\{ \left[ (\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + (E(\hat{\theta}) - \theta) \right]^2 \right\} \\
&= var(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2 \\
&= var(\hat{\theta}) + b^2(\theta)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Eş. (2.18) ifadesinden görüldüğü gibi ortalama karesel hata, kestirici varyansı ve yanlılıktan oluşmaktadır.

Ortalama karesel hata, yanlılık ile ilişkili olduğundan bu kriterin benimsenmesi, uygulanması mümkün olmayan kestiricilere yol açmaktadır. Bundan dolayı en küçük ortalama karesel hata kestiricisinin kullanımından kaçınılmalıdır. Alternatif bir yaklaşım olarak yanlılığı sıfır değerinde sabit tutarak en küçük varyansı veren kestirici aranabilir. Bu kestirici en küçük varyanslı yansız (MVU) kestirici olarak isimlendirilir. Yansız bir kestiricinin varyansının azalması kestirim hatasına ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun sıfır civarında yoğunlaşması etkisine sahiptir.

## 2.6. Cramér-Rao Sınırı

Cramér-Rao (C-R) sınırı, bazı koşulların sağlanması halinde herhangi bir yansız kestiricinin varyansı için alt sınır verir (Yılmaz 2007). Yani, Cramér-Rao sınırı veri modelleri için kestiriciden bağımsız olarak elde edilmesi mümkün en yüksek performansı vermektedir.

Bu yüzden Cramér-Rao sınırı pratik kestiricilerin performansını değerlendirmek için bir ölçüt olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Cramér-Rao sınırı, modele ait Fisher bilgi matrisinin tersini alarak bulunur. Bu matrisin, birden fazla sinyal içeren veri modeller için, yapısı karmaşık olduğundan dolayı çözülmesi zordur. Bu nedenle bu veri modelleri için Cramér-Rao sınırı çözümsel olarak değil sayısal yoldan hesap edilir (Yılmaz 2007). Uygulamalarda birden fazla sinyal içeren veri modelleri ile ilgilenildiğinden dolayı bu modellerin parametreleri ile olan matematiksel ilişkileri sayısal yoldan incelenir. Bununla birlikte çözümsel sınır ifadeleri, performans limitlerinin teorik olarak incelenmesi sonucunda, en uygun kestirim senaryolarına imkan verdiği için dolayı önemlidir.

Yansız kestiricilerin varyansları için bir sınır belirleyebilmek pratik açıdan önemlidir. Belirlediğimiz bu sınır en iyi durum için ilgilenilen yansız kestiricinin en küçük varyanslı yansız kestirici olduğunu belirlememizi sağlar. En iyi durum; ilgilenilen kestiricinin varyansının sınırı, bilmek istenen parametrenin tüm değerleri için sağlanması halidir. En kötü durum, ilgilenilen kestiricinin performansını test etme imkanı veren bir kriter sağlar.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Veri Modeli

Bu bölümde tezde ele alınan beyaz Gauss gürültüsü etkisindeki karmaşık sinüsten oluşan zaman serisi veri modelinin tanımı yapılmıştır. Bu model, pratikte birden fazla sinyal içeren verilerin bir prototipidir. Frekans kestiricilerin performansını belirlemede yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Karmaşık sinüsten oluşan zaman serisi veri modeli aşağıda verilmiştir:

$$y[n] = A \exp(j(\omega n + \phi)) + e[n], \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

Burada  $A$ ,  $\phi$  ve  $\omega \in (0, 2\pi)$  parametreleri karmaşık sinüsün sırasıyla genliğini, fazını ve frekansını göstermektedir.

Karmaşık sinüs sinyali, eklenmiş gürültüye ( $e[n]$ ) sahip ve zamanda  $N$  noktada örneklenmiştir. Eklenmiş gürültü ( $e[n]$ ) ortalaması 0, varyansı  $\sigma^2$  olan beyaz Gauss gürültüsüdür. Karmaşık sinüsün sinyal-gürültü oranı aşağıda verilmiştir:

$$SNR = \frac{A^2}{\sigma^2} \quad (3.2)$$

#### 3.2. Ligges'in Algoritması

Ligges (2006) müzikoloji alanında frekans kestirimi için sezgisel olarak elde edilmiş bir prosedür sunmuştur. Bu algoritma basit tonlu sinyallerin yanı sıra üst tonlu ve çoklu tonlu sinyaller için de kullanılır ve birçok pratik yolu vardır. Bu yüzden aşağıda verilen diğer kestiricilerden daha kapsamlıdır, ancak burada ele alınan basit tonlar durumunda algoritma indirgenebilir:



Bir parabol, periodogramın maksimum değerine ve bu maksimum değere komşu iki periodogram değerine göre ayarlanır. Parabolün tepe konumu ton frekansı için bir kestirici olarak kullanılır.

Bu kestirici matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\hat{\omega}_{Ligges1} = \frac{\lambda^{**} + \lambda^*}{2} + \frac{(\lambda^{**} - \lambda^*) [I(\lambda^{**}) - I(\lambda^*)]}{2 I(\lambda^*) - I(\lambda^{**}) - I(\lambda^{***})} \quad (3.3)$$

Burada,  $\lambda^*$  sembolü, periodogramın maksimum değerine ait açısal frekansı gösterir.  $\lambda^{**}$  sembolü, bu frekanstan daha büyük olan komşu frekansı;  $\lambda^{***}$  sembolü ise bu frekanstan daha küçük olan komşu frekansı göstermektedir.

Eş. (3.1) daha sade halde yazılabilir:

$$\hat{\omega}_{Ligges1} = \lambda^* + \frac{2\pi}{N} \frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{4P_k - 2P_{k+1} - 2P_{k-1}} \quad (3.4)$$

$$l = \frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{4P_k - 2P_{k+1} - 2P_{k-1}} \quad (3.4a)$$

Aynı yöntem Voglewede (2004) tarafından daha pratik bir şekilde yayınlanmıştır (Bischl ve ark. 2009).

Kestirimi (Ligges 2006, Gallant ve ark. 1974) iyileştirmek için Ligges tarafından başka bir sezgisel uyarlamayı aşağıdaki denklem vermektedir:

$$\hat{\omega}_{Ligges2} = \lambda^* + \frac{(\lambda^{**} - \lambda^*)}{2} \sqrt{\frac{I(\lambda^{**})}{I(\lambda^*)}} \quad (3.5)$$

İkinci algoritmada, periodogramın maksimum değerine ait frekanstan daha küçük olan komşu frekans ( $\lambda^{***}$ ) yer almadığı görülmektedir.

Ligges (2006) doktora tezinde bu iki kestiricinin deneysel bir değerlendirmesini yapmış ve ikinci algoritmayı kullandığında temel frekans için yaklaşık 2.2 Hz değerinde ortalama hataya ulaştığını bildirmiştir. Ayrıca yöntemini bilinen model-tabanlı yaklaşımlar ile karşılaştırmıştır. Asimptotik dağılımlar belirtilmemiştir (Bischi ve ark. 2009).

### 3.3. Quinn'e ait Algoritma

Quinn (1994) periodogram yerine doğrudan verilerin karmaşık DFT katsayılarını ( $Y_j$ ) üzerinde çalışmasına rağmen Ligges (2006) ile benzer verimli bir şekilde üç Fourier katsayısının enterpolasyonunu yapan bir kestirici kullanır. Aşağıda bu kestiricinin algoritması verilmiştir:

1.  $|Y_j^2|$  ifadesinin maksimum değerine ulaştığı indeks  $k$  olsun.
2.  $\alpha_1 = \Re(Y_{k-1}/Y_k)$  ve  $\alpha_2 = \Re(Y_{k+1}/Y_k)$  olsun.
3.  $\delta_1 = \alpha_1 / (1 - \alpha_1)$  ve  $\delta_2 = -\alpha_2 / (1 - \alpha_2)$  olsun.
4. Eğer hem  $\delta_1$  hem de  $\delta_2 > 0$  ise o zaman  $\delta = \delta_2$ , değil ise  $\delta = \delta_1$  dir.
5.  $\hat{\omega}_{Quinn} = \frac{2\pi}{N}(k + \delta)$ .

Burada,  $j$  dizisi verilerin sıra numarasını ifade eder ( $j = 0, 1, \dots, N-1$ ).  $|Y_j^2|$  sembolü, verilerin karmaşık DFT katsayılarının karelerinin genliğini simgeler.  $\Re(\cdot)$  fonksiyonu ise bir karmaşık sayının reel kısmını verir.

Yukarıdaki algoritmadan da görüldüğü gibi kestirilen frekansa ait eşitlik aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\hat{\omega}_{Quinn} = \frac{2\pi}{N}(k + \delta) \quad (3.6)$$

Quinn, genel kabullenmeden farklı olarak gürültünün bağımsız ve özdeş dağılan Gauss olduğunu varsaymaz ancak zayıf ve biraz teknik varsayımlar altında (gürültü katı anlamda durağandır ve ergodiktir,  $E[\varepsilon_n] = 0$ ,  $E[\varepsilon_n^2] < \infty$ ) merkezi limit teoremi kullanılarak aşağıdaki asimptotik dağılımı türetmiştir:

$$N^{3/2} \frac{1}{v_N} (\hat{\omega}_{Quinn} - \omega) \sim N(0, 1) \quad (3.7)$$

$$v_N^2 = 16\pi^5 \delta^2 (1 - |\delta|)^2 (2\delta^2 - 2|\delta| + 1) f(\omega) \frac{1}{A^2 \sin^2(\pi\delta)} \quad (3.7a)$$

Burada  $v_N$  katı anlamda durağan ve ergodik gürültüyü ifade eder.  $f(\omega)$  ise gürültünün spektral yoğunluğudur.

### 3.4. Jacobsen'in Algoritması

Yukarıda bahsedilen kestiricilerin deneysel bir karşılaştırması yapılmış ve bu çalışma sonucunda Ligges'e ait iki kestiricinin çok iyi sonuçlar vermediği görülmüştür (Bischi ve ark. 2009).

Ligges'e ait ilk kestiriciye Quinn algoritmasının genel fikri uygulanır ve karmaşık değerli DFT katsayılarına geçilirse sonuçlar düzeltilebilir (Jacobsen ve Kootsookos 2007).

Çalışmada kullanılan karmaşık sinüs sinyalinin karmaşık ve ayrık Fourier katsayıları  $Y_j$  dizisi olsun. Burada  $j$  bu katsayıların indeksini ifade eden başka bir dizidir. Matematiksel olarak  $j = 1, 2, \dots, N$  şeklinde gösterilir.  $|Y_j|$  ifadesini maksimum yapan indeks  $k$  olsun.  $k-1, k, k+1$  indekslerine karşılık gelen karmaşık ve ayrık Fourier katsayılarına göre bir parabol ayarlanır. Ayarlanan parabolde kullanılan üç Fourier katsayısına enterpolasyon işlemi uygulayarak  $c$  harfi ile sembolize edilen bir karmaşık sayı elde edilir. Bu sayı matematiksel olarak aşağıda gösterilmiştir:

$$c = \frac{Y_{k-1} - Y_{k+1}}{2Y_k - Y_{k-1} - Y_{k+1}} \quad (3.8)$$

Bu  $c$  karmaşık sayısı  $k$  indeksine eklenerek parabolün tepe konumu bulunur. Ancak, parabolün tepe konumu reel sayı olduğundan bu karmaşık sayı eklenirken sayının reel kısmı alınır. Parabolün tepe konumu, sinyalin frekansı için bir kestirici olarak kullanılır. Bu işlemler matematiksel olarak aşağıda gösterilmiştir:

$$k_{tepe} = k + Re(c) \quad (3.9a)$$

$$k_{tepe} = \hat{f} \quad (3.9b)$$

Sinyalin frekansı, yukarıdaki kestirici yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$f = \hat{f} \frac{f_s}{N} \quad (3.10)$$

Eğer kestiricinin genel formülü açısal frekans cinsinden yazılmak istenirse frekans değerleri  $\frac{2\pi}{N}$  katsayısı ile çarpılarak açısal frekans değerlerine dönüştürülür. Bu işlemler sonucunda ortaya aşağıdaki gibi bir genel formül çıkar:

$$\hat{\omega}_{Jacobsen} = \lambda^* + \frac{2\pi}{N} \Re \left( \frac{Y_{k-1} + Y_{k+1}}{2Y_k - Y_{k+1} - Y_{k-1}} \right) \quad (3.11)$$

$$c = \frac{Y_{k-1} + Y_{k+1}}{2Y_k - Y_{k+1} - Y_{k-1}} \quad (3.11a)$$

Burada,  $k$  değeri  $|Y_j|$  ifadesini maksimum yapan indekstir yani sıra numarasıdır.  $\lambda^*$  sembolü,  $k$  indeksine karşılık gelen açısal frekansı simgeler. Matematiksel olarak,  $\lambda^* = k \frac{2\pi}{N}$  şeklinde gösterilir. Bu açısal frekans ve ona komşu açısal frekansların karmaşık ve ayrık Fourier katsayıları sırasıyla  $Y_k, Y_{k+1}, Y_{k-1}$  ile gösterilmiştir.  $Y_{k+1}$ , büyük olan komşu frekansa ait karmaşık ve ayrık Fourier katsayısını ifade eder.  $Y_{k-1}$  ise küçük olan komşu frekansa ait karmaşık DFT katsayısını ifade eder.

Ligges'e ait ilk kestiriciye göre bazı değişiklikler olduğuna dikkat edilmelidir. Mesela, periodogram yerine doğrudan verilerin karmaşık DFT katsayıları üzerinde çalışılmıştır. Bu yüzden Eş. (3.8a) ifadesinin reel kısmı alınmıştır.

Kestiricinin (Jacobsen ve Kootsookos 2007) dağılımı ile ilgili teorik sonuç yoktur (Bischi ve ark. 2009). Asimptotik normal dağılımın olmaması Quinn yöntemine göre bu yöntemin dezavantajıdır.

Bischi ve ark. (2009) bu kestirici hakkındaki görüşlerini “ tam olarak bu uyarlamamın neden böyle bir gelişme ile sonuçlandığı çok açık değildir” şeklinde ifade etmektedir.

### 3.5. İyileştirilmiş Quinn Yöntemi

Şu ana kadar bahsedilen yöntemlerin dışında, daha da düşük ortalama karesel hata sergileyen iki kestirici daha bulunmaktadır. Bu kestiricilerden biri Quinn’e ait ilk kestiricinin iyileştirilmiş halidir (Bischi ve ark. 2009). Bu kestiriciye literatürde Quinn’e ait ikinci kestirici de denilmektedir (Jacobsen 2002).

İyileştirilmiş bu kestiricide karmaşık DFT katsayılarına göre belirlenen  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  parametrelerinden doğrusal olmayan bir fonksiyon ile farklı bir  $\delta$  elde edilir. Quinn’in ilk kestiricisinde olduğu gibi  $\delta$  (delta),  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  parametrelerinin işaretlerine bağlı olarak seçilmez (Bischi ve ark. 2009).

$\delta$  (delta) parametresine ait eşitlik aşağıda gösterilmiştir:

$$\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \kappa(\delta_1^2) + \kappa(\delta_2^2) \quad (3.12)$$

$$\kappa(x) = \frac{1}{4} \log(3x^2 + 6x + 1) - \frac{\sqrt{6}}{24} \log\left(\frac{x+1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{x+1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right) \quad (3.12a)$$

Yani, Quinn kendi yöntemini  $\delta$ ’nın seçilme yöntemini doğrusallıktan uzaklaştırarak geliştirmiştir. Çünkü gerçek sonuçlar teorik sonuçların aksine doğrusallıktan uzaktır. Bu farklılık vurgulandıktan sonra iyileştirilmiş Quinn kestiricisi açık bir şekilde tekrar yazılmalıdır:

1.  $|Y_j^2|$  ifadesinin maksimum değerine ulaştığı indeks (indis)  $k$  olsun.
2.  $\alpha_1 = \Re(Y_{k-1}/Y_k)$  ve  $\alpha_2 = \Re(Y_{k+1}/Y_k)$  olsun.
3.  $\delta_1 = \alpha_1 / (1 - \alpha_1)$  ve  $\delta_2 = -\alpha_2 / (1 - \alpha_2)$  olsun.
4.  $\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \kappa(\delta_1^2) + \kappa(\delta_2^2)$  olsun.
5.  $\kappa(x) = \frac{1}{4} \log(3x^2 + 6x + 1) - \frac{\sqrt{6}}{24} \log\left(\frac{x+1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{x+1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)$  olsun.
6.  $\hat{\omega}_{iQuinn} = \frac{2\pi}{N}(k + \delta)$ .

Burada,  $j$  dizisi verilerin sıra numarasını ifade eder ( $j = 0, 1, \dots, k, \dots, N-1$ ).  $|Y_j^2|$  sembolü verilerin karmaşık DFT katsayılarının karelerinin genliğini simgeler.  $\Re(\cdot)$  fonksiyonu bir karmaşık sayısının reel kısmını verir.

Yukarıdaki algoritmadan da görüldüğü gibi kestirilen frekansa ait eşitlik aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\hat{\omega}_{iQuinn} = \frac{2\pi}{N}(k + \delta) \quad (3.13)$$

### 3.6. Macleod'un Yöntemi

Bir önceki bölümde ilk üç kestiriciden daha düşük ortalama karesel hata sergileyen iki yöntem olduğu söylenmiş ve bu yöntemlerin ilki açıklanmıştı.

İkinci yöntem ise Macleod tarafından sunulan yöntemdir. Yüzeysel olarak bakıldığında Jacobsen'e ait enterpolasyon katsayısının ikinci dereceden haline benzeyen bu farklı katsayıya doğrusal olmayan bir düzeltme terimi eklenerek Cramér-Rao sınırına yakın bir kestirici elde edilmiştir (Bischl ve ark. 2009).

Yukarıda bahsedilen farklı katsayı matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\gamma = \frac{R_{k-1} - R_{k+1}}{2R_k + R_{k-1} + R_{k+1}} \quad (3.14)$$

$$R_m = \Re(Y_m \tau^*), \quad m = k - 1, k, k + 1 \quad (3.14a)$$

$$\tau = Y_k \quad (3.14b)$$

Burada  $k$ , ayırık periodogramın maksimum olduğu indeksi (indis) ifade eder.  $\tau^*$  ise karmaşık DFT katsayılarının maksimum değerinin ( $Y_k$ ) eşleniğini gösterir. Yukarıda bahsedilen farklı katsayıya aşağıdaki gibi doğrusal olmayan düzeltme işlemi uygulanır:

$$\delta = \frac{\sqrt{1+8\gamma^2}-1}{4\gamma} \quad (3.15)$$

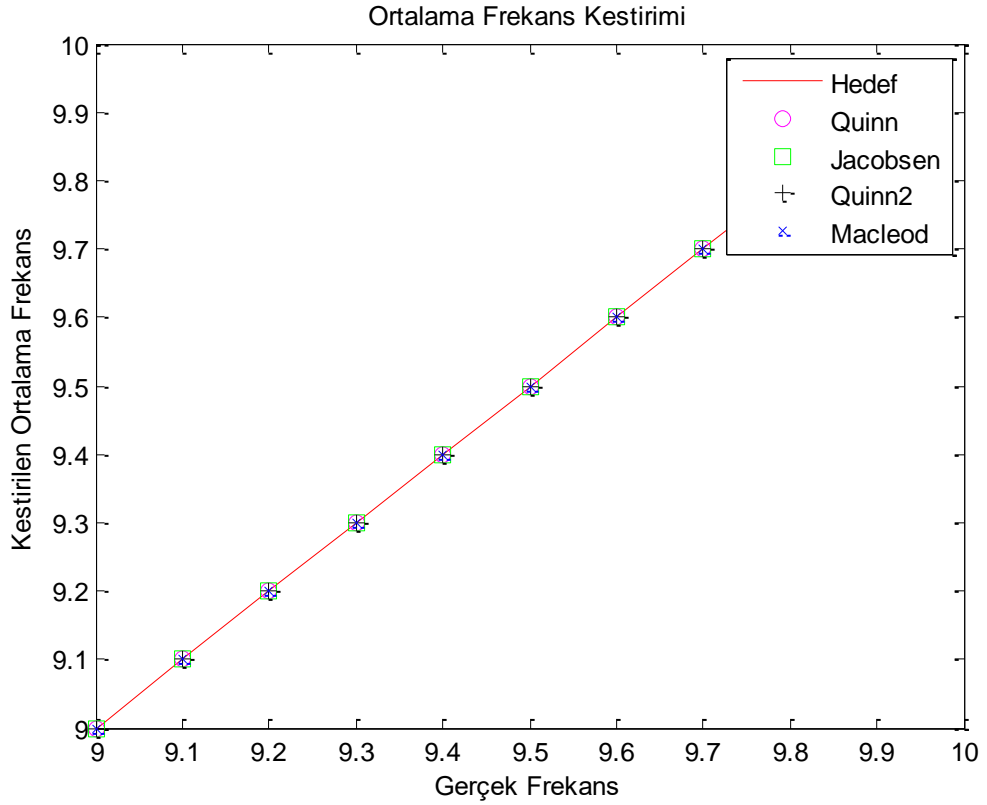
Aşağıdaki işlem sonucunda Macleod tarafından sunulan kestirici elde edilir. Bu kestirici matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\hat{\omega}_{Macleod} = \lambda^* + \frac{2\pi}{N} \delta \quad (3.16)$$

Jacobsen, Cramér-Rao sınırına yakın performans sergileyen Macleod ve İyileştirilmiş Quinn kestiricisine ek olarak Quinn'e ait ilk kestiricinin ve kendisine ait kestiricinin deneysel bir değerlendirmesini yapmış ve web sitesinde yayınlamıştır (Jacobsen, 2002).

#### 4. BULGULAR

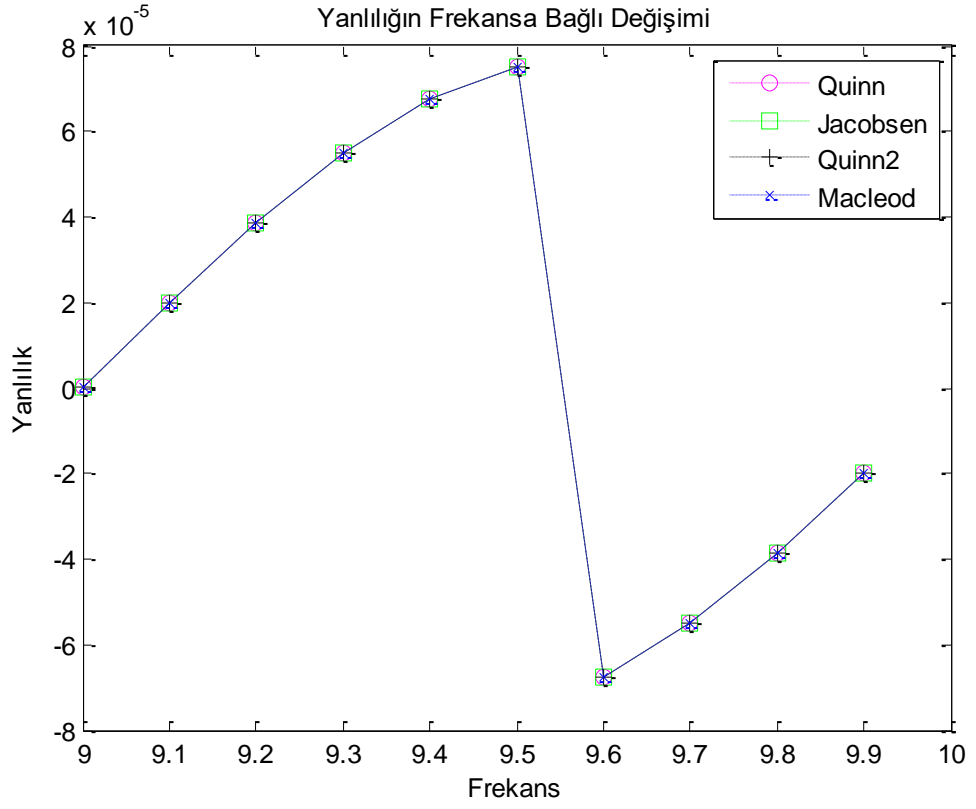
Quinn, Jacobsen, İyileştirilmiş Quinn ve Macleod kestiricileri kullanılarak MATLAB ortamında kestiricilerin deneysel performansları ele alındı. Kestiricilerin hedeflenen yani gerçek frekans değerleri ile arasındaki fark grafikler ile gösterildi. Ayrıca kestiriciler hakkında daha fazla bilgi edinmek için varyans ve yanlılık performansları da elde edildi. Elde edilen bulgular karşılaştırılarak genel bir değerlendirme yapıldı.



Şekil 4.1. Gürültüsüz ortamda kestirilen ortalama frekans ( $\sigma^2 = 0$ )

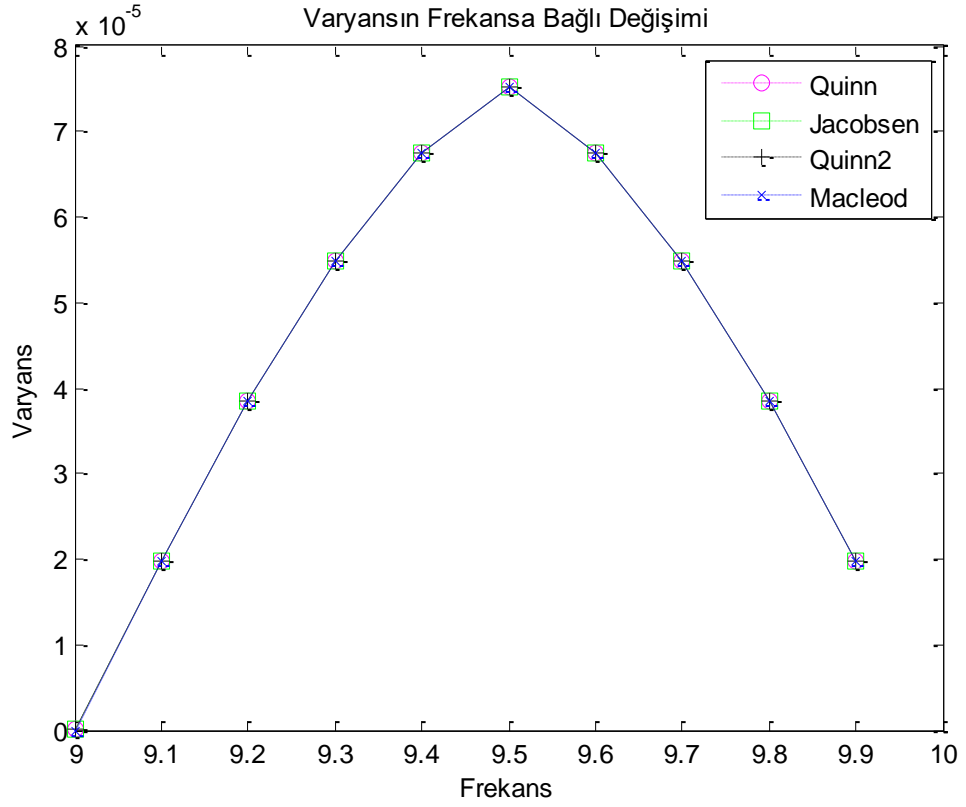
Gürültünün olmadığı ortamda kestirilen ortalama frekansın grafiği Şekil 4.1’de gösterilmiştir. Tüm kestiriciler hedeflenen kestirici ile uyumaktadır.





**Şekil 4.2.** Gürültüsüz ortamda yanlılığın frekansa bağlı değişimi ( $\sigma^2 = 0$ )

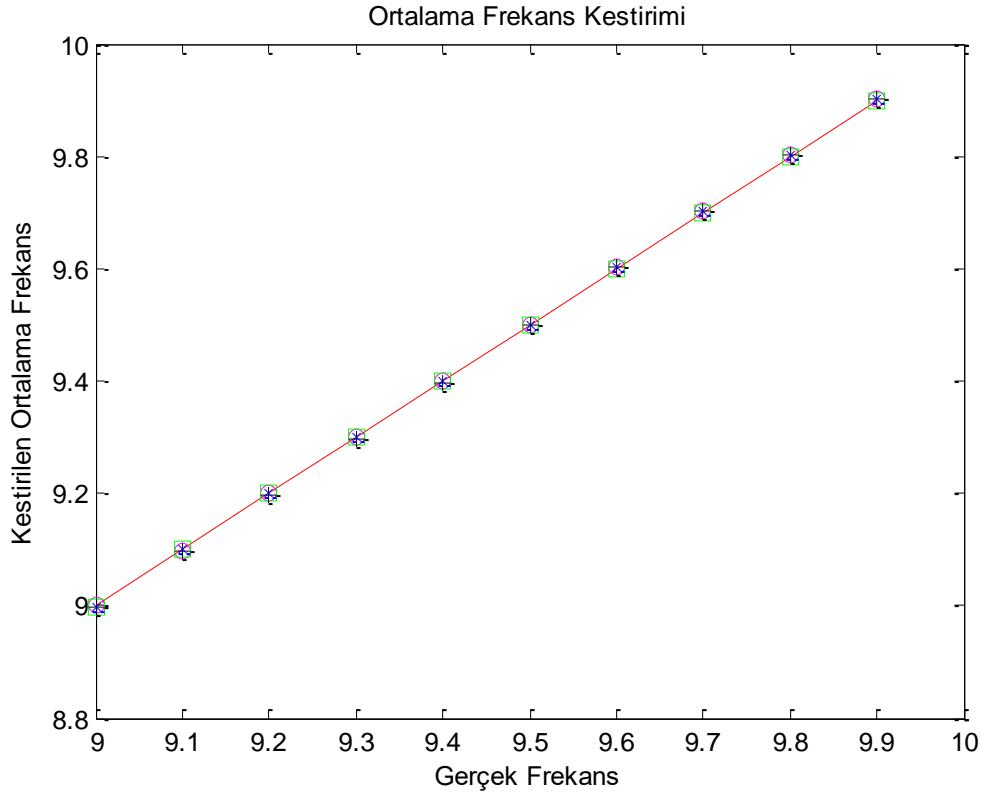
Gürültüsüz ortamda kestiricilerin yanlılık performansı Şekil 4.2’de gösterilmiştir. Yanlılık, kestiricinin hata değerinin ortalamasıdır.



**Şekil 4.3.** Gürültüsüz ortamda varyansın frekansa bağlı değişimi ( $\sigma^2 = 0$ )

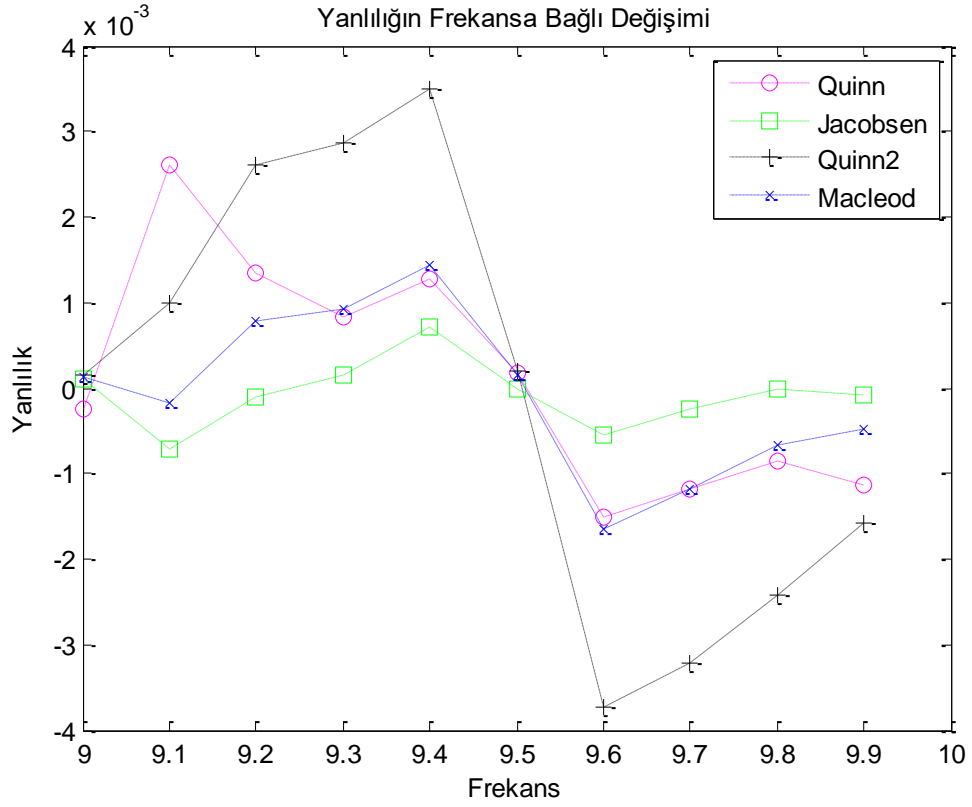
Gürültüsüz ortamda kestiricilerin varyans performansı Şekil 4.3'te gösterilmiştir. Varyans, kestiricinin hata değerinin RMS değeridir.

Yukarıda her kestiricinin gürültüsüz durumdaki varyans ve yanlılık performansları gösterildi. Bu durumda kestiricilerin varyans ve yanlılık performansları tutarlı gibi görünüyor ancak kestiricilerin birbirinden ayırt edilmesi oldukça zordur. Bir araştırma yapmadan bu ortak performans davranışının simülasyondan kaynaklandığı söylenemez fakat göreceli performansların bu simülasyon ile karşılaştırılmayacağı açıktır (Jacobsen, 2002).



**Şekil 4.4.** Gürültülü ortamda kestirilen ortalama frekans ( $\sigma^2 = 0.5$ )

Gürültü varyansının 0.5 olduğu ortamda kestirilen ortalama frekansın grafiği Şekil 4.4’de gösterilmiştir. Tüm kestiricilerin değerleri hedeflenen değerler ile uyşmaktadır.



Şekil 4.5. Gürültülü ortamda yanlılığın frekansa bağlı değişimi ( $\sigma^2 = 0.5$ )

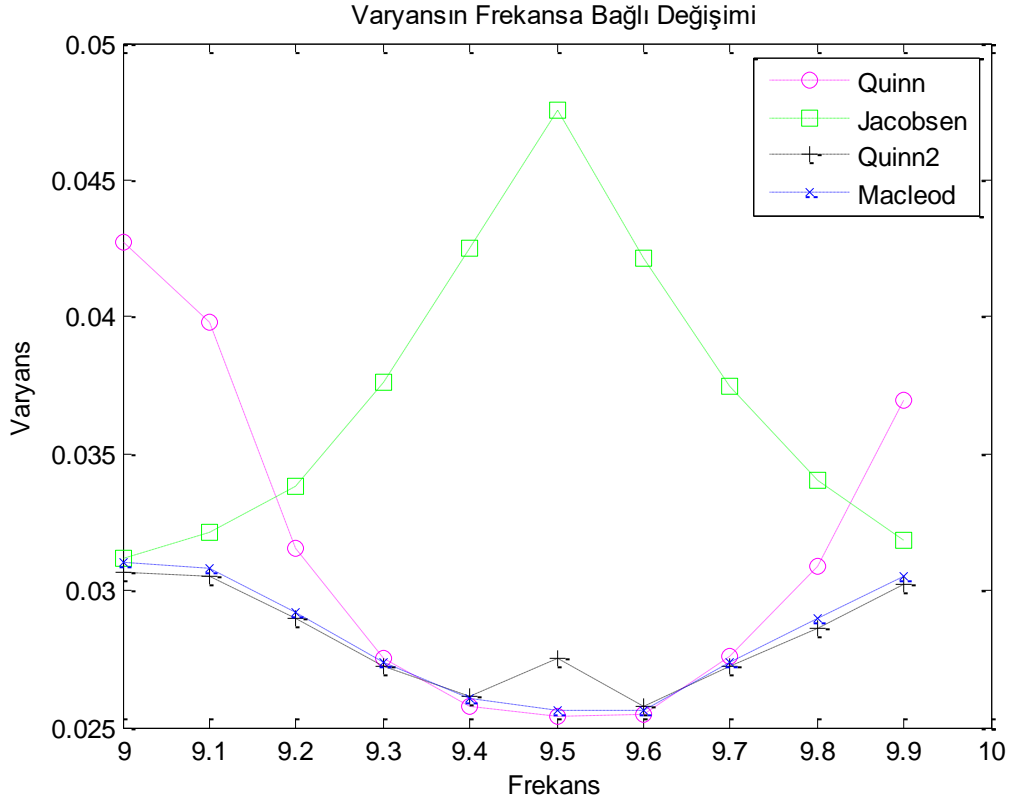
Şekil 4.5'te gürültü varyansının 0.5 olduğu durum için her kestiricinin yanlılık performansları gösterildi.

Jacobsen'e ait kestirici  $y=0$  eksenine oldukça yakın bir performans sergileyerek en iyi yanlılık performansını gösteriyor.

Macleod'a ait kestirici,  $f = 9.3 \text{ Hz} - f = 9.8 \text{ Hz}$  frekansları arasında Quinn'e ait ilk kestirici ile birbirine çok yakın yanlılık performansları sergilese de tüm frekanslar göz önüne alındığında yanlılık performansında ikinci sıradadır.

Quinn'in ilk kestiricisi  $f = 9 \text{ Hz}$  ve  $f = 9.1 \text{ Hz}$  frekanslarında Quinn'e ait ikinci kestiriciden daha kötü bir performans sergilese de yanlılık performansında üçüncü sıradadır.

Quinn'e ait ikinci kestirici,  $f = 9 \text{ Hz}$  ve  $f = 9.1 \text{ Hz}$  frekansları haricinde yanlılık performansında dördüncü sıradadır.



**Şekil 4.6.** Gürültülü ortamda varyansın frekansa bağlı değişimi ( $\sigma^2 = 0.5$ )

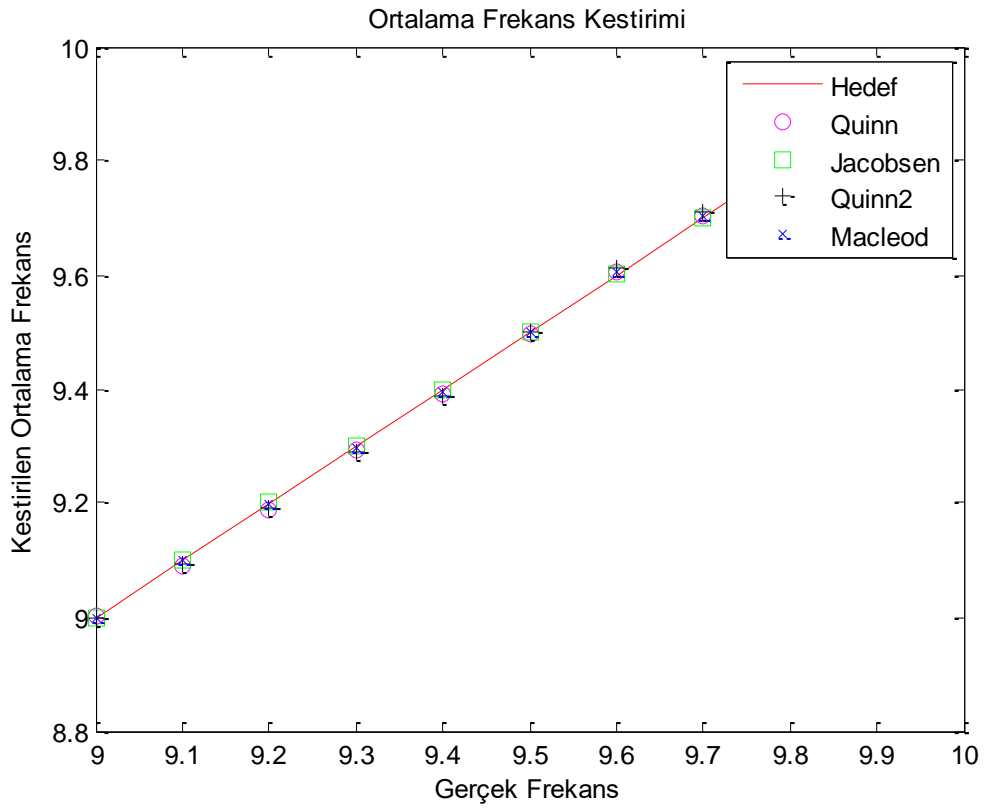
Şekil 4.6’da gürültü varyansının 0.5 olduğu durum için her kestiricinin varyans performansı gösterildi.

Macleod’a ait kestirici, Quinn’e ait ikinci kestirici ile  $f = 9.5 \text{ Hz}$  frekansı haricinde birbirine çok yakın performans sergilemektedir. Ancak bölme merkezindeki bu farktan dolayı Macleod’a ait kestiricinin en iyi varyans performansını gösterdiği söylenebilir.

Quinn’e ait ikinci kestirici; Jacobsen’e ait kestirici ile  $f = 9 \text{ Hz}$  frekansında, Quinn’e ait ilk kestirici ile  $f = 9.3 \text{ Hz} - f = 9.7 \text{ Hz}$  frekansları arasında birbirine çok yakın performans sergilemesine rağmen tüm frekanslar göz önüne alındığında varyans performansında ikinci sıradadır. Ayrıca belirtilen değerlerdeki yakın performanslar Macleod’a ait kestirici için de geçerlidir.

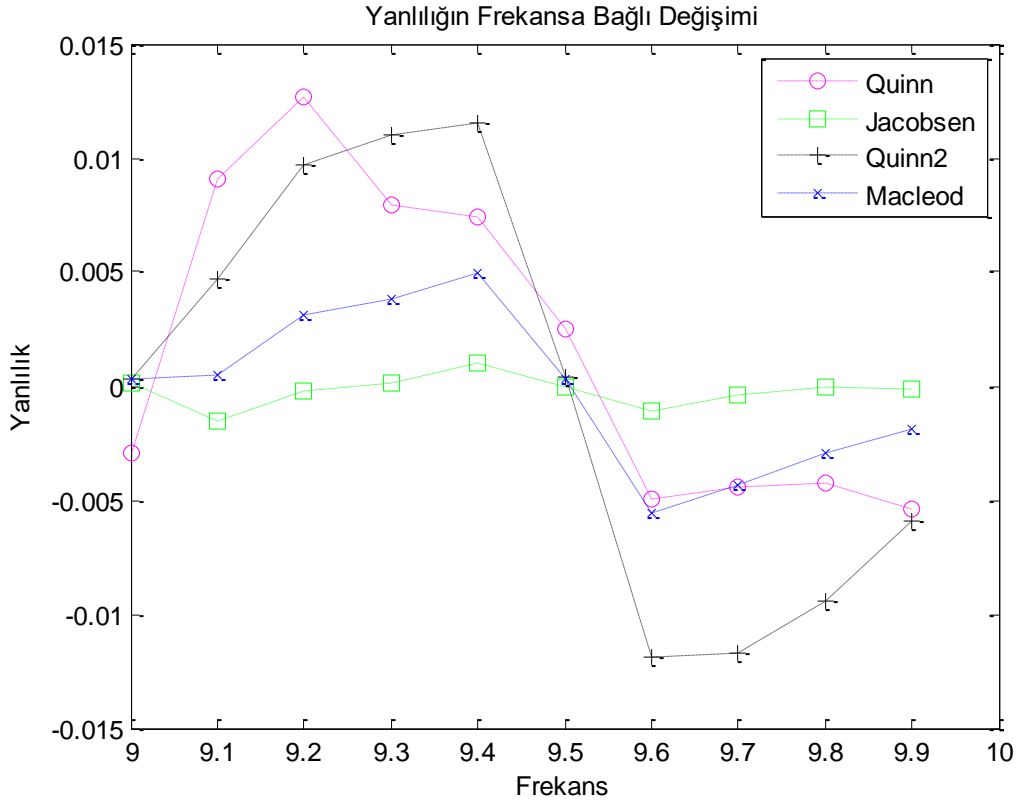
Quinn'e ait ilk kestirici,  $f = 9, 9.1$  ve  $9.9$  Hz frekanslarında Jacobsen'e ait kestiriciye göre daha yüksek varyans performansı sergilese de tüm frekanslar göz önüne alındığında varyans performansında üçüncü sıradadır.

Jacobsen'e ait kestirici,  $f = 9, 9.1$  ve  $9.9$  Hz frekanslarında Quinn'e ait ilk kestiriciye göre daha iyi bir varyans performansı sergilese de tüm frekanslar göz önüne alındığında varyans performansında son sıradadır.



Şekil 4.7. Gürültülü ortamda kestirilen ortalama frekans ( $\sigma^2 = 1$ )

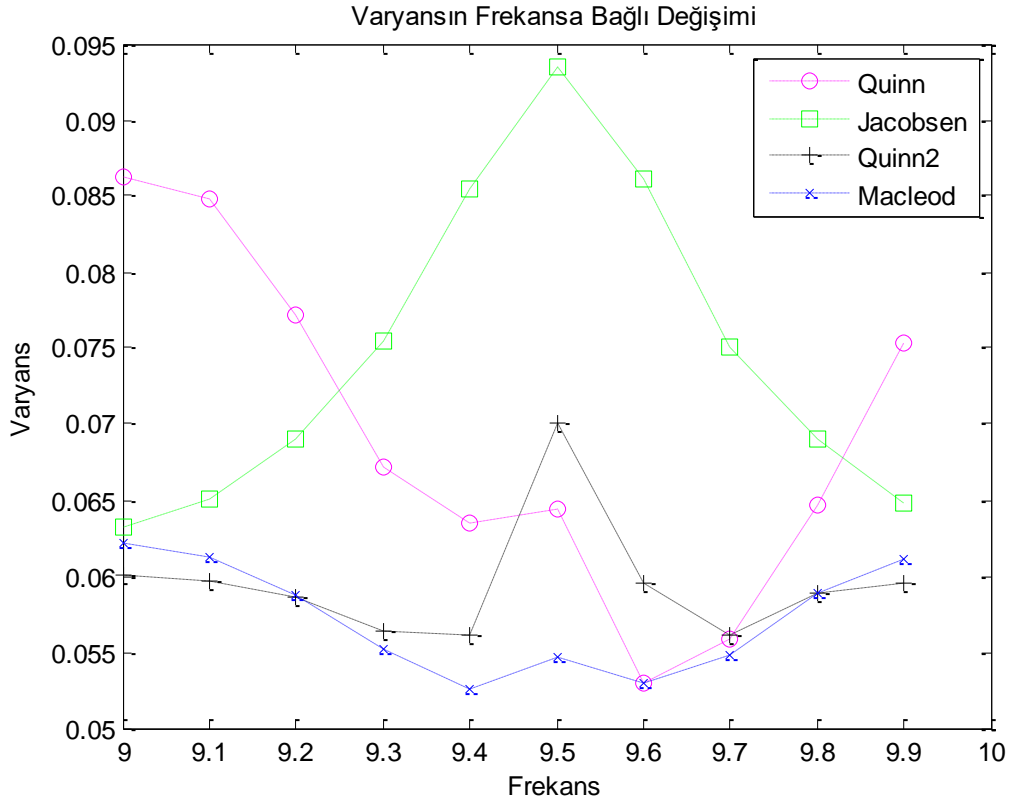
Şekil 4.7'de varyansın bir olduğu ortamda kestirilen ortalama frekansın grafiği gösterilmiştir. Tüm kestiricilerin değerleri hedeflenen değerler ile uyuşmaktadır.



**Şekil 4.8.** Gürültü ortamda yanlılığın frekansa bağlı değişimi ( $\sigma^2 = 1$ )

Şekil 4.8’de gürültü varyansının 1 olduğu durum için her kestiricinin yanlılık performansı gösterildi. Gürültü varyansının artmasına bağlı olarak yanlılık değerleri artmıştır ancak bazı değişiklikler haricinde bir önceki durum için söylenenler aynen geçerlidir. Sıralama değişmemiştir. Jacobsen’e ait kestiriciyi en iyi yanlılık performansını göstermektedir. Bu kestiriciyi sırasıyla Macleod, Quinn’e ait ilk ve ikinci kestiriciler takip etmektedir.

Bir önceki durumdan farklı olarak; Macleod’a ait kestirici  $f = 9.3 \text{ Hz}$  ile  $f = 9.8 \text{ Hz}$  frekansları arasında Quinn’e ait ilk kestirici ile birbirine çok yakın performans sergilediği söylenmişti. Bu durum Macleod’a ait kestiricinin lehine oldukça belirgin şekilde açılmıştır. Quinn’e ait ilk kestirici  $f = 9 \text{ Hz}$  ve  $f = 9.1 \text{ Hz}$  frekanslarına ek olarak  $f = 9.2 \text{ Hz}$  frekansında da Quinn’e ait ikinci kestiriciden daha kötü bir yanlılık performansı sergilese de bir önceki durumda olduğu gibi yanlılık performansında üçüncü sıradadır.



**Şekil 4.9.** Gürültü ortamda varyansın frekansa bağlı değişimi ( $\sigma^2 = 1$ )

Şekil 4.9'da  $\sigma^2 = 1$  durumu için her kestiricinin varyans performansları gösterildi. Gürültü varyansının artmasına bağlı olarak varyans değeri artmıştır ancak performans sıralaması değişmemiştir. Macleod'a ait kestirici en iyi varyans performansını gösteriyor. Bu kestiriciyi sırasıyla Quinn'e ait ikinci kestirici, Quinn'e ait ilk kestirici ve Jacobsen'e ait kestirici takip etmektedir.

Bir önceki durumda birçok frekans noktasında diğer kestiriciler ile birbirine çok yakın performans gösterdiği söylenen Macleod'a ait kestiricinin rakiplerinden daha iyi bir kestirici olduğu belirlenmiştir.



## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, Jacobsen'in çalışmasına (2002) göre  $\sigma^2 = 0$  ve  $\sigma^2 = 0.5$  durumlarında tüm kestiriciler daha düşük yanlılık ve varyans değerleri göstermiştir. Bu durumun nedeninin bu çalışmada sinyalden alınan örnek sayısının daha fazla oluşundan kaynaklandığı düşünülmektedir. Jacobsen çalışmasında (2002) sinyalden 64 örnek alınırken bu çalışmada 128 örnek alınmıştır. Fakat bu iki çalışmadaki örnek sayısı farklılığı  $\sigma^2 = 1$  durumuna yansımamıştır.  $\sigma^2 = 1$  durumunda her iki çalışmadaki kestiricilerin yanlılık ve varyans değerleri arasında farklılık gözlemlense de yanlılık ve varyans değerleri aynı değer aralığındadır. Her iki çalışmada aynı kestiriciler kullanılmıştır. Bu çalışmada  $\sigma^2 = 0$ ,  $\sigma^2 = 0.5$  ve  $\sigma^2 = 1$  gürültü varyanslarında çalışılırken Jacobsen'in çalışmasında bu çalışmalara ek olarak  $\sigma^2 = 2$  gürültü varyansında çalışılmıştır.

Bischi çalışmasında (2009) bu çalışma ile aynı örnekleme frekans değerini ( $f_s = 128$ ) kullanırken Ligges'e ait iki kestiriciyi, Jacobsen'e ait kestiriciyi ve Quinn'e ait ilk kestiriciyi  $\sigma^2 = 0$ ,  $\sigma^2 = 0.2$  ve  $\sigma^2 = 0.4$  durumlarında karşılaştırmıştır. Bu paragrafta her iki çalışmada da yer alan Jacobsen'e ait kestirici ile Quinn'e ait ilk kestiricinin performansları karşılaştırılacaktır. Bu çalışmada  $\sigma^2 = 0$  durumu için her iki kestirici de aynı varyans ve yanlılık davranışı sergilerken Bischi'e ait çalışmada (2009) bu iki kestirici farklı varyans ve yanlılık davranışı göstermiştir. Bu durumun nedeni anlaşılammıştır. Simülasyondan kaynaklandığı söylenebilir ancak Bischi'e ait çalışmadaki sonuç daha gerçekçi görünmektedir. Her iki çalışmada da aynı örnek sayısı kullanılmasına rağmen bu çalışmada her iki kestiricide diğer çalışmaya göre  $\sigma^2 = 0$  durumu için daha düşük yanlılık değeri sergilemiştir. Aynı gürültü varyansı için her iki çalışmadaki aynı kestiricilerin varyanslarını karşılaştırdığımızda Quinn'e ait ilk kestirici her iki çalışmada neredeyse aynı varyans davranışını sergilerken Bischi'e ait çalışmada (2009), Jacobsen'e ait kestiricinin tüm frekans aralığında varyans değeri sıfırdır. Bu çalışmada ise Jacobsen'e ait kestirici  $[0, 8 \times 10^{-5}]$  değer aralığında bir varyans performansı sergilemiştir.

Ayrıca bu çalışmada  $\sigma^2 = 0.5$  gürültü varyansında her iki kestirici Bischl'e ait çalışmadaki  $\sigma^2 = 0.4$  durumuna göre, daha yüksek gürültü varyansına rağmen, daha düşük yanlılık değerleri göstermiştir. Ancak buna karşın aynı gürültü varyansı durumlarında Bischl'e ait çalışmadaki Jacobsen'e ait kestirici ile Quinn'e ait ilk kestirici bu çalışmaya göre en az 10 kat daha iyi varyans performansı sergilemiştir.

Frekans aralığının başında Quinn'e ait ikinci kestirici Quinn'e ait ilk kestiriciden yanlılığı daha iyi olsa da genel olarak dört kestirici arasından en kötü yanlılık performansını Quinn'e ait ikinci kestirici gösterir. Macleod'a ait kestirici bu kestiricilere göre daha iyi yanlılık performansı sergilerken, en iyi yanlılık performansını Jacobsen'e ait kestirici gösterir.

Genel olarak Macleod'un ve Quinn'e ait ikinci kestiricinin varyans performansları diğer iki teknikten önemli ölçüde daha iyi olduğu gözlenmiştir. Bu iki kestirici birbirine yakın performanslar sergilese de Macleod'a ait kestirici en iyi varyans performansını göstermiştir.

Bir kestiricinin performansı varyansının küçük olması ile ilişkilidir. Ayrıca uygulama kısmında pratikliği sağlamak için ortaya çıkan bir diğer özellik de hesaplama karmaşıklığıdır. Jacobsen'e ait frekans kestiricinin hesaplama karmaşıklığı en basittir. Hesaplamak için basit aritmetik işlemler ve bir tane bölme işlemi gerektirir. Quinn'e ait ilk kestiriciyi hesaplamak Jacobsen'de olduğu gibi basit olsa da aritmetik işlemlerin yanı sıra birden fazla bölme işlemi ve karşılaştırma işlemi gerektirir. Quinn'e ait ikinci kestirici ise birden fazla bölme ve logaritma işlemi gerektirmektedir. Macleod'un kestirici ise birden fazla bölme ve karekök işlemi gerektiriyor. Jacobsen ve Quinn'e ait ilk kestirici daha basit bir hesaplama imkanı ve çok iyi varyans performansı sunarken, Macleod ve Quinn'e ait ikinci kestirici mükemmel bir varyans performansı sunar ancak hesaplaması biraz daha karmaşıktır.

Her ne kadar karşılaştırma yapsak da bu kestiricilerin hepsinin FFT enterpolasyon yöntemi ile frekans kestirimi konusunda çok iyi kestiriciler olduğu hatırlanmalıdır. Kestirici seçimi yapılırken uygulama ve tasarım sınırlarına bağlı olarak kestiricinin performansı ve hesaplama karmaşıklığı arasında kabul edilebilir bir denge kurulabilir.

## KAYNAKLAR

- Barkhnijsen, H., R. De Beer and D. Van Ormondt. 1985.** Retrieval of frequencies, amplitudes, damping factors and phases from time-domain signals using a linear least-squares procedure. *Journal of Magnetic Resonance*, 61(3):465-481.
- Bischi, B., Ligges, U., Weihs, C. 2009.** Frequency estimation by DFT interpolation: A comparison of methods. DOI: 10.17877/DE290R-588.
- Gallant, A., Gerig, T.M., Evans, J.W. 1974.** Time Series realizations obtained according to an experimental design. *Journal of the American Statistical Association*, 69: 639-645.
- Jacobsen, E. 2002.** Frequency Estimation page. EF Data Corporation of America, www.ericjacobsen.org/fe2/fe2.htm-(Erişim tarihi:16.11.2020).
- Jacobsen, E., Kootsookos, P. 2007.** Fast, accurate frequency estimators [DSP Tips & Tricks]. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 24(3): 123-125.
- Kay, S.M. 1993.** Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory. Prentice Hall, NJ, USA, 595.
- Kay, S. M. 2000.** Mean likelihood frequency estimation. *Signal Processing, IEEE Transactions*, 48(7):1937-1946.
- Kootsookos, P.J., 1999.** A review of the frequency estimation and tracking problems. Australian National University's Technical report, Australia.
- Ligges, U. 2006.** Transkription monophoner Gesangszeitreihen. *Ph.D. Thesis*, Faculty of Statistics, TU of Dortmund, Germany.
- Macleod, M.D. 1998.** Fast nearly ML estimation of the parameters of real or complex single tones or resolved multiple tones. *Signal Processing, IEEE Transactions*, 46(1): 141-148.
- Quinn, B. G. 1994.** Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients. *Signal Processing, IEEE Transactions*, 42(5): 1264-1268.
- Quinn, B. G. 1997.** Estimation of frequency, amplitude, and phase from the DFT of a time series. *Signal Processing, IEEE Transactions*, 45(3): 814-817.
- Steiglitz, K. ve L.E. McBride. 1965.** A technique for identification of linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions*, 10(4):461-464.
- Steiglitz, K. 1977.** On the simultaneous estimation of poles and zeros in speech analysis. *Acoustic, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions*, 25(3):229- 234.
- Van Veen, B. and K. Buckley. 1988.** Beamforming: A versatile approach to spatial filtering. *IEEE ASSP Magazine*, 5(2):4-24.
- Voglewede, P. 2004.** Parabola approximation for peak determination. *Global DSP Magazine*, 3(5): 13-17.
- Yılmaz, E. 2007.** Frekans kestiricilerin performans analizi. *Doktora tezi*, UÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik Ana Bilim Dalı, Bursa.

## **EKLER**

- EK 1** Fisher bilgi matrisi
- EK 2** Frekans kestirimine ait ana program
- EK 3** Quinn fonksiyonunun yer aldığı program
- EK 4** Jacobsen fonksiyonunun yer aldığı program
- EK 5** İyileştirilmiş Quinn fonksiyonunun yer aldığı program
- EK 6** Macleod fonksiyonunun yer aldığı program

## EK 1. Fisher Bilgi Matrisi

$\hat{\theta}$ , bir yansız kestiricidir. Bu kestiricinin bilinmeyen parametresinin matematiksel gösterimi aşağıda verilmiştir:

$$\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_p]^T \quad (\text{E 1.1})$$

Yansız kestiriciye ait Cramér-Rao (C-R) sınırı aşağıda gösterilmiştir:

$$\text{var}(\theta_i) \geq [I^{-1}(\theta)]_{ii} \quad (\text{E 1.2})$$

Burada,  $I(\theta)$   $p \times p$  boyutunda Fisher bilgi matrisidir. C-R sınırı modele ait Fisher bilgi matrisinin tersini alarak bulunur. Bu matris matematiksel olarak aşağıda gösterilmiştir:

$$[I(\theta)]_{ij} = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right] \quad (\text{E 1.3})$$

Burada,  $i = 1, 2, \dots, p$  ve  $j = 1, 2, \dots, p$  dir.

$\theta = [A \ \sigma^2]^T$  olsun. Bu durumda  $p = 2$  dir.  $p = 2$  durumu için Fisher bilgi matrisinin açık hali aşağıda gösterilmiştir:

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial A^2}\right] & -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial A \partial \sigma^2}\right] \\ -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial \sigma^2 \partial A}\right] & -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial \sigma^2^2}\right] \end{bmatrix} \quad (\text{E 1.4})$$

Fisher bilgi matrisi, birden fazla sinyal içeren veri modelleri için, yapısı karmaşık olduğundan çözülmesi zordur. Bu nedenle bu veri modelleri için C-R sınırı çözümsel olarak değil, sayısal yoldan hesap edilir. Uygulamalarda birden fazla sinyal içeren veri modelleri ile ilgilenildiğinden dolayı bu modellerin parametreleri ile olan matematiksel ilişkileri sayısal yoldan incelenir.

## EK 2. Frekans Kestiriminin Yer Aldığı Program

```
% Örnek sayısı
fs = 128;
% Gürültüyü açma-kapama anahtarı: a = {0, 1}
a = 1;
% Gürültünün seviyesini ayarla: noise = {0, 0.5, 1}
noise = 1;
% Sinyalin genliği
A = 1;
% Deneme sayısı
N = 10000;
```

Şekil EK 2.1. Ana program çıktısı

Şekil EK 2.1’de frekans kestiriminde kullanılacak giriş değerleri tanımlandı.

```
% Sonuçlar için hafızada yer ayır.
% Sinyal-gürültü oranı
SNR = zeros(size(1:N));
% Kestirilen frekans
quinst = zeros(size(1:N));
jacest = zeros(size(1:N));
quin2est = zeros(size(1:N));
macldest = zeros(size(1:N));
% Hata
quinerr = zeros(size(1:N));
jacerr = zeros(size(1:N));
quin2err = zeros(size(1:N));
macl derr = zeros(size(1:N));
```

Şekil EK 2.2. Ana program çıktısı (devam)

Şekil EK 2.2’de sonuçların hesaplanmasında kullanılacak değerler için bilgisayar belleğinde yer ayrıldı.

```
% Aralık sayısı
K = 10;
% Kestirilen Ortalama Frekans
quinavg = zeros(size(1:K));
jacavg = zeros(size(1:K));
quin2avg = zeros(size(1:K));
maclavg = zeros(size(1:K));
% Yanlılık
quinbias = zeros(size(1:K));
jacbias = zeros(size(1:K));
quin2bias = zeros(size(1:K));
maclbias = zeros(size(1:K));
% Varyans
quinvar = zeros(size(1:K));
jacvar = zeros(size(1:K));
quin2var = zeros(size(1:K));
maclvar = zeros(size(1:K));
% Hedef: Ulaşılmak istenen değerler
targ = zeros(size(1:K));
```

Şekil EK 2.3. Ana program çıktısı (devam)

Şekil EK 2.3'te sonuçlar için bilgisayar belleğinde yer ayrıldı.



```

% Aralığın başlangıç, adım ve bitiş değerleri
binstrt = 9.0;
binstep = 0.1;
binend = 9.9;
for bin = binstrt : binstep : binend,
M = M + 1;
target = bin;
targ(M) = bin;
fprintf('Tepe değeri = %.1f\n', bin);
for I = 1 : N,
    f = bin;
    t = 1 : fs;
    fi = 2 * pi * rand(1);
    % Sinyali üret
    s = A * exp (1i * ((2 * pi * (f/fs) * t) + fi));
    % Sinyalin gücünü hesapla
    pow = sum(abs(s(t) .^ 2));
    xnz = s;

```

Şekil EK 2.4. Ana program çıktısı (devam)

Şekil EK 2.4'te ulaşılmak istenen değerleri tanımlayan hedef sinyal ve frekans kestirimi yapılacak karmaşık sinüs sinyali üretildi.

```

if (a == 1)
    % Gürültü sinyalini üret
    nzk = noise * randn(1, fs);
    nzl = noise * randn(1, fs);
    nz = nzk + 1i * nzl;
    % Gürültünün gücünü hesapla
    nzp = sum(abs(nz(1:fs) .^ 2));
    if (nzp > 0)
        % SNR değerini hesapla.
        SNR(I) = 10 * log10( pow / nzp );

```

Şekil EK 2.5. Ana program çıktısı (devam)

Şekil EK 2.5'te gürültü sinyali üretildi. Gürültü, ortalaması 0 varyansı 1 olan beyaz Gauss gürültüsü olduğu varsayıldı.

```

else
% Gürültüsüz durum için aşağıdaki değeri kullan.
SNR(I) = 100.0;
end
xnz = s + nz;
% Gürültü kanalını sonlandır.
end

```

Şekil EK 2.6. Ana program çıktısı (devam)

Şekil EK 2.6'da gürültüsüz durum için SNR değeri belirlendi ve gürültü kanalı sonlandırıldı.

```

% FFT
Y(1:fs) = fft(xnz(1:fs));
% Periodogram
Per(1:fs) = abs(Y).^2;
% Periodogramın tepe değerinin konumunu bul.
[peak, k] = max(Per);
% Periodogram tepe değeri ile
% onun komşu değerlerini farklı bir diziye ayır.
per(1:3) = Per(k-1:k+1);
% DFT çıkışları ile
% onun komşu değerlerini farklı bir diziye ayır.
y(1:3) = Y(k-1:k+1);
% Quinn'e ait ilk kestirici ile frekans kestirimi yap.
quinest(I) = k - 1 + quin(y);
% Hata değerini hesapla ve kaydet.
quinerr(I) = target - quinest(I);
% Jacobsen'in kestiricisi ile frekans kestirimi yap.
jacest(I) = k - 1 + jacobsen(y);

```

Şekil EK 2.7. Ana program çıktısı (devam)

Şekil EK 2.7'de bir sinyalin ayrık Fourier dönüşümünü bilgisayar ortamında daha verimli hesaplayan hızlı Fourier dönüşümü (FFT) algoritmaları kullanılarak frekans kestirimi yapıldı. Kestirim problemi, periodogram veya doğrudan karmaşık DFT katsayıları giriş değerleri olarak kullanıp üç Fourier katsayısının enterpolasyonunu hesaplayarak başarıldı. Kestirim işlemi sonucunda hata ve tahmin değerleri hesaplandı.

```

% Hata değerini hesapla ve kaydet.
jacerr(I) = target - jacest(I);
% Quinn'e ait ikinci (iyileştirilmiş) kestirici ile
% frekans kestirimi yap.
quin2est(I) = k - 1 + quin_imp(y);
% Hata değerini hesapla ve kaydet.
quin2err(I) = target - quin2est(I);
% Macleod'a ait kestirici ile frekans kestirimi yap.
macldest(I) = k - 1 + macleod(y);
% Hata değerini hesapla ve kaydet.
macl derr(I) = target - macldest(I);
% İ döngüyü sonlandır.
end

```

şekil EK 2.8. Ana program çıktısı (devam)

şekil EK 2.8'de Kestirim işlemi sonucunda hata ve tahmin değerlerinin hesaplanmasına devam edildi. 128 noktada, Fourier frekanslarında frekans kestirimi yapmak için açılan i döngü sonlandırıldı.

```

% RMS hata değerini (varyansı) hesapla.
quinvar(M) = sqrt( mean( quinerr .^ 2 ) );
jacvar(M) = sqrt( mean( jacerr .^ 2 ) );
quin2var(M) = sqrt( mean( quin2err .^ 2 ) );
macl dvar(M) = sqrt( mean( macl derr .^ 2 ) );
% Ortalama SNR (sinyal-gürültü oranını) hesapla.
SNRort = mean(SNR);
% Yanlılığı hesapla.
quinbias(M) = mean(quinerr);
jacbias(M) = mean(jacerr);
quin2bias(M) = mean(quin2err);
macl dbias(M) = mean(macl derr);
% Kestirilen ortalama frekansı hesapla.
quinavg(M) = mean(quinest);
jacavg(M) = mean(jacest);
quin2avg(M) = mean(quin2est);
macl davg(M) = mean(macldest);
% Dış döngüyü yani aralık (bin) döngüsünü sonlandır.
end;

```

şekil EK 2.9. Ana program çıktısı (devam)

şekil EK 2.9'da frekans kestirimi sonucunda kestirilen değerin gerçek değere olan yakınlığını gösteren varyans ile kestirim sonucunda oluşan hatanın frekans değerine olan bağlılığını gösteren yanlılık değeri, kestirilen ortalama frekans ve ortalama SNR değerleri hesaplandı. Yani, sonuçlar hesaplandı.

```

% Grafiğin x eksenini ölçekle.
xs(1:M) = binstrt + (((1:M)-1) * binstep);
% Sonuçların grafiklerini çiz
% Sonuçlar: Kestirilen Ortalama Frekans, Yanlılık, Varyans
figure(1);
plot(xs(1:M), targ(1:M), 'r-', xs(1:M), quinavg(1:M), 'mo', xs(1:
M), jacavg(1:M), 'gs', xs(1:M), quin2avg(1:M), 'k+', xs(1:M),
maclavg(1:M), 'bx');
xlabel('Gerçek Frekans'); ylabel('Kestirilen Ortalama
Frekans');
title('Ortalama Frekans Kestirimi');
legend('Hedef', 'Quinn', 'Jacobsen', 'Quinn2', 'Macleod');
figure(2);
plot(xs(1:M), quinbias(1:M), 'mo:', xs(1:M), jacbias(1:
M), 'gs:', xs(1:M), quin2bias(1:M), 'k+:', xs(1:M), macldbias(1:
M), 'bx:');
xlabel('Frekans'); ylabel('Yanlılık');
title('Yanlılığın Frekansa Bağlı Değişimi');

```

Şekil EK 2.10. Ana program çıktısı (devam)

Şekil EK 2.10’da dört kestiriciyi karşılaştırmak için kestirim işlemi sonucunda ortaya çıkan ortalama frekans değerleri, kestiricilerin yanlılık ve varyansları grafikler üzerinde gösterildi.

```

legend('Quinn', 'Jacobsen', 'Quinn2', 'Macleod');
figure(3);
plot(xs(1:M), quinvar(1:M), 'mo:', xs(1:M), jacvar(1:M), 'gs:',
xs(1:M), quin2var(1:M), 'k+:', xs(1:M), maclvar(1:M), 'bx:');
xlabel('Frekans'); ylabel('Varyans');
title('Varyansın Frekansa Bağlı Değişimi');
legend('Quinn', 'Jacobsen', 'Quinn2', 'Macleod');

```

Şekil EK 2.11. Ana program çıktısı (devam)

Şekil EK 2.11’de, Şekil EK 2.10’da yapılan işlemlere devam edildi.

### EK 3. Quinn Fonksiyonunun Yer Aldığı Program

```
function [x] = quin(y)
% y dizisi DFT çıkışlarının tepe değeri ile
% onun komşu değerlerinin ayrıldığı 3 elemanlı bir dizidir.

% Program -0.5 < x < 0.5 aralığında bir değer döndürür.

% Kaynak: Quinn, B.G. Mayıs 1994.
% "Estimating frequency by interpolation using Fourier
coefficients"
% Signal Processing, IEEE Transactions,
% Cilt:42 Sayı:5 sayfa aralığı: 1264-1268.
```

Şekil EK 3.1. Quinn fonksiyonuna ait program çıktısı

Şekil EK 3.1’de Quinn fonksiyonunun giriş ve çıkış değerleri ile ilgili bilgi verildi ve bu fonksiyonun yer aldığı makale için kaynak açıklaması yapıldı.

```
alpha1 = real(y(1)/y(2));
alpha2 = real(y(3)/y(2));

delta1 = alpha1/(1-alpha1);
delta2 = -alpha2/(1-alpha2);

if ((delta1>0) && (delta2>0))
    x=delta2;
else
    x=delta1;
end
```

Şekil EK 3.2. Quinn fonksiyonuna ait program çıktısı (devam)

Şekil EK 3.2’de Quinn fonksiyonunun çıkış değerinin nasıl hesaplandığı gösterildi.

#### EK 4. Jacobsen Fonksiyonunun Yer Aldığı Program

```
function [x] = jacobsen(y)
% y dizisi DFT çıkışlarının tepe değeri ile
% onun komşu değerlerinin ayrıldığı 3 elemanlı bir dizidir.

% Program -0.5 < x < 0.5 aralığında bir değer döndürür.

% Kaynak: Jacobsen, E., Kootsookos, P., Mayıs 2007.
% "Fast, accurate frequency estimators [DSP Tips & Tricks]"
% Signal Processing Magazine, IEEE,
% Cilt:24 Sayı:3, sayfa aralığı: 123-125.

x = real((y(1)-y(3))/((2*y(2))-y(1)-y(3)));
```

Şekil EK 4.1. Jacobsen fonksiyonuna ait program çıktısı

Şekil 4.1’de Jacobsen fonksiyonunun giriş ve çıkış değerleri ile ilgili bilgi verildi. Bu fonksiyonun yer aldığı makale için kaynak açıklaması yapıldı ve çıkış değeri hesaplandı.

## EK 5. İyileştirilmiş Quinn Fonksiyonunun Yer Aldığı Program

```
function [x] = quin_imp(y)
% y dizisi DFT çıkışlarının tepe değeri ile
% onun komşu değerlerinin ayrıldığı 3 elemanlı bir dizidir.

% Program -0.5 < x < 0.5 aralığında bir değer döndürür.

% Kaynak: Quinn, B.G. 1997.
% "Estimation of frequency, amplitude,
% and phase from the DFT of a time series"
% Signal Processing, IEEE Transaction,
% Cilt:45 Sayı:3 sayfa aralığı: 814-817.
```

Şekil EK 5.1. İyileştirilmiş Quinn fonksiyonuna ait program çıktısı

Şekil EK 5.1’de İyileştirilmiş Quinn fonksiyonunun giriş ve çıkış değerleri ile ilgili bilgi verildi. Bu fonksiyonun yer aldığı makale için kaynak açıklaması yapıldı.

```
beta1=real(y(1)/y(2));
beta2=real(y(3)/y(2));

d1=beta1/(1-beta1);
d2=-beta2/(1-beta2);

kappa1=(1/4)*log(3*(d1^4)+6*(d1^2)+1)-(sqrt(6)/24)*log(
((d1^2)+1-sqrt(2/3))/((d1^2)+1+sqrt(2/3)));
kappa2=(1/4)*log(3*(d2^4)+6*(d2^2)+1)-(sqrt(6)/24)*log(
((d2^2)+1-sqrt(2/3))/((d2^2)+1+sqrt(2/3)));

delta=(d1+d2)/2 - kappa1 + kappa2;

x=delta;
```

Şekil EK 5.2. İyileştirilmiş Quinn fonksiyonuna ait program çıktısı (devam)

Şekil EK 5.2’de İyileştirilmiş Quinn fonksiyonunun çıkış değerinin nasıl hesaplandığı gösterildi.

## EK 6. Macleod Fonksiyonunun Yer Aldığı Program

```
function [x] = macleod(y)
% y dizisi DFT çıkışlarının tepe değeri ile
% onun komşu değerlerinin ayrıldığı 3 elemanlı bir dizidir.

% Program -0.5 < x < 0.5 aralığında bir değer döndürür.

% Kaynak: Macleod, M.D., Ocak 1998.
% "Fast Nearly ML Estimation of
% the Parameters of Real or Complex Single Tones or
% Resolved Multiple Tones"
% Signal Processing, IEEE Transactions,
% Cilt:46 No:1, sayfa aralığı: 141-148.
```

Şekil EK 6.1. Macleod fonksiyonuna ait program çıktısı

Şekil EK 6.1’de Macleod fonksiyonunun giriş ve çıkış değerleri ile ilgili bilgi verildi. Bu fonksiyonun yer aldığı makale için kaynak açıklaması yapıldı.

```
% Faz referansını ayır.
tao = y(2);
% Fazı düzeltilmiş katsayı vektörünü üret.
R = real(y.*conj(tao));
% Enterpolasyon katsayısını hesapla.
gamma = (R(1)-R(3))/((2*R(2))+R(1)+R(3));
% Düzeltilmiş enterpolasyon katsayısını hesapla.
delta = (sqrt(1 + 8*gamma*gamma)-1)/(4*gamma);
% Sonuç
x = delta;
```

Şekil EK 6.2. Macleod fonksiyonuna ait program çıktısı (devam)

Şekil EK 6.2’de Macleod fonksiyonunun çıkış değerinin nasıl hesaplandığı gösterildi.