

**T. C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KANAL YÜZEYLERİ

SERCAN ŞAHİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

BURSA 2008

**T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KANAL YÜZEYLERİ

SERCAN ŞAHİN

YÜKSEKLİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2008

Bu Tez tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr. Kadri ARSLAN
(Danışman)**

Prof. Dr. Rıdvan EZENTAŞ

Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

ÖZET

Bu çalışmada R^3 deki regle tipinde yüzeylerin bir karakterizasyonu verilmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde çalışmanın ilerideki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde regle yüzeyleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde dairesel yüzeyler ele alınmıştır. Bunlar devirli (cyclic) yüzeyler, dönel yüzeyler, süpürme (sweep) yüzeyleri, kanal yüzeyleri ve Roller-Coaster yüzeyleri olarak olarak sınıflandırılabilir.

Beşinci bölümde Darboux rektifiyen yüzeyleri incelenmiştir.

Altıncı bölümde Kalıplama (moulding) yüzeyleri ele alınmıştır

ABSTRACT

In this study a characterization of ruled type surfaces in \mathbb{R}^3 is given.

This thesis has six parts.

The first part is entry.

In the second part the definitions and the concept used in the following parts are given.

In the third part ruled surfaces are examined.

In the fourth part circular surfaces which can be classified as cyclic surfaces, surfaces of revolution, sweep surfaces, canal surfaces and Roller-Coaster surfaces.

In the fifth part Darboux rectifying surfaces are examined.

In the sixth part Moulding surfaces are examined

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
3. REGLE TİPİNDE YÜZEYLER ...	4
4. DAİRESEL YÜZEYLER.....	7
4.1 Giriş.....	7
4.2. Devirli (Cyclic) Yüzeyler	7
4. 2.1. Dönel Yüzeyler	7
4.2.2. Süpürme Yüzeyleri.....	9
4.2.3. Kanal Yüzeyleri.....	13
4.3. Roller - Coaster Yüzeyleri.....	17
5. DARBOUX REKTİFİYEN YÜZEYLERİ ...	19
6. KALIPLAMA YÜZEYLERİ.....	21
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	22
TEŞEKKÜR.....	23
ÖZGEÇMİŞ.....	24

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3. 1 Helikoid yüzeyi.....	6
Şekil 3. 2 Semer yüzeyi.....	6
Şekil 4. 1 Torusun dönel yüzeyi.....	9
Şekil 4. 2 Karakteristik daire ile kanal yüzeyinin şeması.....	14
Şekil 4. 3 Singüler kanal yüzeyi	15
Şekil 4. 4 Çember üzerinde kanal yüzeyi.....	16
Şekil 4. 5 Kürelerin zarfı olarak tüp yüzeyi.....	17
Şekil 4. 6 Tor yüzeyi bir tüp yüzeyidir.....	17
Şekil 5. 1 Helisin DR-yüzeyi.....	20
Şekil 6. 1 Birim çemberin kalıplama yüzeyi.....	21

1.GİRİŞ

Bu tezde regle tipindeki yüzeylerin bir karakterizasyonu ele alınmıştır.

Regle tipinde yüzeyler bir uzay eğrisi ve bu eğrinin Frenet elemanları ile oluşan yüzey tipleridir. Bunlar devirli yüzeyler (dönel yüzeyler, süpürme yüzeyleri, kanal yüzeyleri, tüpler ve roller-coaster yüzeyleri) , darboux rektifiyen yüzeyleri ve kalıplama (moulding) yüzeyleri ve klasik regle yüzeyleri olarak sınıflandırılabilirler.

Regle tipindeki yüzeyler, şekillerin yeniden yapılandırılmasında ve robotikte kullanılmaktadır. Ayrıca kanal yüzeyleri uzun ve ince nesnelerin, insan iç organlarının yüzey modellemesinde CAD/CAM ve grafiklerde oldukça sık kullanılmaktadır.

Regle tipinde yüzeyler eğriler ve onların Frenet elemanlarıyla elde edildiğinden inşası kolay bir yüzey çeşididir. Bununla beraber modellemesi oldukça önemli yer işgal eder.

2. TEMEL KAVRAMLAR

$U \subset E^2$ açık kümesi için $X:U \rightarrow E^3$ olmak üzere

$$X(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$$

biçiminde verilen türevlenebilir dönüşüme E^3 te bir yama (lokal yüzey) adı verilir.

X dönüşümünün Jakobiyen matrisi

$$J(X) = \begin{bmatrix} X_u(u,v) \\ X_v(u,v) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$\forall (u,v) \in U$ için $\text{rank}(J(x)) = 2$ ise X dönüşümüne regular yama adı verilir.

E^3 te bir local yüzey X yaması ile verilsin. X in birim normal vektörü

$$U = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

ile hesaplanır.

E^3 te bir X yamasının Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{G\ell - En - 2Fm}{2(EG - F^2)}$$

ile hesaplanır. Burada

$$E = \langle X_u, X_u \rangle$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle$$

$$\ell = \langle X_{uu}, U \rangle$$

$$m = \langle X_{uv}, U \rangle$$

$$n = \langle X_{vv}, U \rangle$$

dir (Gray,1993)

E^3 de $x(u,v) = (a, b, c)$ yaması ile verilen lokal yüzeyin Gauss ve Ortalama eğrilikleri ve asli eğriliklerinin hesabı aşağıda Maple programı ile hesaplanır.

```
> xu1:=diff(a,u): xu2:=diff(b,u): xu3:=diff(c,u):
> xv1:=diff(a,v): xv2:=diff(b,v): xv3:=diff(c,v):
> E:=simplify(xu1*xu1+xu2*xu2+xu3*xu3):
> F:=simplify(xu1*xv1+xu2*xv2+xu3*xv3):
> G:=simplify(xv1*xv1+xv2*xv2+xv3*xv3):
> n1:=simplify(xu2*xv3-xv2*xu3): n2:=simplify(-(xu1*xv3-
xv1*xu3)): n3:=simplify(xu1*xv2-xv1*xu2):
> W:=sqrt(n1^2+n2^2+n3^2):
> xuu1:=diff(xu1,u): xuu2:=diff(xu2,u): xuu3:=diff(xu3,u):
> xuv1:=diff(xu1,v): xuv2:=diff(xu2,v): xuv3:=diff(xu3,v):
> xv1:=diff(xv1,v): xv2:=diff(xv2,v): xv3:=diff(xv3,v):
> e:=simplify(xuu1*n1+xuu2*n2+xuu3*n3)/W:
> f:=simplify(xuv1*n1+xuv2*n2+xuv3*n3)/W:
> g:=simplify(xv1*n1+xv2*n2+xv3*n3)/W:
> K:=simplify((e*g-f^2)/(E*G-F^2));
> H:=simplify((e*G+E*g-2*F*f)/2*(E*G-F^2));
```

3. REGLE YÜZEYLERİ

Bu bölümde regle yüzeyleri ele alınacaktır.

Tanım 3.1 : Regle yüzeyi $S \subset E^3$ parametrik olarak $F: I \times R \rightarrow E^3$,

$$F(t, u) : F_{(\gamma, \delta)}(t, u) = \gamma(t) + u\delta(t) \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\delta: I \rightarrow S^2 = \{x \in E^3 : \|x\| = 1\}$ dır. γ taban eğrisi, δ ise direktör eğrisi ve $u \rightarrow \gamma(t) + u\delta(t)$ düz çizgileri ise döngüler adını alır (Gray, 1993).

Uyarı 3.1:

1) $F_{(\gamma, \delta)}$ regle yüzeyinde δ sabit ise $F(t, u) = \gamma(t) + u\delta$ regle yüzeyi bir silindir olur.

Bu durumda δ' sıfır değilse regle yüzeyi silindirik değildir.

2) $F_{(\gamma, \delta)}$ regle yüzeyinde γ sabit ise $F(t, u) = p + u\delta(t)$ regle yüzeyi bir koni olur.

Şimdi, bazı örnekler verelim.

Örnek 3.1: (Helikoid)

$$X(u, v) = (0, 0, bv) + u(\cos v, \sin v, 0) \quad (3.2)$$

parametrizasyonu ile verilen helikoid yüzeyi bir regle yüzeyidir. Bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri temel kavramlar bölümünde verilen Maple programı yardımıyla hesaplandığında

$$K = -\frac{4}{(4 + u^2)^2}$$

$$H = 0$$

elde edilir.

Ayrıca aşağıdaki komut yardımıyla helikoid yüzeyinin grafiği çizdirilir(Şekil 3.1)

```
> plot3d([u*cos(v), u*sin(v), 2*v], u=-Pi..Pi, v=-Pi..Pi);
```

Örnek 3.2: (Semer Yüzeyi)

$$\begin{aligned} X(u, v) &= (u, v, uv) \\ &= (u, 0, 0) + v(0, 1, u) \\ &= (0, v, 0) + u(1, 0, v) \end{aligned} \quad (3.3)$$

yaması ile verilen yüzey semer yüzeyi olarak adlandırılır. Görüldüğü gibi semer yüzeyi çift regledir. Bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğrilikleri temel kavramlar bölümünde verilen Maple programı yardımıyla hesaplandığında

$$K = - \frac{1}{(v^2 + u^2 + 1)^2},$$

ve

$$H = - \frac{uv}{(v^2 + u^2 + 1)^{(3/2)},}$$

elde edilir.

Ayrıca aşağıdaki komut yardımıyla semer yüzeyinin grafiği çizdirilir(Şekil 3.2).

➤ `plot3d([u, v, u*v], u=-2*Pi..2*Pi, v=-2*Pi..2*Pi);`

Örnek 3.3: (Düz Regle Yüzeyi)

Gauss eğriliği sıfıra eşit olan yüzeylere düz (flat) yüzeyler denir. Koni ve silindir düz regle yüzeyleridir.

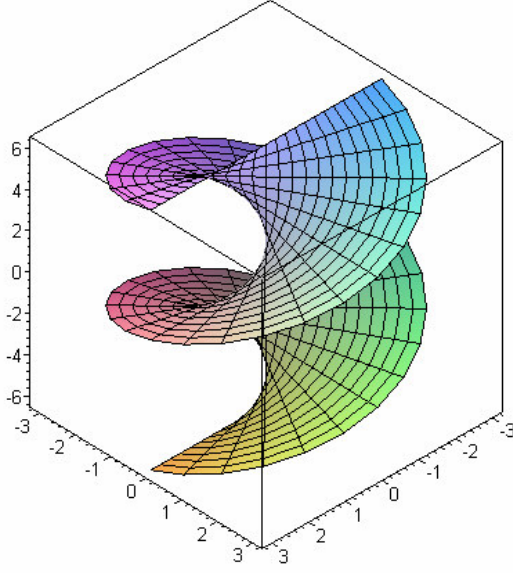
Örnek 3.4: (Tanjant Yüzeyi)

Eğer $\beta \subset E^3$ eğrisi $\kappa > 0$ olmak üzere birim hızlı bir eğri ise, $v > 0$ olmak üzere,

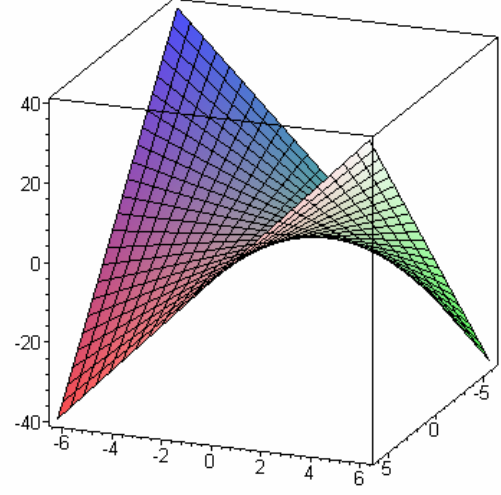
$$X(u, v) = \beta(u) + vT(u)$$

regle yüzeyine β nın tanjant yüzeyi denir. Burada $T(u)$, β eğrisinin teğeti ve κ ise eğriliğidir.

Bu yüzey aynı zamanda düzdür.



Şekil 3.1. Helikoid yüzeyi



Şekil 3.2. Semer Yüzeyi

4. DAİRESEL (CIRCULAR) YÜZEYLER

4.1. Giriş

Tanım 4.1.1: E^3 de

$$X(t, \theta) = \gamma(t) + r(t) (\cos\theta a_1(t) + \sin \theta a_2(t)) \quad (4.1)$$

yaması ile verilen yüzeylere dairesel (circular) yüzeyler denir.

Burada $\gamma, a_1, a_2: I \rightarrow IE^3$ ve $r: I \rightarrow R > 0, \forall t \in I$

$$\langle a_1, a_1 \rangle = \langle a_2, a_2 \rangle = 1, \langle a_1, a_2 \rangle = 0.$$

dır. γ taban eğrisi ve a_1, a_2 üreteç vektörleridir [Izumiya, Saji & Takeuchi, 2005].

Eğer $r(t)$ sabit ise dairesel yüzey tüp adını alır.

Tanım 4.1.2: Eğer γ eğrisi ve a_1, a_2 vektörleri

$$\langle \gamma'(t), a_1(t) \rangle \neq 0$$

$$\langle \gamma'(t), a_2(t) \rangle \neq 0.$$

ifadelerini sağlarsa, $X(t, \theta)$ dairesel yüzeyi $t \in I$ noktasında kanal değildir denir.

$X(t, \theta)$ dairesel yüzeyi herhangi bir $t \in I$ noktasında kanal değil ise $X(t, \theta)$ de kanal değildir.

4.2 Devirli(Cyclic) Yüzeyler

Tanım 4.2.1: E^3 de

$$X(s, \theta) = \gamma(s) + r(s) (\cos\theta N(s) + \sin \theta B(s)) \quad (4.2)$$

yaması ile verilen yüzeylere devirli (cyclic) yüzeyler denir [Pratt, 1990]. Burada N ve B γ eğrisinin normal ve binormalidir.

4.2.1 Dönel Yüzeyler

Tanım 4.2.1.1: E^3 de

$$X(u, v) = (g(u), h(u) \cos v, h(u) \sin v) , \quad (4.3)$$

yaması ile verilen yüzeylere dönel yüzeyler denir (O'Neill, 1966). Bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri temel kavramlar bölümünde verilen Maple programı yardımıyla hesaplandığında

$$K = \frac{-g'(g'h'' - h'g'')}{h((g')^2 + (h')^2)^2},$$

$$H = \frac{h(g'h'' - h'g'') + g'((g')^2 + (h')^2)}{h((g')^2 + (h')^2)^{3/2}},$$

elde edilir.

Örnek 4.2.1.1: (Tor Yüzeyi): (4.3) dönel yüzey denkleminde

$$g(u) = r \sin u$$

$$h(u) = R + r \cos u$$

ve dönme eksenini z eksenine almak alındığında tor yüzeyi oluşur (O'Neill, 1966). Bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri temel kavramlar bölümünde verilen Maple programı yardımıyla hesaplandığında $r = 1$ ve $R = 3$ için

$$K = -\frac{\cos(u)}{3 + \cos(u)},$$

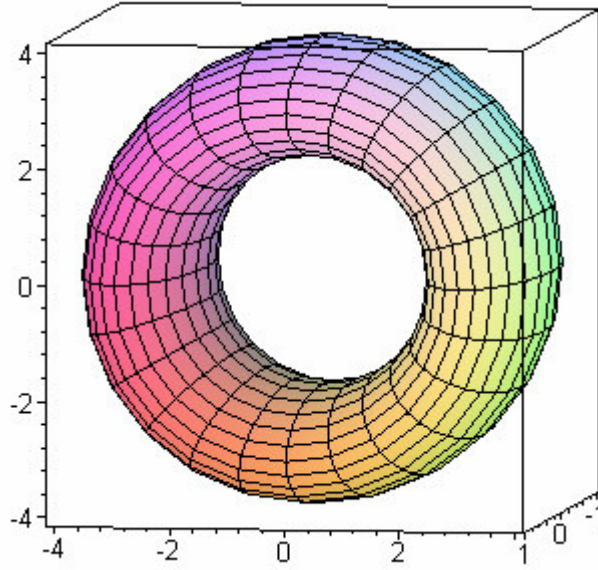
$$H = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(3 + \cos(u))(2 \cos(u)^4 + 21 \cos(u)^3 + 81 \cos(u)^2 + 135 \cos(u) + 81)$$

elde edilir.

Ayrıca aşağıdaki komut yardımıyla torusun dönel yüzeyinin grafiği çizdirilir.

(Şekil 4.1)

```
plot3d([sinu, (3+cos(u))*cos(v), (3+cos(u))*sin(v)], u=-
Pi..Pi, v=-Pi..Pi);
```



Şekil 4.1. Torusun Dönel Yüzeyi

4.2.2 Süpürme(Sweep) Yüzeyleri

Tanım 4.2.2.1 E^3 de

$$X(u, v) = \gamma(u) + f(u, v)N(u) + g(u, v)B(u), \quad (4.4)$$

yaması ile verilen yüzeye birim hızlı uzay eğrisi $\gamma(u)$ nın süpürme yüzeyi adı verilir [Pottman ve Hoffer]. Burada $f(u, v)$ ve $g(u, v)$ türevlenebilir fonksiyonlardır. Yukarıdaki denklemde

$$f(u, v) = c_1(u)v, \quad g(u, v) = c_2(u)v \quad (4.5)$$

alınırsa;

$$X_u = \alpha' + c_1'v.N + c_1v.N' + c_2'v.B + c_2v.B'$$

$$X_u = \alpha' + c_1'v.N + c_1v.(-k_1T + k_2B) + c_2'v.B + c_2v.(-k_2N)$$

$$X_u = (1 - c_1k_1v).T + (c_1vk_2 + c_2'v).B + (c_1'v - c_2k_2v).N$$

$$X_u = (1 - c_1k_1v).T + v(c_1' - c_2k_2).N + v(c_1k_2 + c_2').B$$

$$X_v = c_1.N + c_2.B$$

$$X_{uu} = (1 - c_1k_1v)'.T + (1 - c_1k_1v).T' + v(c_1' - c_2k_2)'.N + v(c_1' - c_2k_2).N'$$

$$+ v(c_1k_2 + c_2')'.B + v(c_1k_2 + c_2').B'$$

Burada işlemleri kolaylaştırmak için

$$1 - c_1 k_1 v = A(u, v),$$

$$c'_1 - c_2 k_2 = D(u),$$

$$c_1 k_2 + c'_2 = C(u),$$

dersek,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= A'.T + A.T' + v.D'.N + v.D.N' + v.C'.B + v.C.B' \\ &= A'.T + A.(k_1 N) + v.D'.N + v.D.(-k_1.T + k_2.B) + v.C'.B + v.C.(-k_2 N) \end{aligned}$$

$$X_{uu} = (A' - vDk_1).T + (Ak_1 + vD' - vk_2C).N + (vDk_2 + vC').B$$

$$X_{uv} = -c_1 k_1 T + DN + CB$$

$$X_{vv} = 0$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle$$

$$E = (1 - c_1 k_1 v)^2 + v^2 (c'_1 - c_2 k_2)^2 + v^2 (c_1 k_2 + c'_2)^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle$$

$$F = v c_1 (c'_1 - c_2 k_2) + v c_2 (c_1 k_2 + c'_2)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle$$

$$G = c_1^2 + c_2^2$$

$$X_u \times X_v = v(c_2 D - c_1 C).T - A c_2 N + A c_1 B$$

$$\|X_u \times X_v\| = v^2 (c_2 D - c_1 C)^2 + A^2 c_2^2 + A^2 c_1^2$$

işlemleri kolaylaştırmak için,

$$P(u) = c_2 D - c_1 C \quad \text{ve} \quad G(u) = c_1^2 + c_2^2$$

alınırsa ,

$$\|X_u \times X_v\| = v^2 P^2 + A^2 G$$

$$U = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{vPT - c_2 AN + c_1 AB}{v^2 P^2 + A^2 G}$$

$$\ell = \langle X_{uu}, U \rangle$$

$$m = \langle X_{uv}, U \rangle$$

$$n = \langle X_{vv}, U \rangle$$

$$\ell = \frac{(A' - vDk_1)vP - (Ak_1 + vD' - vk_2C)c_2A + (vDk_2 + vC')c_1A}{v^2P^2 + A^2G}$$

$$m = \frac{-c_1k_1vP - c_2AD + c_1AC}{v^2P^2 + A^2G}$$

$$n = 0$$

dir. Buradan Gauss eğriliği K hesaplanırsa;

$$K = \frac{\ell n - m^2}{EG - F^2},$$

$$K = \frac{P^2}{(v^2P^2 + A^2G)^3},$$

elde edilir.

Yüzeyin ortalama eğriliği H hesaplanırsa;

$$H = \frac{G\ell - En - 2Fm}{2(EG - F^2)},$$

$$H = \frac{\frac{G(vDk_2 + vC')c_1A}{v^2P^2 + A^2G} - 2(vc_1D + vc_2C)(-c_1k_1vP - c_2AD + c_1AC)}{2(v^2P^2 + A^2G)},$$

dır.

Böylece aşağıdaki sonuç elde ederiz.

Önerme 4.2.2.1: E^3 de

$$X(u, v) = \alpha(u) + c_1(u)vN(u) + c_2(u)vB(u), \quad (4.6)$$

yaması ile verilen sweep yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \frac{P^2}{(v^2P^2 + A^2G)^3}, \quad (4.7)$$

dir. Burada;

$$P = c_2c_1' - c_1c_2' - k_2(c_1^2 + c_2^2) \quad (4.8)$$

$$A = 1 - c_1k_1v$$

$$G = c_1^2 + c_2^2$$

dır.

Bu önermeden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.2.2.1: (4.4) ve (4.5) denklemleriyle verilen süpürme yüzeyi regüler bir yüzeydir.

Sonuç 4.2.2.2: (4.4) ve (4.5) denklemleriyle verilen süpürme yüzeyi düz (flat) ise

$$c_2 c_1' - c_1 c_2' - k_2 (c_1^2 + c_2^2) = 0 \quad (4.9)$$

dır.

Önerme 4.2.2.2: E^3 de

$$X(u, v) = \alpha(u) + c_1(u)vN(u) + c_2(u)vB(u) \quad (4.10)$$

yaması ile verilen süpürme yüzeyinde, k_1 ve k_2 Frenet eğrilikleri olmak üzere

$$c_1 = \frac{1}{k_1}, \quad (4.11)$$

ve

$$c_2 = \frac{c_1'}{k_2}, \quad (4.12)$$

alınsın. Bu takdirde yüzeyin düz olması için

$$c_1 c_1' + c_2 c_2' = 0,$$

olmalıdır.

İspat:

Yüzeyin düz olması için Gauss eğriliği $K=0$ olmalıdır.

O halde (4.7) denkleminde $P=0$ olmalıdır. Böylece (4.8) denkleminde

$$P=0 \Rightarrow c_2 c_1' - c_1 c_2' - k_2 (c_1^2 + c_2^2) = 0,$$

dir. Bununla birlikte

$$c_1' = k_2 c_2,$$

$$\Rightarrow c_2^2 k_2 - c_1 c_2' - k_2 c_1^2 - k_2 c_2^2 = 0,$$

$$\Rightarrow -c_1 c_2' - k_2 c_1^2 = 0,$$

$$\Rightarrow c_2' = -k_2 c_1,$$

olup hipotez gereği

$$k_2 = \frac{c_1'}{c_2},$$

ve

$$k_2 = \frac{-c_2'}{c_1},$$

denklemlerinden

$$c_1 c_1' + c_2 c_2' = 0$$

elde edilir. Buradan $c_1^2 + c_2^2 = G = \text{sbt.}$

dir.

4.2.3. Kanal Yüzeyleri

E^3 de $\gamma(t)$ spin eğrisiyle elde edilen $K(t, \theta)$ kanal yüzeyi, $r(t)$ ile yarıçap fonksiyonu ve γ ile merkezi belirlenen kürelerin birleşimidir. Eğer $r(t)$ sabit ise **boru yüzeyi (tüp)** elde edilir. Bunlar şekillerin yeniden yapılandırılmasında veya robotların hareket çizgilerinin planlamasında kullanılır.

Kanal yüzeyleri uzun ince nesnelere, insan iç organlarını göstermekte, yüzey modellemesinde, CG/CAD, CAD ve grafiklerde fayda sağlar.([Günter, 1994], [Johnstone, 1993]).

Kanal yüzeyleri doğal kuadrikleri (silindir, koni ve küre), dönel kuadrikleri, torusları, tüpleri ve Dupin cyclides. Kanal yüzeyleri için geometrik hesaplamalar algoritmaları son zamanlarda oldukça sık geliştirilmiştir.[Blaga, 2005] ve [Garcia, Libre ve Sotomayor, 2006].

Kanal yüzeyi değişken yarıçaplı hareketli kürelerin birleşimidir. $\gamma(t)$ merkezi taşıyan eğri ve $r(t)$ kanal yüzeyini belirten kürenin yarıçap fonksiyonudur.

Kanal yüzeyinin regular olması için $\gamma(t)$ eğrisinin C^2 -sürekliliğinin olduğunu ve

$$r(t) > 0 \text{ and } \|\gamma'(t)\|^2 > r'(t)^2, \quad (4.13)$$

durumlarının $\forall t$ için sağlandığını kabul ediyoruz.

Kanal yüzeyi üzerindeki her bir $\mathbf{x} = (x, y, z)$ noktası için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

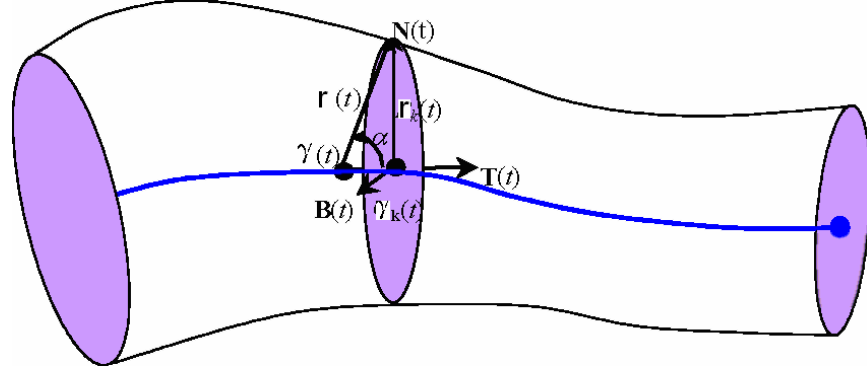
$$\|\mathbf{x} - \gamma(x)\|^2 - r(x)^2 = 0, \quad (4.14)$$

$$\langle \mathbf{x} - \gamma(x), \gamma'(x) + r(x).r'(x) \rangle = 0, \quad (4.15)$$

Böylece $\alpha(t)$ $\mathbf{x} - \gamma(t)$ ile $\gamma(t)$ arasındaki açı

$$\cos \alpha(t) = \frac{\langle x - \gamma(t), \gamma'(t) \rangle}{\|x - \gamma(t)\| \|\gamma'(t)\|} = \frac{r(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad (4.16)$$

dir. (bkz. Şekil 4.2)



Şekil 4.2. Karakteristik daire ile kanal yüzeyinin şeması

Böylece (4.14) denklemlle verilen hareketli küre kanal yüzeyi ile karakteristk çember adı verilen çember ile kesişir. Kanal yüzeyini karakteristk çemberlerin kümesi olarak düşünürsek, kanal yüzeyini $K(t, \theta)$ ile gösterebiliriz. Burada $K(t_0, \theta)$, $\gamma(t_0)$ merkezli ve $r(t_0)$ yarıçaplı kürenin içinde bir çemberdir.

(4.16) denklemi ile karakteristk çemberin $\gamma_k(t)$ merkez noktası, $r_k(t)$ yarıçapı ve $N_k(t)$ ana düzlem normali şöyle tanımlanır :

$$\gamma_k(t) = \gamma(t) + r(t) \cos \alpha(t) \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad (4.17)$$

$$= \gamma(t) - r(t) r'(t) \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^2}, \quad (4.18)$$

$$r_k(t) = r(t) \sin \alpha(t) = r(t) \frac{\sqrt{\gamma'(t)^2 - r'(t)^2}}{\|\gamma'(t)\|}, \quad (4.19)$$

$$N_k(t) = \gamma'(t), \quad (4.20)$$

Böylelikle kanal yüzeyinin parametric gösterimi aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$K(t, \theta) = \gamma_k(t) + r_k(t) (\cos \theta N(t) + \sin \theta B(t)) \quad (4.21)$$

burada

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}, \quad (4.22)$$

ve

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{N}(t) \times \gamma'(t)}{\|\mathbf{N}(t) \times \gamma'(t)\|}, \quad (4.23)$$

vektörleri karakteristik çemberin yönlendirmesini belirleyen ortogonal birim vektörleridir.[Kim and Lee 2001].

(4.18)-(4.23) denklemleri kullanılarak bazı önermeler elde ettik.

Önerme 4.2.3.1: Eğer $\gamma(s)$ spim eğrisi birim hızlı parametrelendirilmişse, kanal yüzeyinin parametrik gösterimi

$$\mathbf{K}(s, \theta) = \gamma(s) + r(s)\mathbf{N}(s, \theta), \quad (4.24)$$

ile verilir. Burada

$$\mathbf{N}(s, \theta) = \cos\alpha(s)\mathbf{T}(s) + \sin\alpha(s) (\cos\theta\mathbf{N}(s) + \sin\theta\mathbf{B}(s)), \quad (4.25)$$

kanal yüzeyin birim normal vektörüdür. Ayrıca

$$\cos\alpha(s) = -r'(s), \quad (4.26)$$

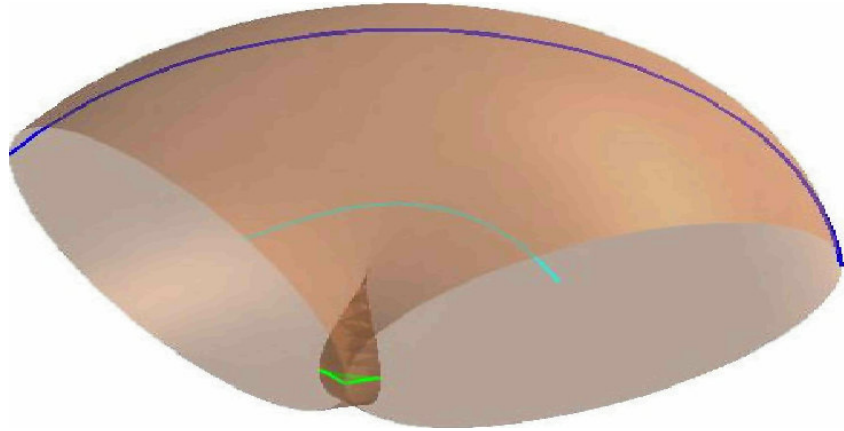
$$\sin\alpha(s) = \sqrt{1 - r'(s)^2} \quad (4.26a)$$

dir. Bununla birlikte $\mathbf{K}(t, \theta)$ yüzeyi singülerdir ancak ve ancak $\mathbf{K}_t(t_0, \theta_0) \times \mathbf{K}_\theta(t_0, \theta_0) = 0$.

$\mathbf{K}_t(t_0, \theta_0) \times \mathbf{K}_\theta(t_0, \theta_0) = 0$

olduğunda, (t_0, θ_0) noktasına $\mathbf{K}(t, \theta)$ yüzeyini singular noktası adı verilir. Singülerite kendi kendini kesme olarak algılanacaktır.

Kendi kendini kesmeyen bir kanal yüzeyi regülerdir.



Şekil 4.3. Singüler bir kanal yüzeyi

$\gamma(t)$ spin eğrisinin düzlemsel olması durumunda;

$$T(t) = (x'(t), y'(t), 0), \quad B(t) = (0, 0, 1), \quad (4.27)$$

$$N(t) = (-y'(t), x'(t), 0) / \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}, \quad (4.28)$$

dır.

Örnek 4.2.3.1: (Çember üzerinde kanal yüzeyi) Yarıçapı

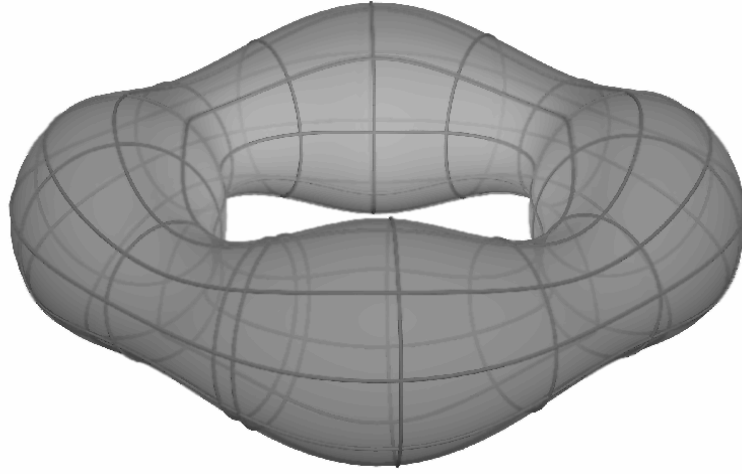
$$r(t) = 4 + \sin(2t), \quad (4.29)$$

ve merkezleri

$$\gamma(t) = (10\cos t, 10\sin t, 0), \quad (4.30)$$

çemberleri üzerinde olan kürelerin oluşturduğu kanal yüzeyi.(Şekil 4.4)

(bkz, [Blaga, 2005]).

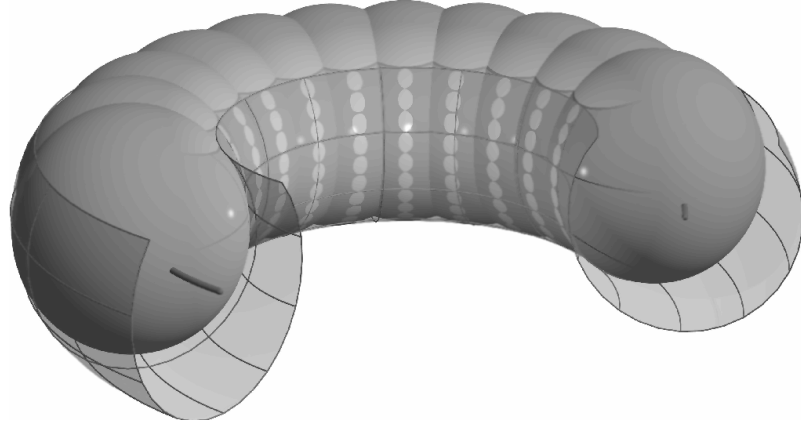


Şekil 4.4 Çember üzerinde kanal yüzeyi

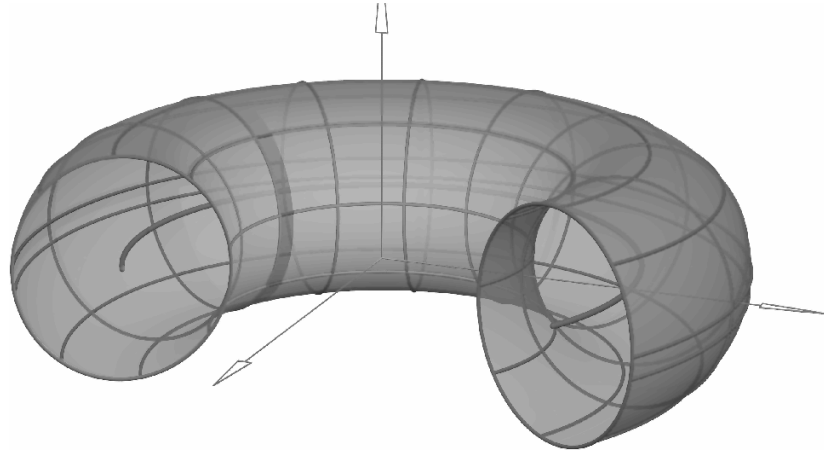
Eğer $r(t)$ sabit ise **boru yüzeyi (tüp)** elde edilir ve bu yüzeyler şekil yeniden yapılandırmasında ve robotların hareket çizgilerinin planlamasında kullanılır.

Eğer $\gamma(t)$ düz bir doğru ise r yarıçaplı tüp yüzeyi elde edilir ve buda r yarıçaplı dairesel silindirdir.

Eğer $\gamma(t)$ bir çember ise yüzeyi bir torus olur. [Blaga, 2005].



Şekil 4.5 Kürelerin zarfı olarak tüp yüzeyi



Şekil 4.6 Tor yüzeyi bir tüp yüzeyidir.

4.3. Roller-Coaster Yüzeyleri

Tanım 4.3.1 E^3 de

$$X(s, \theta) = \gamma(s) + r(\cos\theta T(s) + \sin\theta(\cos\varphi(s)N(s) + \sin\varphi(s)B(s))) \quad (4.31)$$

yaması ile verilen yüzeye birim hızlı $\gamma(s)$ eğrisinin Roller-Coaster yüzeyi adı verilir.[Izumiya, Saji & Takeuchi, 2005], burada $-\varphi(s)$, $\gamma(s)$ eğrisinin torsiyonunun ilkel fonksiyonudur. Burada

$$\varphi(s) = -\int \tau(s) ds \quad (4.32)$$

dir.

Yüzeyin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H aşağıdaki gibidir.

$$K = \frac{\kappa \sin \psi (r^2 \kappa^3 \sin^3 \psi \cos \theta + \kappa (\sin \psi \cos \theta - r\tau \cos \psi) + r\kappa' \sin \psi)}{(1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \psi)^2 \cos \theta} \quad (4.33)$$

$$H = - \frac{2r^2 \kappa^3 \sin^3 \psi \cos \theta + \kappa (2 \sin \psi \cos \theta - r\tau \cos \psi) + r\kappa' \sin \psi}{2(1 + r^2 \kappa^2 \sin^2 \psi)^{\frac{3}{2}} \cdot \cos \theta} \quad (4.34)$$

[Izumiya, Takeuchi, 2000] da yazarlar sıradaki sonuçları ispatlamışlardır.

Teorem 4.3.1: $X(s, \theta)$ dairesel bir yüzey olsun öyleki bütün meydana getiren çemberleri, umbilik veya singüler noktalar dışında, eğrilik çizgileri olsun. O halde $X(s, \theta)$ aşağıdaki yüzeylerin bir parçasıdır;

- 1) bir küre ,
- 2) bir kanal yüzeyi, veya
- 3) (5.1) ile verilen bir Roller-Coaster yüzeyi

Örnek 4.3.1: E^3 de

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.35)$$

ve

$$\Phi(t) = -\int \tau dt, \quad dt = \cos \Phi(t) + \sin \Phi(t) \quad \text{ve} \quad e(t) = \gamma'(t) \quad (4.36)$$

olmak üzere

$$R(t, \theta) = \gamma(t) + 5(\cos \theta \cdot e(t) + \sin \theta \cdot \Phi(t)) / \sqrt{3} \quad (4.37)$$

yüzeyi Roller-Coaster yüzeyidir.

5. DARBOUX REKTİFİYEN YÜZEYLERİ

Tanım 5.1: E^3 de

$$X_{(\gamma, \tilde{D})}(s, \theta) = \gamma(s) + \lambda(\theta)\tilde{D}(s) \quad (5.1)$$

yaması ile verilen regle yüzeyi $\gamma(s)$ birim hızlı eğrisinin darboux rektifiyen yüzeyi adını alır. [Izumiya & Takeuchi, 2000]. Burada $\tilde{D}(s) = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)T(s) + B(s)$ γ nın modifiye darboux vektörüdür.

[Izumiya, Takeuchi, 2000] da yazarlar aşağıdaki sonuçları ispatlamışlardır.

Teorem 5. 1: $\gamma(s)$ birim hızlı uzay eğrisi için $\kappa \neq 0$ olmakla beraber, aşağıdakiler denktir;

- 1) $X_{(\gamma, \tilde{D})}(s, \theta)$ rektifiyen genişletilebilir yüzeyi bir konik yüzeyidir.
- 2) γ konikal geodezik eğridir.

Teorem 5.2: $\gamma(s)$ birim hızlı uzay eğrisi için $\kappa \neq 0$ olmakla beraber, aşağıdakiler denktir;

- 1) $X_{(\gamma, \tilde{D})}(s, \theta)$ rektifiyen genişletilebilir yüzeyi non-singülerdir.
- 2) γ silindirik helistir.
- 3) $X_{(\gamma, \tilde{D})}(s, \theta)$ rektifiyen genişletilebilir yüzeyi silindirik yüzeydir.

Tanım 5.2: E^3 de

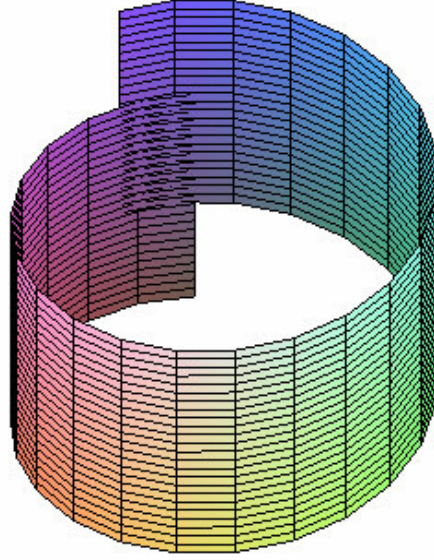
$$X_{(\gamma, D)}(s, \theta) = \gamma(s) + \lambda(\theta)D(s) \quad (5.7)$$

yaması ile verilen yüzeye $\gamma(s)$ birim hızlı eğrisinin Darboux rektifiyen genişletilebilir yüzeyine (DRD-yüzeyi) adı verilir. Burada $\gamma(s)$ reel değerli bir fonksiyon ve $D(s)$ ise γ nın (5.8) ile tanımlanan darboux vektörüdür.

$$D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s) \quad (5.8)$$

Örnek 5.1: Helisin DR-yüzeyi ($a=b=1$)

```
> a:=cos(x/sqrt(2)) :  
> b:=sin(x/sqrt(2)) :  
> c:=x/sqrt(2)+sqrt(2)*y :  
> plot3d([a,b,c], x=-Pi..2*Pi, y=-Pi..2*Pi);
```



Şekil 5.1 Helisin DR-yüzeyi

6. KALIPLAMA (MOULDING) YÜZEYLERİ

Tanım 6.1: E^3 de

$$X(s, \theta) = \gamma(s) + \theta N(s) + \theta^2 B(s) \quad (6.1)$$

yaması ile verilen yüzey $\gamma(s)$ eğrisinin Kalıplama yüzeyidir. [Pottman ve Hoffer], burada

$$\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), 0), \quad (6.2)$$

$$T(s) = \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}, \quad (6.3)$$

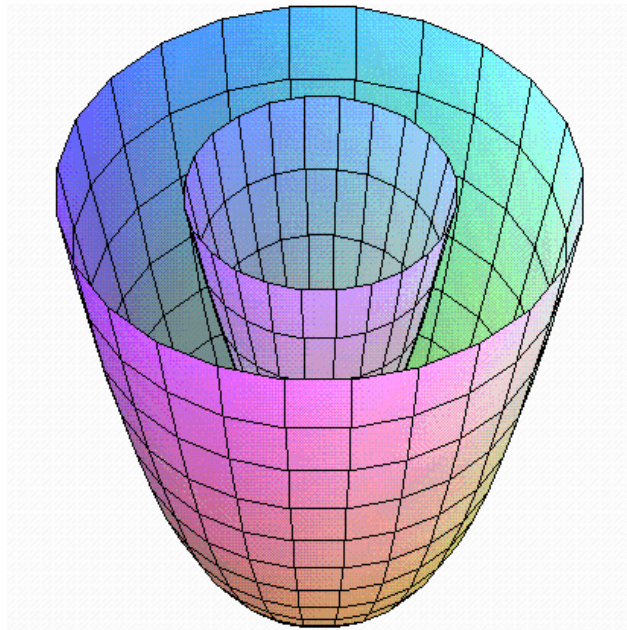
$$N(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}, \quad (6.4)$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = (0, 0, 1), \quad (6.5)$$

dır.

Örnek 6.1: (Birim çemberin kalıplama yüzeyi)

```
plot3d([cos(x)-y*cos(x), sin(x)-y*sin(x), y^2], x=-Pi..Pi,  
y=-Pi..Pi);
```



Şekil 6.1 Birim çemberin kalıplama yüzeyi

7. KAYNAKLAR

- Balage, On tubular surface in computer graphics, *studia Univ. Babeş-bolyai, Informatica*, Volume L, Number 2, 2005.
- Garcia, R., LLibre, J. and Sotomayor, J. Lines of principal curvatures on canal surfaces in \mathbb{R}^3 . *Annals of Brazilian Academy of sciences* 78(2006), 405-415.
- Gray, A. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, 1993.
- Günter, A. Canal surface versus normal ringed surface, *CAGD*, 11(1994), 475-476.
- Izumiya, S. and Takeuchi, N. Special curves and ruled surfaces, Hokkido University preprint series in Mathematics, Series # 511, January 2001.
- Izumiya, S, Saji, K. and Takeuchi, N. Circular surfaces, 2005, eprints.math.sci.hokudai.ac.jp/archive/00000984/.
- Jia, J., Joneja, J. and Tang, K. New decomposition scheme of canal surfaces for planar section computing, *Computer Aided Design & Applications* 3(2006), 349-358.
- Johnstone, A new intersection algorithm of cyclides and swept surface using circle decomposition *CAGD* 11(1993), 1-24.
- Kim, K.J. and Lee I.K., Computing isotopes of surface of revolution and canal surfaces, *Computer Aided Design*, 2001.
- Peternall, M. and Pottmann H. Computing rational parametrizations of canal surfaces, *J. symbolic computation*, 23(1997), 255-266.
- Pratt, M. J. Cyclides in computer aided geometric design, *computer aided geometric design* 7(1990), 221-242.
- Pottmann, H and Hofer, M. Geometry of the square distance function to curves and surfaces. Technical Report No. 90. January 2002 eprints, dmg.tuwien.ac.at/geom/ig*papers/tr90.pdf

ÖZGEÇMİŞ:

1981 yılında Bursa'da doğdu. İlkokul öğrenimini Bursa İstiklal İlköğretim Okulu'nda, ortaokul ve lise eğitimini ise Bursa Anadolu Lisesi'nde tamamladı.2004 yılında Ortadoğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nden matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 2005 de Uludağ Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı'nda Yüksek lisans eğitimine başladı.

TEŞEKKÜR:

Bu çalıőmayı yürüten ve her türlü destek veren ve katkı yapan sayın hocam Prof. Dr. Kadri ARSLAN'a öneri ve görüşlerinden faydalandığım sayın hocam Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN'a ve benim her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.