

YÖNLÜ GRAFLAR

Uğur ANA



T. C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÖNLÜ GRAFLAR

Uğur ANA
0000-0002-5956-3794

Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
(Danışman)

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2021
Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Uğur ANA tarafından hazırlanan “Yönlü Graflar” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

- | | |
|--|------|
| Üye: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
0000-0002-0700-5774
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı | İmza |
| Üye: Prof. Dr. Musa DEMİRCİ
0000-0002-6439-8439
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı | İmza |
| Üye: Prof. Dr. Saliha ŞAHİN
0000-0003-2887-5688
Bursa Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Kimya Anabilim Dalı | İmza |
| Üye: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
0000-0002-7539-5065
Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı | İmza |
| Üye: Prof. Dr. Recep ŞAHİN
0000-0002-4407-2028
Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı | İmza |

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN

Enstitü Müdürü

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

14/10/2021

İmza

Uğur ANA

ÖZET

Doktora Tezi

YÖNLÜ GRAFLAR

Uğur ANA

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL

Bu çalışmada, graf teorisinin en ilginç ve geniş uygulama alanına sahip olan türü olan yönlü graflar ele alınmıştır. Başta elektrik devreleri olmak üzere bir çok grafta köşelerin modellediği nesnelere arasında tek taraflı bağıntı veya ilişkiler olabilir ve bu durumda klasik graflar yerine yönlü graflar kullanılmaktadır.

Bu tez 8 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup bu bölümde graflarla ilgili temel kavramlar hatırlanmış ve tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca sık kullanılan graf türleri ve temel özellikleri hatırlanmıştır. İkinci bölümde genel anlamda yönlendirilmiş graflar ele alınmıştır. Ayrıca yönlü, etiketlenmiş ve etiketlenmemiş graf tanımları ve temel özellikleri de verilmiştir.

Üçüncü bölümde yönlü grafların karakteristik polinomları elde edilmiştir. Klasik grafların karakteristik polinomları 0 ve 1'lerden oluşurken, yönlendirilmiş grafların karakteristik polinomları 0, 1 ve -1'lerden oluşmaktadır.

Dördüncü bölümde yönlü ve yönlendirilmiş grafların karakteristik polinomları; beşinci bölümde ise yönlü grafların karakteristik polinomları incelenmiştir.

Altıncı bölümde kenar ekleme ve benzeri büyütme işlemlerinin karakteristik polinoma etkisi ele alınmıştır.

Yedinci bölümde yönlü grafları birleştirme ve ayrıştırmanın karakteristik polinoma etkisi ele alınmıştır.

Sekizinci ve son bölüm, Sonuç bölümüdür ve kısa bir değerlendirme verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: graf, karakteristik polinom, yönlendirilmiş graf, yönlü graf

2021, vii + 54 sayfa.

ABSTRACT

PhD Thesis

ORIENTED GRAPHS

Uğur ANA

Bursa Uludag University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. I. Naci CANGUL

In this thesis, directed graphs which form the most interesting type of graphs with a large application area are studied. In many graphs like electrical circuits, there may be one way relations between the vertices modelling things in the problem and in such cases, directed graphs are used instead of graphs.

This thesis consists of 8 chapters. The first chapter is the introductory chapter and the fundamental notions are recalled here together with the results which will be needed in later chapters. Also some frequently used graph classes and their fundamental properties are given. In the second chapter, the notion of directed graphs are considered. Further, the oriented, labeled and unlabeled graphs are recalled.

In the third chapter, the characteristic polynomials of directed graphs are studied. While characteristic polynomials of classical graphs consists of 0 and 1s, the characteristic polynomials of directed graphs consists of 0, 1 and -1s.

In the fourth and fifth chapters, characteristic polynomials of directed and oriented graphs are studied.

In the sixth and seventh chapters, the effects of edge addition and similar operations on characteristic polynomials and the effects of joining or separating graphs are studied.

In the eighth and last chapter, some conclusions are summarized.

Key words: characteristic polynomial, directed graph, graph, oriented graph

2021, vii + 54 pages.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışmada yönlü grafların bazı özelliklerini, karakteristik polinomlarını ve grafları birleştirip ayırma ya da kenar ekleme, çıkarma işlemleri yapıldığında karakteristik polinomların nasıl etkilendiğini inceledik.

Yüce Allah'a hamd ettikten sonra çalışma konusunun belirlenmesinde ve çalışmanın hazırlanma sürecinin her aşamasında engin bilgilerini, tecrübelerini ve değerli zamanlarını esirgemeyerek her fırsatta yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçlerde sabrını ve hoşgörüsünü esirgemeyen değerli aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Uğur ANA

14/10/2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel kavramlar.....	2
1.2. Graf çeşitleri	10
2. KURAMSAL TEMELLER	14
3. MATERYAL VE YÖNTEM	15
4. YÖNLÜ VE YÖNLENDİRİLMİŞ GRAFLAR	16
4.1. Giriş	16
4.2. Yönlü ve yönlendirilmiş grafların uygulamaları.....	19
5.YÖNLENDİRİLMİŞ GRAFLARIN KARAKTERİSTİK POLİNOMLARI	21
5.1. Giriş	21
6. KENAR EKLEME VE BENZERİ GRAF BÜYÜTME İŞLEMLERİNİN KARAKTERİSTİK POLİNOMA ETKİSİ.....	26
6.1. Giriş	26
6.2. Kenar ekleme	26
7. YÖNLENDİRİLMİŞ GRAFLARI BİRLEŞTİRMENİN VE AYRIŞTIRMANIN KARAKTERİSTİK POLİNOMA ETKİSİ.....	36
7.1. Giriş	36
8. BULGULAR, TARTIŞMA VE SONUÇ	51
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	54

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
G	graf
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$d_v, d(v)$	v köşesinin derecesi
Δ_G, Δ	G grafının maksimum köşe derecesi
δ_G	G grafının minimum köşe derecesi
\bar{G} ya da G^c	G grafının tümleyeni
N_n	n köşeli sıfır graf
K_n	n köşeli tam graf
C_n	n köşeli devir graf
P_n	n köşeli yol graf
S_n	n köşeli yıldız graf
T_n	n köşeli ağaç graf
$K_{r,s}$	iki parçalı tam graf
$T_{r,s}$	larva graf
$c(G)$ veya c	G grafının bileşen sayısı
d_u ya da $d_G(u)$	G grafında u köşesinin derecesi
$P(G)$	Bir G grafının karakteristik polinomu
a_{ij}	bir matrisin i . satır ve j . sütun elemanı
M_{ij}	bir matrisin i . satır ve j . sütun elemanının kofaktörü
$G + \{e\}$	e kenarı eklenmiş G grafi
$G - \{e\}$	e kenarı silinmiş G grafi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Bir G grafi	3
Şekil 1.2. Basit ve basit olmayan graflar.....	4
Şekil 1.3. G grafi ve \bar{G} tümleyeni	6
Şekil 1.4. G ve $G - v$	7
Şekil 1.5. G ve $G - e$	7
Şekil 1.6. G ve $G + v$	8
Şekil 1.7. $G, G + \{uw\}$ ve $G + \{uv\}$	8
Şekil 1.8. İki basit ve bağlantılı grafi birleştirme.....	10
Şekil 1.9. N_3 sıfır grafi	10
Şekil 1.10. P_4 yol grafi	10
Şekil 1.11. C_5 devir grafi.....	11
Şekil 1.12. S_7 yıldız grafi	11
Şekil 1.13. K_6 tam grafi.....	12
Şekil 1.14. $K_{2,4}$ iki parçalı tam grafi	12
Şekil 1.15. $T_{4,2}$ larva grafi	13
Şekil 1.16. T_{13} ağaç grafi	13
Şekil 2.1. Yönlü graflar	14
Şekil 2.2. Etiketlenmiş ve etiketlenmemiş graflar	15
Şekil 2.3. Yönlendirilmiş bir graf ve taşıyıcı grafi.....	15
Şekil 2.4. Bağlantısız, bağlantılı, kuvvetli bağlantılı yönlendirilmiş graflar ..	17
Şekil 2.5. Bir çöp probleminin girdi çıktıları	18
Şekil 3.1. Yönlendirilmiş patika grafi	19
Şekil 3.2. Sadece bir yönü ters yönlendirilmiş patika grafi	20
Şekil 3.3. Devir grafi.....	21
Şekil 4.1. G grafına bir sallanan kenar eklenmesi.....	24
Şekil 4.2. Bağlantılı G grafına k adet sallanan kenar eklenmesi.....	25
Şekil 4.3. Bağlantılı bir G grafi	25
Şekil 4.4. Bağlantılı G grafına sallanan kenarlar eklenmesi	26
Şekil 4.5. Bir grafa patika eklenmesi	27
Şekil 4.6. Yönlendirilmiş bir graf	27
Şekil 4.7. Yönlendirilmiş bir grafa patika ekleme	28
Şekil 4.8. S_6 yönlendirilmiş yıldız grafi.....	29

Şekil 4.9. T_{11} yönlendirilmiş ağaç grafi	30
Şekil 4.10. Yönlendirilmiş $T_{4,3}$ larva grafi	30
Şekil 4.11. Tek devire sahip yönlendirilmiş bir graf.....	31
Şekil 5.1. Ortak bir noktada birleşen iki devir grafi.....	34
Şekil 5.2. Ortak bir noktada birleşen aynı yönlü iki devir graf.....	34
Şekil 5.3. Bir yönü farklı ortak bir noktada birleşen aynı yönlü iki devir grafi	36
Şekil 5.4. Ortak bir noktada birleşen aynı yönlü C_5 ve C_4 devir grafları	37
Şekil 5.5. Ortak bir noktada birleşen karışık yönlü C_5 ve C_4 devir grafları....	38
Şekil 5.6. Ortak bir noktada birleşen iki devir grafına k tane sallanan kenar eklenmesi.....	39
Şekil 5.7. Ortak bir noktada birleşen iki devir grafına birkaç tane sallanan kenar eklenmesi.....	39
Şekil 5.8 Köprü ile birleştirilmiş iki devirli graf.....	40
Şekil 5.9. G_1 yönlendirilmiş grafi	41
Şekil 5.10. G_2 yönlendirilmiş grafi.....	42
Şekil 5.11. $G = G_1 \cup G_2$	42
Şekil 5.12. İki devir grafının bir patika ile birleştirilmesi.....	43
Şekil 5.13. Bir patika ile birleşen iki graf	44
Şekil 5.14. İki devirli ve ortak bir kenara sahip olan bir graf	44
Şekil 5.15. Ortak bir kenara ve aynı yönlü iki devire sahip graf	45
Şekil 5.16. Ortak bir kenarın verilen bir devirin döngüsüne ters olduğu graf	46

1. GİRİŞ

Kökeni çok eski çağlara dayandırılrsa da, modern graf teorisinin başlangıcı olarak 1736 yılında Euler tarafından Königsberg köprü problemi olarak da bilinen Königsberg şehrindeki yedi köprüden hareketle yazılmış olan makale kabul edilmektedir. Bir arkadaşının bu problemin bir çözümü olup olmadığını sorması üzerine konuya ilgi duyan Euler, sadece bu probleme değil genel duruma ilişkin teoriyi kurmuş, özelde de bu problemin çözümünün olmadığını belirlemiştir. Tabii ki graflar, yapıları itibarıyla basit ve her zaman karşılaşılabilecek şekiller olduğundan çeşitli bilim insanlarınınca graf dışında farklı isimler verilerek kullanılmıştır. Mesela Eflatun (Plato)'un adından hareketle platonik cisimler adı verilen ve gök cisimleriyle ilgili olarak çizildikleri düşünülen beş adet üç boyutlu cisim (düzgün 4 yüzlü, düzgün 6 yüzlü, düzgün 8 yüzlü, düzgün 12 yüzlü, düzgün 20 yüzlü) çok eski çağlarda bilim insanlarınınca astronomi ile ilgili hesaplamalarda kullanılmıştır.

Bir graf, sezgisel olarak en basit tarifıyla noktalar ve bunları birleştiren çizgilerden oluşmaktadır. Bu noktalara grafın köşeleri; çizgilere de grafın kenarları adı verilir. Bir kenar, iki köşeyi birleştiren düz bir çizgi ya da bir eğridir. Bazen bu eğri bir köşeden başlayıp aynı köşeye dönebilir ve döngü adını alır. Bir graf, düzlemde çizilebileceği gibi daha yüksek cinse sahip yüzeyler üzerinde de çizilebilir. Bu şekilde grafları farklı yüzeyler üzerinde çalışarak Topolojik Graf Teori ortaya çıkarılmıştır. Bu tezde özellikle elektrik devreleri ve bir çok sosyal bilim probleminde ihtiyaç duyulan yönlü graflar ele alınmıştır. Normal bir grafta bir kenarın yönü yokken ve köşeler aynı anlamı taşıırken yönlü bir grafta kenar bir köşeden diğerine bir ok ile gösterilmekte ve köşelerden biri başlangıç, diğeri bitiş köşesi olarak anılmaktadır. Bugüne kadar sadece modellemede kullanılan ve bazı matrisleri elde edilen yönlü graflar bu tezde spektral graf teorisinden ele alınmış ve çalışılmıştır.

Bu tezde yer alan graflar aksi belirtilmedikçe yönlü, ağırlıksız, bağlantılı, döngüsüz ve katlı kenar içermeyen graflar olacaktır. Bu özelliklerden herhangi birisine veya birkaçına sahip graflar da graf teorisinin farklı uygulama alanlarında çalışılmaktadır ve bu tezin kapsamı dışında bırakılmıştır.

1.1. Temel kavramlar

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar tanımlanacak ve graflarla ilgili bazı özellikler verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için Aldous ve Wilson (2004), Bondy ve Murty (1982), Bondy ve Murty (2008), Benjamin ve ark. (2015), Capobianco ve Molluzo (1978), Chartrand ve Zhang (2012), Chartrand (1985), Clark ve Holton (1995), Diestel (2010), Deo (1974), Foulds (1992), Gross ve Yellen (2006), Skiena (1990), Thulasiraman (1992), Hartsfield ve Ringel (2003), Trudeau (1993), Tutte (1998), Vasudev (2007), Vasudev (2006), Wilson (1998), Wilson ve Watkins (1990), Wallis (2007), West (2001) ile bu kitaplar dışında diğer temel graf teorisi kitaplarına bakılabilir.

1.1.1. Tanım. *Kenar (edge)* denilen doğru parçaları ile birleştirilmiş *köşe (vertex)* denilen noktalardan oluşan bir şekle *graf (graph)* denir.

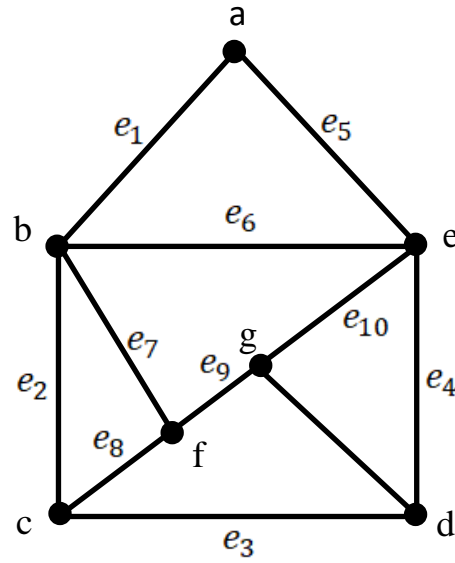
Türkçe literatürde graf yerine bazı kaynaklarda çizge kelimesi de kullanılmaktadır.

Genelde G bir graf olmak üzere, G grafının kenar kümesi $E(G)$ ile köşe kümesi ise $V(G)$ ile gösterilir. Böylece bir G grafı, $G = (V(G), E(G))$ şeklinde de gösterilir. Bir G grafında kenar kümesinin eleman sayısı m ve köşe kümesinin eleman sayısı n ile gösterilir. Yani $|V(G)| = n$ ve $|E(G)| = m$ 'dir.

1.1.2. Tanım. Bir G grafının kenar sayısına G 'nin *boyutu (size)*; köşe sayısına da G 'nin *mertebe (order)* denilir.

Boyut ve mertebe, grafların kombinatorik yöntemler yardımıyla çalışılmasında oldukça kullanılan kavramlardır.

1.1.3. Tanım. G grafının iki köşesi $u, v \in V(G)$ olsun. Bu iki köşeyi birleştiren bir kenar mevcutsa u ve v köşelerine *komşu (adjacent) köşeler* denilir.



Şekil 1.1. Bir G grafi

Şekil 1.1’de verilen G grafinin kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ ve köşe kümesi $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dir. Örneğin Şekil 1.1’de f ve g köşelerini birleştiren e_8 kenarı mevcuttur. Bu yüzden bu iki köşe birbirine komşu köşelerdir.

1.1.4. Tanım. Bir G grafinde G ’nin kenarlarının her köşesinden sadece bir kez geçen ab, bc, cd, \dots, fg biçimindeki bir dizilişine bir *yol* (*path*) denir. Eğer başlangıç ve bitiş köşeleri eşit ($a = g$) ise bu yola *kapalı yol* (*closed path*) denir. Bir yolun her kenarı farklı ise bu yola *iz* (*trace*) denir. Ayrıca başlangıç ve son köşeleri hariç, en az üç köşeli ve her köşesi farklı olan kapalı bir ize bir *devir* (*cycle*) adı verilir. Özel olarak bir devir d uzunluğunda ise bu devire $d - devir$ adı verilir.

1.1.5. Tanım. Bir devirin komşu olmayan iki köşesi u ve v olsun. Bu iki köşeyi birleştiren bir kenara *kiriş* (*chord*) denir.

1.1.6. Tanım. Bir grafa herhangi iki köşeyi birleştiren en az bir yol mevcut ise bu grafa *bağlantılı* (*connected*) *graf*, aksi takdirde *bağlantısız* (*disconnected*) *graf* adı verilir.

Yani bağlantılı bir grafin herhangi iki köşesi için köşelerden birinden hareket ederek diğerine kenarlar üzerinden ulaşılabilir.

1.1.7. Tanım. Bir G grafından seçilen bağlantılı olan her bir alt grafına G grafının bir *bileşeni* (*component*) adı verilir. Bir G grafının bileşen sayısı $c(G)$ veya kısaca c ile gösterilir.

Bağlantılı bir G grafında eğer $c(G) = 1$ ise bu tek bileşen grafın tamamını oluşturur. Bir grafın bağlantısız olması ancak ve ancak $c > 1$ olması şartına bağlıdır.

Aşağıdaki sonuç, köşe ve kenar sayıları verilen bir grafın bileşen sayısı hakkında oldukça faydalı bir alt sınır vermektedir.

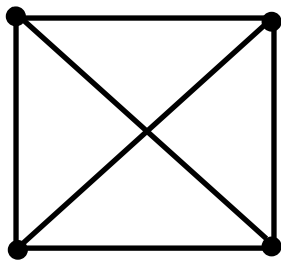
1.1.8. Lemma. G bir graf ve bileşen sayısı c olsun.

$$c \geq n - m$$

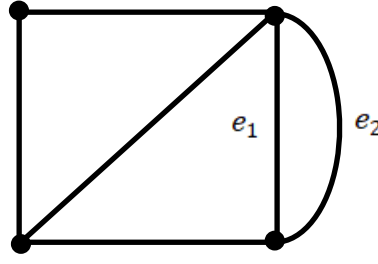
eşitsizliği sağlanır.

Böylece bir grafın köşe sayısı ile kenar sayısı arasındaki fark en az **2** ise bu grafın bağlantısız olacağı aşikardır.

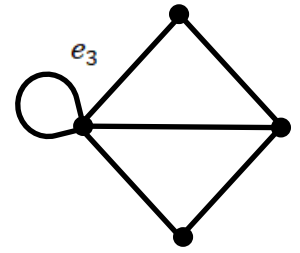
1.1.9. Tanım. Bir grafın belli iki köşesini birleştiren birden fazla kenar varsa bu kenarlara katlı (*çoklu*) *kenar* (*multiple edges*) denilir. Bir kenar eğer bir köşeyi kendine birleştiriyorsa o kenara da *döngü* (*loop*) adı verilir. Bunların dışında kalan yani çoklu olmayan, döngü içermeyen graflar da *basit graf* (*simple graph*) olarak adlandırılır.



Şekil X



Şekil Y



Şekil Z

Şekil 1.2 Basit ve basit olmayan graflar

Şekil 1.2.X'deki graf, katlı kenar veya döngüye sahip olmadığından bir basit graftır. Şekil 1.2.Y'deki e_1 ve e_2 kenarları katlı kenarlar ve Şekil 1.2.Z'deki e_3 kenarı da bir döngü olduğundan Şekil X ve Y'deki graflar basit graf değildir.

Graflar, bir döngüyü bulundurmalarına göre sınıflandırılır. Döngü içermeyen bu graflara örnek verecek olursak tüm ağaçlar döngü içermeyen graflardır.

Köşe ve kenar sayıları arasında bağlantılı basit bir grafta

$$n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$$

bağıntısı; bağlantısız grafta ise

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2}$$

bağıntısı geçerlidir.

1.1.10. Tanım. G bir graf ve uv de bu grafın bir kenarı olsun. Bu kenara u ve v köşelerine *bitişiktir (incident)* adı verilir.

Bitişiklik ve komşuluk kavramları, pek çok alanda uygulamalara sahiptir. Özellikle graf matrisleri arasında en önemlileri olarak komşuluk ve bitişiklik matrisleri gösterilebilir. Bu matrislerin kuvvetlerindeki her bir değer, graf ile ilgili bir özelliğe karşılık gelmektedir. Bu sebeple bir G grafının herhangi bir u köşesi ile bitişik olan kenarların sayısı, graf teorisinde önemli bir yere sahiptir:

1.1.11. Tanım. G bir graf ve $u \in V(G)$ olsun. u köşesi ile bitişik olan kenar sayısına u köşesinin *derecesi (multiplicity)* denilir. $deg(u)$, d_u ya da $d_G(u)$ ile gösterilir.

1.1.12. Tanım. G grafının *minimum* ve *maksimum derecesi* sırasıyla

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) | v \in G\} \quad \text{ve} \quad \delta(G) = \min\{d_G(v) | v \in G\}$$

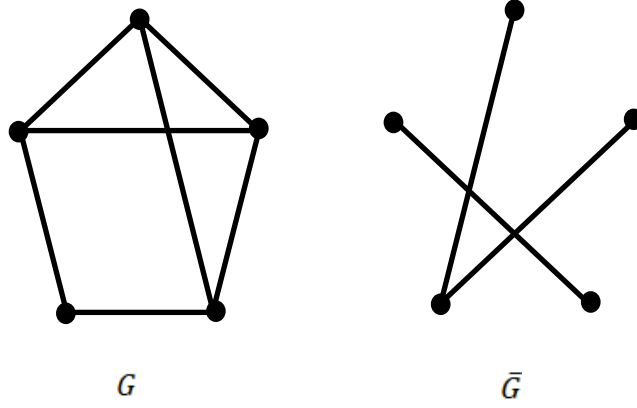
olarak ifade edilir .

Minimum ve maksimum dereceler müstesna derecesi 1 olan köşeler özellikle moleküler grafları çalışırken büyük önem arz etmektedir:

1.1.13. Tanım. 1 dereceli olan köşeye *sallanan (pendant) köşe*, bu köşeyi graf ile birleştiren kenara da *sallanan kenar (pendant edge)* denilir.

1.1.14. Tanım. 0 dereceli olan bir köşe *izole (isolated) köşe* olarak adlandırılır.

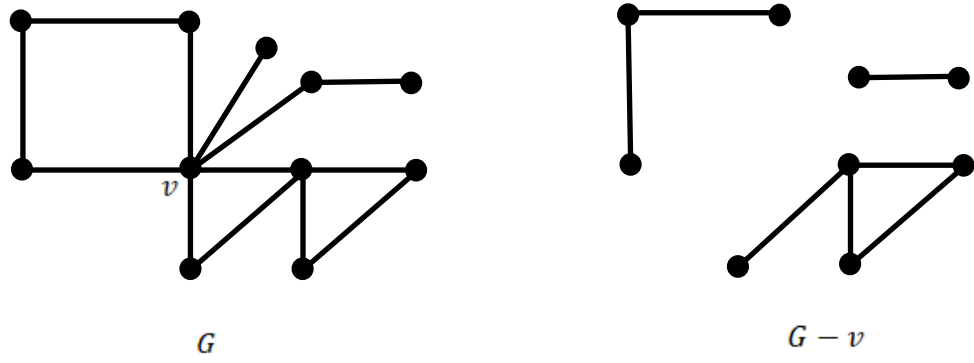
1.1.15. Tanım. Bir G grafi ile ortak köşeleri olan ve bu grafda kenar oluşturmayan her bir köşenin birbiri ile birleştirilmesiyle elde edilen grafa G grafının *tümleyeni (complement)* denir ve bu graf \bar{G} ya da G^c ile gösterilir, bkz. Şekil 1.3.



Şekil 1.3. G grafi ve \bar{G} tümleyeni

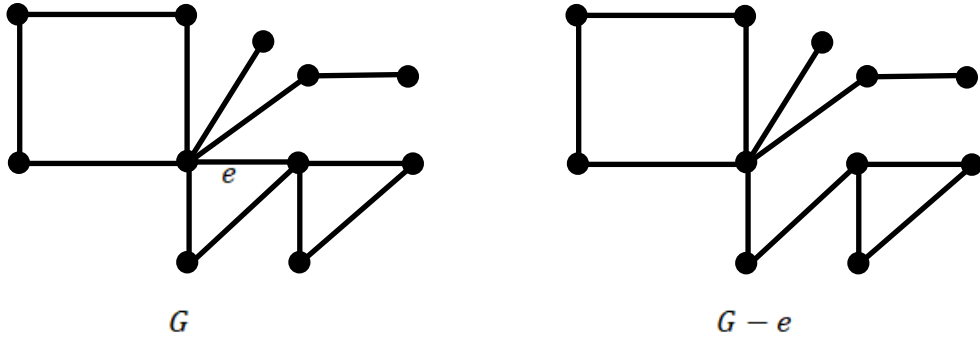
Böylece $V(G)$ köşe kümesindeki herhangi bir kenar, G grafına ya da \bar{G} grafına aittir.

1.1.16. Tanım (Köşe çıkarma). Bir G grafının herhangi bir köşesi v olmak üzere bu graftan v köşesinin ve bu köşe ile bağlı olan tüm kenarlarının silinmesiyle elde edilen yeni grafa *v köşesi çıkarılmış G grafi* denilir ve $G - \{v\}$ ile gösterilir. Buradaki köşe silme işlemine de *köşe çıkarma* adı verilir. Benzer şekilde G grafından birden fazla v_1, v_2, \dots, v_n köşesi çıkarılıyorsa elde edilen yeni graf $G - \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ile gösterilir. Bazen $G - \{v\}$ gösterimi yerine $G - v$ de kullanılmaktadır, bkz. Şekil 1.4.



Şekil 1.4. G ve $G - v$ grafları

1.1.17. Tanım (Kenar çıkarma). G bir graf ve $e \in E(G)$, G grafının herhangi bir kenarı olsun. G grafından e kenarının silinmesiyle elde edilen yeni grafa e kenarı silinmiş G grafi adı verilir ve $G - \{e\}$ ile gösterilir. Buradaki silme işlemine de *kenar silme* denilir. Eğer G grafından birden fazla e_1, e_2, \dots, e_n kenarı siliniyorsa (çıkarılıyorsa) elde edilen graf $G - \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ile gösterilir. Bazı kaynaklarda $G - \{e\}$ gösterimi yerine $G - e$ gösterimi de kullanılmaktadır, bkz. Şekil 1.5.

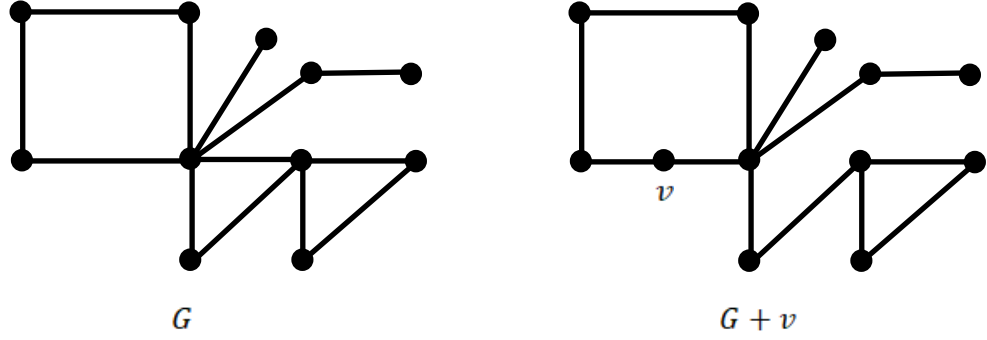


Şekil 1.5. G ve $G - e$ grafları

Kenar ve köşe çıkarma işlemlerini kullanarak karmaşık yapıya sahip olan graflarla ilgili pek çok özelliği daha küçük yapıdaki grafların özelliklerinden faydalanarak elde edebiliriz. Bu yöntemlere benzer olarak kullanılan diğer iki işlem ise kenar ve köşe ekleme işlemleridir.

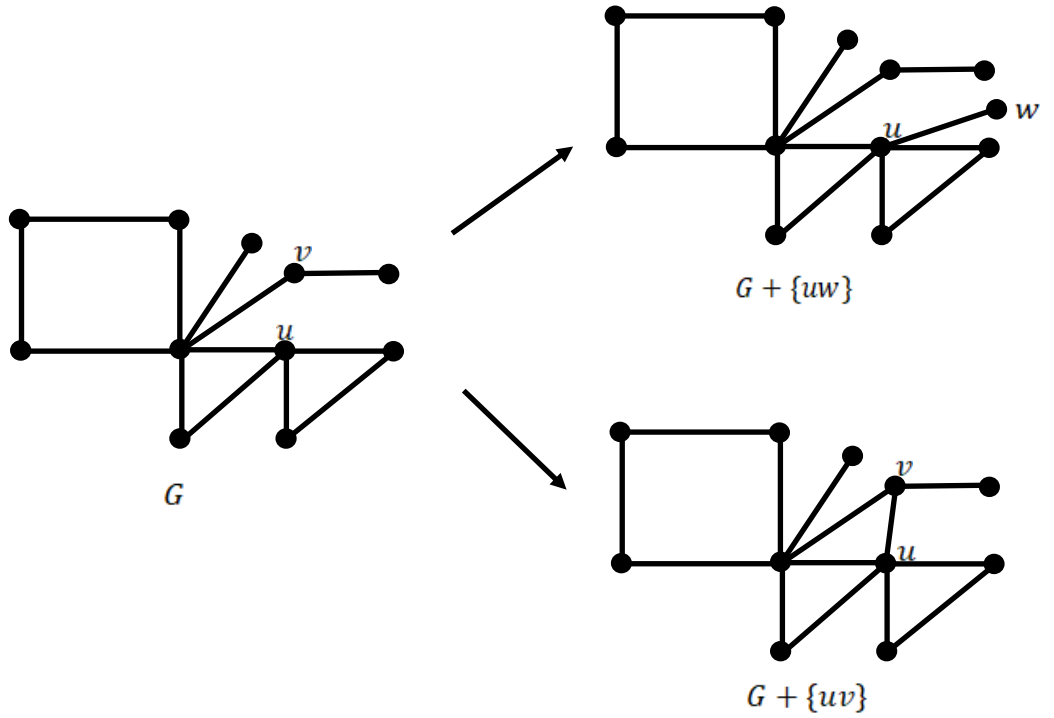
1.1.18. Tanım (Köşe ekleme). G bir graf ve $e \in E(G)$ olsun. Bu grafın e kenarına yeni bir v köşesi eklendiğinde elde edilen yeni graf v köşesi eklenmiş G grafi olarak

adlandırılır ve $G + \{v\}$ ile gösterilir. Buradaki köşe ekleme işlemine de *köşe ekleme* adı verilir, bkz. Şekil 1.6.



Şekil 1.6. G ve $G + v$ grafları

1.1.19. Tanım (Kenar ekleme). G bir graf ve $u \in V(G)$ olsun. u köşesi ile G grafına ait olmayan bir w köşesi birleştirilerek elde edilen yeni bir $e = uw$ kenarı ile birlikte oluşan yeni grafa *e kenarı eklenmiş G grafi* adı verilir ve $G + \{e\}$ ile gösterilir. Aynı yöntemle G grafına ait olan iki farklı u, v köşesini birbirine bağlayan yeni bir $e = uv$ kenarı oluşturularak da kenar ekleme işlemi tanımlanabilir. Buradaki her iki işleme de *kenar ekleme* adı verilir, bkz. Şekil 1.7.



Şekil 1.7. $G, G + \{uw\}$ ve $G + \{uv\}$ grafları

Eğer birden fazla köşe veya kenar eklenirse, köşe ve kenar çıkarma işlemine benzer şekilde gösterim ifade edilebilir.

Aşağıda ifade edilecek olan kavram kenar çıkarma işleminin en önemli uygulamalarından birisidir. Graflarda özellikle bağlantılılık olmak üzere pek çok özelliğinin incelenmesinde yarar sağlar:

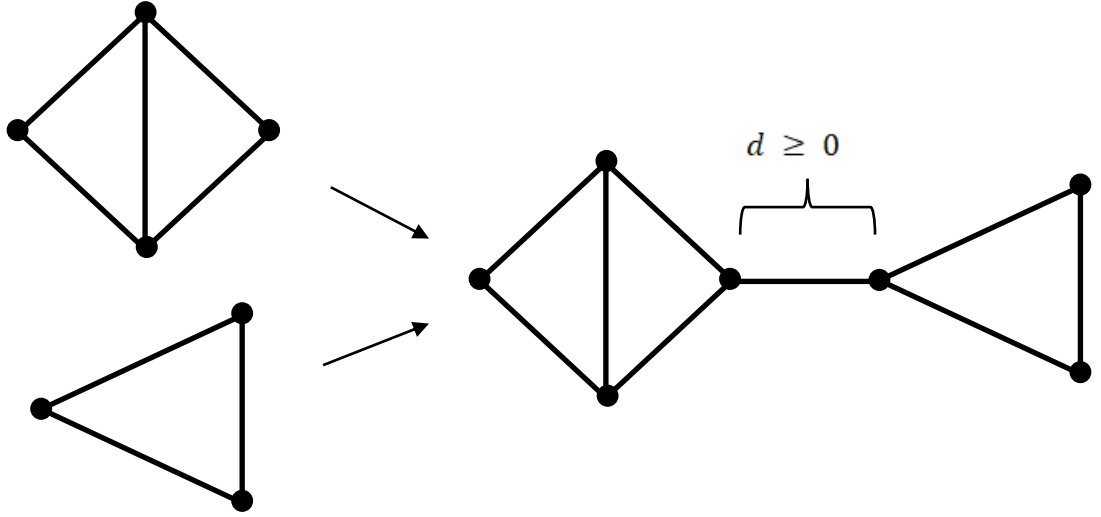
1.1.20. Tanım. G bağlantılı bir graf $e \in E(G)$ ve $u, v \in V(G)$ olmak üzere $e = uv$ olsun. Eğer e kenarı silindiğinde $G - e$ grafi bağlantısız oluyorsa ya da bileşen sayısı artıyorsa e kenarına G grafının bir *köprüsü* (*bridge*) denilir.

Aşağıdaki verilecek olan sonuç yönlü graflar başta olmak üzere ilerleyen bölümlerde sıklıkla kullanılacaktır:

1.1.21. Teorem. Basit ve bağlantılı olan bir G grafının herhangi bir kenarına yeni bir köşe eklendiğinde veya herhangi bir köşesine devir içermeyen bir graf eklendiğinde elde edilen yeni graf da basit ve bağlantılıdır.

İspat. Sallanan bir kenar katlı kenar veya ilmik ya da döngü olamayacağından, bir kenar ekleme işleminin basitliği etkilemeyeceği aşikârdır. Bağlantılılığın değişmeyeceği ise kenar ekleme tanımından açıktır. Aynı yöntemle derecesi 2 olan yeni bir köşe ile herhangi bir kenarı birleştirmek de ne verilen grafın basit ne de bağlantılı olmasını etkilemeyeceğinden sonuç açıktır.

Bu teorem genelleştirilirse iki farklı basit ve bağlantılı graf, herhangi birer köşelerinden $d \geq 0$ uzunluğundaki bir patikayı köprü olarak kullanarak birleştirildiğinde basit ve bağlantılı olan yeni bir graf elde edilir, bkz. Şekil 1.8.

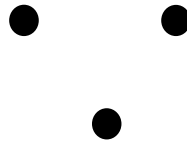


Şekil 1.8. İki basit ve bağlantılı grafi birleştirme

1.2. Graf Çeşitleri

1.2.1. Tanım. Sıfır kenara sahip, sadece köşelerden oluşan graflara *sıfır (null) graf* adı verilir ve n köşeli bir sıfır graf N_n ile gösterilir.

Bazı kaynaklarda sıfır graf yerine boş graf da kullanılmaktadır. N_n sıfır grafın köşe sayısı n ve kenar sayısı $m = 0$ 'dır.



Şekil 1.9. N_3 sıfır grafi

Graf teori ve uygulamalarında oldukça önemli bir yeri olan iki graf türü tanımlanacaktır. Bunlar yol grafları ve devir graflarıdır.

1.2.2. Tanım. Tek bir yoldan oluşan ve devir içermeyen bir grafa *yol grafi* veya *patika graf (path graph)* denir. n köşeli bir yol grafi P_n ile gösterilir.

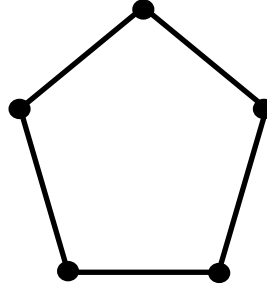
P_n grafi $n - 1$ kenara sahiptir.



Şekil 1.10. P_4 yol grafi

1.2.3. Tanım. Bir patikanın iki uç köşesini bir kenar ile birleştirerek elde edilen grafa *devir grafi* (*cycle graph*) denir. n köşeli (dolayısıyla n kenarlı) bir devir grafi C_n ile gösterilir.

Devir graflar 2-regülerdir. C_n devir grafindan bir kenar silindiği takdirde (çıkarıldığında) P_{n-1} yol grafi elde edilir.

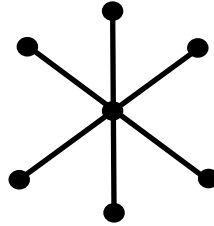


Şekil 1.11. C_5 devir grafi

Graflar ile çalışırken devir graf, devirli, devir, devirsiz, devir bulunduran, vb. gibi kavramlarla karşılaşılabilir. “Devirli” veya “devir bulunduran” ifadesi ile grafin en az bir devir bulundurduğu; “devirsiz” ifadesi ile grafta hiçbir devir bulunmadığı, “devir” ve “devir grafi” ile C_n grafi anlaşılacaktır.

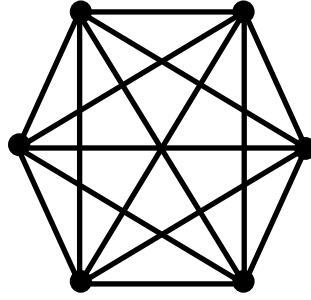
1.2.4. Tanım. Bir merkezi köşe ile diğer köşelerin bu köşe ile bir tek kenarla birleştirildiği bir grafa *yıldız* (*star*) *graf* denilir. n köşeli bir yıldız graf S_n ile gösterilir.

Böylece bir S_n yıldız grafinda köşe ve kenar sayıları sırasıyla n ve $m = n - 1$ ’dir.



Şekil 1.12. S_7 yıldız grafi

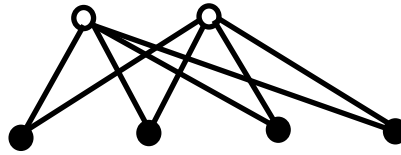
1.2.5. Tanım. Bir grafta her köşe diğer bütün köşelerle birer kenar ile birleştiriliyorsa bu grafa *tam (complete) graf* denir ve n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir. K_n tam grafının köşe sayısı n olmak üzere kenar sayısı $m = \frac{n(n-1)}{2}$ şeklindedir. K_n tam grafi $(n - 1)$ -regüler bir graftır, bkz. Şekil 1.13.



Şekil 1.13. K_6 tam grafi

1.2.6. Tanım. Bir grafi oluşturan köşeleri iki farklı kümeye ayırıp, bu iki kümenin elemanlarından küme içerisindeki elemanları birleştiren herhangi bir kenar olmayıp, verilen tüm kenarlar kümeler arasındaki elemanlar arasında ise bu grafa *iki parçalı (bipartite) graf* denir. Eğer iki parçalı grafta kümelerdeki her bir elemanı diğer kümedeki elemanla eşleyen bir kenar var ise bu grafa *iki parçalı tam (complete bipartite) graf* denir. Bu kümelerde r ve s tane köşe varsa verilen graf $K_{r,s}$ ile gösterilir.

$K_{r,s}$ iki parçalı tam grafın kenar sayısı $m = r \cdot s$ ve köşe sayısı $n = r + s$ 'dir. Örneğin $K_{2,4}$ iki parçalı tam grafi Şekil 1.14'de görülmektedir:



Şekil 1.14. $K_{2,4}$ iki parçalı tam grafi

S_n yıldız grafındaki merkez köşe bir küme, diğer köşeler ikinci bir küme olarak alınırsa S_n yıldız grafının $K_{1,n}$ iki parçalı tam grafi olduğu da açıktır. Yani

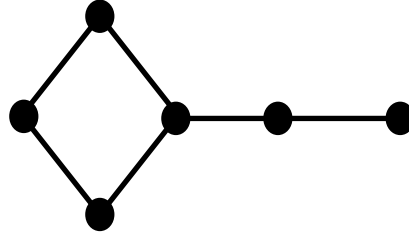
$$S_n = K_{1,n}$$

dir.

Uygulamada önemli bir yeri olan ancak yukarıdaki graf türleri kadar iyi bilinmeyen bir graf türü de larva graflarıdır:

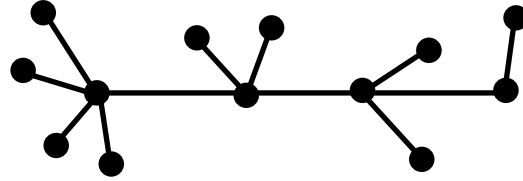
1.2.7. Tanım. C_r devir grafinin herhangi bir köşesiyle s uzunluklu P_{s+1} yol grafinin bir uç köşesinin eklenmesiyle elde edilen bir grafa *larva (tadpole) graf* denilir. Bu graf $T_{r,s}$ ile gösterilir.

Ayrıca $T_{r,s}$ larva grafinin köşe ve kenar sayısı birbirine eşit olup $m = n = r + s$ 'dir.



Şekil 1.15. $T_{4,2}$ larva grafi

1.2.8. Tanım. Herhangi bir devir içermeyen bağlantılı bir grafa *ağaç (tree) graf* veya kısaca *ağaç* denir. n köşeli bir ağaç T_n ile gösterilir. Bağlantılılık şartı ortadan kaldırıldığında bu grafa *orman (forest)* adı verilir.



Şekil 1.16. T_{13} ağaç grafi

Graflarda da bir orman, gerçek hayatta olduğu gibi ağaçlardan oluşmaktadır. Bunlar gibi daha pek çok graf çeşidi mevcuttur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Graf teori, son yüzyıldaki hızlı gelişimini bilimin neredeyse tüm dallarındaki uygulanabilirliğine borçludur. Teknolojideki ve özellikle bilgisayar teknolojisindeki hızlı ilerleme, yazılımlardan faydalanılabilen bir alan olan graf teoriyi de buna paralel olarak pozitif yönde etkiledi.

Herhangi bir günlük olayı genelde bir grafla modellemek mümkündür. Böyle bir olaydaki nesnelere, ki bunlar kişiler, kurumlar, şehirler, mağazalar, ülkeler, gezegenler, atomlar, canlı türleri vs. olabilir, birer köşe ile; bunlar arasındaki ilişkiler de kenarlarla temsil edilir ve olaya karşılık bir graf modeli oluşturulur. Bu graf modeli artık matematiksel yöntemlerle çalışılmaya müsaittir. Örneğin grafin köşe derecelerine bağlı bir formül, grafa karşılık getirilen bir matris, lineer cebir yöntemleri, bize bu grafi matematiksel yöntemlerle çalışmaya hazır hale getirecektir. Bu şekilde çalıştığımız bir graftan elde edilebilecek bir sayı, matematiksel olarak bir anlam ifade etmese de, formülün türüne göre, grafin modellediği gerçek olayla ilgili önemli bilgiler verebilir.

Graf teori denildiğinde akla ilk gelen klasik graflar olsa da bazı dallarda yönlü ve yönlendirilmiş graflar da ele alınmaktadır. Bu konudaki ilk çalışmalar Harary, F., Norman, R. Z., Cartwright, D. 1965 adlı kaynakta bulunabilir. Bir yönlü veya yönlendirilmiş grafta kenarlar düz çizgiler değil üzerinde tek ya da çift yönlü okların olduğu çizgilerdir. Bu oklar, o kenarın iki köşesi arasındaki ilişkinin yönünü gösterir. Örneğin bir ulaşım haritasında bir yolu modelleyen bir kenarın A köşesinden B köşesine doğru bir okla işaretlenmiş olması, yolun A köşesine karşılık gelen ucundan B köşesine karşılık gelen ucuna doğru trafiğin aktığını ve tek yönlü olduğunu gösterir.

Bu tezde de graf teori, kombinatorik ve lineer cebir yöntemleri kullanılarak yönlü ve yönlendirilmiş graflar çalışılmıştır. Bu grafların karakteristik polinomları çalışılmış ve çeşitli graf sınıfları için hesaplamalar yapılmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tezde kullanılan yöntemler, klasik lineer cebir yöntemleri, graf teori ve kombinatorik yöntemleridir.

Karakteristik polinomun hesaplanması tamamen komşuluk matrisinin oluşturulmasına bağlıdır. Bir grafın komşuluk matrisinin özdeğerleri, bu matrisin karakteristik polinomunun kökleridir. Biz çeşitli yönlendirilmiş graf sınıfları için bu karakteristik polinomları ve köklerini lineer cebir yöntemleri kullanarak hesapladık. Bu polinomların benzer yanlarını ve birbirinden farklılaşan yanlarını belirledik.

Kenar ve köşe silme veya ekleme, bu tür çalışmalarda en çok kullanılan yöntemlerden birisidir. Ardarda çeşitli köşeleri veya kenarları silerek büyük bir graftan küçük bir graf elde ederiz ve her bir silme adımındaki değişimi biliyorsak büyük grafa ait bir özelliği, sonda elde edilen küçük grafın aynı özelliği yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz. Bu tezde de kenar ekleme işleminin karakteristik polinoma etkisi yönlendirilmiş graflar için formülleştirilmiştir.

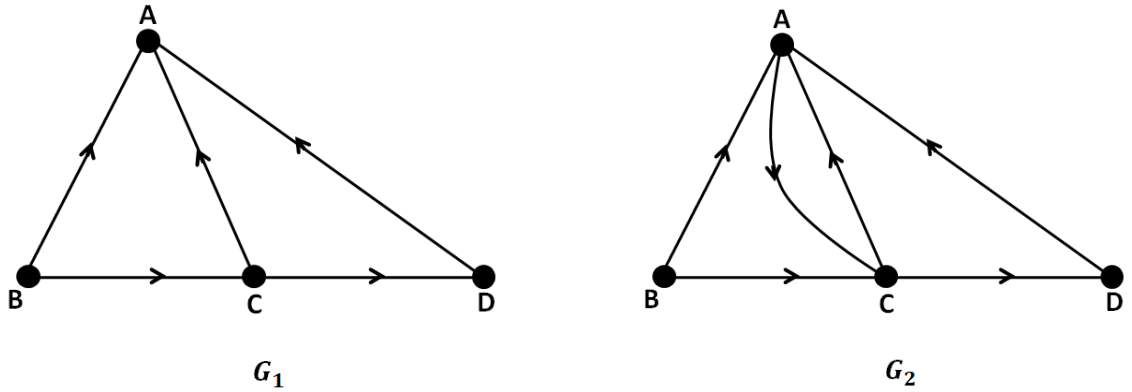
Bir başka yöntem de büyük grafları, çeşitli graf parçalarıyla birbirinden ayrılan daha küçük bileşen graflar türünden ifade etmektir. Biz de bu yöntemi kullanarak farklı durumlarda büyük ve çalışılması zor bir grafın karakteristik polinomunu bileşen graflarının karakteristik polinomları türünden nasıl ifade edebileceğimizi gösterdik.

4. YÖNLÜ VE YÖNLENDİRİLMİŞ GRAFLAR

4.1. Giriş

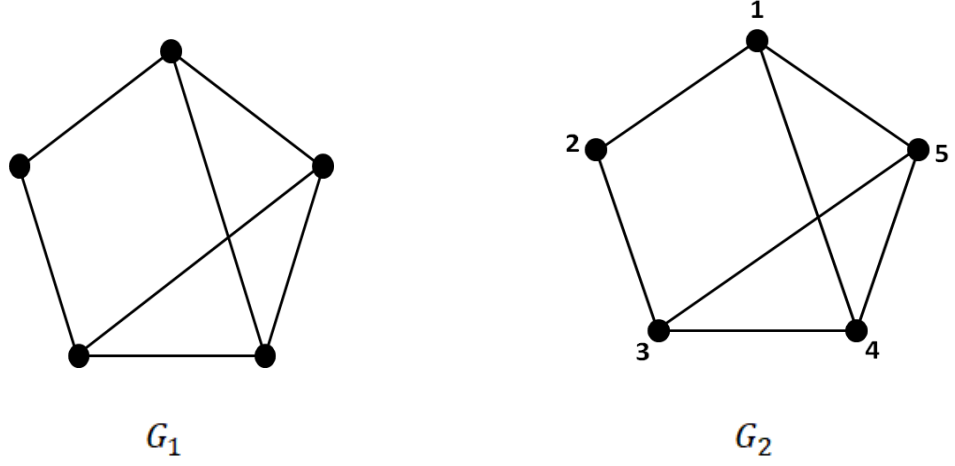
Şimdiye kadar işlenen grafların tümü iki köşe arasındaki ilişkinin var olup olmaması ile ilgili bilgi veriyordu. Ancak bir köşeden diğerine tek veya çift yönlü bir yol olup olmadığını söylemiyordu. Bu bölümde yönlü, yönlendirilmiş, etiketlenmiş ve etiketlenmemiş graf tanımlarını, özelliklerini ayrıca kullanım alanlarını göreceğiz.

4.1.1. Tanım. Kenarları yönlü olan graflara *yönlü graf* denilir. G bir yönlü graf ve $V(G)$ köşe kümesi olsun. G yönlü grafının kenarları, bu kümenin elemanlarının sıralı ikililerinin herbirisidir. Yani bu sıralı ikililer yönlü grafın kenarlarıdır. Bu yönlü grafa farklı u ve v köşelerinin birleştirilmesiyle elde edilen her bir köşe ikilisi için (u, v) ve (v, u) kenarlarından yalnız birisi yönlü bir kenar ise bu yönlü grafa *yönlendirilmiş graf* adı verilir. Şekil 4.1.'deki G_1 yönlendirilmiş graf ama G_2 yönlü graf olmasına rağmen yönlendirilmiş bir graf değildir.



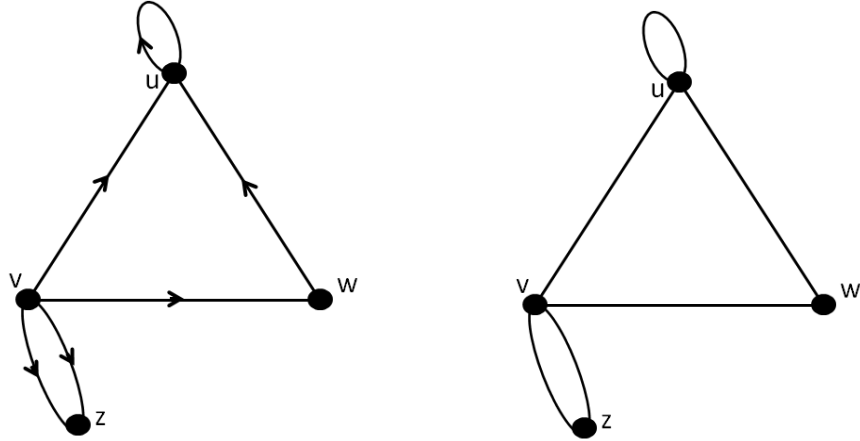
Şekil 4.1. Yönlü Graflar

4.1.2. Tanım. Köşelerin bir sembol veya bir sayı ile isimlendirildiği graflara *etiketlenmiş graf*, isimlendirilmediği graflara da *etiketlenmemiş graf* adı verilir.



Şekil 4.2. Etiketlenmiş ve etiketlenmemiş graflar

4.1.3. Tanım. Bir yönlü G grafının verilen yönlerinin kaldırılmasıyla oluşan yeni grafa G 'nin taşıyıcı grafi adı verilir bkz. Şekil 4.3.

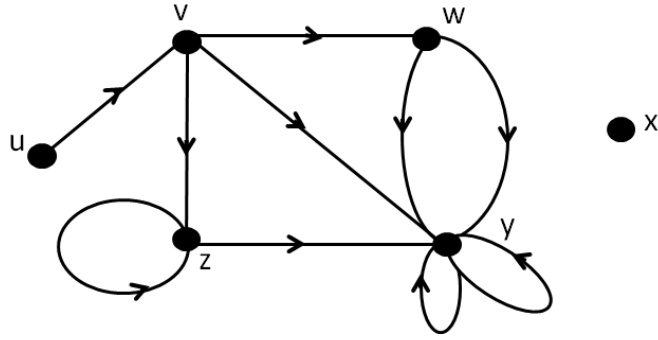


Şekil 4.3. Yönlendirilmiş bir graf ve taşıyıcı grafi

4.1.4. Tanım. v ve w bir yönlü grafın herhangi iki köşesi olsun. v ve w bir e kenarı ile birleştirilmişse v ve w köşelerine *komşu köşeler* denilir. Eğer kenar v köşesinden w köşesine doğru yönlendirilmişse e kenarına v köşesinden *bitişik* ve w köşesine *bitişik* denir. v köşesinden *bitişik* olan kenarların sayısına v köşesinin *giden derecesi*, v köşesine *bitişik* olan kenarların sayısına da v köşesinin *gelen derecesi* denilir. Döngülerde giden dereceye ve gelen dereceye de 1 eklenir.

4.1.5. Lemma (yönlü graflar için el sıkışma). Bir yönlü grafta giden dereceler toplamı ile gelen dereceler toplamı hem birbirine hem de toplam kenar sayısına eşittir.

4.1.6. Örnek. Aşağıdaki şekilde verilen yönlü grafta, köşelerin giden ve gelen derecelerini ayrıca toplam kenar sayısını inceleyelim:



Şekil 4.4. Gelen ve giden dereceler

Giden dereceler

$$d_u = 1$$

$$d_v = 3$$

$$d_w = 2$$

$$d_x = 0$$

$$d_y = 2$$

$$d_z = 2$$

Gelen dereceler

$$d_u = 0$$

$$d_v = 1$$

$$d_w = 1$$

$$d_x = 0$$

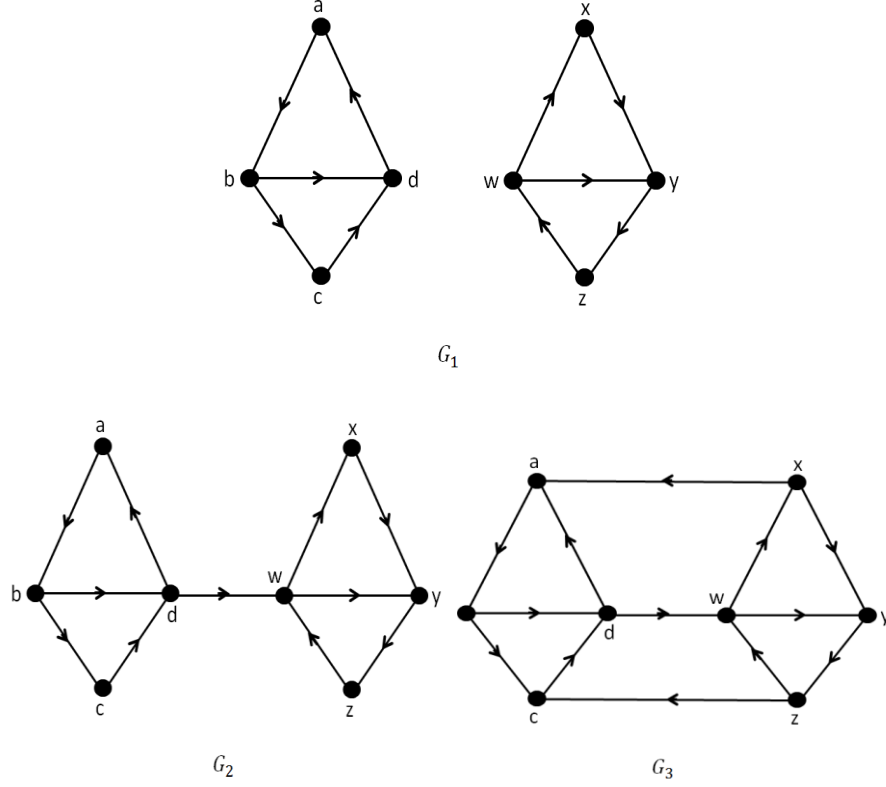
$$d_y = 6$$

$$d_z = 2$$

Görüldüğü üzere giden ve gelen dereceler toplamı 10'dur. Bu sayı aynı zamanda toplam kenar sayısıdır.

4.1.7. Tanım. G yönlendirilmiş bir graf olsun. Eğer G grafın taşıyıcı grafı bağlantılı ise G yönlendirilmiş grafı da bağlantılıdır. Eğer G yönlendirilmiş grafının herhangi bir köşesinden bir başka köşesine giden en az bir yol bulunabiliyorsa G yönlendirilmiş grafına *kuvvetli bağlantılı* denir.

4.1.8. Örnek. Aşağıdaki şekilde verilen yönlendirilmiş G_1 grafi bağlantısızdır. G_2 yönlendirilmiş grafi ise bağlantılı ama kuvvetli bağlantılı değildir. Örneğin w köşesinden v köşesine bir yol yoktur. G_3 yönlendirilmiş grafi ise kuvvetli bağlantılıdır.



Şekil 4.5. Bağlantısız, bağlantılı, kuvvetli bağlantılı yönlendirilmiş graflar

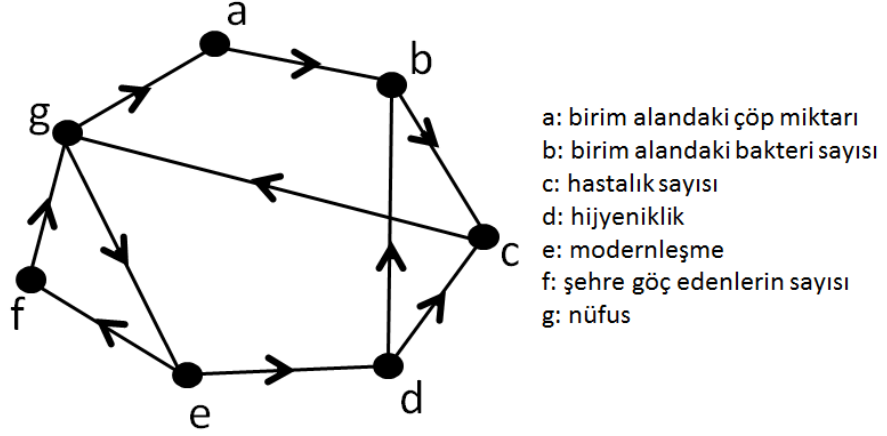
4.1.9. Sonuç. i. Yönlendirilmiş bir graf kuvvetli bağlantılı ise bağlantılıdır. Tanım gereği aşıkardır.

ii. Bağlantılı bir G grafının kuvvetli bağlantılı olması için gerek ve yeter şart G grafının hiçbir köprü bulundurmamasıdır. Aksi takdirde köprü yönüne göre bir köşeden diğer köşeye gidilemeyeceği açıktır.

4.2. Yönlü grafların uygulamaları

Yönlü grafların pek çok kullanım alanı mevcuttur; ağ sistemleri, coğrafi şekiller ve gösterimleri, en kısa yol problemleri, el kaldırmadan şekil çizmeleri, haritaları en az

sayıda renk kullanarak renklendirmeler, dominolar, labirentler gibi pek çok kullanım alanı mevcuttur. Ayrıca sosyal ilişkilerde birbirini sevip sevmemeleri ya da bir şehrin katı çöp probleminin girdileri arasındaki ilişkileri ortaya çıkaran bir yönlü graf çizilebilir, bkz. Şekil 4.6.



Şekil 4.6. Bir çöp probleminin girdi çıktıları

5. YÖNLENDİRİLMİŞ GRAFLARIN KARAKTERİSTİK POLİNOMLARI

5.1. Giriş

Bu bölümde bazı yönlendirilmiş grafların karakteristik polinomlarını ele alacağız. Bir G grafinin karakteristik polinomunu $P(G)$ ile gösterelim. İlk olarak kullanışlı bir sonuç verelim.

5.1.1. Lemma. G_1 ve G_2 mertebeleri sırasıyla 1 ve 2 olan bağlantılı yönlendirilmiş graflar olsun. Bu iki yönlendirilmiş grafin karakteristik polinomları aşağıdaki şekildedir:

$$P(G_1) = \lambda \text{ ve } P(G_2) = \lambda^2.$$

İspat. G_1 yönlendirilmiş grafinin karakteristik matrisi $[\lambda]$ ve determinanı λ olur. G_2 yönlendirilmiş grafinin karakteristik matrisi ise $\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ veya $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$ olmak üzere her ikisinin de determinantının λ^2 olduğu açıktır.

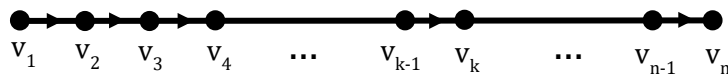
Bu sonuç yönlendirilmiş patika graflarına genelleştirilebilir:

5.1.2. Teorem. P_n yönlendirilmiş patika grafinin karakteristik polinomu $P(P_n)$ olmak üzere

$$P(P_n) = \lambda^n$$

biçimindedir.

İspat. Öncelikle P_n yönlendirilmiş grafindeki her bir kenarın yönünü aynı alarak ispat yapalım. $i = 2, 3, 4, \dots, n$ için v_i 'ler köşeler olmak üzere $v_{i-1}v_i$ kenarlarını v_{i-1} köşesinden v_i köşesine doğru yönlendirelim:



Şekil 5.1. Yönlendirilmiş patika grafi

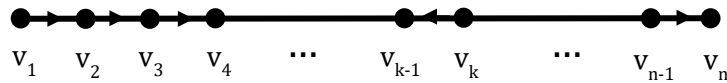
Aşağıdaki determinanttan bu yönlendirilmiş patika grafının karakteristik polinomunu kolayca elde edebiliriz:

$$P(P_n) = \begin{vmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_{k-1}v_k & \dots & v_{n-1}v_n & & \\ v_1 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ v_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ v_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix}_{n \times n} \quad (1)$$

Bu determinant bir üst üçgensel matrisin determinantı olduğu için sonuç aşıkardır.

P_n 'in $2^{n-1}/2 = 2^{n-2}$ farklı yönlendirmesi olduğunu görmek zor değildir. Şimdi $P(P_n)$ 'in P_n yönlendirilmiş grafının kenarlarının yönlendirilmesinden bağımsız olduğunu göstermek için patikadaki herhangi bir kenarın yönünü değiştirerek bu değişimin karakteristik polinoma etki etmediğini gösterelim.

Herhangi bir $v_{k-1}v_k$ kenarının yönünü v_k köşesinden v_{k-1} köşesine doğru olacak şekilde değiştirelim:



Şekil 5.2. Sadece bir yönü ters yönlendirilmiş patika grafi

Bu grafın karakteristik polinomunu da aşağıdaki determinanttan elde ederiz:

$$P(P_n) = \begin{vmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_{k-1}v_k & \dots & v_{n-1}v_n & & \\ v_1 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_k & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ v_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix}_{n \times n} \quad (2)$$

Dikkat edilirse (1) ve (2) arasındaki fark $a_{k-1}a_k$ ve $a_k a_{k-1}$ elemanlarının yer değiştirmiş olmasıdır. Elde edilen iki matris birbirinin transpozü olduğu için determinant değerleri aynıdır.

Bu sonuç kolaylıkla yönlendirilmiş devirsiz graflar için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

5.1.3. Sonuç. n köşeli T_n yönlendirilmiş devirsiz grafinin karakteristik polinomu

$$P(T_n) = \lambda^n$$

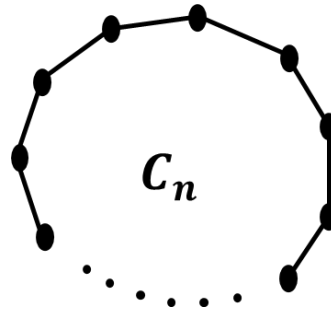
şeklindedir.

Böylece tüm yönlendirilmiş n köşeli hiçbir devire sahip olmayan grafların karakteristik polinomlarının yönlendirmelere bağlı olmaksızın λ^n şeklinde olduğu bulunur. Bu durum devirli graflar için her zaman doğru değildir. Aşağıda istisnai durumlara bakalım:

5.1.4. Teorem. Yönlendirilmiş devirli C_n grafinin karakteristik polinomu

$$P(C_n) = \begin{cases} \lambda^n - 1 & \text{tüm yönlendirmeler aynı ise} \\ \lambda^n & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklindedir.



Şekil 5.3. Devir grafi

İspat. Tüm yönlendirmeler aynı olsun.

$$P(C_n) = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \dots \quad v_{n-1} \quad v_n \\ \left| \begin{array}{cccccc} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right|_{n \times n} \end{array}$$

Bu determinanti ilk sütuna göre açarak hesaplırsak iki tane $(n-1) \times (n-1)$ determinant elde ederiz:

$$P(C_n) = \lambda \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right| + (-1)^n \left| \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \end{array} \right| \\ = \lambda^n - 1. \end{array}$$

Şimdi en azından bir kenarın yönlendirmesi diğerlerinden farklı olsun. Bu kenarı $e = v_i v_{i+1}$ olarak isimlendirelim. O halde

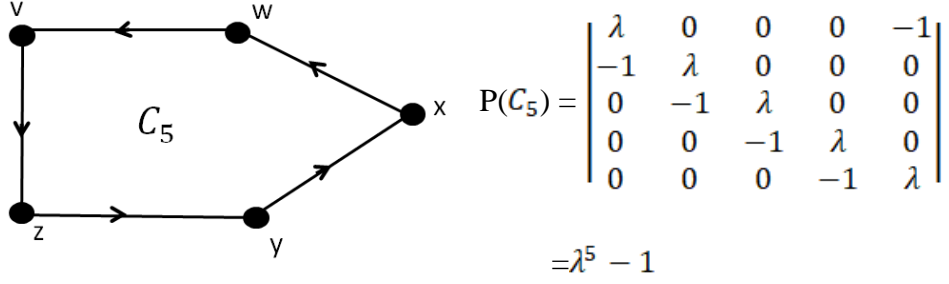
$$P(C_n) = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_k \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \dots \quad v_{k-1}v_k \quad \dots \quad v_{n-1}v_n \\ \left| \begin{array}{cccccc} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{array} \right|_{n \times n} \end{array}$$

elde edilir. Sağ üstteki $(k-1) \times (n-k+1)$ matrisi 0 matrisidir. Böylece $P(C_n) = \lambda^{k-1} \cdot \lambda^{n-(k-1)} = \lambda^n$ elde edilir. Eğer birden fazla kenarın yönü değiştirilirse, o kenarları $v_{i_1-1}v_{i_1}, v_{i_2-1}v_{i_2}, \dots, v_{i_k-1}v_{i_k}$ olarak isimlendirirsek

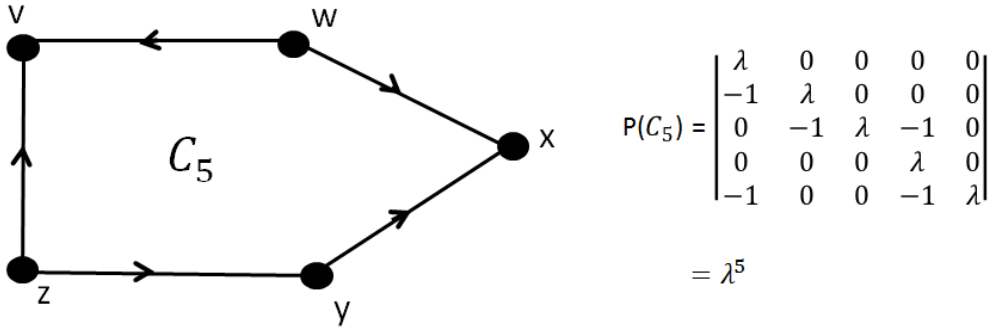
$$P(C_n) = \lambda^{i_1-1} \cdot \lambda^{i_2-1-(i_1-1)} \dots \lambda^{n-(i_k-1)} = \lambda^n$$

elde edilir.

5.1.5. Örnek. Aşağıda verilen devir graflarının karakteristik polinomunu hesaplayalım:



elde edilir. Şimdi de herhangi iki yönü ters çevirelim:



sonucu ortaya çıkar.

6. KENAR EKLEME VE BENZERİ GRAF BÜYÜTME İŞLEMLERİNİN KARAKTERİSTİK POLİNOMA ETKİSİ

6.1. Giriş

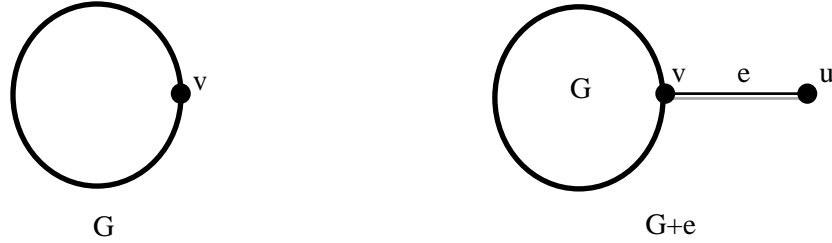
Köşe ve kenar ekleme ya da çıkarma işlemleri, grafların belli özelliklerinin elde edilmesinde oldukça faydalıdır. Bu bölümde kenar ekleme işleminin karakteristik polinoma etkisini inceleyeceğiz. Yapacağımız işlemlerde öncelikle verilen grafın köşelerini daha sonra eklenen kenarların köşelerini numaralandırma yapacağız.

6.2. Kenar ekleme

6.2.1. Lemma. G bağlantılı yönlendirilmiş bir graf olsun. $v \in G$ olmak üzere G grafına $e = vu$ sallanan kenarını ekleyerek oluşturulan $G + e = G + vu$ grafını alalım. O halde

$$P(G + e) = \lambda \cdot P(G)$$

şeklindedir. Bu özellik e kenarının yönlendirilmesinden bağımsızdır.



Şekil 6.1. G grafına bir sallanan kenar eklenmesi

İspat. vu kenarının yönlendirilmesini u dan v ye doğru alalım (v den u ya doğru yönlendirme alınır da ispat aynı gelecektir). G grafının karakteristik matrisine de $P(G)$ diyelim. A ($n \times 1$) –sütun matrisi ve B ($1 \times n$) –sıra matrisi olmak üzere $G + e$ grafının karakteristik matrisi aşağıdaki gibidir.

$$P(G + e) = \begin{vmatrix} P(G) & A \\ B & \lambda \end{vmatrix}$$

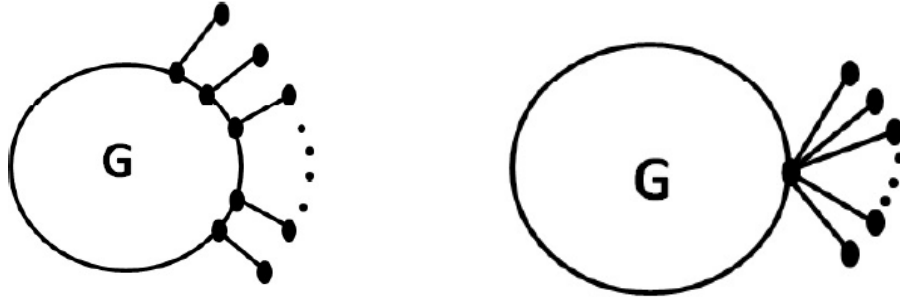
A ve B matrislerinin sadece bir elemanları hariç diğerleri sıfırdır. O eleman ise -1 dir. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Bu lemma bize gösteriyor ki bağlantılı bir G grafına yönlendirilmiş bir sallanan kenar eklendiği takdirde, karakteristik polinomunu bulmak için eklenen kenarın yönlendirilmesine bakılmaksızın G grafının karakteristik polinomunu λ ile çarpmak yeterlidir. Bunun sonucunda genelleştirme yaparak bağlantılı bir G grafına k tane yönlendirilmiş sallanan kenar eklemenin de G grafının karakteristik polinomunun λ^k ile çarpılmasına neden olacağı söylenebilir.

Yönlendirilmiş bir G grafına yönlendirilmiş bir sallanan kenar eklediğimizde G grafının karakteristik polinomunu λ ile çarparak yeni grafın karakteristik polinomunu elde edebileceğimizi biliyoruz. Bu sonucu kullanarak 5.1.2. Teorem ve 5.1.3.Sonuç için alternatif bir ispat yapabiliriz. Aşağıda bazı diğer benzeri sonuçlar mevcuttur:

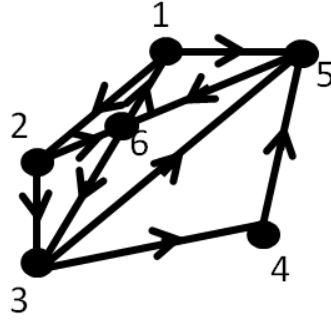
6.2.2. Sonuç. Yönlendirilmiş bağlantılı G grafına k adet yönlendirilmiş sallanan kenar ekleyelim. Oluşan yeni grafa G' dersek aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$P(G') = \lambda^k \cdot P(G).$$



Şekil 6.2. Bağlantılı G grafına k adet sallanan kenar eklenmesi

6.2.3. Örnek. Şekil 6.3'de verilen yönlendirilmiş G grafının karakteristik polinomu

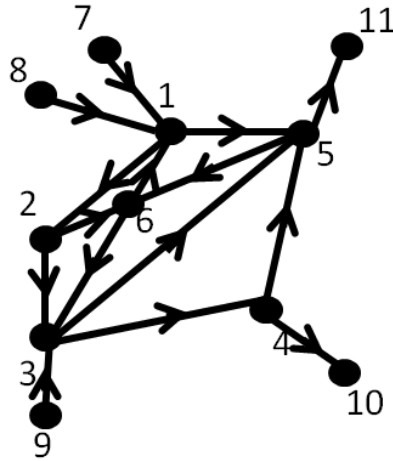


Şekil 6.3. Bağlantılı bir G grafi

$$P(G) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -1 - \lambda - \lambda^2 - 3\lambda^3 + \lambda^6$$

şeklindedir. Şimdi verilen grafa sallanan kenarlar ekleyelim.



Şekil 6.4. Bağlantılı G grafinin sallanan kenarların eklenmesi

Elde edilen yeni grafin karakteristik polinomu ise

$$P(G) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

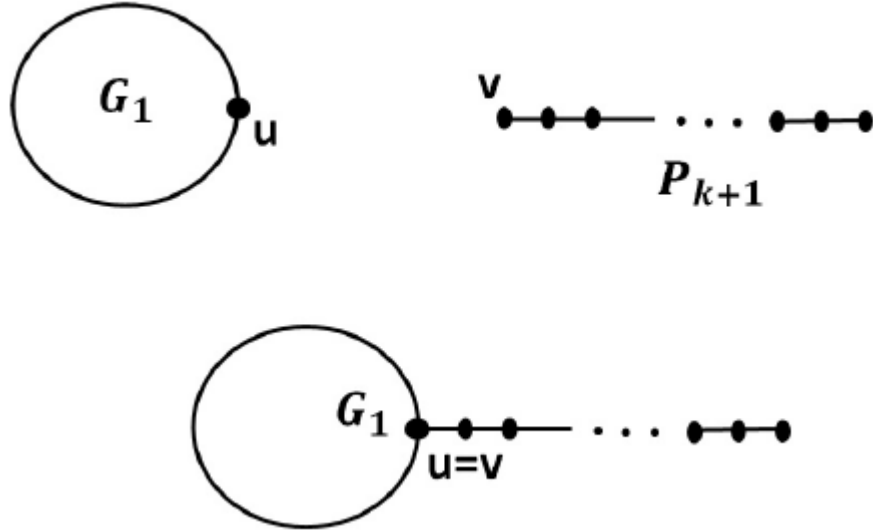
$$= (-1 - \lambda - \lambda^2 - 3\lambda^3 + \lambda^6) \cdot \lambda^5$$

olarak elde edilir.

6.2.4. Sonuç. G_1 yönlendirilmiş bağlantılı bir graf olsun. G grafı, G_1 grafına Şekil 6.3’de olduğu gibi bir P_{k+1} patika grafını, G_1 grafının bir köşesi ile patika grafın uç noktalarından birini özdeşleyerek elde edilen bir yönlendirilmiş graf olmak üzere,

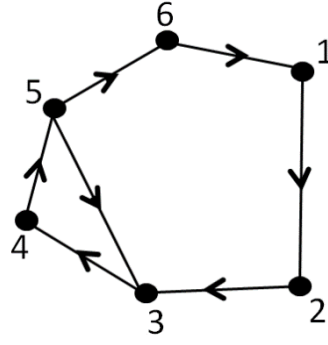
$$P(G) = P(G_1) \cdot \lambda^k$$

şeklindedir.



Şekil 6.5. Bir grafa patika eklenmesi

6.2.5. Örnek.

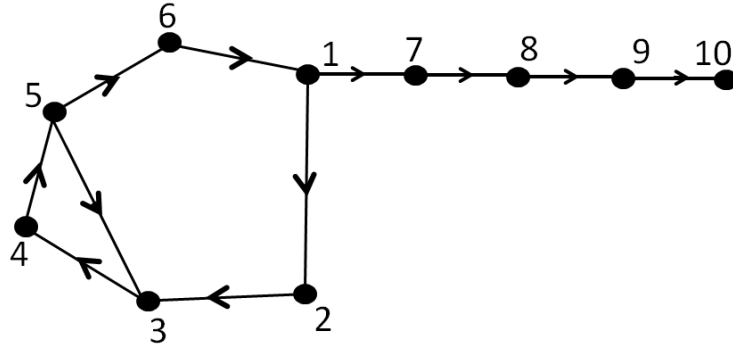


Şekil 6.6. Yönlendirilmiş bir graf

Şekil 6.6’da verilen grafın karakteristik polinomu

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -1 - \lambda^3 + \lambda^6$$

şeklindedir. Verilen grafa bir patika ekleyelim.



Şekil 6.7. Yönlendirilmiş bir grafa patika ekleme

Yeni grafın karakteristik polinomu

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda^3 + \lambda^6) \cdot \lambda^4$$

şeklinde elde edilir.

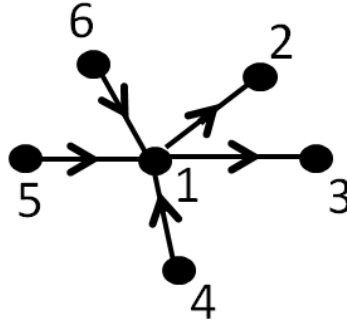
Lemma 6.2.1. kullanılarak yönlendirilmiş yıldız graflarının karakteristik polinomunun formülünü elde edebiliriz:

6.2.6. Sonuç. S_n n köşeli yönlendirilmiş bir yıldız grafi olmak üzere,

$$P(S_n) = \lambda^n$$

biçimindedir.

6.2.7. Örnek.



Şekil 6.8. S_6 yönlendirilmiş yıldız grafi

Şekilde verilen S_6 yıldız grafinin karakteristik polinomu:

$$P(S_6) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^6$$

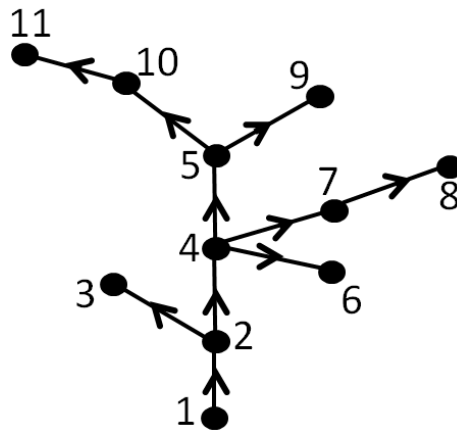
şeklindedir.

Aynı zamanda bu sonuç yönlendirilmemiş yıldız grafları için de geçerlidir. Yukarıdaki sonucu devirsiz ve yönlendirilmiş graflar için genelleylim.

6.2.8. Sonuç. Yönlendirilmiş, devirsiz ve n köşeli bir T_n ağaç grafinin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir:

$$P(T_n) = \lambda^n.$$

6.2.9. Örnek. Şekil 6.9'da verilen yönlendirilmiş ağaç grafinin karakteristik polinomu aşağıdaki şekildedir:



Şekil 6.9. T_{11} yönlendirilmiş ağaç grafi

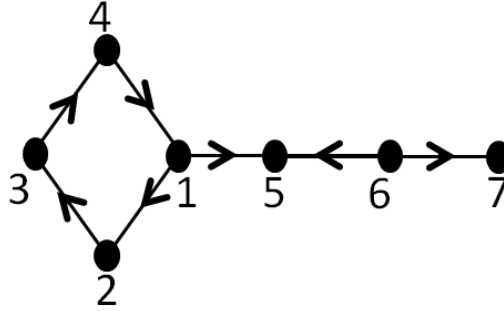
$$P(T_{11}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{11}.$$

6.2.10. Sonuç. $T_{r,s}$ yönlendirilmiş bir larva graf olsun. Aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$P(T_{r,s}) = P(C_r) \cdot P(P_s) = P(C_r) \cdot \lambda^s.$$

6.2.11. Örnek.



Şekil 6.10. Yönlendirilmiş $T_{4,3}$ larva grafı

Şekilde verilen yönlendirilmiş $T_{4,3}$ larva grafının karakteristik polinomu

$$P(T_{4,3}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^4 - 1) \cdot \lambda^3 = P(C_4) \cdot P(P_3)$$

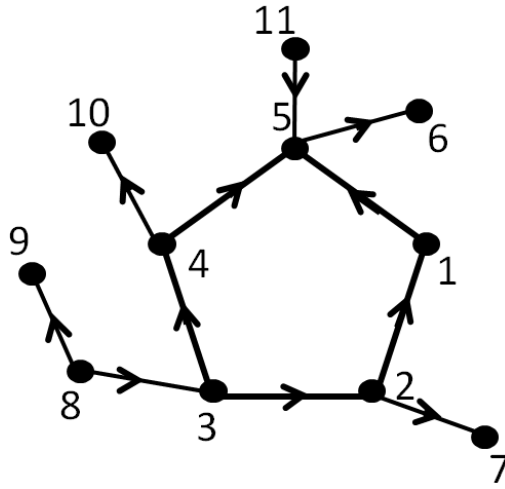
şeklindedir.

6.2.12. Sonuç. $k \leq n$ olmak üzere G , tek deviri k uzunluklu bir C_k deviri olan, yönlendirilmiş, n köşeli bir graf olmak üzere

$$P(G) = P(C_k) \cdot \lambda^{n-k}$$

şeklindedir.

6.2.13. Örnek.



Şekil 6.11. Tek devire sahip yönlendirilmiş bir graf

Şekilde verilen grafın karakteristik polinomu

$$P(G) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{11} = \lambda^5 \cdot \lambda^6 = P(C_5) \cdot \lambda^6$$

dır.

Karakteristik polinomlar bulunurken kenar çıkarma işlemleri için kenar eklemede olduğu gibi λ veya kuvvetleri ile nasıl çarpılıyorsa, kenar çıkarmada da aynı terimlere bölünmesiyle elde edilir.

7. YÖNLENDİRİLMİŞ GRAFLARI BİRLEŞTİRMENİN VE AYRIŞTIRMANIN KARAKTERİSTİK POLİNOMA ETKİSİ

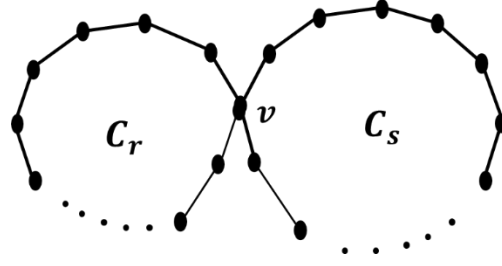
7.1. Giriş

Bu bölüme kadar yönlendirilmiş grafların karakteristik polinomlarının bazı önemli özelliklerini inceledik. Şimdi ise bazı küçük grafları kullanarak karakteristik polinomu hesaplayabilmek için yeni yöntemler veren önemli sonuçlar elde edeceğiz. Graf Teoride ve genel olarak matematikte, ana yapının özelliklerini elde etmek için küçük parçaları üzerinde çalışmak ve bu parçalardan elde edilecek daha küçük boyuttaki bilgilerden faydalanarak bütün hakkında bilgiye ulaşmak sık kullanılan ve zekice bir fikirdir. Özel olarak graflarda bu mantığa uygun hareket etmek istediğimizde, kopma noktaları (köşeleri) ve köprüler, bu amaca yönelik olarak kullanılabilir. Bu yüzden pek çok grafın karakteristik polinomlarını hesap etmek için bu bölümde kopma noktalarını ve köprüleri kullanabiliriz. Yapacağımız işlemlerde etiketlemeleri yaparken öncelikle devirdeki köşeleri, sonra varsa sallanan kenarlardaki köşeleri sırasıyla numaralandıracağız. Aşağıdaki teoremi vererek başlayalım:

7.1.1. Teorem. G grafı, uzunlukları r ve s olan iki devirin, Şekil 7.1'deki gibi ortak bir v köşesinde birleştirilmesiyle elde edilen yönlendirilmiş graf olsun. Yani, v köşesi G grafının bir kopma noktası olsun ve silindiğinde $G - v$ grafında r ve s uzunluklu iki devir kalsın.

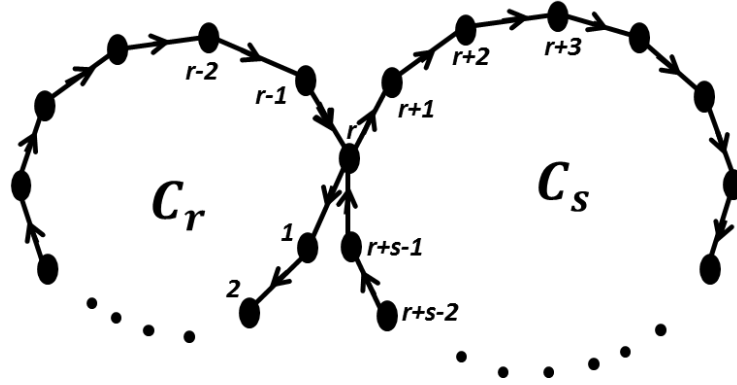
$$P(G) = \begin{cases} \frac{P(C_r) \cdot P(C_s) - 1}{\lambda} & \text{tüm yönlendirmeler aynı ise} \\ \frac{P(C_r) \cdot P(C_s)}{\lambda} & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

karakteristik polinomu elde edilir.



Şekil 7.1. Ortak bir noktada birleşen iki devir grafi

İspat. Tüm yönlendirmeler aynı olsun.



Şekil 7.2. Ortak bir noktada birleşen aynı yönlü iki devir grafi

$$P(G) = \begin{vmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_{r-1}v_rv_{r+1} & \dots & v_{r+s-1} \\ v_1 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_2 & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{r-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ v_r & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ v_{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{r+s-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

Yukarıdaki determinanti hesaplamak için birinci sütuna göre açalım. 1. ve r . satır dışındakilerden 0 sonucu elde edilir. Bu determinantın elemanlarını a_{ij} ile gösterirsek $a_{11} = \lambda$, $a_{r1} = -1$ ve M_{11}, M_{r1} kofaktörler olmak üzere,

$$P(G) = a_{11} \cdot M_{11} + a_{r1} \cdot M_{r1}$$

karakteristik polinomunu elde ederiz. Şimdi M_{11} ve M_{r1} kofaktörlerini hesaplayalım:

$$M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} v_2 & v_3 & v_4 & \dots & v_{r-1}v_rv_{r+1} & \dots & v_{r+s-1} \\ v_2 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_3 & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{r-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ v_r & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ v_{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{r+s-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{r-2} \cdot (\lambda^s - 1)$$

şeklindedir. O halde $a_{11} \cdot M_{11} = \lambda^{r-1} \cdot (\lambda^s - 1)$ elde ederiz. C_s deviri ters yönlendirilirse $a_{(r-1)r}$ ile $a_{r(r-1)}$ elemanları yer değiştirir. Bu da determinanta etki etmez. Sağ alt köşedeki $s \times s$ matrisi, $a_{(r+s-1)r}$ terimi olan -1 hariç bir üst üçgensel matristir.

$$M_{r1} = (-1)^{r+1} \cdot \begin{vmatrix} v_2 & v_3 & v_4 & \dots & v_{r-1}v_rv_{r+1} & \dots & v_{r+s-1} \\ v_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_2 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_3 & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{r-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ v_{r+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ v_{r+2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{r+s-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{r+1} \cdot (-1)^{r-1} \cdot (\lambda^{s-1}) = (-1)^{2r} \cdot (\lambda^{s-1}).$$

Benzer şekilde iki devir yer değiştirirse yani simetriğini alırsak veya 180 derece döndürürsek $a_{(r+s-1)r}$ ile $a_{(r+1)r}$ elemanları yer değiştirir ve determinant değişmez.

Böylece

$$\begin{aligned}
P(G) &= a_{11} \cdot M_{11} + a_{r1} \cdot M_{r1} = \lambda^{r-1} \cdot (\lambda^s - 1) \cdot (\lambda^{s-1}) \\
&= \lambda^{r+s-1} - \lambda^{r-1} - \lambda^{s-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bilindiği üzere $P(C_r) = \lambda^r - 1$ ve $P(C_s) = \lambda^s - 1$ karakteristik polinomlarını kullanarak

$$P(G) = \frac{P(C_r) \cdot P(C_s) - 1}{\lambda}$$

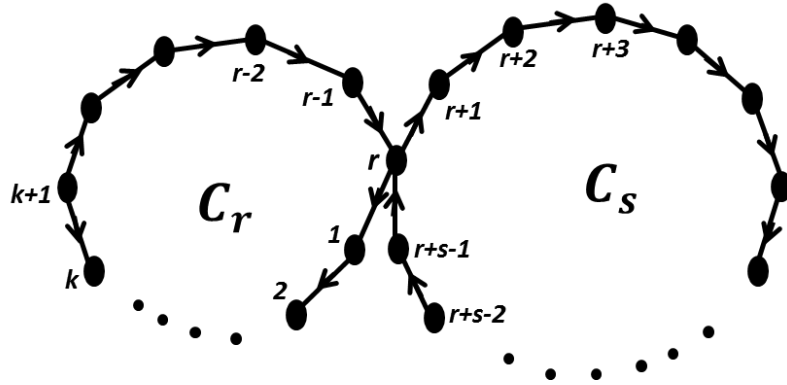
şeklinde ifade edilir. Eğer numaralandırmaya C_s yönlendirilmiş grafından başlanırsa;

$$\begin{aligned}
P(G) &= \lambda^{s-1} \cdot (\lambda^r - 1) \cdot (\lambda^{r-1}) \\
&= \lambda^{s+r-1} - \lambda^{s-1} - \lambda^{r-1}
\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$P(G) = \frac{P(C_s) \cdot P(C_r) - 1}{\lambda}$$

aynı sonucu verdiği aşıkardır. Şimdi diğer hallerdeki durumları inceleyelim. Yönlendirmelerden en az biri farklı ise aşağıdaki gibi hareket edilir:



Şekil 7.3. Bir yönü farklı ortak bir noktada birleşen aynı yönlü iki devir grafi

$e = k(k+1) \in E(C_r - \{(r, 1)\})$, $k \in \{1, 2, 3, \dots, (r-1)\}$ veya $e = (r, 1)$ olsun.

$P(G)$ karakteristik polinomunu bulmak için aşağıdaki determinanı hesaplamamız yeterlidir:

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 \vdots \\
 v_k \\
 v_{k+1} \\
 v_{k+2} \\
 \vdots \\
 v_{r-1} \\
 v_r \\
 v_{r+1} \\
 \vdots \\
 v_{r+s-1}
 \end{array}
 \begin{vmatrix}
 v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_k v_{k+1} v_{k+2} & \dots & v_{r-1} v_r v_{r+1} & \dots & v_{r+s-1} \\
 \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & \lambda
 \end{vmatrix}$$

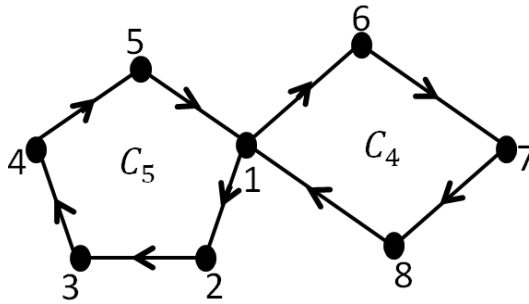
Bu determinant sırasıyla köşegen üzerindeki $k \times k$, 1×1 , $(r - k - 3) \times (r - k - 3)$, 1×1 , $s \times s$ boyutlu kare determinantların çarpımı olup,

$$P(G) = \lambda^k \cdot \lambda \cdot \lambda^{r-k-3} \cdot \lambda \cdot (\lambda^s - 1) = \lambda^{r-1} \cdot (\lambda^s - 1)$$

$$P(G) = \frac{P(C_r) \cdot P(C_s)}{\lambda}$$

şeklindedir. Ayrıca C_s devirinde bir kenarın yönü değiştirilirse aynı sonuç elde edilir. Benzer şekilde birden fazla kenarın yönü de değiştirilirse aynı ifade elde edileceği kolayca görülür.

7.1.2. Örnek.



Şekil 7.4. Ortak bir noktada birleşen aynı yönlü C_5 ve C_4 devir grafları

Şekilde verilen yönlendirilmiş grafın karakteristik polinomu

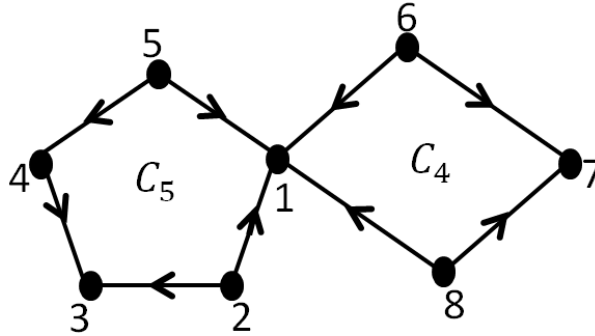
$$\begin{vmatrix}
 \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
 \end{vmatrix}
 = -\lambda^3 - \lambda^4 + \lambda^8$$

$$= \frac{(\lambda^5 - 1) \cdot (\lambda^4 - 1) - 1}{\lambda}$$

$$= \frac{P(C_5) \cdot P(C_4) - 1}{\lambda}$$

dir.

7.1.3. Örnek.



Şekil 7.5. Ortak bir noktada birleşen karışık yönlü C_5 ve C_4 devir grafları

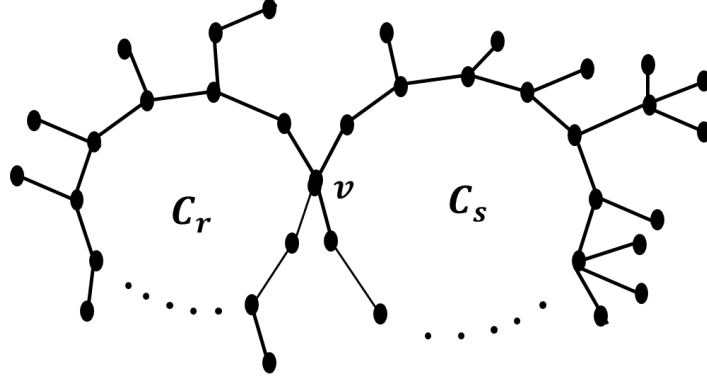
Şekilde verilen yönlendirilmiş grafın karakteristik polinomu

$$\begin{vmatrix}
 \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda
 \end{vmatrix}
 = \lambda^8 = \frac{P(C_5) \cdot P(C_4)}{\lambda}$$

şeklindedir.

Buradaki sonucu kullanarak bu teoremi aşağıdaki biçimde kolayca genellebiliriz:

7.1.4. Sonuç. G grafi, tek kesişme noktası bir v kopma noktası olan C_r ve C_s şeklinde iki devire sahip bir grafa k tane sallanan kenar eklenerek elde edilen graf olsun.



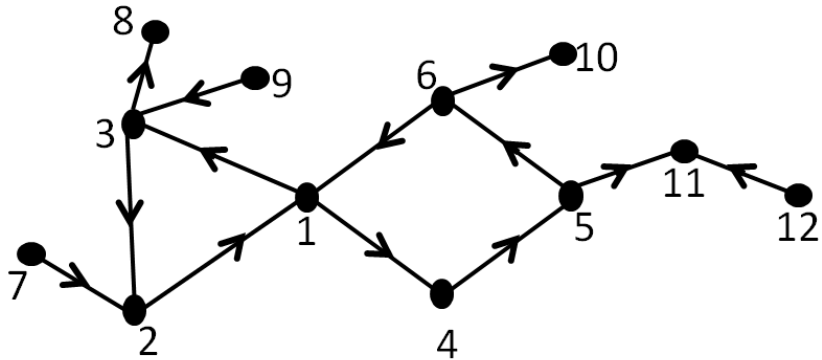
Şekil 7.6. Ortak bir noktada birleşen iki devir grafına k tane sallanan kenar eklenmesi

O halde

$$P(G) = \begin{cases} (P(C_r) \cdot P(C_s) - 1) \cdot \lambda^{k-1} & \text{devirlerdeki tüm yönlendirmeler aynı ise} \\ \lambda^{k-1} \cdot P(C_r) \cdot P(C_s) & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklindedir. Burada yönlendirmeleri dikkate alırken sadece devirler üzerindeki kenarların yönlendirilmelerini incelemek yeterlidir. Diğer kenarların yönlendirilmelerinin hiçbir önemi yoktur.

7.1.5. Örnek.



Şekil 7.7. Ortak bir noktada birleşen iki devir grafına birkaç tane sallanan kenar eklenmesi

Şekilde verilen yönlendirilmiş grafın karakteristik polinomu

$$P(G) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{12} - \lambda^8 - \lambda^9 = [(\lambda^3 - 1) \cdot (\lambda^4 - 1) - 1] \cdot \lambda^{6-1}$$

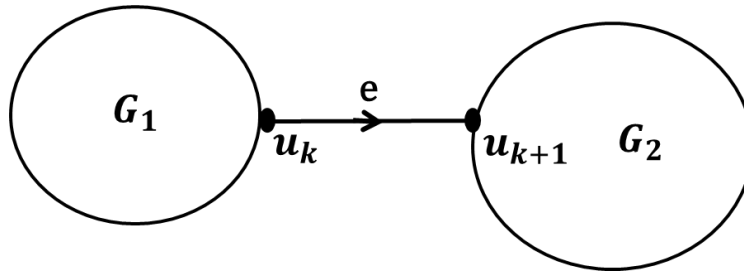
$$= (P(C_3) \cdot P(C_4) - 1) \cdot \lambda^5$$

şeklindedir.

7.1.6. Teorem. İki devirli yönlendirilmiş bir G grafının, G_1 ve G_2 devirli yönlendirilmiş bileşenlerini birleştiren köprünün yönlendirilmesi, $P(G)$ karakteristik polinomuna etki etmez. Yani aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$P(G) = P(G_1) \cdot P(G_2).$$

İspat. $e = u_k u_{k+1}$ G yönlendirilmiş grafının u_k köşesinden u_{k+1} köşesine doğru yönlendirilmiş köprüsü olsun. $G - e$ yönlendirilmiş grafının her biri tek devire sahip olan yönlendirilmiş bileşenlerine de G_1 ve G_2 diyelim. Bunların uzunlukları sırasıyla r ve s olsun. Bkz. Şekil 7.8.



Şekil 7.8. Köprü ile birleştirilmiş iki devirli graf

G 'nin karakteristik polinomu aşağıdaki determinanttan elde edilir:

$$P(G) = \begin{vmatrix} \lambda I - AG_1 & B \\ C & \lambda I - AG_2 \end{vmatrix}.$$

Bu determinanтта B , $r \times s$ boyutlu ve $a_{r(r+1)}$ elemanı -1 diğer tüm elemanları 0 olan bir matristir. C ise $s \times r$ Boyutlu bir 0 matrisidir. Bu determinant

$$|\lambda I - AG_1| \cdot |\lambda I - AG_2|$$

değerine eşittir. Böylece

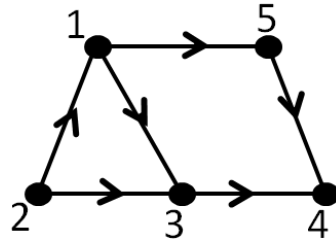
$$P(G) = P(G_1) \cdot P(G_2)$$

elde edilir. Şimdi e 'nin yönlendirmesini değiştirelim. Bu durumda G 'nin karakteristik polinomunu veren determinant

$$P(G) = \begin{vmatrix} \lambda I - AG_2 & B \\ C & \lambda I - AG_1 \end{vmatrix}$$

olacaktır. Bu determinanтта ise C , $s \times r$ boyutlu ve $a_{r(r+1)}$ elemanı -1 diğer tüm elemanları 0 olan bir matristir. B ise $r \times s$ Boyutlu bir 0 matrisidir. Dolayısıyla diğer durumla aynı sonucu verecektir.

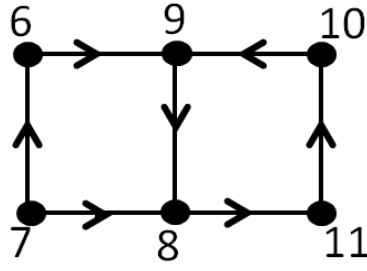
7.1.7. Örnek.



Şekil 7.9. G_1 yönlendirilmiş graf

G_1 grafının karakteristik polinomu

$$P(G_1) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^5$$

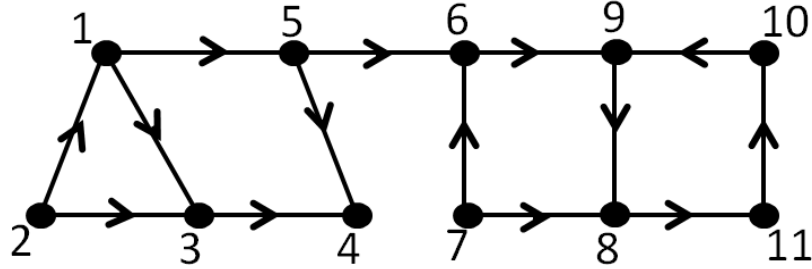


Şekil 7.10. G_2 yönlendirilmiş grafi

G_2 grafinin karakteristik polinomu ise

$$P(G_2) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^4 - 1) \cdot \lambda^2$$

şeklindedir. O halde bu iki grafi bir köprü ile birleştirelim:



Şekil 7.11. $G = G_1 \cup G_2$

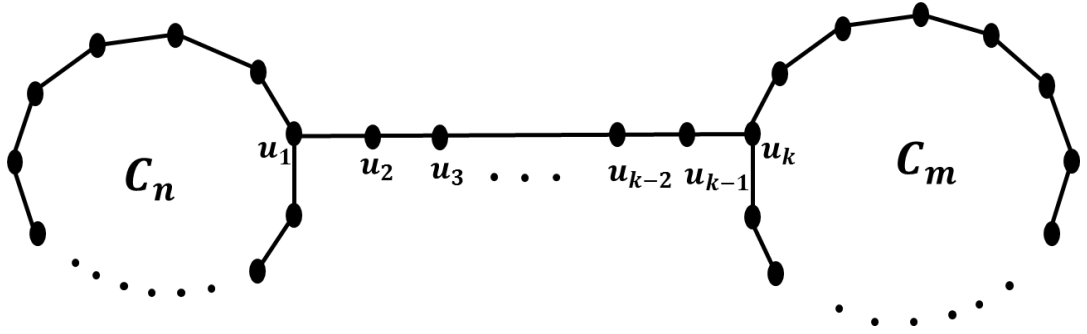
Şekilde verilen köprü içeren G yönlendirilmiş grafinin karakteristik polinomu ise:

$$P(G) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^4 - 1) \cdot \lambda^7 = P(G_1) \cdot P(G_2)$$

şeklinde olduğu açıktır.

7.1.8. Teorem. G yönlendirilmiş grafi, C_n ve C_m yönlendirilmiş devirli graflarını bir P_k patika grafi ile birleştirerek elde edilen graf olsun, Bkz. Şekil 7.12.



Şekil 7.12. İki devir grafinin bir patika ile birleştirilmesi

G 'nin komşuluk matrisinden elde edilen karakteristik polinomu veren denklem

$$P(G) = P(C_m) \cdot P(C_n) \cdot P(P_{k-2})$$

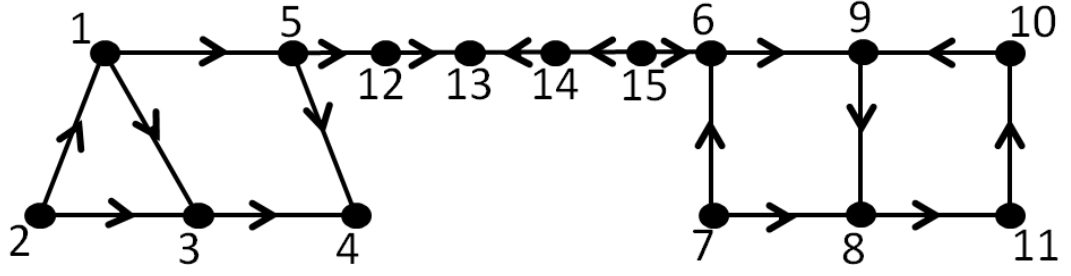
$$= \begin{cases} (\lambda^m - 1) \cdot (\lambda^n - 1) \cdot \lambda^{k-2} & \text{devirlerdeki tüm yönlendirmeler aynı ise} \\ \lambda^m \cdot \lambda^n \cdot \lambda^{k-2} & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. Yukarıdaki sonuçlara benzer şekilde ispatlanabilir.

7.1.9. Sonuç. Teorem 7.1.6., Teorem 7.1.8. ile beraber işleme alınınca C_n , C_m grafları yerine herhangi yönlendirilmiş iki graf alınabileceği açıktır.

7.1.10. Örnek. Örnek 7.1.7. deki köprüye birkaç tane daha kenar ekleyelim:



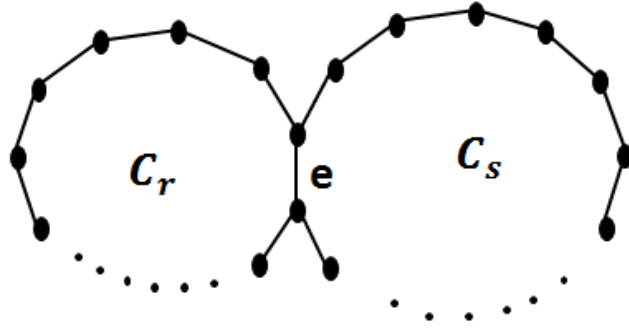
Şekil. 7.13. Bir patika ile birleşen iki graf

Şekilde verilen yönlendirilmiş grafın karakteristik polinomunu bulalım:

$$\begin{vmatrix}
 \lambda & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda
 \end{vmatrix}$$

Yukarıdaki determinat $(\lambda^4 - 1) \cdot \lambda^{11} = P(G_1) \cdot P(G_2) \cdot P(P_4)$ olarak bulunur.

7.1.11. Teorem. G yönlendirilmiş 2 devirli grafı, C_r ve C_s devir graflarının ortak bir e kenarında birleştirilmesiyle meydana gelen bir graf olsun. Bkz. Şekil 7.14. Bu grafın karakteristik polinomu aşağıdaki şekildedir:



Şekil 7.14. İki devirli ve ortak bir kenara sahip olan bir graf

C_r ve C_s devirlerinden birinin tüm kenarları aynı yönlü, diğer devirde ise sadece e kenarı farklı yönlü ise

$$P(G) = \frac{P(C_r) \cdot P(C_s) - \lambda^2}{\lambda^2};$$

her iki devirin tüm kenarları aynı yönde yönlendirilmişse

$$P(G) = \frac{P(C_r) \cdot P(C_s) - 1}{\lambda^2};$$

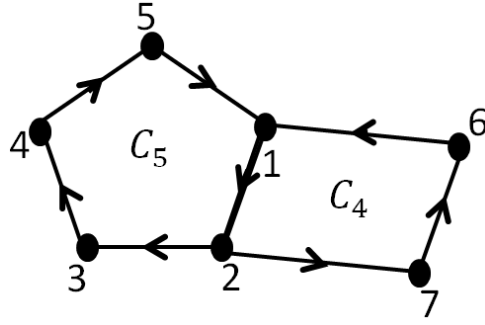
ve eğer ya C_r ve C_s devirlerinin ikisinde de en az birer kenar farklı yöne sahipse ya da bu devirlerden birindeki tüm kenarlar aynı yönlendirmeye sahipken diğerinde e dışında en az bir kenar farklı yönlendirmeye sahipse

$$P(G) = \frac{P(C_r) \cdot P(C_s)}{\lambda^2}$$

şeklindedir. Bu sonuçlar da yukarıdaki sonuçların ispatında kullanılan yöntemlere benzer şekilde ispatlanabilir.

Örnek 7.1.7. deki G_1 grafında $e = (1,3)$ kenarı olarak alınırsa G_1 grafı C_3 ve C_4 graflarının e kenarında kesişmesiyle meydana gelmiş olur ve teoremdeki son duruma örnek olur. Benzer şekilde G_2 grafı da aynı duruma örnektir.

7.1.12. Örnek.



Şekil 7.15. Ortak bir kenara ve aynı yönlü iki devire sahip graf

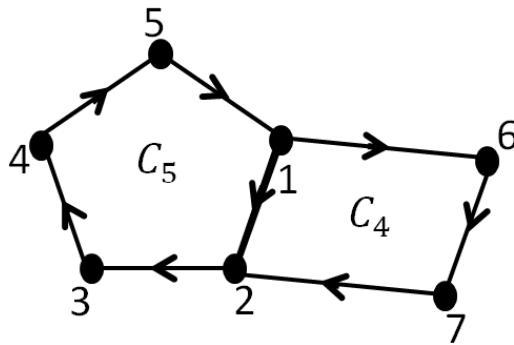
Şekilde verilen yönlendirilmiş grafın karakteristik polinomu

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda^7$$

Elde edilen sonucun ikinci durumdaki formül olduğu aşıkardır. Yani

$$\frac{P(C_5) \cdot P(C_4) - 1}{\lambda^2}$$

dir. Son olarak verilen örnekte C_4 grafının (1,2) kenarı hariç geri kalan kenarların yönleri değiştirilirse



Şekil 7.16. Ortak bir kenarın verilen bir devirin döngüsüne ters olduğu graf

Şimdi karakteristik polinomunu bulalım.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = -1 - \lambda^2 + \lambda^7$$

elde edilen sonucun da

$$\frac{P(C_5) \cdot P(C_4) - \lambda^2}{\lambda^2}$$

olduğu açıktır.

7.1.13. Sonuç. Teorem 7.1.8. ve 7.1.11. deki graflara k adet sallanan kenar eklendiği takdirde verilen polinomların λ^k ile çarpılması yeterli olacaktır.

8. BULGULAR, TARTIŞMA VE SONUÇ

Graflar, son yıllarda başta kimya, fizik, elektronik mühendisliği, farmakoloji, toplum bilim, networkler, biyoloji gibi birçok alanda ortaya çıkan uygulamalarından dolayı önemli ve sık kullanılan bir çalışma alanı haline gelmiştir. Matematiğin günümüzde en hızla gelişen ve diğer alanlara en yaygın şekilde uygulanabilen alt dalı graf teoridir. Bu nedenle bu konuda oldukça yüksek sayıda araştırma mevcuttur ve sadece matematikçiler değil, grafların uygulanabildiği tüm bilim alanlarındaki araştırmacılar için bu alan önemli bir çalışma disiplini olmuştur.

Bu tezde klasik grafların yetmediği yerlerde kullanılan ve ilk kullanım alanını elektrik devreleri olarak bulan yönlü ve yönlendirilmiş graflar ele alınmıştır. Bir grafın modellediği bir gerçek olaydaki nesnelere arasında tek taraflı ilişkiler söz konusu olduğunda klasik graflar bu yönü belirtemeyeceğinden yönlü graflara ihtiyaç duyulmaktadır ve bu konu çok yaygın uygulamalara sahiptir.

Tezde önce ilgili graf türleri tanıtılmış ve daha sonra yönlü ve yönlendirilmiş grafların karakteristik polinomları ele alınmıştır. Daha sonraki bölümlerde önce belli başlı yönlendirilmiş graf sınıflarının karakteristik polinomları hesaplanmıştır. Sonraki bölümlerde ise kenar ekleme işleminin ve grafi bölme işleminin yönlendirilmiş bir grafın karakteristik polinomuna etkisi belirlenmiştir.

Benzer çalışmalar köşe ve kenar silme ve köşe ekleme işlemleri için de yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Aldous, J. M., Wilson, R. J. 2004.** Graphs and Applications, An Introductory Approach. *Springer, London.*
- Bang-Jensen, J., Gutin, G. 2000.** Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, *Springer, NY.*
- Benjamin, A., Chartrand, G., Zhang, P. 2015.** The Fascinating World of Graph Theory, *Princeton University Press, Princeton.*
- Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 1982.** Graph Theory with Applications. *North Holland, NY.*
- Bondy, J. A., Murty, U. S. R. 2008.** Graph Theory. *Springer NY.*
- Cangul, I. N., Delen, S., Yurttas, A., Ana, U. 2016.** Degree sequences of several graph classes, The 29th International Conference of the Jangjeon Mathematical Society on Number Theory, Special Functions and Its Applications, 8-10.08.2016, Pondicherry-India
- Capobianco, M., Molluzzo, J. C. 1978.** Examples and Counterexamples in Graph Theory. *North-Holland, NY.*
- Celik, F., Demirci, M., Delen, S., Ana, U., Cangul, I. N. 2020.** Characteristic Polynomials of Subdivision Graphs, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics.*
- Chartrand, G. 1985.** Introductory Graph Theory. *New York, Dover.*
- Chartrand, G., Zhang, P. 2012.** A First Course in Graph Theory. *New York, Dover.*
- Clark, J., Holton, D. A. 1995.** A First Look at Graph Theory. *World Scientific, Singapur.*
- Delen, S., Togan, M., Yurttas, A., Ana, U., Cangul, I. N. 2020.** The Effect of Edge and Vertex Deletion on Omega Invariant, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 14 (3), Special Issue Vol. II.
- Deo, N. 1974.** Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. *Prentice-Hall, NJ.*
- Diestel, R. 2010.** Graph Theory. *Springer GTM.*
- Edmonds, J. 1964.** Existence of k-edge-connected ordinary graphs with prescribed degrees. *J of Research of the Nat. Bureau of Standards-B Mathematics and Mathematical Physics*, 68B (2), 73-74.
- Foulds, L. R. 1992.** Graph Theory Applications. *Springer, New York.*
- Gross, J. L., Yellen J. 2006.** Graph Theory and Its Applications (Second Edition). *CRC Press, USA.*
- Hakimi, S. L. 1962.** On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. *J. SIAM Appl. Math.*, 10, 496-506.
- Harary, F., Norman, R. Z., Cartwright, D. 1965.** Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs, *Wiley, New York.*
- Hartsfield, N., Ringel, G. 2003.** Pearls in Graph Theory, A Comprehensive Introduction. *Dover NY.*
- Havel, V., 1955.** A remark on the existence of finite graphs (Czech). *Casopis Pest. Mat.*, 80, 477-480.
- Ivanyi, A., Lucz, L., Gombos, G., Matuszka, T. 2013.** Parallel Enumeration of Degree Sequences of Simple Graphs II. *Acta Univ. Sapientiae, Informatica* 5 (2), 245-270.

- Kim, H., Toroczkai, Z., Miklos, I., Erdős, P. L., Szekely, L. A. 2009.** On Realizing all Simple Graphs with a Given Degree Sequence. *J. Phys. A: Math. Theor.* 42, 1-6.
- Miller, J. W. 2013.** Reduced Criteria for Degree Sequences, *Discrete Mathematics* 313, 550-562.
- Skiena, S., 1990.** Line Graphs, Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. *Reading, MA, Addison-Wesley, 128 and 135-139.*
- Skiena, S. 1990.** Implementing Discrete Mathematics, Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. *Reading, MA, Addison-Wesley, 210.*
- Thulasiraman, K., Swamy, M. N. S. 1992.** Graphs: Theory and Algorithms. *John Wiley and Sons, NY.*
- Tripathi, A., Venugopalan, S., West, D. B. 2010.** A short constructive proof of the Erdős-Gallai characterization of graphic lists, *Discrete Math.* 310, 843-844.
- Tripathi, A., Tyagi, H. 2008.** A Simple Criterion on Degree Sequences of Graphs, *Discrete Applied Mathematics* 156, 3513-3517.
- Trudeau, R. J. 1993.** Introduction to Graph Theory. *Dover, NY.*
- Tutte, W. T. 1998.** Graph Theory as I have Known It. *Oxford Science Publications, Oxford.*
- Tyshkevich, R. I., Mel'nikov, O. I., Kotov, V. M. 1981.** On Graphs and Degree Sequences: Canonical Decomposition, *Kibernetika* 6, 5-8.
- Tyshkevich, R. I., Chernyak, A. A., Chernyak, Zh. A. 1987.** Graphs and Degree Sequences I, *Cybernetics* 23 (6), 734-745.
- Vasudev, C. 2006.** Graph Theory with Applications. *New Age International Publishers, India.*
- Vasudev, C. 2007.** Combinatorics and Graph Theory. *New Age International Publishers, India.*
- Wallis, W. D. 2007.** A Beginner's Guide to Graph Theory. *Birkhauser, Boston.*
- West, D. B. 2001.** Introduction to Graph Theory. *Pearson, India.*
- Wilson, R. J. 1998.** Introduction to Graph Theory. *Addison Wesley, Malaysia.*
- Wilson, R. J., Watkins, J. J. 1990.** Graphs, An Introductory Approach. *John Wiley and Sons, NY.*
- Zverovich, I. E., Zverovich, V. E. 1992.** Contributions to the Theory of Graphic Sequences, *Discrete Mathematics* 105, 293-303.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Uğur ANA
Doğum Yeri ve Tarihi : TOKAT 17/11/1988
Yabancı Dili : İngilizce
Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Şişli Lisesi, 2006
Lisans : Uludağ Üniversitesi,
Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, 2011
Bütünleştirilmiş Doktora : Bursa Uludağ Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, 2020
İletişim (e-posta) : ugurana2@gmail.com.tr

Yayımları :
Delen, S., Togan, M., Yurttas, A., Ana, U., Cangul, I. N. 2020. The Effect of Edge and Vertex Deletion on Omega Invariant, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 14 (3), 685-696

Celik, F., Demirci, M., Delen, S., Ana, U., Cangul, I. N. 2021. Characteristic Polynomials of Subdivision Graphs, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 31 (1), 21-31

Cangul, I. N., Delen, S., Yurttas, A., Ana, U. 2016. Degree sequences of several graph classes, *The 29th International Conference of the Jangjeon Mathematical Society on Number Theory, Special Functions and Its Applications*, 8-10.08.2016, Pondicherry-India

Demirci, M., Ana, U., Cangul, I. N. 2020. Properties of Characteristic Polynomials of Oriented Graphs, *New Trends in Applied Analysis and Computational Mathematics, Proceedings of the International Conference on Advances in Mathematics and Computing (ICAMC-2020), Advances in Intelligent Systems and Computing*, 1356, Edtrs. S. K. Paikray, H. Dutta, J. N. Mordeson, Springer Singapore, 59-66