T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARADEĞME MANİFOLDLAR

İrem KÜPELİ ERKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2010

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARADEĞME MANİFOLDLAR

İrem KÜPELİ ERKEN

Prof.Dr. Cengizhan MURATHAN
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2010

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARADEĞME MANİFOLDLAR

İrem KÜPELİ ERKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez ..../...../2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Cengizhan MURATHAN .... ………..………
Danışman

ÖZET

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavram ve önermeler verilmiştir.

Üçüncü bölümde hemen hemen paradeğme manifoldu, hemen hemen paradeğme metrik manifoldu tanımlanıp özellikleri incelenmiştir. Bir hemen hemen paradeğme manifoldun torsiyon tensör alanı tanımlanıp, manifold üzerinde normal yapı kurulmuştur. Üstelik bir K-paradeğme manifoldu tanımlanıp, manifoldun K-paradeğme olması için bazı şartlar verilmiştir. Ayrıca para-Sasakian manifoldu tanıtılıp özellikleri incelenmiştir. Yine bu bölümde paradeğme manifoldların eğrilik özellikleri çalışılmıştır.

Dördüncü bölüm orijinal çalışmamızı oluşturmaktatır. Bu bölümde Zbigniew Olszak ın 1986 yılında yaptığı üç boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldları ile ilgili çalışmanın üç boyuttaki normal hemen hemen paradeğme metrik manifoldlardaki karşılıkları bulunmuştur. Normal hemen hemen paradeğme metrik manifoldlar ile ilgili temel önermeler verildikten sonra, manifoldun Ricci eğrilik tensörü hesaplanmıştır. Bir kompakt M manifoldu üzerinde K sabit eğriliğinin sıfırdan büyük, sıfırdan küçük veya eşit olma durumlarına göre sınıflandırma verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riemann eğrilik tensörü, hemen hemen paradeğme yapı, hemen hemen parakompleks yapı, hemen hemen paradeğme metrik manifold, paradeğme metrik manifold, K-paradeğme manifold, Einstein manifold, Killing vektör alanı, dağılım.

ABSTRACT

This study which is designed as master science thesis covers four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

Second chapter contains some well-known definitions and results which will be used in other chapters.

In the third chapter, the features of almost paracontact manifolds and almost paracontact metric manifolds were examined. The torsion tensor field of almost paracontact manifold was defined and on manifold the normal structure was constructed. Also a K-paracontact manifold was defined and some properties were given to be a K-paracontact manifold. Also para-Sasakian manifold was introduced and was given the properties. In this chapter paracontact manifolds curvature properties were also studied.

Chapter IV contains the original work. After by giving the basic lemmas about normal almost paracontact metric manifolds, Ricci curvature tensor was calculated. On a compact M manifold, the classification was given according the conditions of constant curvature K.

Key Words: Riemannian curvature tensor, almost paracontact structure, almost paracomplex structure, almost paracontact metric manifold, paracontact metric manifold, K-paracontact manifold, Einstein manifold, Killing vector field, distribution.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	-Reel sayılar cümlesi
ϕ	-Simetrik iki-lineer form
q	-İndeks
$\otimes$	-Tensör çarpımı
$\\| , \\|$	-Norm
$\langle , \rangle$	-Skalar çarpım
T_pM	-p noktasındaki teğet uzay
M	-Manifold
g	-Metrik tensör
C^∞	-Diferensiyellenebilme
∇	-Afin konneksiyon
$C^\infty(M,\mathbb{R})$	-M den $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$\chi(M)$	-M nin teğet vektör alanlarının uzayı
π	-Dik izdüşüm
$[,]$	-Lie parantez operatörü
d	-Dış türev operatörü
R	-M nin Riemann eğrilik tensörü
S	-Ricci tensörü
Q	-Ricci operatörü
D	-Dağılım
∂	-Kısmi türev
φ	-Tensör alanı
ξ	-Vektör alanı
η	-1-form
F	-Temel 2-Form
K	-Kesitsel eğrilik

τ	-Skaler eğrilik
Δ	-Laplace

1. GİRİŞ

Değme geometri bundan iki yüzyıl önce, Huygens, Hamilton ve Jacobi'nin geometrik optikler üzerindeki çalışmalarından doğmuştur ve Sophus Lie, Elie Carton ve Darboux gibi pek çok önemli matematikçi bu alanda çalışmalar yapmıştır (Etnyre 2002). Değme geometrinin köklerine, 1872 de Lie'nin değme transformasyonu diferensiyel denklem sistemlerinin çalışılmasında geometrik bir araç olarak tanımlamasıyla rastlanır. Değme geometri, pür matematiğin diğer alanlarıyla bağlantılar içerir ve mekanik, optik, termodinamik ve kontrol teorisinin uygulama alanlarında önemli bir yere sahiptir.

1970 lerin başlarında, değme geometride, topolojik metotlar önemli bir rol almaya başladı. Fakat global topolojik sonuçların alınması 1980 lerin ortalarını buldu. Bundan sonra, 3-boyutlu değme geometri ve topoloji çalışmalarının engin ve yararlı faaliyetler olduğu görüldü ve daha yüksek boyutlu değme topolojiyi anlamak için önemli adımlar atılmaya başlandı.

İlk olarak 1976 yılında Sato diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde

$$\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi \,,\ \eta(\xi) = 1 \text{ ve } D = çek\eta$$

şartını sağlayan (φ, ξ, η) hemen hemen paradeğme yapıyı tanıtmıştır (Sato 1976).

1977 yılında Adati T ve Miyazawa T, Sato tarafından tanıtılan hemen hemen paradeğme manifoldların özel durumları olarak düşünülen para-Sasakian manifoldları tanımlamışlardır (Adati ve Miyazawa 1977). Hemen hemen değme manifoldlardaki K-değme ve Sasakian yapılara benzer olarak 1977 yılında Sharfuddin ve Hussain paradeğme metrik ve para-Sasakian yapıları üzerine çalışmışlardır (Sharfuddin ve Hussain 1977). Hemen hemen paradeğme metrik manifoldların özellikleri ve paradeğme metrik manifoldlarda konformal dönüşümler Zamkovoy tarafından incelenmiştir (Zamkovoy 2009).

Bir $2n+1$-boyutlu diferensiyellenebilir M manifoldu
$\varphi\,(1,1)$ tipinde tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η da $1-$form olmak üzere

$$\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi,\ \varphi(\xi) = 0,\ \eta(\xi) = 1,\ \eta \circ \varphi = 0,\ D = Çek\eta$$

şartını sağlayan bir (φ,ξ,η) hemen hemen paradeğme yapısına sahiptir.

(φ,ξ,η) hemen hemen paradeğme yapısı ile verilen diferensiyellenebilir M manifolduna hemen hemen paradeğme manifold denir.

$M(\varphi,\xi,\eta)$ hemen hemen paradeğme manifoldu üzerinde

$$g(\varphi X,\varphi Y) = -g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y),\ g(X,\xi) = \eta(X),\ \ X,Y \in \chi(M)$$

şartını sağlayan bir g yarı-Riemann metriği vardır. g yarı-Riemann metriği ile verilen bir hemen hemen paradeğme M manifolduna bir hemen hemen paradeğme metrik manifold denir.

$M(\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen paradeğme metrik manifold olsun.

$$d\eta(X,Y) = F(X,Y)$$

şartını sağlarsa manifold paradeğme metrik manifold olarak adlandırılır.

Hemen hemen paradeğme metrik yapı normal ise manifold para-Sasakian manifold olarak adlandırılır.

Ayrıca her para-Sasakian manifold bir paradeğme metrik manifold dur.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan ve orijinallik içeren bu tezin amacı, diferensiyellenebilir manifoldlar üzerinde tanımlanan paradeğme, hemen hemen paradeğme, hemen hemen paradeğme metrik, $K-$paradeğme ve para-Sasakian yapı kavramlarını iyi bir şekilde anlamak ve anlaşılabilir hale getirmektir.

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü Giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümünde üstte bahsedilen bu kavramların daha iyi anlaşılabilmesi için temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümünde ise ilk olarak bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde paradeğme yapı kavramı tanımlanmıştır. Daha sonra ise hemen hemen paradeğme, hemen hemen paradeğme metrik, K-paradeğme yapı ve para-Sasakian kavramları tanıtılmış ve bu manifold tipleri ile ilgili teoremler, sonuçlar verilmiştir. Ayrıca paradeğme manifoldların eğriliği incelenmiştir. Dördüncü bölüm orijinal bölümdür. Bu bölümde Zbigniew Olszak ın 1986 yılında yaptığı üç boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldları ile ilgili çalışmanın üç boyuttaki normal hemen hemen paradeğme metrik manifoldlardaki karşılıkları bulunmuştur. Üç boyutlu normal hemen hemen paradeğme manifoldun Ricci tensörü hesaplanmıştır. Son olarak ise manifold üzerindeki sabit K eğriliğinin aldığı değerlere göre manifold isimlendirilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Simetrik İki-Lineer Form

Tanım 2.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

i) $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = \phi(\vec{v}, \vec{u})$

ii) $\phi(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = a\phi(\vec{u}, \vec{w}) + b\phi(\vec{v}, \vec{w})$

$\phi(\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) = a\phi(\vec{u}, \vec{v}) + b\phi(\vec{u}, \vec{w})$

özelliklerine sahip ise ϕ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir **simetrik iki-lineer form** denir (O'Neill 1983).

Ayrıca,

i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\phi(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise, ϕ simetrik iki-lineer formuna **pozitif tanımlı,**

ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\phi(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise, ϕ simetrik iki-lineer formuna **negatif tanımlı,**

iii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\phi(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise bu durumda ϕ simetrik iki-lineer formuna **yarı-pozitif tanımlı,**

iv) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\phi(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise bu durumda ϕ simetrik iki-lineer formuna **yarı-negatif tanımlı** dır denir.

Bundan başka,

a) ϕ nin **dejenere** olmaması için gerek ve yeter koşul $\phi(\vec{v},\vec{w})=0$ ve $\forall \vec{w}\in V$ için $\vec{v}=\vec{0}$ olmasıdır.

b) ϕ nin **dejenere** olması için gerek ve yeter koşul $\phi(\vec{v},\vec{w})=0$ ve $\forall \vec{w}\in V$ için $\vec{v}\neq\vec{0}$ olmasıdır.

Tanım 2.1.2: V bir vektör uzayı ve

$$\phi : V\times V\to\mathbb{R}$$

bir simetrik iki-lineer form olsun.

$$\phi\big|_W : W\times W\to\mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna ϕ simetrik iki-lineer formunun **indeksi** denir ve q ile gösterilir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.1: Bir ϕ simetrik iki-lineer formun dejenere olmaması için gerek ve yeter şart ϕ nin herhangi bir baza göre ters matrisinin mevcut olmasıdır (O'Neill, 1983).

Örnek 2.1.1:

$$g:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
$$g(v,w)=v_1w_1-v_2w_2$$

dönüşümü iki-lineer ve simetriktir. g ye karşılık gelen matrisi $g=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ dır ve regülerdir. Böylece g dejenere değildir (O'Neill 1983).

Örnek 2.1.2:

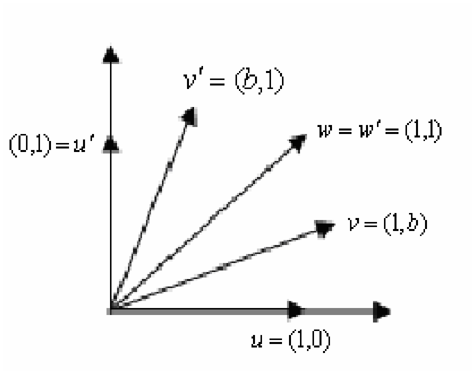
$$g:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$
$$g(v,w)=v_1w_1-v_2w_2$$

dönüşümü iki-lineer ve simetriktir. g ye karşılık gelen matrisi $g=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ dır ve regüler değildir. Böylece g dejeneredir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3: Bir V vektör uzayı üzerinde dejenere olmayan simetrik iki-lineer forma V vektör uzayı üzerinde bir **skalar çarpma** denir. V üzerindeki bir skalar çarpma ϕ ise (V,ϕ) ikilisine **skalar çarpımlı vektör uzayı** denir. ϕ skalar çarpımının indeksi q ise $0 \leq q \leq boy\,V$ dir. Ayrıca skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4: $\vec{v},\vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq \vec{0}$ ve $\vec{w} \neq \vec{0}$ iken $\left\langle \vec{v},\vec{w} \right\rangle = 0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri **diktir** denir ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ şeklinde gösterilir (O'Neill 1983).

Örnek 2.1.3: Örnek 2.1.1 deki skalar çarpımı göz önüne alalım. $\mathbb{R}^2$ de $v=(1,b), v' = (b,1), u=(1,0), u' = (0,1), w = w' = (1,1)$ vektörlerini seçelim.



Dikkat edilirse burada u' ve u, v' ile v, w ile w' birbirine dik vektörlerdir.
$v, w \in V$ ortogonal ise $v \perp w$ yazılır ve $g(v,w)=0$ denklemini sağlar (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.5: V vektör uzayının bir altuzayı W ise $W^{\perp} = \left\{ \vec{v} \in V \,\middle|\, \vec{v} \perp W \right\}$ olsun. $W^{\perp}$ altuzayına V nin **dik altuzayı** denir.

Uyarı 2.1.1: Ancak, $W^{\perp}$ altuzayına W nın dik tümleyeni diyemeyiz. Çünkü $W + W^{\perp}$ genellikle V nin tamamı değildir. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayabiliriz.

Örnek 2.1.4:

$$W = Sp\{(1,1)\} \to W^{\perp} = W$$

Teorem 2.1.2: W bir V skalar çarpım uzayının altuzayı olsun. O zaman şu özellikler vardır.

i) $boyW + boyW^{\perp} = boyV$

ii) $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$ (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.6: V üzerinde bir skalar çarpma ϕ ve W, V nin bir altuzayı olsun. Eğer W üzerinde ϕ dejenere değil ise W ya **dejenere olmayan altuzay**, dejenere ise W ya **dejenere altuzay** denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.3: V n boyutlu bir vektör uzay ve W , V nin bir altuzayı olsun.

O zaman;

$$W \text{ dejenere değildir} \Leftrightarrow V = W \oplus W^{\perp}$$

dır.

Burada $W^{\perp}$ altuzayı,

$$W^{\perp} = \left\{ y \middle| \phi(x_0, y) = 0, \forall x_0 \in W, y \in V \right\}$$

dır (O'Neill 1983).

İspat: $(\Leftarrow): V = W \oplus W^{\perp}$ ise

boy$V$ =boy$(W + W^{\perp})$ = boy$W$ +boy$W^{\perp}$ -boy$(W \cap W^{\perp})$ = boy$W$ + boy$W^{\perp}$

boy$(W \cap W^{\perp}) = 0 \Rightarrow W \cap W^{\perp} = \{0\}$ (2.1.1)

dır. Fakat;

$$W \cap W^{\perp} = \left\{ x \in W \middle| x \perp W \right\} \tag{2.1.2}$$

dır.

$x_0 \in W, \forall y \in V$ için,

$\phi(x_0, y) = 0$ ise (2.1.1) ve (2.1.2) den $x_0 = 0$ elde edilir.

Bu ise W nın dejenere olmaması demektir.

$(\Rightarrow): W$ dejenere değil ise

$x_0 \in W, \forall y \in V$ için,

$$\phi(x_0, y) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \tag{2.1.3}$$

dır.

(2.1.2) ve (2.1.3) den dolayı $W \cap W^{\perp}$=0 elde edilir.

O halde;

boy$V$ = boy($W + W^{\perp}$) =boy$W$ + boy$W^{\perp}$ -boy($W \cap W^{\perp}$) =boy$W$ + boy$W^{\perp}$

dır. Buradan;

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 2.1.7: Bir V vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma ϕ olsun. $\vec{v} \in V$ **vektörünün normu**

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\left|\phi\left(\vec{v}, \vec{v}\right)\right|}$$

olarak tanımlanır. Normu bir birim olan vektöre **birim vektör** ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine **ortonormal vektör sistemi** denir (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.4: Bir $V \neq \left\{\vec{0}\right\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill 1983).

Bundan sonra ϕ gösterimi yerine g gösterimini kullanacağız.

Teorem 2.1.5: V vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ve V üzerinde tanımlı bir skalar iç çarpım g olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ olmak üzere $\forall \vec{v} \in V$ vektörü

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \vec{v}, e_i \rangle e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.8: V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi q olmak üzere $q = 1$ ve $boyV \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir **Lorentz uzayı** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.9: V bir skalar çarpım uzayı ve W, V nin dejenere olmayan bir altuzayı olsun.

$$\pi : V \to W$$

$$\pi(\vec{v}) = \begin{cases} \vec{v} \ , & \vec{v} \in W \\ \vec{0} \ , & \vec{v} \in W^{\perp} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşüme $\vec{v}$ nin W üzerine **dik izdüşümü** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.10: V ve $\overline{V}$, sırasıyla, $\langle , \rangle$ ve $\langle\langle , \rangle\rangle$ skalar çarpımları ile verilen skalar çarpım uzayları ve $T : V \to \overline{V}$ lineer dönüşümü verilsin $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

$$\langle\langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

ise T ye **skalar çarpımı koruyor** denir (O'Neill 1983).

T lineer dönüşümü için $T(\vec{v}) = \vec{0}$ ise $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ ve $\langle , \rangle$ dejenere olmadığından $\forall \vec{w} \in V$ için $\vec{v} = \vec{0}$ dır. Dolayısıyla, T lineer dönüşümü bire-bir dir.

Tanım 2.1.11: V ve W skalar çarpım uzayları olsun. Skalar çarpımı koruyan $T : V \to W$ lineer dönüşümüne bir **lineer izometri** denir.

Eğer $T : V \to W$ lineer dönüşümü lineer izometri ise $boyV = boyW$ dır. Bunun tersi de doğrudur (O'Neill 1983).

Teorem 2.1.6: V ve W skalar çarpım uzaylarının aynı boyutlu ve aynı indeksli olması için gerek ve yeter şart V den W ya bir lineer izometrinin var olmasıdır (O'Neill 1983).

2.2. Yarı-Riemann Manifoldlar

Bu kısımda, yarı-Riemann manifoldların temel kavramları tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.1: M bir C^∞ manifold olsun.

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \to g_p(u,v)$$

biçiminde tanımlı, simetrik, iki-lineer, dejenere olmayan ve sabit indeksli (0,2) tensör alanı olmak üzere M bir g metrik tensörü ile donatılmışsa (M, g) ye bir **yarı-Riemann manifold** denir (O'Neill 1983).

$p \in M$ noktasında T_pM tanjant uzayının bir ortonormal baz sistemi

$$g(e_i, e_i) = 1,\ 1 \le i \le r$$
$$g(e_j e_j) = -1,\ r+1 \le j \le n$$

şeklinde belirlenebilir. Böylece bu baz sistemine göre g ye karşılık gelen matris

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & & & & . \\ . & & 1 & & & . \\ 0 & & & -1 & & 0 \\ . & & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & -1 \end{bmatrix}$$

formundadır. $q = n - r$ pozitif tamsayısı $\forall p \in M$ noktası için aynıdır.

Bundan sonraki kullanımlarda (M, g) yarı-Riemann manifoldu, kısaca M ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.2: M bir yarı-Riemann manifold olsun. g nin sabit indeksi q ya M **yarı-Riemann manifoldunun indeksi** denir. q indeksli ve $n-$boyutlu bir yarı-Riemann manifold M_q^n ile gösterilir. Burada metrik tensörün indeksi ile yarı-Riemann manifoldun indeksi gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.3: M_q^n bir yarı-Riemann manifold olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $q = 1$ ise bu durumda M_1^n yarı-Riemann manifolduna **Lorentz manifoldu** denir.

Özel olarak $q = 0$ ise bu durumda M^n bir **Riemann manifoldu** ve g de bir Riemann metriğidir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.4: $\mathbb{R}_q^n$ Öklid $n-$uzay verilsin. $0 \leq q \leq n,$ olmak üzere q tamsayısı için, $\mathbb{R}_q^n$ üzerinde

$$g_p(X_p, Y_p) = -\sum_{i=1}^{q} x_i y_i + \sum_{i=q+1}^{n} x_i y_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınırsa, $(\mathbb{R}_q^n, g)$ ikilisi **yarı-Öklid uzay** olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}_q^n$ ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.5: M bir C^∞ yarı-Riemann manifoldu ve g, M üzerinde tanımlanmış bir metrik tensör olsun. Eğer $\forall p \in M$ ve $\vec{v} \in T_p(M)$ için,

$$g\big|_p : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

i) $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ veya $\vec{v} = \vec{0}$ ise $\vec{v}$ tanjant vektörüne **uzay benzeri**,

ii) $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise $\vec{v}$ tanjant vektörüne **zaman benzeri**,

iii) $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ ise $\vec{v}$ tanjant vektörüne **ışık (null) benzeri** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.6: M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}, M$ nin bir altmanifoldu olsun. $j : \overline{M} \to M$ içine (inclusion) dönüşümü olmak üzere her $p \in \overline{M}$ için

$$(j(g))(p) = g(j(p))$$

şeklinde tanımlı $j(g)$ dönüşümü $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin bir **yarı-Riemann altmanifoldu** denir (O'Neill 1983).

Bir yarı-Riemann manifold üzerinde konneksiyon dediğimizde, aksi söylenmedikçe, yarı-Riemann konneksiyonu kastedeceğiz. Bu konneksiyon aşağıdaki teorem ile nitelendirilmiştir.

Teorem 2.2.1: g bir yarı-Riemann metrik olsun. $\nabla g = 0$ olacak şekilde bir tek torsiyonsuz ∇ afin konneksiyonu vardır (Nelson 1967).

Tanım 2.2.7: (M^n, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \overset{iki-lineer}{\to} \chi(M)$$

dönüşümü;

$$\forall X, Y, Z \in \chi(M), \forall f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \text{ için,}$$

$$\begin{aligned}
&i) \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z, \\
&ii) \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y, \\
&iii) \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \\
&iv) Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),
\end{aligned}$$

özellikleri sağlandığında ∇ ya M^n üzerinde torsiyonsuz bir yarı-Riemann konneksiyon denir. Bu konneksiyona kısaca M^n üzerindeki **yarı-Riemann konneksiyonu** denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.8: M bir C^{∞} yarı-Riemann manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$[\,,\,]: \chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$
$$(X,Y)\to[X,Y]$$

dönüşümü $\forall f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için

$$[X,Y](f)=X(Yf)-Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa, $[\,,\,]$ ye bir **Lie operatörü** denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9: (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $X\in\chi(M)$ için L_X, keyfi bir (p,q) tipinde tensör alanını yine (p,q) tipinde bir tensör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör olup X vektör alanına göre **Lie türev operatörü** olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

i) $L_X(f)=X(f),\ \ \forall f\in C^{\infty}(M,IR)$

ii) $L_X Y=[X,Y],\quad \forall Y\in\chi(M)$

iii) $L_X g(Y,Z)=X(g(Y,Z))-g([X,Y],Z)-g([X,Z],Y), \forall Y,Z\in\chi(M).$

Tanım 2.2.10: *(M^n,g)* bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Her *X* vektör alanı için, $L_X g=0$ ise X vektör alanına bir **Killing vektör alanı** denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11: (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. M üzerinde verilen her bir diferensiyel $q-$forma bir diferensiyel $q+1-$form karşılık getiren diferensiyel operatörü **dış türev operatörü** olarak adlandırılır ve d ile gösterilir. Özel olarak bir $1-$form w ve bir $2-$form Ω için d operatörü

$$2dw(X,Y)=X(w(Y))-Y(w(X))-w[X,Y]$$

ve

$$\begin{aligned}3d\Omega(X,Y,Z)=&\,X(\Omega(Y,Z))+Y(\Omega(Z,X))+Z(\Omega(X,Y))\\&-\Omega([X,Y],Z)-\Omega([Y,Z],X)-\Omega([Z,X],Y)\end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Duggal ve Bejancu 1996).

(M,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. O zaman $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere Riemann konneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.12: (M^n, g) bir yarı-Riemann manifold ve $x_1, x_2, ..., x_n$ M^n nin lokal koordinatları olsun. $V = f(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge ...dx_n$ ve $f(x) > 0$ ise V ye M^n üzerindeki bir **hacim form** denir (Sharpe 1997).

Tanım 2.2.13: (M^n, g) bir yarı-Riemann manifold olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye **yönlendirilebilir**dir denir (Sharpe 1997).

Tanım 2.2.14: (M^n,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir yarı-Riemann konneksiyonu olsun. O zaman,

$$R : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) \to \chi(M^n)$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (2.2.1)$$

ile tanımlanan (1,3)-tipli tensör alanı R ye M^n nin **Riemann eğrilik tensörü** denir.

Ayrıca, $\forall X,Y,Z,V,W \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} &i) R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z, \\ &ii) g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V), \\ &iii) R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \\ &iv) g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y) \end{aligned}$$

özelliklerini sağlar (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.1: (M^n,g) bir yarı-Riemann manifold, ∇ da M^n üzerinde bir Yarı-Riemann konneksiyonu ve E (1,1)-tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$\left(\nabla_X E)Y\right) = \nabla_X EY - E(\nabla_X Y)$$

dır (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.2: (M^n,g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alanı olmak üzere, $\forall$ X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y,Z)=g(Y,(\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'Neill 1983).

Önerme 2.2.3: (M^n,g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, $\forall$ X,Y,Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y,Z)=-g(Y,(\nabla_X G)Z)$$

dır (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.15: (M^n,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,...,e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$S:\chi(M^n)\times\chi(M^n)\to\mathbb{R}$$

$$(X,Y)\to S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i g(R(e_i,X)Y,e_i) \qquad (2.2.2)$$

$$S=iz\{R\to R(X,.)Y\}$$

şeklinde tanımlı (0,2)-tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde **Ricci eğrilik tensörü** denir.

Ayrıca, (0,2)-tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y)=g(QX,Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.16: (M,g) n-boyutlu bir yarı-Riemann manifold olsun. $\forall\, X,Y\in\chi(M)$ için

$$S(X,Y)=\lambda g(X,Y)$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye **Einstein manifoldu** adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.17: (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu ve $\{e_1,e_2,...,e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\tau=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i S(e_i,e_i)$$

değerine M nin **skalar eğriliği** denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.18: M^n bir C^∞ manifold olsun. Keyfi bir $p\in M^n$ noktası için T_pM^n nin $r-$boyutlu altuzayı ($r\le n$) D ve D_p nin bir kolleksiyonu $D=\{D_p\}$ olmak üzere, p noktasını ihtiva eden M^n nin bir U açık altcümlesi üzerinde C^∞ sınıfından lineer bağımsız $\{x_1,x_2,...,x_r\}$ vektör alanları U nun her $q\in M^n$ noktasında hala D_p nin bir bazı oluyorsa D ye M^n üzerinde bir $r-$**boyutlu dağılım** ve $\{x_1,x_2,...,x_r\}$ cümlesine U üzerinde D için bir **lokal baz** denir (Sharpe 1997).

Tanım 2.2.19: M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı D olsun. M^n nin bir haritası $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ olmak üzere, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_r}\right\}$ cümlesi D dağılımı için bir baz oluşturuyorsa X haritasına D dağılımına göre düzlemseldir denir. Eğer M^n nin her noktasında tanımlı olan D dağılımı için bir düzlemsel harita bulunabiliyorsa D dağılımına **integrallenebilirdir** denir (Sharpe 1997).

Teorem 2.2.2: (Frobenius Teoremi) M^n bir C^∞ manifold ve M^n nin bir r-boyutlu dağılımı D olsun. D dağılımının integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul her $X,Y\in D$ için $[X,Y]\in D$ olmasıdır (Sharpe 1997).

3. PARADEĞME MANİFOLDLAR

Bu bölümde konunun anlaşılabilirliğini sağlayacak temel tanım ve teoremler verilmiştir.

3.1. Hemen Hemen Paradeğme Manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen paradeğme manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 3.1.1: $M,(2n+1)$ **-**boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold, φ,ξ,η da M^{2n+1} üzerinde sırasıyla, (1,1)-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer φ,ξ,η için, M^{2n+1} üzerinde

i) $\eta(\xi)=1,$ (3.1.1)

ii) $\varphi^2=Id-\eta\otimes\xi,$ (3.1.2)

iii) $D=$ çekirdek η ; η tarafından üretilen dağılım

D hemen hemen parakompleks yapıya sahiptir. (3.1.3)

eşitlikleri sağlanıyorsa, o zaman (φ,ξ,η) üçlüsüne M üzerinde bir **hemen hemen paradeğme yapı** ve bu yapı ile birlikte (M,φ,ξ,η) dörtlüsüne bir **hemen hemen paradeğme manifold** denir (Zamkovoy 2009).

Teorem 3.1.1: (M,φ,ξ,η) dörtlüsü hemen hemen paradeğme manifold olmak üzere;

i) $\varphi(\xi)=0,$ (3.1.4)

ii) $\eta\circ\varphi=0,$ (3.1.5)

iii) $\operatorname{rank}\varphi=2n$ (3.1.6)

dir (Zamkovoy 2009).

İspat:

i) (3.1.2) denklemi ve $\eta(\xi)=1$ eşitliğini kullanarak $\varphi^2(\xi)=\xi-\eta(\xi)\xi=0$ elde edilir. Buradan ya $\varphi\xi$=0, ya da $\varphi^2(\xi)=0\varphi\xi$ durumları söz konusudur. İlk önce $\varphi(\xi)\neq 0$ olduğu kabul edilsin. $\varphi^2(\xi)=0\varphi\xi$ ve (3.1.2) denklemi kullanılırsa $\varphi(\varphi^2\xi)=\varphi^2(\varphi\xi)=\varphi\xi-\eta(\varphi(\xi))\xi=0$ eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikten $\varphi\xi=\eta(\varphi(\xi))\xi$ denklemine sahip olunur. Bu denkleme tekrar φ etki ettirilirse $\varphi^2\xi=\eta(\varphi\xi)\varphi\xi$=0 ve buradan da 0=$\eta(\varphi\xi)\varphi\xi$ denklemi bulunur. $\varphi\xi\neq 0$ olduğundan $\eta(\varphi\xi)=0$ elde edilir. Şimdi $\varphi\xi=\eta(\varphi(\xi))\xi$ ve $\eta(\varphi\xi)=0$ denklemleri ile beraber $\varphi\xi$=0 elde edilir. Bu ise $\varphi(\xi)\neq 0$ kabulü çelişir. O halde $\eta(\varphi\xi)\neq 0$ olmalıdır. Bu durumda $0=\eta(\varphi\xi)\varphi\xi$ denkleminden ve $\eta(\varphi\xi)\neq 0$ olduğundan $\varphi\xi$=0 olur. Bu kabül ile tekrar çelişir. O halde $\varphi^2(\xi)=0\varphi\xi$ durumu söz konusu olamaz. O halde $\varphi\xi$=0 olmalıdır.

ii) (3.1.2) den $\forall X\in\chi(M)$ için $\varphi^2(X)=X-\eta(X)\xi$ denkleminde X yerine $\varphi(X)$ yazılırsa;

$$\begin{aligned}\varphi^3(X)&=\varphi^2(\varphi X)=\varphi(\varphi^2(X))\\&=\varphi(X-\eta(X)\xi);\ \varphi \text{ lineer olduğundan}\\&=\varphi(X)-\varphi(\eta(X)\xi)\\&=\varphi(X)-\eta(X)\varphi(\xi)\end{aligned}$$

$$\varphi^3(X)=\varphi(X)-\eta(\varphi(X))\xi \tag{3.1.7}$$

elde edilir. $\varphi(\xi)=0$ olduğundan

$$\varphi^3(X)=\varphi(X) \tag{3.1.8}$$

(3.1.7) ve (3.1.8) den $\eta(\varphi(X))\xi=0$ ve ξ karakteristik vektör alanı sıfırdan farklı olduğundan $\eta(\varphi(X))=0$ elde edilir. Bu ise $(\eta\circ\varphi)(X)=0(X)$ yani $(\eta\circ\varphi)$=0 olur.

iii) $\varphi:\chi(M)\xrightarrow{lineer}\chi(M)$ dönüşümünün çekirdeği Ker φ olmak üzere;

$$\text{Ker } \varphi=\{X\in\chi(M)|\varphi(X)=0\}$$

şeklindedir. $\forall X\in Ker\varphi$ için; $\varphi(X)=0$, eşitliğinin her iki tarafına φ uygulanırsa

$0=\varphi(\varphi(X))=X-\eta(X)\xi$ ve buradan da $X=\eta(X)\xi$ elde edilir. Böylece $\forall X\in Ker\varphi$ için $X\in Sp\{\xi\}$ olur ki bu da

$$Ker\varphi\subset Sp\{\xi\} \tag{3.1.9}$$

demektir. $\forall X\in Sp\{\xi\}$ için

$$X=\lambda\xi$$

$$\varphi(X)=\lambda\varphi(\xi)\ ;\varphi(\xi)=0$$

$$\varphi(X)=0$$

olur. Böylece $\forall X\in Sp\{\xi\}$ için $X\in Ker\varphi$ olur ki bu da

$$Sp\{\xi\}\subset Ker\varphi \tag{3.1.10}$$

(3.1.9) ve (3.1.10) dan $Ker\varphi=Sp\{\xi\}$ demektir.

Sonuç olarak

$$\text{rank}\,\varphi+\text{sıfırlık}\,\varphi=\text{boy}\,\chi(M)=2n+1$$

olur ve sıfırlık φ=boy(Ker φ) $=1$ olduğundan

$$\text{rank}\,\varphi=2n$$

elde edilir.

3.2. Hemen Hemen Paradeğme Metrik Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen paradeğme manifoldlar üzerinde bir metrik tanımlayacağız ve bazı özelliklerini ele alacağız.

Teorem 3.2.1: (M,φ,ξ,η) 2n+1-boyutlu bir hemen hemen paradeğme manifold olsun. Bu durumda M manifoldu üzerinde bir $\overline{G}$ yarı-Riemann metrik tensör alanı

$$\overline{G}(X,\xi)=\eta(X),\ \forall X\in\chi(M) \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde vardır (Zamkovoy 2009).

İspat: M de yarı-Riemann metrik tensör alanı G olsun. $\overline{G}$ yi G yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlayalım. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$\overline{G}(X,Y)=G(\varphi^2X,\varphi^2Y)+\eta(X)\eta(Y)$$

$$\overline{G}(X,Y)=G(X-\eta(X)\xi,Y-\eta(Y)\xi)+\eta(X)\eta(Y)$$

dir. Buradan $\overline{G}$ nin iki-lineer, simetrik ve dejenere olmadığı kolayca görülür. Burada $Y=\xi$ yazılıp ve (3.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\overline{G}(X,\xi)=G(X-\eta(X)\xi,\xi-\eta(\xi)\xi)+\eta(X)\eta(\xi)$$

$$\begin{aligned}\overline{G}(X,\xi)&=G(X-\eta(X)\xi,\xi-1.\xi)+\eta(X).1\\&=G(X-\eta(X)\xi,0)+\eta(X)\\&=G(\varphi^2X,0)+\eta(X)\\&=0+\eta(X)\\&=\eta(X)\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.2.2: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta)$ bir hemen hemen paradeğme diferensiyellenebilir yarı-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ ve $\xi\in\chi(M)$ için

i) $g(\varphi(X),\varphi(Y))=-g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)$ (3.2.2)

ii) $\eta(X)=g(X,\xi)$ (3.2.3)

özelliklerini sağlayacak şekilde bir g yarı-Riemann metriği vardır (Zamkovoy 2009).

İspat:

i) $g(X,Y)=\frac{1}{2}\left(\overline{G}(X,Y)-\overline{G}(\varphi X,\varphi Y)+\eta(X)\eta(Y)\right)$ olarak tanımlansın.

$g(\varphi X,\varphi Y=\frac{1}{2}\left(\overline{G}(\varphi X,\varphi Y)-\overline{G}(\varphi^2X,\varphi^2Y)+\eta(\varphi X)\eta(\varphi Y)\right)$ (3.1.2) ve (3.1.5) den

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\left(\overline{G}(\varphi X,\varphi Y)-\overline{G}(X-\eta(X)\xi,Y-\eta(Y)\xi)\right)\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\overline{G}(\varphi X,\varphi Y)-\overline{G}(X,Y)+\eta(Y)\overline{G}(X,\xi)+\eta(X)\overline{G}(\xi,Y)\\-\eta(X)\eta(Y)\overline{G}(\xi,\xi)\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\left(\overline{G}(\varphi X,\varphi Y)-\overline{G}(X,Y)+2\eta(X)\eta(Y)-\eta(X)\eta(Y)\right)\\&=-g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)\end{aligned}$$

ii) (3.2.2) eşitliğinde $Y=\xi$ alınırsa;

$$g(\varphi(X),\varphi(\xi))=-g(X,\xi)+\eta(X)\eta(\xi)\ ;(3.1.1)\,ve\,(3.1.4)\ \text{den}$$

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$

olur.

Şimdi aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.1: M hemen hemen paradeğme manifoldu üzerinde

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$

$$g(\varphi(X),\varphi(Y))=-g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde g yarı-Riemann metriği için

$$g(\varphi X,Y)+g(X,\varphi Y)=0$$

dır (Zamkovoy 2009).

İspat: Teorem 3.2.2 gereğince g yarı-Riemann metriği istenilen özelliklerde vardır. Buna göre;

$$g(\varphi(X),\varphi(Y))=-g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)$$

ifadesinden

$$g(X,Y)=-g(\varphi(X),\varphi(Y))+\eta(X)\eta(Y)$$

yazılabilir. Bu nedenle X yerine φX alınırsa;

$$\begin{aligned} g(\varphi X,Y) &= -g(\varphi^2X,\varphi Y)+\eta(\varphi X)\eta(Y) && (3.1.2)\text{ ve }(3.1.5)\text{ den}\\ &= -g(X-\eta(X)\xi,\varphi Y)+0.\eta(Y) &&\\ &= -g(X,\varphi Y)+\eta(X)g(\xi,\varphi Y)+0 && (3.2.3)\text{ den}\\ &= -g(X,\varphi Y)+\eta(X)\eta(\varphi Y) && (3.1.5)\text{ den}\\ &= -g(X,\varphi Y) && \end{aligned}$$

$$g(\varphi X,Y)+g(X,\varphi Y)=0$$

elde edilir. O halde, g ye göre φ anti-simetriktir.

Tanım 3.2.1: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta)$ bir hemen hemen paradeğme manifold olsun. (3.2.2) ve (3.2.3) koşullarını sağlayan g yarı-Riemann metriğine $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta)$ üzerinde

hemen hemen paradeğme metrik, (φ,ξ,η,g) yapısına da **hemen hemen paradeğme metrik yapı**, $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ beşlisine de **hemen hemen paradeğme metrik manifold** denir (Zamkovoy 2009).

Tanım 3.2.2: (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen paradeğme metrik yapısı ile birlikte M^{2n+1} için lokal ortonormal baz sistemi inşa edilebilir. M^{2n+1} nin bir koordinat komşuluğu $\boldsymbol{U}$ olsun. $\boldsymbol{U}$ da ξ ya ortogonal olacak şekilde bir birim vektör alanı $\boldsymbol{X}_1$ olsun ve $\left|\phi X_1\right|^2=-1$ dir. Bu durumda (3.1.4), (3.1.5), (3.2.2) den

$$\begin{aligned} g(\varphi X_1,\xi) &= g(\varphi^2 X_1,\varphi\xi)+\eta(\varphi X_1)\eta(\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(\varphi X_1,X_1) &= -g(\varphi^2 X_1,\varphi X_1)-\eta(\varphi X_1)\eta(X_1) \\ &= -g(X_1,\varphi X_1) \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$g(\varphi X_1,X_1)=0$$

olacak şekilde $\varphi X_1,\xi$ ve X_1 e diktir. Benzer şekilde U üzerinde ξ,X_1 ve φX_1 e dik olacak şekilde bir X_2 birim vektör alanı alabiliriz. $\left|\phi X_2\right|^2=-1$ olur. $\varphi X_2,\xi,X_1,\varphi X_1$ ve X_2 ye diktir. Bu şekilde devam edilirse U üzerinde bir $(X_i,\phi X_i,\xi), i=1...n$ lokal ortonormal bazı elde edilir ve bu baza $\varphi-$bazı denir (Zamkovoy 2009).

Böylece M^{2n+1} in indeksi n-dir.

Tanım 3.2.3: M üzerinde bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen paradeğme metrik yapısı verilsin. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$F(X,Y)=g(X,\varphi Y) \tag{3.2.4}$$

şeklinde tanımlı antisimetrik F dönüşümüne (φ,ξ,η,g) hemen hemen paradeğme metrik yapısının **Temel 2-Formu** denir (Zamkovoy 2009).

Sonuç 3.2.2: M^{2n+1} yarı-Riemann manifoldu olsun. F temel 2-form ters simetriktir ve Tanım 3.2.2 yardımıyla $\eta\wedge F^n\neq 0$ dır.

Tanım 2.2.12, Tanım 2.2.13 ve Sonuç 3.2.2 yardımıyla Sonuç 3.2.3 verilebilir.

Sonuç 3.2.3 M^n üzerinde bir hemen hemen paradeğme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) olmak üzere M^n yönlendirilebilirdir.

3.3. Hemen Hemen Paradeğme Manifoldların Torsiyon Tensörü

Tanım 3.3.1: M bir reel diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M nin her p noktası için $J^2 = I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması varsa, o zaman M üzerindeki $(1,1)$ tipindeki J tensör alanına bir **hemen hemen parakompleks yapı** denir. Bir J hemen hemen parakompleks yapısı ile verilen manifolda bir **hemen hemen parakompleks manifold** denir (Kaneyuki ve Willams 1985).

Teorem 3.3.1: $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen paradeğme manifold olsun. Bu taktirde $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı vardır (Kaneyuki ve Willams 1985).

İspat: $\mathbb{R}$, bir reel doğruyu göstermek üzere $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu düşünülsün.

O zaman $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ üzerinde her bir vektör alanı

$$\left(X, f\frac{d}{dt} \right)$$

biçimindedir. Burada X ile M ye teğet bir vektör alanı, t ile $\mathbb{R}$ nin bir noktasının koordinatı ve f, h ile de $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ de diferensiyellenebilir fonksiyon gösterilmektedir. $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ nin tanjant uzayı üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı J

$$J\left(X, f\frac{d}{dt} \right) = \left(\varphi X + f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt} \right)$$

$$\left[\left(X, f\frac{d}{dt} \right), \left(Y, h\frac{d}{dt} \right) \right] = \left([X, Y], (Xh - Yf)\frac{d}{dt} \right)$$

şeklinde tanımlanır. O zaman kolayca

$$J^2 = I$$

elde edilir ve J lineer dönüşümü $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı olur. Gerçekten de;

$$J^2\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = J\left(\varphi X + f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

$$= \left(\varphi(\varphi X + f\xi) + \eta(X)\xi, \eta(\varphi X + f\xi)\frac{d}{dt}\right)$$

$$= \left(\varphi^2 X + \varphi(f\xi) + \eta(X)\xi, (\eta(\varphi X) + \eta(f\xi))\frac{d}{dt}\right)$$

$$= \left(X - \eta(X)\xi + f\varphi\xi + \eta(X)\xi, (0 + f\eta(\xi))\frac{d}{dt}\right)$$

$$= \left(X, f\frac{d}{dt}\right)$$

$$J^2\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(X, f\frac{d}{dt}\right)$$

olduğundan

$$J^2 = I$$

ve dolayısıyla J dönüşümü $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapıdır.

Tanım 3.3.2: J, M^n üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı olsun. M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü;

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

$$= [X,Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY]$$

şeklindedir (Bucki ve Miernowski 1985).

Tanım 3.3.3: (M^{2n}, J) hemen hemen parakompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne **integrallenebilir** dir denir (Bucki ve Miernowski 1985).

Tanım 3.3.4: Eğer $M^{2n}\times\mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen parakompleks yapısı integrallenebilir ise (φ,ξ,η) hemen hemen paradeğme yapısına **normal** dir denir (Bucki ve Miernowski1985).

Aşağıda φ nin

$$N_{\varphi}(X,Y)=\varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]$$

ile tanımlı N_{φ} Nijenhuis torsiyon tensörü yardımıyla hemen hemen parakompleks yapının normallik şartına karşılık gerek ve yeter şartlar bulunmaya çalışılacaktır. $N_J(1,2)$ tipinde bir tensör alanı olduğundan M üzerindeki her X ve Y vektör alanı için

$$N_J((X,0),(Y,0)) \text{ ve } N_J\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right)$$

hesaplanırsa N_J nin değeri hesaplanmış olur. Gerçekten de;

$$\begin{aligned}N_J((X,0),(Y,0))&=J^2[(X,0),(Y,0)]+[J(X,0),J(Y,0)]\\&-J[J(X,0),(Y,0)]-J[(X,0),J(Y,0)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&N_J((X,0),(Y,0))=([X,Y],0)+\left[\left(\varphi X,\eta(X)\frac{d}{dt}\right),\left(\varphi Y,\eta(Y)\frac{d}{dt}\right)\right]\\&-J\left[\left(\varphi X,\eta(X)\frac{d}{dt}\right),(Y,0)\right]-J\left[(X,0),\left(\varphi Y,\eta(Y)\frac{d}{dt}\right)\right]\\&=([X,Y],0)+\left([\varphi X,\varphi Y]-\left[\eta(X)\frac{d}{dt},\eta(Y)\frac{d}{dt}\right],\left[\varphi X,\eta(Y)\frac{d}{dt}\right]+\left[\eta(X)\frac{d}{dt},\varphi Y\right]\right)\\&-J\left([\varphi X,Y],\left[\eta(X)\frac{d}{dt},Y\right]\right)-J\left([X,\varphi Y],\left[X,\eta(Y)\frac{d}{dt}\right]\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=([X,Y],0)+([\varphi X,\varphi Y]-\eta(X)\eta(Y)\left[\frac{d}{dt},\frac{d}{dt}\right]+\left(\frac{d}{dt}\eta(Y)\eta(X)-\frac{d}{dt}\eta(X)\eta(Y)\right)\frac{d}{dt}\\&,\eta(Y)\left[\varphi X,\frac{d}{dt}\right]+\varphi X(\eta(Y))\frac{d}{dt}-\eta(Y)\frac{d}{dt}.(1)\varphi X+\eta(X)\left[\frac{d}{dt},\varphi Y\right]\\&+\eta(X)\frac{d}{dt}.(1)\varphi Y-1.\varphi Y(\eta(X))\frac{d}{dt})-J([\varphi X,Y],\eta(X)\left[\frac{d}{dt},Y\right]+\eta(X)\frac{d}{dt}.(1)Y\\&-Y(\eta(X))\frac{d}{dt})-J\left([X,\varphi Y],\eta(Y)\left[X,\frac{d}{dt}\right]+X(\eta(Y))\frac{d}{dt}-\eta(Y)\frac{d}{dt}.(1)X\right)\end{aligned}$$

$$= ([X,Y],0) + \left([\varphi X, \varphi Y] - \eta(X)\eta(Y).0 + 0.\frac{d}{dt}, \varphi X(\eta(Y))\frac{d}{dt} - \varphi Y(\eta(X))\frac{d}{dt} \right)$$

$$- J\left([\varphi X, Y], \eta(X).0 - Y\eta(X)\frac{d}{dt} \right) - J\left([X, \varphi Y], \ \eta(Y).0 + X(\eta(Y))\frac{d}{dt} \right)$$

$$= ([X,Y],0) + \left([\varphi X, \varphi Y], (\varphi X(\eta(Y)) - \varphi Y(\eta(X)))\frac{d}{dt} \right)$$

$$- J\left([\varphi X, Y], - Y\eta(X)\frac{d}{dt} \right) - J\left([X, \varphi Y], \ X(\eta(Y))\frac{d}{dt} \right)$$

$$= ([X,Y],0) + \left([\varphi X, \varphi Y], (\varphi X(\eta(Y)) - \varphi Y(\eta(X)))\frac{d}{dt} \right)$$

$$- \left(\varphi[\varphi X, Y] - Y\,\eta(X)\xi, \eta[\varphi X, Y]\frac{d}{dt} \right)$$

$$- \left(\varphi[X, \varphi Y] + X(\eta(Y))\xi, \eta[X, \varphi Y]\frac{d}{dt} \right)$$

$$N_J((X,0),(Y,0)) = ([X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

$$+ (Y\,\eta(X)) - X\,(\eta(Y))\xi, (\varphi X(\eta(Y)) - \varphi Y(\eta(X)) - \eta[\varphi X, Y] - \eta[X, \varphi Y])\frac{d}{dt})$$

dır.

$$N_\varphi(X,Y) = [X,Y] - \eta[X,Y]\xi + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \qquad (3.3.1)$$

$$2d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta[X,Y] \qquad (3.3.2)$$

$$(L_{\varphi X}\eta)Y = \varphi X(\eta(Y)) - \eta([\varphi X, Y])$$

$$(L_{\varphi Y}\eta)X = \varphi Y(\eta(X)) - \eta([\varphi Y, X])$$

olduğundan

$$N_J((X,0),(Y,0)) = \left(N_\varphi(X,Y) - 2d\eta(X,Y)\xi, ((L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)X)\frac{d}{dt} \right)$$

elde edilir.

$$N_J\left((X,0), \left(0, \frac{d}{dt}\right) \right) = \left[(X,0), \left(0, \frac{d}{dt}\right) \right] + \left[J(X,0), J\left(0, \frac{d}{dt}\right) \right]$$

$$- J\left[J(X,0), \left(0, \frac{d}{dt}\right) \right] - J\left[(X,0), J\left(0, \frac{d}{dt}\right) \right]$$

$$=\left(\left[X,0\right]-\left[0,\frac{d}{dt}\right],\left[X,\frac{d}{dt}\right]+\left[0,0\right]\right)+\left[\left(\varphi X,\eta(X)\frac{d}{dt}\right),(\xi,0)\right]$$

$$-J\left[\left(\varphi X,\eta(X)\frac{d}{dt}\right),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right]-J\left[(X,0),(\xi,0)\right]$$

$$=(0,0)+\left(\left[\varphi X,\xi\right]-\left[\eta(X)\frac{d}{dt},0\right],\left[\varphi X,0\right]+\left[\eta(X)\frac{d}{dt},\xi\right]\right)$$

$$-J\left(\left[\varphi X,0\right]-\left[\eta(X)\frac{d}{dt},\frac{d}{dt}\right],\left[\varphi X,\frac{d}{dt}\right]+\left[\eta(X)\frac{d}{dt},0\right]\right)$$

$$-J\left(\left[X,\xi\right]-\left[0,0\right],\left[X,0\right]+\left[0,\xi\right]\right)$$

$$N_J\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right)=\left(\left[\varphi X,\xi\right],-\xi\eta(X)\frac{d}{dt}\right)-J\left(\left[X,\xi\right],0\right)$$

$$=\left(\left[\varphi X,\xi\right],-\xi\eta(X)\frac{d}{dt}\right)-\left(\varphi\left[X,\xi\right],\eta\left[X,\xi\right]\frac{d}{dt}\right)$$

$$=\left(-\varphi\left[X,\xi\right]+\left[\varphi X,\xi\right],-\left(\xi\eta(X)+\eta\left[X,\xi\right]\right)\frac{d}{dt}\right)$$

olup;

$$\left(L_X w\right)\left(Y_1,...,Y_r\right)=L_X\left(w\left(Y_1,...,Y_r\right)\right)-\sum_{i=1}^{r}w\left(Y_1,...,\left[X,Y_i\right],...,Y_r\right)$$

olduğundan dolayı;

$$\left(L_\xi\varphi\right)X=L_\xi\left(\varphi X\right)-\varphi\left[\xi,X\right]$$

$$=\left[\xi,\varphi X\right]+\varphi\left[X,\xi\right]$$

$$=\varphi\left[X,\xi\right]-\left[\varphi X,\xi\right]$$

ve

$$\left(L_\xi\eta\right)X=L_\xi\left(\eta(X)\right)-\eta\left[\xi,X\right]$$

olduğundan;

$$N_J\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right)=-\left(\left(L_\xi\varphi\right)X,\left(L_\xi\eta\right)X\frac{d}{dt}\right)$$

olur.

Şimdi dört tane tensör alanı $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ ü sırasıyla,

$$N^{(1)}(X,Y) = N_{\varphi}(X,Y) - 2d\eta(X,Y)\xi \tag{3.3.3}$$
$$N^{(2)}(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)X \tag{3.3.4}$$
$$N^{(3)}(X,Y) = (L_{\xi}\varphi)X \tag{3.3.5}$$
$$N^{(4)}(X,Y) = (L_{\xi}\eta)X \tag{3.3.6}$$

olarak tanımlansın.

Yardımcı Teorem 3.3.1: Bir hemen hemen (φ,ξ,η) paradeğme yapısı için;

$N^{(1)} = 0$ ise $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ dır (Zamkovoy 2009).

İspat: $N^{(1)}(X,Y) = N_{\varphi}(X,Y) - 2d\eta(X,Y)\xi$

olduğundan;

$$N^{(1)}(X,\xi) = N_{\varphi}(X,\xi) - 2d\eta(X,\xi)\xi$$

dır.

$$\begin{aligned} N_{\varphi}(X,Y) &= [X,Y] - \eta[X,Y]\xi + [\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y] - \varphi[X,\varphi Y] \quad \text{(3.1.4) den} \\ &= [X,\xi] - \eta([X,\xi])\xi + [\varphi X,0] - \varphi[\varphi X,\xi] - \varphi[X,0] \\ &= [X,\xi] - \eta([X,\xi])\xi - \varphi[\varphi X,\xi] \end{aligned}$$

ve

(3.3.2) eşitliğinde $Y = \xi$ konumu yapılırsa;

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,\xi) &= X(\eta(\xi)) - \xi(\eta(X)) - \eta[X,\xi] \quad \text{(3.1.1) den} \\ &= X.(1) - \xi(\eta(X)) - \eta[X,\xi] \\ &= -\xi(\eta(X)) - \eta[X,\xi] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X,\xi) &= [X,\xi] - \eta([X,\xi])\xi - \varphi[\varphi X,\xi] + \xi(\eta(X))\xi + \eta[X,\xi]\xi \\ &= [X,\xi] - \varphi[\varphi X,\xi] + \xi(\eta(X))\xi \end{aligned}$$

dır.

$N^{(1)} = 0$ olduğundan

$$[X,\xi] - \varphi[\varphi X,\xi] + \xi(\eta(X))\xi = 0$$

olmalıdır.

$$\eta\left([X,\xi]-\varphi[\varphi X,\xi]+\xi(\eta(X))\xi\right)=\eta(0)$$

$$\eta[X,\xi]-\eta(\varphi[\varphi X,\xi])+\eta(\xi(\eta(X)))\xi=0$$

$$\eta[X,\xi]+\xi(\eta(X))\eta(\xi)=0 \quad \text{(3.1.1) den}$$

$$\eta[X,\xi]+\xi(\eta(X))=0$$

$$-\eta[\xi,X]+\xi(\eta(X))=0$$

ve buradan da

$$\eta[\xi,X]=\xi(\eta(X))$$

olduğu görülür. Bu eşitlik;

$$N^4(X)=(L_\xi\eta)X=\xi(\eta(X))-\eta[\xi,X]$$

de kullanılırsa

$$N^4(X)=\xi(\eta(X))-\xi(\eta(X))$$
$$=0$$

bulunur.

$$\varphi\left([X,\xi]+\varphi[\xi,\varphi X]+(\xi\eta(X))\xi\right)=\varphi(0)$$

$$\varphi[X,\xi]+\varphi^2[\xi,\varphi X]+\xi\eta(X)\varphi(\xi)=0 \quad \text{(3.1.2) ve (3.1.4) den}$$

$$\varphi[X,\xi]+[\xi,\varphi X]-\eta([\xi,\varphi X])\xi+\xi\eta(X).0=0$$

$$\varphi[X,\xi]+[\xi,\varphi X]-\eta([\xi,\varphi X])\xi=0$$

$$\varphi[X,\xi]+[\xi,\varphi X]-\xi(\eta(\varphi X))\xi=0$$

$$\varphi[X,\xi]+[\xi,\varphi X]=0$$

$$\varphi[X,\xi]=-[\xi,\varphi X]$$

olduğundan;

$$\varphi[X,\xi]=[\varphi X,\xi]$$

dır. Bu eşitlik;

$$N^{(3)}(X,Y)=(L_\xi\varphi)X=\varphi[X,\xi]-[\varphi X,\xi]$$

de kullanılırsa;

$$N^{(3)}(X,Y)=[\varphi X,\xi]-[\varphi X,\xi]$$
$$=0$$

bulunur.

Diğer taraftan;

$$0 = N_{\varphi}(\varphi X, Y) - 2d\eta(\varphi X, Y)\xi$$

eşitliğinde,

$$N_{\varphi}(\varphi X, Y) = [\varphi X, Y] - \eta[\varphi X, Y]\xi + [\varphi^2 X, \varphi Y] - \varphi[\varphi^2 X, Y] - \varphi[\varphi X, \varphi Y] \quad \text{(3.1.2) den}$$

$$= [\varphi X, Y] - \eta[\varphi X, Y]\xi + [X - \eta(X)\xi, \varphi Y] - \varphi[X - \eta(X)\xi, Y] - \varphi[\varphi X, \varphi Y]$$

$$= [\varphi X, Y] - \eta[\varphi X, Y]\xi + [X, \varphi Y] - [\eta(X)\xi, \varphi Y] - \varphi[X, Y] + \varphi[\eta(X)\xi, Y]$$
$$- \varphi[\varphi X, \varphi Y]$$

$$= [\varphi X, Y] - \eta[\varphi X, Y]\xi + [X, \varphi Y] - \eta(X)[\xi, \varphi Y] + \varphi Y(\eta(X))\xi - \varphi[X, Y]$$
$$+ \eta(X)\varphi[\xi, Y] - \varphi Y(\eta(X))\xi - \varphi[\varphi X, \varphi Y]$$

dır. Burada

$$\varphi[\xi, Y] = [\xi, \varphi Y]$$

eşitliğikullanılırsa

$$N_{\varphi}(\varphi X, Y) = [\varphi X, Y] - \eta[\varphi X, Y]\xi + [X, \varphi Y] + \varphi Y(\eta(X))\xi - \varphi[X, Y] - \varphi[\varphi X, \varphi Y]$$
$$- Y(\eta(X))\varphi\xi$$

olur. (3.3.2) den

$$2d\eta(\varphi X, Y)\xi = (\varphi X(\eta(Y)) - Y(\eta(\varphi X)))\xi - \eta[\varphi X, Y]\xi \quad ;\text{(3.1.5) den}$$

$$= (\varphi X(\eta(Y)) - Y(0))\xi - \eta[\varphi X, Y]\xi$$

$$= \varphi X(\eta(Y))\xi - \eta[\varphi X, Y]\xi$$

$$= \varphi X(\eta(Y))\xi - \varphi X(\eta(Y))\xi$$

$$= 0$$

Bulunan değerler $N^{(1)} = 0$ da kullanılarak;

$$0 = N_{\varphi}(\varphi X, Y) - 2d\eta(\varphi X, Y)\xi$$

$$= [\varphi X, Y] + \varphi X(\eta(Y))\xi + [X, \varphi Y] + \varphi Y(\eta(X))\xi - \varphi[X, Y]$$
$$- \varphi[\varphi X, \varphi Y]$$

$$0 = \eta[\varphi X, Y] - \varphi X(\eta(Y))\eta(\xi) + \eta[X, \varphi Y] + \varphi Y(\eta(X))\eta(\xi)$$
$$- \eta(\varphi[X, Y]) - \eta(\varphi[\varphi X, \varphi Y])$$

$$0 = \eta[\varphi X, Y] - \varphi X(\eta(Y)) + \eta[X, \varphi Y] + \varphi Y(\eta(X))$$

$$0 = -\eta[Y, \varphi X] - \varphi X(\eta(Y)) + \eta[X, \varphi Y] + \varphi Y(\eta(X))$$

$$0 = -N^{(2)}(X,Y) \tag{3.3.7}$$

Dolayısıyla $N^{(2)} = 0$ dır.

Önerme 3.3.1: M nin (φ,ξ,η) hemen hemen paradeğme yapısının normal olması için gerek ve yeter şart

$$N_{\varphi} - 2d \otimes \xi = 0$$

olmasıdır (Zamkovoy 2009).

3.4. K-Paradeğme Manifoldlar

Tanım 3.4.1: $(2n+1)-$boyutlu hemen hemen paradeğme metrik manifoldu (M,φ,ξ,η,g) olsun. Eğer $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}\left(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\right)$$

olarak tanımlandığında

$$F(X,Y) = g(X,\varphi(Y)) = d\eta(X,Y)$$

oluyorsa (φ,ξ,η,g) dörtlüsüne paradeğme metrik yapı ve (M,φ,ξ,η,g) ye de **paradeğme metrik manifold** denir (Zamkovoy 2009).

Tanım 3.4.2: $(2n+1)$ boyutlu bir M paradeğme metrik manifoldu verilsin. Eğer (φ,ξ,η,g) hemen hemen paradeğme metrik yapısında yer alan ξ vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerindeki değme yapıya **K-paradeğme yapı** ve M ye de **K-paradeğme manifold** denir (Zamkovoy 2009).

Önerme 3.4.1: $L_X K = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall t \in R$ için φ_t nin K yı invaryant bırakmasıdır (Kobayashi ve Nomizu 1963).

Teorem 3.4.1: $(2n+1)$ boyutlu bir M manifoldu, (φ,ξ,η,g) paradeğme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda $N^{(2)} = N^{(4)} = 0$ dır. Ayrıca $N^{(3)} = 0 \Leftrightarrow \xi$ Killing vektör alanıdır (Zamkovoy 2009).

İspat: M , paradeğme metrik manifold olduğundan;

$$d\eta(X,Y) = g(X,\varphi(Y))$$

dır. Burada X yerine $\varphi(X)$, Y yerine $\varphi(Y)$ yazılırsa

$$\begin{aligned} d\eta(\varphi(X),\varphi(Y)) &= g(\varphi(X),\varphi^2(Y)) \\ &= -g(X,\varphi^3(Y)); \quad \varphi^3(Y) = \varphi(Y) \\ &= -g(X,\varphi(Y)) \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$d\eta(\varphi(X),\varphi(Y)) = -d\eta(X,Y) \tag{3.4.1}$$

elde edilir. Ayrıca (3.4.1) de Y yerine $\varphi(Y)$ yazılırsa

$$d\eta(\varphi(X),\varphi^2(Y)) = -d\eta(X,\varphi(Y)) \text{ (3.1.2) den}$$

$$d\eta(\varphi(X),Y-\eta(Y)\xi) = -d\eta(X,\varphi(Y))$$

$$d\eta(\varphi(X),Y) - \eta(Y)d\eta(\varphi(X),\xi) = -d\eta(X,\varphi(Y))$$

Burada

$$d\eta(\varphi(X),\xi) = g(\varphi(X),\varphi(\xi))$$

ve

$$\varphi(\xi) = 0$$

olduğundan

$$d\eta(\varphi(X),Y) + d\eta(X,\varphi(Y)) = 0 \tag{3.4.2}$$

elde edilir. Ayrıca

(3.3.2) de X yerine $\varphi(X)$ yazılırsa

$$2d\eta(\varphi(X),Y) = \varphi(X)\eta(Y) - Y\eta(\varphi(X)) - \eta[\varphi(X),Y] \tag{3.4.3}$$

olur. Benzer şekilde Y yerine $\varphi(Y)$ yazılırsa

$$2d\eta(X,\varphi(Y)) = X\eta(\varphi(Y)) - \varphi(Y)\eta(X) - \eta[X,\varphi(Y)] \tag{3.4.4}$$

(3.4.3) ve (3.4.4) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$2d\eta(\varphi(X),Y) + 2d\eta(X,\varphi(Y)) = \varphi(X)\eta(Y) - \varphi(Y)\eta(X) - \eta[\varphi(X),Y] - \eta[X,\varphi(Y)]$$

$$2d\eta(\varphi(X),Y) + 2d\eta(X,\varphi(Y)) = N^2(X,Y)$$

olarak bulunur. Böylece

$$N^2 = 0$$

olur. Diğer taraftan

$$d\eta(X,\xi) = g(X,\varphi(\xi)) = 0$$

ve

(3.3.2) de Y yerine ξ yazılırsa

$$2d\eta(X,\xi)=\left(X\eta(\xi)-\xi\eta(X)-\eta([X,\xi])\right);\quad \eta(\xi)=1\,ve\,X(1)=0$$

$$\xi\eta(X)-\eta([X,\xi])=0$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}N^4(X)&=\left(L_\xi\eta\right)X\\&=\xi\eta(X)-\eta([\xi,X])\\&=0\end{aligned}$$

olur. Böylece ilk kısmın ispatı biter.

$$\begin{aligned}(L_\xi g)\left(X,\xi\right)&=\xi g(\xi,X)-g([\xi,X],\xi)-g\left(X,[\xi,\xi]\right)\\&=\xi\eta(X)-\eta([\xi,X])\\&=\left(L_\xi\eta\right)X\\&=0\end{aligned}$$

elde edilir. Biliniyor ki η ile $d\eta$ Lie türevi altında invaryant olduğundan $L_\xi d\eta=0$ dır. Dolayısıyla $\forall\, X,Y\in\chi(M)$ için

$$(L_\xi d\eta)(X,Y)=0$$

$$\xi d\eta(X,Y)-d\eta([\xi,X],Y)-d\eta\left(X,[\xi,Y]\right)=0$$

olur. $d\eta(X,Y)=g(X,\varphi(Y))$ olduğundan

$$\xi g(X,\varphi(Y))-g([\xi,X],\varphi(Y))-g\left(X,\varphi([\xi,Y])\right)=0 \tag{3.4.5}$$

olur. Diğer yandan

$$(L_\xi g)\left(X,\varphi(Y)\right)=\xi g(\varphi(Y),X)-g([\xi,X],\varphi(Y))-g\left(X,[\xi,\varphi(Y)]\right)$$

$$g\left(X,(L_\xi\varphi)(Y)\right)=g\left(X,[\xi,\varphi(Y)]\right)-g\left(X,\varphi([\xi,Y])\right)$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$(L_\xi g)\left(X,\varphi(Y)\right)+g\left(X,(L_\xi\varphi)(Y)\right)=\xi g(\varphi(Y),X)-g([\xi,X],\varphi(Y))-g\left(X,\varphi([\xi,Y])\right)$$

elde edilir. (3.4.5) den

$$(L_\xi g)\left(X,\varphi(Y)\right)+g\left(X,(L_\xi\varphi)(Y)\right)=0$$

olur.

$N^3 = 0$ ise

$$(L_\xi g)\big(X, \varphi(Y)\big)$$

elde edilir. Bu eşitlik $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için doğru olduğundan $L_\xi g = 0$ dır. Dolayısıyla ξ bir Killing vektör alanıdır.

ξ bir Killing vektör alanı ise $L_\xi g = 0$ olacağından $g\big(X, (L_\xi \varphi)(Y)\big) = 0$ olur. Bu eşitlik $\forall X \in \chi(M)$ için sağlandığından $N^3 = 0$ dır.

Önerme 3.4.2: M^{2n+1} bir paradeğme metrik manifold olsun. Bu durumda M^{2n+1} in K-paradeğme manifold olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_X \xi = -\varphi X \tag{3.4.6}$$

olmasıdır (Zamkovoy 2009).

İspat: M^{2n+1} bir $K-$paradeğme manifold olsun. Bu durumda bir paradeğme metrik manifoldda, X,Y vektör alanları için;

$$\begin{aligned} g(X,\varphi Y) = d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\{X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{(\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X)\} \\ &= \frac{1}{2} g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X) \\ &= \frac{1}{2} g(\nabla_X \xi, Y) + g(Y, \nabla_X \xi) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) \end{aligned}$$

dır. Ayrıca φ antisimetrik olduğundan;

$$g(X,\varphi Y) = -g(\varphi X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y)$$

veya

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -g(\varphi X, Y) \tag{3.4.7}$$

elde edilir. Böylece $\nabla_X \xi$=- φX olduğu görülür.

Tersine eğer $\nabla_X \xi = -\varphi X$ ve φ antisimetrik ise

$$0 = g(\varphi X, Y) + g(X, \varphi Y)$$

$$0 = g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X)$$
$$0 = (L_\xi g)(X, Y)$$

dır. Bu durumda ξ bir Killing vektör alanıdır ve (φ, ξ, η, g) paradeğme metrik yapısı bir K-paradeğme yapıdır.

Teorem 3.4.1 yardımıyla aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.4.3: M^{2n+1} bir paradeğme metrik manifold olsun. M^{2n+1} nin K-paradeğme manifold olması için gerek ve yeter şart $N^3 = 0$ olmasıdır (Zamkovoy 2009).

Yardımcı Teorem 3.4.1: M nin bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen paradeğme metrik yapısı için

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= -3dF(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3dF(X, Y, Z) - g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) \\ &\quad + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \qquad (3.4.8) \end{aligned}$$

dır (Zamkovoy 2009).

İspat: g ye göre ∇ yarı-Riemann konneksiyonu için; Koszul formülünden

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X)$$

dır. Diğer yandan;

$$3dF(X, Y, Z) = XF(Y, Z) + YF(Z, X) + ZF(X, Y) - F([X, Y], Z) - F([Z, X], Y) - F([Y, Z], X)$$

dır. Bu denklemlerden ve

$$F(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

eşitliğinden istenilen sonucu elde edilir.

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= 2g(\nabla_X (\varphi Y) - \varphi \nabla_X Y, Z) \\ &= 2g(\nabla_X (\varphi Y), Z) - 2g(\varphi \nabla_X Y, Z); \varphi \ antisimetrik \\ &= 2g(\nabla_X (\varphi Y), Z) + 2g(\nabla_X Y, \varphi Z) \\ &= Xg(\varphi Y, Z) + \varphi Y g(X, Z) - Zg(X, \varphi Y) \\ &\quad + g([X, \varphi Y], Z) + g([Z, X], \varphi Y) - g([\varphi Y, Z], X) \\ &\quad + Xg(Y, \varphi Z) + Yg(X, \varphi Z) - \varphi Z g(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], \varphi Z) + g([\varphi Z, X], Y) - g([Y, \varphi Z], X) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) = {} & -XF(Y,Z)+\varphi Yg(X,Z)-ZF(X,Y)\\
& +g([X,\varphi Y],Z)+F([Z,X],Y)-g([\varphi Y,Z],X)\\
& +XF(Y,Z)+YF(X,Z)-\varphi Zg(X,Y)\\
& +F([X,Y],Z)+g([\varphi Z,X],Y)-g([Y,\varphi Z],X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3dF(X,\varphi Y,\varphi Z) = {} & XF(\varphi Y,\varphi Z)+\varphi YF(\varphi Z,X)+\varphi ZF(X,\varphi Y)\\
& -F([X,\varphi Y],\varphi Z)-F([\varphi Z,X],\varphi Y)-F([\varphi Y,\varphi Z],X)
\end{aligned}
$$

eşitliğinde

$$
\begin{aligned}
& XF(\varphi Y,\varphi Z)=-XF(Y,Z)\\
& \varphi YF(\varphi Z,X)=\varphi Yg(\varphi Z,\varphi X) =\varphi Y\big(-g(Z,X)+\eta(Z)\eta(X)\big)\\
& \qquad =-\varphi Yg(Z,X)+\varphi Y\big(\eta(Z)\eta(X)\big)\\
& \varphi ZF(X,\varphi Y)=\varphi Zg(X,\varphi^2Y)=\varphi Zg(X,Y-\eta(Y)\xi)\\
& \qquad =\varphi Zg(X,Y)-\varphi Z\eta(Y)g(X,\xi)\\
& \qquad =\varphi Zg(X,Y)-\varphi Z\big(\eta(X)\eta(Y)\big)\\
& F([X,\varphi Y],\varphi Z)=g([X,\varphi Y],\varphi^2Z)=g([X,\varphi Y],Z-\eta(Z)\xi)\\
& \qquad =g([X,\varphi Y],Z)-\eta([X,\varphi Y])\eta(Z)\\
& F([\varphi Z,X],\varphi Y)=g([\varphi Z,X],\varphi^2Y)=g([\varphi Z,X],Y-\eta(Y)\xi)\\
& \qquad =g([\varphi Z,X],Y)-\eta([\varphi Z,X])\eta(Y)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri kullanılırsa;

$$
\begin{aligned}
3dF(X,\varphi Y,\varphi Z) = {} & -XF(Y,Z)-\varphi Yg(Z,X)+\varphi Y\big(\eta(Z)\eta(X)\big)+\varphi Zg(X,Y)-\varphi Z\big(\eta(X)\eta(Y)\big)\\
& -g([X,\varphi Y],Z)+\eta([X,\varphi Y])\eta(Z)-g([\varphi Z,X],Y)+\eta([\varphi Z,X])\eta(Y)\\
& -F([\varphi Y,\varphi Z],X)
\end{aligned}
$$

olur.

$$
-3dF(X,Y,Z)=-XF(Y,Z)+YF(X,Z)-ZF(X,Y)+F([X,Y],Z)+F([Z,X],Y)+F([Y,Z],X)
$$

(3.3.1), (3.3.2) ve (3.3.3) den;

$$
\begin{aligned}
g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big) &= g\big([Y,Z]+[\varphi Y,\varphi Z]-\varphi[\varphi Y,Z]-\varphi[Y,\varphi Z]-Y(\eta(Z))\xi+Z(\eta(Y))\xi,\varphi X\big)\\
&= g([Y,Z],\varphi X)+g([\varphi Y,\varphi Z],\varphi X)-g(\varphi[\varphi Y,Z],\varphi X)-g(\varphi[Y,\varphi Z],\varphi X)\\
&\quad -g\big(Y(\eta(Z))\xi,\varphi X\big)+g\big(Z(\eta(Y))\xi,\varphi X\big)\\
&= F([Y,Z],X)+F([\phi Y,\varphi Z],X)+g([\varphi Y,Z],X)-\eta(X)\eta([\varphi Y,Z])\\
&\quad +g([Y,\varphi Z],X)-\eta(X)\eta([Y,\varphi Z])+0
\end{aligned}
$$

(3.3.7) den;

$$N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) = \big(\varphi Y(\eta(Z)) - \varphi Z(\eta(Y)) - \eta[\varphi Y, Z] - \eta[Y,\varphi Z]\big)\eta(X)$$
$$= \varphi Y(\eta(Z))\eta(X) - \varphi Z(\eta(Y))\eta(X) - \eta[\varphi Y, Z]\eta(X) - \eta[Y,\varphi Z]\eta(X)$$

(3.3.2) den;

$$2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) = \varphi Y(\eta(X))\eta(Z) - \eta[\varphi Y, X]\eta(Z)$$

(3.3.2) den;

$$-2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) = -\varphi Z(\eta(X))\eta(Y) + \eta[\varphi Z, X]\eta(Y)$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&-3dF(X,\varphi Y,\varphi Z) - 3dF(X,Y,Z) - g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X) + N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)\\
&+2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y)\\
&= +XF(Y,Z) + \varphi Y g(Z,X) - \varphi Y\big(\eta(Z)\eta(X)\big) - \varphi Z g(X,Y) + \varphi Z\big(\eta(X)\eta(Y)\big)\\
&\quad + g([X,\varphi Y],Z) - \eta([X,\varphi Y])\eta(Z) + g([\varphi Z, X],Y) - \eta([\varphi Z, X])\eta(Y)\\
&\quad + F([\varphi Y,\varphi Z],X) - XF(Y,Z) + YF(X,Z) - ZF(X,Y) + F([X,Y],Z) + F([Z,X],Y)\\
&\quad + F([Y,Z],X) - F([Y,Z],X) - F([\phi Y,\varphi Z],X) - g([\varphi Y,Z],X) + \eta[\varphi Y, Z]\eta(X)\\
&\quad - g([Y,\varphi Z],X) + \eta(X)\eta([Y,\varphi Z]) + \varphi Y(\eta(Z))\eta(X) - \varphi Z(\eta(Y))\eta(X) - \eta[\varphi Y, Z]\eta(X)\\
&\quad - \eta[Y,\varphi Z]\eta(X) + \varphi Y(\eta(X))\eta(Z) - \eta[\varphi Y, X]\eta(Z) - \varphi Z(\eta(X))\eta(Y) + \eta[\varphi Z, X]\eta(Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi Y g(Z,X) - \varphi Y\big(\eta(Z)\eta(X)\big) - \varphi Z g(X,Y) + \varphi Z\big(\eta(X)\eta(Y)\big) + g([X,\varphi Y],Z) + g([\varphi Z, X],Y)\\
&+ YF(X,Z) - ZF(X,Y) + F([X,Y],Z) + F([Z,X],Y) - g([\varphi Y,Z],X) - g([Y,\varphi Z],X)\\
&+ \varphi Y(\eta(Z))\eta(X) - \varphi Z(\eta(Y))\eta(X) + \varphi Y(\eta(X))\eta(Z) - \varphi Z(\eta(X))\eta(Y)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte;

$$\varphi Y(\eta(Z))\eta(X) + \varphi Y(\eta(X))\eta(Z) = \varphi Y\big(\eta(X)\eta(Z)\big)$$

ve

$$-\varphi Z(\eta(Y))\eta(X) - \varphi Z(\eta(X))\eta(Y) = -\varphi Z\big(\eta(X)\eta(Y)\big)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&-3dF(X,\varphi Y,\varphi Z) - 3dF(X,Y,Z) - g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X) + N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)\\
&+2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y)\\
&= \varphi Y g(X,Z) - \varphi Y\big(\eta(Z)\eta(X)\big) - \varphi Z g(X,Y) + \varphi Z\big(\eta(X)\eta(Y)\big) + g([X,\varphi Y],Z) + g([\varphi Z, X],Y)\\
&+ YF(X,Z) - ZF(X,Y) + F([X,Y],Z) + F([Z,X],Y) - g([\varphi Y,Z],X) - g([Y,\varphi Z],X)\\
&+ \varphi Y\big(\eta(X)\eta(Z)\big) - \varphi Z\big(\eta(X)\eta(Y)\big)
\end{aligned}$$

$$-3dF(X,\varphi Y,\varphi Z)-3dF(X,Y,Z)-g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X)+N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)$$
$$+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y)$$
$$=\varphi Yg(X,Z)-\varphi Zg(X,Y)+g([X,\varphi Y],Z)+g([\varphi Z,X],Y)$$
$$+YF(X,Z)-ZF(X,Y)+F([X,Y],Z)+F([Z,X],Y)+g([\varphi Z,Y],X)-g([Y,\varphi Z],X)$$
$$=2g((\nabla_X\varphi)Y,Z)$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.4.2: (φ,ξ,η,g) paradeğme metrik yapısına sahip ve $F=d\eta$ ve $N^{(2)}=0$ özelliğindeki M manifoldu için

$$2g((\nabla_X\varphi)Y,Z)=-g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X)+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y) \qquad (3.4.9)$$

dır (Zamkovoy 2009).

İspat: Yardımcı Teorem 3.4.1 de $dF=d^2\eta=0$ (Poincare yardımcı önermesinden) eşitlikleri kullanılırsa ispat kolayca elde edilir.

Sonuç 3.4.1: (3.4.9) denkleminde X yerine ξ alınırsa

$$2g((\nabla_\xi\varphi)Y,Z)=-g(N^{(1)}(Y,Z),\varphi\xi)+2d\eta(\varphi Y,\xi)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,\xi)\eta(Y)$$
$$=2F(\varphi Y,\xi)\eta(Z)-2F(\varphi Z,\xi)\eta(Y);\ (2.5.1)\,den$$
$$=2g(\varphi Y,\varphi\xi)\eta(Z)-2g(\varphi Z,\varphi\xi)\eta(Y)$$
$$=0$$

elde edilir ve böylece bir paradeğme metrik manifoldda

$$\nabla_\xi\varphi=0 \qquad (3.4.10)$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.4.2: Bir paradeğme metrik manifoldda ξ nın integral eğrisi bir geodeziktir (Zamkovoy 2009).

İspat: $g(\xi,\xi)=1$ olduğundan herhangi bir X vektör alanı için

$$g(\nabla_X\xi,\xi)=0 \qquad (3.4.11)$$

dır. X,ξ ya ortogonal olan bir vektör alanı olmak üzere, ∇ bir metrik konneksiyon olduğundan $g(\nabla_{\xi}\xi,\xi)=0$ olduğu açıktır ve ξ ya ortogonal bir X vektör alanı için;

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\xi}\xi,X) = -g(\xi,\nabla_{\xi}X) &= -g(\xi,\nabla_X\xi+[\xi,X]) \\ &= -g(\xi,\nabla_X\xi)-g(\xi,[\xi,X]) \;;\; (3.4.11)den \\ &= -g(\xi,[\xi,X]) \\ &= -\eta([\xi,x]) \\ &= 2d\eta(\xi,X) \end{aligned}$$

elde edilir. $d\eta(\xi,X)=0$ olduğundan dolayı

$g(\nabla_{\xi}\xi,X)=0$ sonucuna ulaşılır ve buradan da

$$\nabla_{\xi}\xi=0 \tag{3.4.12}$$

olur.

Bir paradeğme manifold üzerinde

$$h:\chi(M)\to\chi(M)$$
$$X\to h(X)=\frac{1}{2}(L_{\xi}\varphi)(X)=\frac{1}{2}\left(L_{\xi}\varphi(X)-\varphi L_{\xi}(X)\right)$$

olacak şekilde bir h tensör alanı tanımlansın.

X yerine ξ alınırsa

$$h\xi=\frac{1}{2}(L_{\xi}\varphi)(X)=\varphi[\xi,\xi]-[\varphi\xi,\xi]=0$$
$$h\xi=0 \tag{3.4.13}$$

olduğu görülür (Zamkovoy 2009).

Yardımcı Teorem 3.4.3: Bir paradeğme metrik manifoldda, h bir simetrik operatördür. Ayrıca

$$\nabla_X\xi=-\varphi X+\varphi hX \tag{3.4.14}$$

dır. h, φ ile anti-değişmelidir ve iz$h=0$=hξ dır (Zamkovoy 2009).

İspat: Bir paradeğme metrik manifoldda (3.4.10) ve (3.4.11) özellikleri sağlandığından

$$\begin{aligned}
g\big((L_\xi\varphi)X,Y\big) &= g\big(\varphi[X,\xi]-[\varphi X,\xi],Y\big)\\
&= g\big(\varphi\nabla_X\xi-\varphi\nabla_\xi X-\nabla_{\varphi X}\xi+\nabla_\xi\varphi X,Y\big)\\
&= g\big((\nabla_\xi\varphi)(X)-\nabla_{\varphi X}\xi+\varphi\nabla_X\xi,Y\big)\\
&= g\big(-\nabla_{\varphi X}\xi+\varphi\nabla_X\xi,Y\big)
\end{aligned}$$

dır. Burada X veya Y yerine ξ alırsak denklem sıfır olur. (3.3.7) denklemi, ξ ya ortogonal olan X ve Y vektör alanları için $\eta([\varphi X,Y])+\eta([X,\varphi Y])=0$ olarak elde edilir. Ayrıca metrik konneksiyonu özelliğinden

$$-g(\nabla_{\varphi X}\xi,Y)-g(\nabla_X\xi,\varphi Y)=g(\nabla_{\varphi X}Y,\xi)+g(\nabla_X\varphi Y,\xi)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
g(hX,Y)=g\big((L_\xi\varphi)X,Y\big) &= g(\nabla_{\varphi X}Y,\xi)+g(\nabla_X\varphi Y,\xi)\\
&= \eta(\nabla_{\varphi X}Y)+\eta(\nabla_X\varphi Y)\\
&= \eta(\nabla_Y\varphi X)+\eta(\nabla_{\varphi Y}X)\\
&= g\big((L_\xi\varphi)Y,X\big)\\
&= g(X,hY)
\end{aligned}$$

olur ve böylece h simetriktir.

(3.4.9) nolu denklemde Y yerine ξ yazıp $L_\xi\varphi$ nın simetriği alınırsa

$$\begin{aligned}
2g\big((\nabla_X\xi),Z\big) &= -g\big(N^{(1)}(\xi,Z),\varphi X\big)+2d\eta(\varphi\xi,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(\xi)\\
&= -g\big(\varphi^2[\xi,Z]+[\varphi\xi,\varphi Z]-\varphi[\xi,\varphi Z]-\varphi[\varphi\xi,Z]+2d\eta(\xi,Z)\xi,\varphi X\big)\\
&\quad -2d\eta(\varphi Z,X)\\
&= -g\big(\varphi^2[\xi,Z]-\varphi[\xi,\varphi Z],\varphi X\big)-2d\eta(\varphi Z,X)\\
&= g\big(\varphi(L_\xi\varphi)Z,\varphi X\big)-2g(\varphi Z,\varphi X)\\
&= -g\big((L_\xi\varphi)Z,X\big)+\eta\big((L_\xi\varphi)Z\big)\eta(X)+2g(Z,X)-2\eta(Z)\eta(X)\\
&= -g\big((L_\xi\varphi)X,Z\big)+2g(X,Z)-2g\big(\eta(X)\xi,Z\big)
\end{aligned}$$

veya

$$2g\big(\nabla_X\varphi\xi-\varphi\nabla_X\xi,Z\big)=-g\big((L_\xi\varphi)X+2X-2\eta(X)\xi,Z\big)$$

elde edilir ve buradan

$$-\varphi\nabla_X\xi=-\frac{1}{2}(L_\xi\varphi)X+X-\eta(X)\xi$$

sonucuna ulaşılır. Bu denklemin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$-\nabla_X\xi=-\frac{1}{2}\varphi(L_\xi\varphi)X+\varphi X \qquad (3.4.15)$$

olarak bulunur. h tensör alanı

$$h = \frac{1}{2} L_{\xi}\varphi = \frac{1}{2} N^{(3)}$$

şeklinde tanımlandığından (3.4.15) denklemi

$$\nabla_X \xi = -\varphi X + \varphi h X \tag{3.4.16}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi h nın anti-değişmeli olduğu gösterilsin. (3.3.1) ve (3.4.14) denklemlerinden

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,Y) = 2g(X,\varphi Y) &= g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X) \\ &= g(-\varphi X + \varphi h X, Y) - g(-\varphi Y + \varphi h Y, X) \\ &= -g(\varphi X, Y) + g(\varphi h X, Y) + g(\varphi Y, X) - g(\varphi h Y, X) \end{aligned}$$

dır. φ nin antisimetriliğini ve h nın simetriliğini kullanarak

$$2g(X,\varphi Y) = g(X,\varphi Y) + g(\varphi h X, Y) + g(X,\varphi Y) + g(hY,\varphi X)$$

elde edilir ve bu son denklemden

$$g\big((\varphi h + h\varphi)X, Y\big) = 0$$

olur. Bu durumda

$$h\varphi + \varphi h = 0 \tag{3.4.17}$$

olması h nın antisimetrik olduğunu gösterir. (3.4.16) denklemine φ etki ettirilirse $\varphi(\nabla_X \xi) = -X + \eta(X)\xi + hX$ denklemi elde edilir. Bu son denklemde X yerine ξ yazılıp ve $\nabla_\xi \xi = 0$ özeliği kullanılırsa hξ=0 elde edilir. Bir lineer dönüşümünün izi baz seçiminden bağımsız olduğundan daha önce tanımlanan φ-bazı göz önüne alınsın. Böylece

$$\begin{aligned} \text{İz h} &= \sum_{i=1}^{n} \left[g(he_i, e_i) - g(h\varphi e_i, \varphi e_i) + g(h\xi, \xi) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[g(he_i, e_i) + g(\varphi h e_i, \varphi e_i) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[g(he_i, e_i) - g(he_i, e_i) + \eta(he_i)\eta(e_i) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

3.5. Para-Sasakian Manifoldlar

Tanım 3.5.1: $M^{2n+1},(\varphi,\xi,\eta,g)$ paradeğme metrik yapısına sahip bir paradeğme metrik manifold olsun. Eğer M nin paradeğme metrik yapısı normal ise bu durumda M manifoldu bir para-Sasakian yapıya sahiptir ve M manifolduna da **para-Sasakian manifold** denir. Bir para-Sasakian manifold, bir paradeğme metrik manifolddur fakat tersi her zaman doğru değildir (Zamkovoy 2009).

Teorem 3.5.1: M^{2n+1} bir paradeğme metrik manifold olsun. Bu durumda M^{2n+1} de bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen paradeğme metrik yapısı bir para-Sasakian yapıdır gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X\varphi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X \tag{3.5.1}$$

denkleminin sağlanmasıdır, burada ∇, g ye göre yarı-Riemann konneksiyondur. Özellikle bir para-Sasakian manifold, K-paradeğmedir (Zamkovoy 2009).

İspat: M^{2n+1} de (φ,ξ,η,g) hemen hemen paradeğme metrik yapısı bir para-Sasakian yapı olsun. Eğer (φ,ξ,η,g) yapısı bir normal paradeğme metrik yapı ise $F = d\eta,\ N^{(1)} = 0$ ve $N^{(2)} = 0$ dır. Bu durumda

(3.2.2) denklemlerinden (3.4.4) denklemi

$$\begin{aligned}
2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y)\\
&= 2g(\varphi Y,\varphi X)\eta(Z) - 2g(\varphi Z,\varphi X)\eta(Y)\\
g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= g(\varphi Y,\varphi X)\eta(Z) - g(\varphi Z,\varphi X)\eta(Y)\\
&= \big[-g(Y,X)+\eta(Y)\eta(X)\big]\eta(Z) - \big[-g(Z,X)+\eta(Z)\eta(X)\big]\eta(Y)\\
&= -g(X,Y)\eta(Z) + g(X,Z)\eta(Y)\\
g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= g\big(-g(X,Y)\xi + \eta(Y)X, Z\big)
\end{aligned}$$

şeklinde olur ve buradan da (3.5.1) denklemi elde edilir.

Tersine bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen paradeğme metrik yapısı (3.5.1) denklemini sağlasın. (3.5.1) de Y yerine ξ alınırsa

$$(\nabla_X \varphi)\xi = -g(X,\xi)\xi + \eta(\xi)X$$
$$\nabla_X \varphi\xi - \varphi\nabla_X \xi = -\eta(X)\xi + X$$
$$-\varphi\nabla_X \xi = -\eta(X)\xi + X$$

elde edilir. Bu son denkleme φ uygulanırsa

$$-\varphi^2\nabla_X \xi = -\eta(X)\varphi\xi + \varphi X$$
$$-\nabla_X \xi = \varphi X$$

$$\nabla_X \xi = -\varphi X \tag{3.5.2}$$

olur.

$$\begin{aligned} -g(\varphi X, Y) - g(X, \varphi Y) &= g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = 0 \\ &= (L_\xi g)(X,Y) = 0 \end{aligned}$$

dır. Yani ξ nın bir Killing vektör alanı olduğu görülür.

Bu durumda

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\{X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{(\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X)\} \\ &= \frac{1}{2}\{g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi)\} \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) = -g(\varphi X, Y) = F(X,Y) \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylece (φ, ξ, η, g) nin bir paradeğme metrik yapı olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi Nijenhuis torsiyonu yardımıyla yapının normal olduğu gösterilsin. (3.5.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} [\varphi,\varphi](X,Y) &= \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \\ &= \varphi^2\nabla_X Y - \varphi^2\nabla_Y X + \nabla_{\varphi X}\varphi Y - \nabla_{\varphi Y}\varphi X - \varphi\nabla_{\varphi X} Y + \varphi\nabla_Y \varphi X - \varphi\nabla_X \varphi Y + \varphi\nabla_{\varphi Y} X \\ &= \varphi(\nabla_Y \varphi)X - (\nabla_{\varphi Y}\varphi)X - \varphi(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y \\ &= \varphi(-g(Y,X)\xi + \eta(X)Y) - (-g(\varphi Y, X)\xi + \eta(X)\varphi Y) \\ &\quad -\varphi(-g(X,Y)\xi + \eta(Y)X) + (-g(\varphi X, Y)\xi + \eta(Y)\varphi X) \\ &= g(\varphi Y, X)\xi - g(\varphi X, Y)\xi \\ &= 2g(X, \varphi Y)\xi = 2F(X,Y)\xi = 2d\eta(X,Y)\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$[\varphi,\varphi] - 2d\eta \otimes \xi = 0$$

dır ve buradan da (φ,ξ,η,g) paradeğme metrik yapısının bir para-Sasakian yapı olduğu görülür.

3.6. Paradeğme Manifoldların Eğriliği

Önerme 3.6.1: Bir M^{2n+1} paradeğme metrik manifoldunda

$$(\nabla_{\xi}h)X=-\varphi X+h^{2}\varphi X+\varphi R(\xi,X)\xi \tag{3.6.1}$$

$$\left(R(\xi,X)\xi+\varphi R(\xi,\varphi X)\xi\right)=2\varphi^{2}X-2h^{2}X \tag{3.6.2}$$

dır. Burada ξ karakteristik vektör alanıdır ve $X\in M^{2n+1}$ dir (Zamkovoy 2009).

İspat: X bir vektör alanı olmak üzere M^{2n+1} in yarı-Riemann eğrilik tensörü (3.4.12) den

$$\begin{aligned}R(\xi,X)\xi&=\nabla_{\xi}\nabla_{X}\xi-\nabla_{X}\nabla_{\xi}\xi-\nabla_{[\xi,X]}\xi\\&=\nabla_{\xi}\nabla_{X}\xi-\nabla_{[\xi,X]}\xi\end{aligned}$$

dır. Bu durumda (3.4.10),(3.4.14),(3.4.16) eşitliklerinden

$$=\nabla_{\xi}(-\varphi X+\varphi hX)+\varphi[\xi,X]-\varphi h[\xi,X] \tag{3.6.3}$$

$$\begin{aligned}&=-\nabla_{\xi}\varphi X+\nabla_{\xi}\varphi hX+\varphi\nabla_{\xi}X-\varphi\nabla_{X}\xi-\varphi h\nabla_{\xi}X+\varphi h\nabla_{X}\xi\\&=-\varphi\nabla_{\xi}X+\varphi\nabla_{\xi}hX+\varphi\nabla_{\xi}X-\varphi\nabla_{X}\xi-\varphi h\nabla_{\xi}X+\varphi h\nabla_{X}\xi\\&=\varphi\nabla_{\xi}hX-\varphi(-\varphi X+\varphi hX)-\varphi h\nabla_{\xi}X+\varphi h(-\varphi X+\varphi hX)\\&=\varphi\nabla_{\xi}hX+\varphi^{2}X-\varphi^{2}hX-\varphi h\nabla_{\xi}X-\varphi h\varphi X+\varphi h\varphi hX\\&=\varphi^{2}X-\varphi^{2}h^{2}X+\varphi(\nabla_{\xi}h)X\\&=\varphi^{2}X-h^{2}X+\varphi(\nabla_{\xi}h)X\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece

$$R(\xi,X)\xi=\varphi^{2}X-h^{2}X+\varphi(\nabla_{\xi}h)X \tag{3.6.4}$$

bulunur ve (3.6.3) denklemine φ uygulanırsa

$$\begin{aligned}\varphi R(\xi,X)\xi&=-\varphi^{2}\nabla_{\xi}(X-hX)+\varphi^{2}[\xi,X]-\varphi^{2}h[\xi,X]\\&=-\nabla_{\xi}(X-hX)+\eta\left(\nabla_{\xi}(X-hX)\right)\xi+[\xi,X]-\eta([\xi,X])\xi\\&\quad-h[\xi,X]+\eta(h[\xi,X])\xi\end{aligned}$$

$$= -\nabla_{\xi} X + \nabla_{\xi} hX + \eta(\nabla_{\xi} X)\xi - \eta(\nabla_{\xi} hX)\xi + \nabla_{\xi} X - \nabla_X \xi$$
$$- \eta(\nabla_{\xi} X)\xi + \eta(\nabla_X \xi)\xi - h\nabla_{\xi} X + h\nabla_X \xi + \eta(h\nabla_{\xi} X)\xi$$
$$- \eta(h\nabla_X \xi)\xi$$
$$= (\nabla_{\xi} h)X - \nabla_X \xi + h\nabla_X \xi$$

elde edilir. Ayrıca (3.4.14) ve (3.4.16) denklemleri kullanılırsa

$$\varphi R(\xi, X)\xi = (\nabla_{\xi} h)X - \nabla_X \xi + h\nabla_X \xi \tag{3.6.5}$$

$$= (\nabla_{\xi} h)X + \varphi X - \varphi hX - h\varphi X + h\varphi hX$$
$$= (\nabla_{\xi} h)X + \varphi X - \varphi hX + \varphi hX - h^2\varphi X$$

$$\varphi R(\xi, X)\xi = (\nabla_{\xi} h)X + \varphi X - h^2\varphi X \tag{3.6.6}$$

olur ve böylelikle (3.6.1) denklemi elde edilmiş olur.

(3.6.6) denkleminde X yerine φX yazılırsa

$$\varphi R(\xi, \varphi X)\xi = (\nabla_{\xi} h)\varphi X + \varphi^2 X - h^2\varphi^2 X$$

olur. Ayrıca (3.4.10), (3.4.16), (3.4.13) denklemlerinden

$$= -\varphi(\nabla_{\xi} h)X + \varphi^2 X - h^2\varphi^2 X$$

$$= -h^2 X + \varphi^2 X - \varphi(\nabla_{\xi} h)X \tag{3.6.7}$$

elde edilir. Bu durumda (3.6.4) ve (3.6.7) denklemleri toplanırsa (3.6.2) denklemi elde edilir.

Sonuç 3.6.1: Bir M^{2n+1} paradeğme metrik manifoldunda, ξ doğrultusunda Ricci eğriliği

$$S(\xi, \xi) = -2n + izh^2$$

şeklinde verilir (Zamkovoy 2009).

İspat: $\{e_i, \varphi e_i, \xi\}$ lokal ortonormal φ-bazı göz önüne alınsın. O halde (2.2.2) nolu eşitlikte $X = Y = \xi$ alınırsa

$$S(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, \xi)\xi, e_i) - g(R(\varphi e_i, \xi)\xi, \varphi e_i) + g(R(\xi, \xi)\xi, \xi)$$

eşitliği elde edilir. (3.6.2) denklemi yardımıyla

$$g(R(\xi,X)\xi,X)+g(\varphi R(\xi,\varphi X)\xi,X)=2g(\varphi^2X-h^2X,X)$$

elde edilir. Yarı-Riemann eğrilik tensörü özelikleri kullanılarak

$$g(R(X,\xi)\xi,X)-g(R(\varphi X,\xi)\xi,\varphi X)=-2g(\varphi^2X-h^2X,X)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin izi alınacak olunursa

$$\begin{aligned}S(\xi,\xi)&=\sum_{i=1}^{n}g(R(e_i,\xi)\xi,e_i)-g(R(\varphi e_i,\xi)\xi,\varphi e_i)\\&=-2\sum_{i=1}^{n}\big(g(\varphi^2e_i,e_i)-g(h^2e_i,e_i)\big)\\&=-2\sum_{i=1}^{n}\big(g(e_i,e_i)-g(h^2e_i,e_i)\big)\\&=-2n+izh^2\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.6.2: M^{2n+1} bir K-paradeğme manifold olsun. M^{2n+1} de Q Ricci eğrilik operatörü olmak üzere

$$Q\xi=-2n\xi$$

dir (Zamkovoy 2009).

İspat: M^{2n+1} bir K-paradeğme manifold olsun.

$$\begin{aligned}g(R(X,\xi)Y,X)&=R(X,Y,X,\xi)\\&=g(\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla_XY}\xi,X)-g(\nabla_Y\nabla_X\xi-\nabla_{\nabla_YX}\xi,X)\end{aligned}\tag{3.6.8}$$

dır. Bir K-paradeğme manifoldda ξ Killing vektör alanı yani $L_\xi g=0$ olduğundan, M^{2n+1} de bir X,Y vektör alanı için

$$\begin{aligned}0=(L_\xi g)(X,Y)&=L_\xi g(X,Y)-g(L_\xi X,Y)-g(X,L_\xi Y)\\&=g(\nabla_\xi X,Y)+g(X,\nabla_\xi Y)-g(\nabla_\xi X,Y)+g(\nabla_X\xi,Y)\\&\quad-g(X,\nabla_\xi Y)+g(X,\nabla_Y\xi)\end{aligned}$$

dır ve buradan

$$g(\nabla_X\xi,Y)+g(X,\nabla_Y\xi)=0\tag{3.6.9}$$

olur. Buradan Y yerine X alınırsa

$$g(\nabla_X\xi,X)=0\tag{3.6.10}$$

elde edilir. Ayrıca (3.6.10) denkleminin Y vektör alanına göre türevi alınırsa

$$g(\nabla_Y \nabla_X \xi, X) + g(\nabla_X \xi, \nabla_Y X) = 0 \tag{3.6.11}$$

elde edilir. Ayrıca (3.6.9) denkleminden

$$g(\nabla_{\nabla_Y X} \xi, X) + g(\nabla_Y X, \nabla_X \xi) = 0 \tag{3.6.12}$$

denklemi elde edilir. Bu durumda (3.6.11) ve (3.6.12) denklemlerinden

$$g(\nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{\nabla_Y X} \xi, X) = 0$$

olur ve böylece (3.6.8) denkleminden

$$\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi = R(X, \xi) Y$$

elde edilir. Bu durumda bir K-paradeğme manifoldda (3.5.2) denklemi yardımıyla

$$(\nabla_X \varphi) Y = R(\xi, X) Y \tag{3.6.13}$$

denklemi elde edilir.

X, ξ ya ortogonal olan bir birim vektör alanı olsun. Bu durumda (3.4.9) denkleminde Y yerine X alınıp (3.6.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2g\big((\nabla_X \varphi)X, Z\big) &= -g\big(N^{(1)}(X, Z), \varphi X\big) + 2d\eta(\varphi X, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(X) \\
&= -g\big([\varphi, \varphi](X, Z) - 2d\eta(X, Z)\xi, \varphi X\big) - 2g(X, X)\eta(Z) \\
&\quad + 2\eta(X)\eta(X)\eta(Z) + 2g(Z, X)\eta(X) - 2\eta(Z)\eta(X)\eta(X) \\
&= -g\big([X, Z], \varphi X\big) - g\big([\varphi X, \varphi Z], \varphi X\big) - g\big([\varphi X, Z], X\big) - g\big([X, \varphi Z], X\big) \\
&\quad - 2\eta(Z) \\
&= g(\varphi \nabla_X Z, X) - g(\varphi \nabla_Z X, X) - g(\nabla_{\varphi X} \varphi Z, \varphi X) + g(\nabla_{\varphi Z} \varphi X, \varphi X) \\
&\quad - g(\varphi \nabla_{\varphi X} Z, \varphi X) + g(\varphi \nabla_Z \varphi X, \varphi X) - g(\varphi \nabla_X \varphi Z, \varphi X) \\
&\quad + g(\varphi \nabla_{\varphi Z} X, \varphi X) - 2\eta(Z) \\
&= -g\big((\nabla_X \varphi)Z, X\big) + g\big((\nabla_Z \varphi)X, X\big) + g\big((\nabla_{\varphi X} \varphi)Z, \varphi X\big) \\
&\quad - g\big((\nabla_{\varphi Z} \varphi)X, \varphi X\big) - 2\eta(Z) \\
&= -g(R(\xi, X)Z, X) + g(R(\xi, Z)X, X) \\
&\quad + g(R(\xi, \varphi X)Z, X) - g(R(\xi, \varphi Z)X, X) - 2\eta(Z) \\
&= -2\eta(Z) \\
&= 2g(\xi, Z)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda φ bazına ait bir $\{X_i\}$ lokal ortonormal baz alınırsa

$$\begin{aligned}
g(Q\xi, Y) &= \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i g(R(\xi, X_i)X_i, Y) = \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i g((\nabla_{X_i} \varphi)X_i, Y) \\
&= -2ng(\xi, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.6.3: Bir para-Sasakian manifoldda

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X$$

dır (Zamkovoy 2009).

İspat: (3.5.1) ve (3.5.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\ &= -\nabla_X \varphi Y + \nabla_Y \varphi X + \varphi[X,Y] \\ &= -(\nabla_X \varphi)Y + (\nabla_Y \varphi)X \\ &= g(X,Y)\xi - \eta(Y)X - g(Y,X)\xi + \eta(X)Y \\ &= \eta(X)Y - \eta(Y)X \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi hemen hemen paradeğme manifoldlar ile ilgili örnekler verilecektir.

Örnek 3.6.1: $\mathbb{R}^3$ Kartezyen uzayında (x,y,z) Kartezyen koordinatlar olsun. $\mathbb{R}^3$ de (φ,ξ,η) ile standart hemen hemen paradeğme yapısı

$$\varphi\partial_1 = \partial_2 - 2x\partial_3,\ \ \varphi\partial_2 = \partial_1,\ \ \varphi\partial_3 = 0,\ \ \xi = \partial_3,\ \ \eta = 2xdy + dz \qquad (3.6.13)$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}\ \ ve\ \ \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olacak şekilde verilsin.

Kolayca,

$$N_\varphi(\partial_i,\partial_j) - 2d\eta(\partial_i,\partial_j)\xi = 0,\ \ 1 \le i < j \le 3,$$

sağlandığı görülebilir. Böylece (3.3.3) şartı sağlanır ve yapı normaldir.

$M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^3$ olsun ve (3.6.13) daki bir normal hemen hemen paradeğme metrik yapısı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

(φ,ξ,η) yapı ve g Lorentz metriği

$$[g(\partial_i,\partial_j)] = \begin{bmatrix} -2z & 0 & 0 \\ 0 & 4x^2 + 2z & 2x \\ 0 & 2x & 1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde verilsin.

Yarı-Riemann konneksiyonu yardımıyla

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = -\frac{x}{z}\partial_2 + \left(1+\frac{2x^2}{z}\right)\partial_3,\ \nabla_{\partial_1}\partial_2 = \nabla_{\partial_2}\partial_1 = \frac{x}{z}\partial_2 + \left(1-\frac{2x^2}{z}\right)\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_1}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_1 = \nabla_{\partial_2}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_2 = \frac{1}{2z}\partial_1 + \frac{1}{2z}\partial_2 - \frac{x}{z}\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_2}\partial_2 = \frac{2x}{z}\partial_1 + \frac{x}{z}\partial_2 - \left(1+\frac{2x^2}{z}\right)\partial_3,\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 = 0.$$

bulunur.

Bir 3-boyutlu M hemen hemen paradeğme metrik manifoldu için geçerli olan

$$\nabla_x\xi = \alpha(X - \eta(X)\xi) + \beta\varphi X$$

eşitliği ve yukarıda verilen ilişkilendirmeleri kullanarak $\alpha = \beta = (2z)^{-1}$ bulunur ve (φ,ξ,η,g) yapısı quasi-para-Sasakian değildir (Welyczko 2009).

Örnek 3.6.2: $M = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ olsun ve (3.6.13) deki bir normal hemen hemen paradeğme metrik yapısı aşağıdaki şekilde tanımlansın.

(φ,ξ,η) yapı ve g Lorentz metriği

$$\left[g(\partial_i,\partial_j)\right] = \begin{bmatrix} -x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5x^2 & 2x \\ 0 & 2x & 1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde verilsin.

Yarı-Riemann konneksiyonu yardımıyla

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = \frac{1}{x}\partial_1,\ \nabla_{\partial_1}\partial_2 = \nabla_{\partial_2}\partial_1 = \frac{3}{x}\partial_2 - 5\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_1}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_1 = \frac{1}{x^2}\partial_2 - \frac{2}{x}\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_2}\partial_2 = \frac{5}{x}\partial_1,\quad \nabla_{\partial_2}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_2 = \frac{1}{x^2}\partial_1,\ \nabla_{\partial_3}\partial_3 = 0.$$

bulunur.

Bir 3-boyutlu M hemen hemen paradeğme metrik manifoldu için geçerli olan

$$\nabla_x\xi = \alpha(X - \eta(X)\xi) + \beta\varphi X$$

eşitliği ve yukarıda verilen ilişkilendirmeleri kullanarak $\alpha = 0\, ve\, \beta = x^{-2}$ bulunur ve (φ, ξ, η, g) yapısı quasi-para-Sasakian dır ve para-Sasakian değildir (Welyczko 2009).

4. NORMAL HEMEN HEMEN PARADEĞME METRİK MANİFOLDLAR

Bu bölüm orijinal sonuçlar içermektedir.

4.1. Normal Hemen Hemen Paradeğme Metrik Manifoldlar

Tanım 4.1.1: $dF=0$ ve (φ,ξ,η) normal ise (φ,ξ,η,g) hemen hemen paradeğme metrik yapısına **quasi-para-Sasakian** denir (Welyczko 2009).

Tanım 4.1.2: $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir paradeğme metrik manifold olsun. O zaman, verilen bu yapı

$$dF=0\ (F,\ \text{kapalıdır}),\quad d\eta=0\ (\eta,\text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna **para-kosimplektik manifold** denir (Dacko ve Olzsak 2007).

Önerme 4.1.1: Bir $(2n+1)-$boyutlu hemen hemen paradeğme metrik manifoldun normal olması için gerek ve yeter koşul

$$\varphi(\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y+(\nabla_X\eta)(Y)=0 \tag{4.1.1}$$

olmasıdır. Burada ∇ ,yarı-Riemann konneksiyonudur (Welyczko 2009).

Önerme 4.1.2: Bir $3-$boyutlu M hemen hemen paradeğme metrik manifoldu

$$(\nabla_X\varphi)Y=g(\varphi\nabla_X\xi,Y)\xi-\eta(Y)\varphi\nabla_X\xi \tag{4.1.2}$$

denklemini sağlar (Welyczko 2009).

Önerme 4.1.3: Bir $3-$boyutlu M hemen hemen paradeğme metrik manifoldu için aşağıdaki üç koşul birbirine denktir:

(a) M normaldir,

(b) M üzerinde

$$(\nabla_X \varphi)Y = \beta(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \alpha(g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X) \tag{4.1.3}$$

şartını sağlayan α, β fonksiyonları vardır.

(c) M üzerinde

$$\nabla_X \xi = \alpha(X - \eta(X)\xi) + \beta\varphi X \tag{4.1.4}$$

şartını sağlayan α, β fonksiyonları vardır (Welyczko 2009).

$(4.1.3)$ ve $(4.1.4)$ nolu eşitlikleri için tanımlı α, β fonksiyonları için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.1: α, β fonksiyonları,

$$2\alpha = \text{İz}\{X \to \nabla_X \xi\},\ 2\beta = \text{İz}\{X \to \varphi\nabla_X \xi\} \tag{4.1.5}$$

ile verilir (Welyczko 2009).

Önerme 4.1.4: Bir $3-$boyutlu M hemen hemen paradeğme metrik manifoldu için aşağıdaki üç koşul birbirine denktir:

(a) M quasi-para-Sasakian dır,

(b) M üzerinde

$$(\nabla_X \varphi)Y = \beta(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) \tag{4.1.6}$$

olacak şekilde bir β fonksiyonu vardır.

(c) M üzerinde

$$\nabla_X \xi = \beta\varphi X \tag{4.1.7}$$

olacak şekilde bir β fonksiyonu vardır (Welyczko 2009).

Özellikle, böyle bir manifold para-Sasakian dır ancak ve ancak $(4.1.6)$ ya da $(4.1.7)$ koşullarında $\beta = -1$ için.

Bu bölümün amacı M üzerinde bir normal hemen hemen paradeğme yapısının eğrilik özelliklerini bulmaktır. (φ, ξ, η, g) hemen hemen paradeğme yapısı olsun. (4.1.2) nolu eşitliğe (4.1.4) nolu eşitlik uygulandığında (4.1.3) eşitliği elde edilir

Teorem 4.1.1: M , 3-boyutlu normal hemen hemen paradeğme manifold olsun. Bu takdirde M nin Ricci tensörü aşağıdaki gibidir.

İspat: (4.1.4) nolu eşitliğin kovaryant türevi alındığında ve (4.1.3) nolu eşitlik kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y\xi &= \nabla_X\big(\alpha(Y-\eta(Y)\xi)+\beta\varphi Y\big)\\
&= X(\alpha)(Y-\eta(Y)\xi)+\alpha\nabla_X Y-\alpha X\eta(Y)\xi-\alpha\eta(Y)\nabla_X\xi\\
&\quad + X(\beta)\varphi Y+\beta\nabla_X\varphi Y\\
&= X(\alpha)(Y-\eta(Y)\xi)+\alpha\nabla_X Y-\alpha\big(g(\nabla_X Y,\xi)+g(Y,\nabla_X\xi)\big)\xi\\
&\quad -\alpha\eta(Y)\big(\alpha(X-\eta(X)\xi)+\beta\varphi X\big)+X(\beta)\varphi Y+\beta\nabla_X\varphi Y\\
&= X(\alpha)(Y-\eta(Y)\xi)+\alpha\nabla_X Y-\alpha\begin{pmatrix}\eta(\nabla_X Y)+\alpha g(X,Y)\\ -\alpha\eta(X)\eta(Y)+\beta g(Y,\varphi X)\end{pmatrix}\xi\\
&\quad -\alpha^2\eta(Y)X+\alpha^2\eta(X)\eta(Y)\xi-\alpha\beta\eta(Y)\varphi X+X(\beta)\varphi Y+\beta\nabla_X\varphi Y\\
&= X(\alpha)(Y-\eta(Y)\xi)+\alpha\nabla_X Y-\alpha\eta(\nabla_X Y)\xi+\alpha^2 g(\varphi X,\varphi Y)\xi\\
&\quad -\alpha\beta g(Y,\varphi X)\xi-\alpha^2\eta(Y)X+\alpha^2\eta(X)\eta(Y)\xi-\alpha\beta\eta(Y)\varphi X+X(\beta)\varphi Y\\
&\quad +\beta\nabla_X\varphi Y\\
&= X(\alpha)\varphi^2 Y+\alpha\big(\nabla_X Y-\eta(\nabla_X Y)\xi\big)+\beta\nabla_X\varphi Y-\alpha\beta g(Y,\varphi X)\xi-\alpha^2\eta(Y)X\\
&\quad +\alpha^2\eta(X)\eta(Y)\xi-\alpha\beta\eta(Y)\varphi X+X(\beta)\varphi Y+\alpha^2 g(\varphi X,\varphi Y)\xi\\
&= X(\alpha)\varphi^2 Y+\alpha\big(\nabla_X Y-\eta(\nabla_X Y)\xi\big)+\beta\varphi\nabla_X Y-\beta^2 g(\varphi X,\varphi Y)\xi-\alpha\beta g(X,\varphi Y)\xi\\
&\quad -\beta^2\eta(Y)\varphi^2 X-\alpha\beta\eta(Y)\varphi X+\alpha\beta g(\varphi Y,X)\xi-\alpha^2\eta(Y)X+\alpha^2\eta(X)\eta(Y)\xi\\
&\quad -\alpha\beta\eta(Y)\varphi X+X(\beta)\varphi Y+\alpha^2 g(\varphi X,\varphi Y)\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y\xi &= \alpha\big(\nabla_X Y-\eta(\nabla_X Y)\xi\big)+\beta\varphi\nabla_X Y+(\alpha^2-\beta^2)g(\varphi X,\varphi Y)\xi\\
&\quad + X(\alpha)\varphi^2 Y+X(\beta)\varphi Y-(\alpha^2+\beta^2)\eta(Y)\varphi^2 X-2\alpha\beta\eta(Y)\varphi X.
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Öyleyse eğri dönüşümü için

$$R(X,Y)\xi=\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_Y\nabla_X\xi-\nabla_{[X,Y]}\xi$$

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= \nabla_X(\alpha(Y-\eta(Y)\xi)+\beta\varphi Y)\\
&\quad -\nabla_Y(\alpha(X-\eta(X)\xi)+\beta\varphi X)\\
&\quad -\alpha\big([X,Y]-\eta([X,Y]\xi)\big)-\beta\varphi[X,Y]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi = X(\alpha)Y + \alpha\nabla_X Y - \alpha &\begin{pmatrix} \eta(\nabla_X Y)\xi + g(Y,\nabla_X\xi)\xi \\ +\eta(Y)\nabla_X\xi \end{pmatrix} \\
&+ X(\beta)\varphi Y + \beta\nabla_X\varphi Y - X(\alpha)\eta(Y)\xi \\
&- Y(\alpha)X - \alpha\nabla_Y X + \alpha\begin{pmatrix} \eta(\nabla_Y X)\xi + g(X,\nabla_Y\xi)\xi \\ +\eta(X)\nabla_Y\xi \end{pmatrix} \\
&- Y(\beta)\varphi X - \beta\nabla_Y\varphi X + Y(\alpha)\eta(X)\xi \\
&- \alpha[X,Y] + \alpha\eta([X,Y])\xi - \beta\varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi = X(\alpha)Y - \alpha\big(g(Y,\nabla_X\xi)\xi + \eta(Y)\nabla_X\xi\big) \\
&+ X(\beta)\varphi Y + \beta\nabla_X\varphi Y - X(\alpha)\eta(Y)\xi \\
&- Y(\alpha)X + \alpha\big(g(X,\nabla_Y\xi)\xi + \eta(X)\nabla_Y\xi\big) \\
&- Y(\beta)\varphi X - \beta\nabla_Y\varphi X + Y(\alpha)\eta(X)\xi \\
&- \beta\varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi = X(\alpha)Y - \alpha &\begin{bmatrix} g\big(Y,(\alpha(X-\eta(X)\xi) + \beta\varphi X)\big)\xi \\ +\eta(Y)(\alpha(X-\eta(X)\xi)) + \eta(Y)\beta\varphi X \end{bmatrix} \\
&+ X(\beta)\varphi Y + \beta\nabla_X\varphi Y - X(\alpha)\eta(Y)\xi \\
&- Y(\alpha)X + \alpha\begin{bmatrix} g\big(X,(\alpha(Y-\eta(Y)\xi) + \beta\varphi Y)\big)\xi \\ +\eta(X)(\alpha(Y-\eta(Y)\xi)) + \eta(X)\beta\varphi Y \end{bmatrix} \\
&- Y(\beta)\varphi X - \beta\nabla_Y\varphi X + Y(\alpha)\eta(X)\xi \\
&- \beta\varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi = X(\alpha)Y - \alpha^2 g(Y,X)\xi + \alpha^2\eta(X)\eta(Y)\xi \\
&- \alpha\beta g(Y,\varphi X)\xi - \alpha^2\eta(Y)X + \alpha^2\eta(Y)\eta(X)\xi \\
&- \alpha\beta\eta(Y)\varphi X + X(\beta)\varphi Y + \beta\nabla_X\varphi Y - X(\alpha)\eta(Y)\xi \\
&- Y(\alpha)X + \alpha^2 g(X,Y)\xi - \alpha^2\eta(Y)\eta(X)\xi \\
&+ \alpha\beta g(X,\varphi Y)\xi + \alpha^2\eta(X)Y - \alpha^2\eta(X)\eta(Y)\xi \\
&+ \alpha\beta\eta(X)\varphi Y - Y(\beta)\varphi X - \beta\nabla_Y\varphi X + Y(\alpha)\eta(X)\xi \\
&- \beta\varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(X,Y)\xi = {} & X(\alpha)Y - \alpha\beta g(Y,\varphi X)\xi - \alpha^2\eta(Y)X \\ & - \alpha\beta\eta(Y)\varphi X + X(\beta)\varphi Y + \beta\nabla_X\varphi Y \\ & - X(\alpha)\eta(Y)\xi - Y(\alpha)X + \alpha\beta g(X,\varphi Y)\xi + \alpha^2\eta(X)Y \\ & + \alpha\beta\eta(X)\varphi Y - Y(\beta)\varphi X - \beta\nabla_Y\varphi X \\ & + Y(\alpha)\eta(X)\xi - \beta\varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(X,Y)\xi = {} & -Y(\alpha)\varphi^2 X + X(\alpha)\varphi^2 Y + 2\alpha\beta g(X,\varphi Y)\xi \\ & + \alpha^2(\eta(X)Y - \eta(Y)X) + \alpha\beta(\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X) \\ & + X(\beta)\varphi Y - Y(\beta)\varphi X + \beta(\nabla_X\varphi Y - \nabla_Y\varphi X) \\ & - \beta\varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(X,Y)\xi = {} & -Y(\alpha)\varphi^2 X + X(\alpha)\varphi^2 Y + 2\alpha\beta g(X,\varphi Y)\xi \\ & + \alpha^2(\eta(X)Y - \eta(Y)X) + \alpha\beta(\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X) \\ & + X(\beta)\varphi Y - Y(\beta)\varphi X + \beta((\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_Y\varphi)X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(X,Y)\xi = {} & -Y(\alpha)\varphi^2 X + X(\alpha)\varphi^2 Y + 2\alpha\beta g(X,\varphi Y)\xi \\ & + \alpha^2(\eta(X)Y - \eta(Y)X) + \alpha\beta(\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X) \\ & + X(\beta)\varphi Y - Y(\beta)\varphi X \\ & + \beta\begin{bmatrix}\beta(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \alpha(g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X) \\ -\beta(g(Y,X)\xi - \eta(X)Y) - \alpha(g(\varphi Y,X)\xi - \eta(X)\varphi Y)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(X,Y)\xi = {} & -Y(\alpha)\varphi^2 X + X(\alpha)\varphi^2 Y + 2\alpha\beta g(X,\varphi Y)\xi \\ & + \alpha^2(\eta(X)Y - \eta(Y)X) + \alpha\beta(\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X) \\ & + X(\beta)\varphi Y - Y(\beta)\varphi X \\ & + \beta^2 g(X,Y)\xi - \beta^2\eta(Y)X + \beta\alpha g(\varphi X,Y)\xi - \beta\alpha\eta(Y)\varphi X) \\ & - \beta^2 g(Y,X)\xi + \beta^2\eta(X)Y - \beta\alpha g(\varphi Y,X)\xi + \beta\alpha\eta(X)\varphi Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(X,Y)\xi = {} & -Y(\alpha)\varphi^2 X + X(\alpha)\varphi^2 Y + \alpha^2(\eta(X)Y - \eta(Y)X) \\ & + 2\alpha\beta(\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X) \\ & + \beta^2(\eta(X)Y - \eta(Y)X) + X(\beta)\varphi Y - Y(\beta)\varphi X\end{aligned}$$

$$R(X,Y)\xi = -Y(\alpha)\varphi^2 X + X(\alpha)\varphi^2 Y + \alpha^2(\eta(X)Y - \eta(Y)X)$$
$$-(Y(\beta) + 2\alpha\beta\eta(Y))\varphi X$$
$$+(X(\beta) + 2\alpha\beta\eta(X))\varphi Y + \beta^2(\eta(X)Y - \eta(Y)X)$$

$$R(X,Y)\xi = -Y(\alpha)\varphi^2 X + X(\alpha)\varphi^2 Y + (\alpha^2 + \beta^2)(\eta(X)Y - \eta(Y)X)$$
$$-(Y(\beta) + 2\alpha\beta\eta(Y))\varphi X + (X(\beta) + 2\alpha\beta\eta(X))\varphi Y$$

$$R(X,Y)\xi = -(Y(\alpha) + (\alpha^2 + \beta^2)\eta(Y))\varphi^2 X + (X(\alpha) + (\alpha^2 + \beta^2)\eta(X))\varphi^2 Y$$
$$-(Y(\beta) + 2\alpha\beta\eta(Y))\varphi X + (X(\beta) + 2\alpha\beta\eta(X))\varphi Y$$

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi = {} & (X(\alpha) + (\alpha^2 + \beta^2)\eta(X))\varphi^2 Y - (Y(\alpha) + (\alpha^2 + \beta^2)\eta(Y))\varphi^2 X + \\ & + (X(\beta) + 2\alpha\beta\eta(X))\varphi Y - (Y(\beta) + 2\alpha\beta\eta(Y))\varphi X \end{aligned} \qquad (4.1.8)$$

elde edilir.

Bir $\{E_0, E_1, E_2\}$ φ - bazı ele alınsın.

$$E_0 = \xi,\ E_1 = \varphi E_2,\ E_2 = \varphi E_1,\ g(\varphi E_1, \varphi E_1) = -g(E_1, E_1) = -1 \text{ için}$$

$$S(Y,\xi) = \sum_{i=1}^{n} R((E_i, Y)\xi, E_i)$$

eşitliğinden S, Ricci eğrilik tensörü bulunabilir.

$$S(Y,\xi) = g(R(E_0,Y)\xi, E_0) + g(R(E_1,Y)\xi, E_1) - g(R(E_2,Y)\xi, E_2)$$

$$\begin{aligned} S(Y,\xi) = {} & 0 + E_1(\alpha)g(\varphi^2 Y, E_1) - (Y(\alpha) + (\alpha^2 + \beta^2)\eta(Y))g(\varphi^2 E_1, E_1) \\ & + E_1(\beta)g(\varphi Y, E_1) - (Y(\beta) + 2\alpha\beta\eta(Y))g(\varphi E_1, E_1) \\ & - E_2(\alpha)g(\varphi^2 Y, E_2) + (Y(\alpha) + (\alpha^2 + \beta^2)\eta(Y))g(\varphi^2 E_2, E_2) \\ & - E_2(\beta)g(\varphi Y, E_2) + (Y(\beta) + 2\alpha\beta\eta(Y))g(\varphi E_2, E_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & E_1(\alpha)g(Y, E_1) - E_2(\alpha)g(Y, E_2) + E_1(\beta)g(\varphi Y, E_1) \\ & - E_2(\beta)g(\varphi Y, E_2) - 2(Y(\alpha) + (\alpha^2 + \beta^2)\eta(Y)) \\ & + E_0(\alpha)g(Y, E_0)E_0 - E_0(\alpha)g(Y, E_0)E_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & g(Y, grad\alpha) + g(grad\beta, \varphi Y) - E_0(\alpha)g(Y, E_0) \\ & - 2(Y(\alpha) + (\alpha^2 + \beta^2)\eta(Y)) \end{aligned}$$

$$S(Y,\xi) = -Y(\alpha) + (\varphi Y)\beta - (\xi(\alpha) + 2(\alpha^2 + \beta^2))\eta(Y) \qquad (4.1.9)$$

eğrilik tensörü $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W)$ ile gösterilirse (4.1.8) nolu eşitlikten

$$R(\xi,Y,Z,\xi) = -R(\xi,Y,\xi,Z)$$
$$= -(\xi(\alpha)+(\alpha^2+\beta^2))g(\varphi^2 Y,Z)$$
$$-(\xi(\beta)+2\alpha\beta)g(\varphi Y,Z)$$

$$R(\xi,Y,Z,\xi) = (\xi(\alpha)+(\alpha^2+\beta^2))g(\varphi Y,\varphi Z)-(\xi(\beta)+2\alpha\beta)g(\varphi Y,Z)$$

elde edilir.

$$R(\xi,Y,Z,\xi) = (\xi(\alpha)+(\alpha^2+\beta^2))g(\varphi Y,\varphi Z) \tag{4.1.10}$$

$$(\xi(\beta)+2\alpha\beta) = 0 \tag{4.1.11}$$

Diğer taraftan, boyut 3 olduğunda eğrilik tensörü her zaman aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$R(X,Y,Z,W) = g(X,W)S(Y,Z)-g(X,Z)S(Y,W)+g(Y,Z)S(X,W)$$
$$-g(Y,W)S(X,Z)-\frac{1}{2}\tau(g(X,W)g(Y,Z)-g(X,Z)g(Y,W)) \tag{4.1.12}$$

Burada τ , skalar eğriliktir. (4.1.9), (4.1.10), (4.1.12) nolu eşitliklerden

$$R(\xi,Y,Z,\xi) = S(Y,Z)-\eta(Z)S(Y,W)+g(Y,Z)S(\xi,\xi)$$
$$-\eta(Y)S(\xi,Z)-\frac{1}{2}\tau(g(Y,Z)-\eta(Z)\eta(Y))$$

$$(\xi(\alpha)+(\alpha^2+\beta^2))g(\varphi Y,\varphi Z) = S(Y,Z)-\eta(Z)\left((\varphi Y)\beta - Y(\alpha)-\left\{\xi(\alpha)+2(\alpha^2+\beta^2)\right\}\eta(Y)\right)$$
$$-2g(Y,Z)(\xi(\alpha)+(\alpha^2+\beta^2))$$
$$-\eta(Y)\left((\varphi Z)\beta - Z(\alpha)-\left\{\xi(\alpha)+2(\alpha^2+\beta^2)\right\}\eta(Z)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\tau(g(Y,Z)-\eta(Y)\eta(Z))$$
$$= S(Y,Z)-\eta(Z)((\varphi Y)\beta - Y(\alpha))$$
$$-\eta(Y)((\varphi Z)\beta - Z(\alpha))$$
$$+2(\xi(\alpha)+2(\alpha^2+\beta^2))\eta(Y)\eta(Z)$$
$$-2g(Y,Z)(\xi(\alpha)+(\alpha^2+\beta^2))+\frac{1}{2}\tau\, g(\varphi Y,\varphi Z)$$
$$= S(Y,Z)-\eta(Z)((\varphi Y)\beta - Y(\alpha))$$
$$-\eta(Y)((\varphi Z)\beta - Z(\alpha))$$
$$+2(\xi(\alpha)+2(\alpha^2+\beta^2))\eta(Y)\eta(Z)$$
$$+2(g(\varphi Y,\varphi Z)-\eta(Y)\eta(Z))(\xi(\alpha)+(\alpha^2+\beta^2))$$
$$+\frac{1}{2}\tau\, g(\varphi Y,\varphi Z)$$

$$S(Y,Z)=\left(\xi(\alpha)+(\alpha^2+\beta^2)-2(\xi(\alpha)+(\alpha^2+\beta^2))-\frac{1}{2}\tau\right)g(\varphi Y,\varphi Z)$$
$$+\eta(Z)(-Y(\alpha)+(\varphi Y)\beta)+\eta(Y)(-Z(\alpha)+(\varphi Z)\beta) \qquad (4.1.13)$$
$$-2(\alpha^2+\beta^2)\eta(Y)\eta(Z)$$

eşitliğine ulaşılır.

Teorem 4.1.2: M 3-boyutlu hemen hemen paradeğme manifold olsun.Bir kompakt M manifoldu üzerinde sabit K eğriliğinin bir normal hemen hemen paradeğme metrik yapısı (φ,ξ,η,g) olsun.

$2\alpha = div\xi = 0$, Bu durumda yapı quasi-para-Sasakian ve $K \leq 0$ dır. Ayrıca, K=0 ise rank$\eta = 1$. Bu durumda yapı para-kosimplektik ve $K < 0$ ise rank$\eta = 3$ dür.

İspat: Manifold sabit eğrilikli olduğundan

$$R(X,Y)Z = K(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$$

$$S(X,Y) = g(R(E_0,X,Y)E_0) + g(R(E_1,X,Y)E_1) - g(R(E_2,X,Y)E_2)$$
$$= K\begin{pmatrix} g(X,Y)g(E_0,E_0) - g(E_0,X)g(Y,E_0) + g(X,Y)g(E_1,E_1) \\ - g(X,E_1)g(Y,E_1) - g(X,Y)g(E_2,E_2) + g(X,E_2)g(Y,E_2) \end{pmatrix}$$
$$= K\big(3g(X,Y) - (g(X,g(Y,E_0)E_0 + g(Y,E_1)E_1 - g(Y,E_2)E_2)\big)$$

$$S(X,Y) = 2Kg(X,Y)$$

(4.1.9) nolu eşitlikten ve $S = 2Kg(X,Y)$ olduğundan

$$R(\xi,Y,Z,\xi) = K\big(g(Y,Z) - g(Y,\xi)g(Z,\xi)\big)$$
$$(\xi(\alpha)+\alpha^2+\beta^2)(-g(Y,Z)+\eta(Y)\eta(Z)) = K\big(g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\big)$$

$$\xi(\alpha) + K + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \qquad (4.1.14)$$

elde edilir.

$$S(Y,\xi) = 2K\eta(Y) = (\varphi Y)\beta - Y(\alpha) - (\xi(\alpha) + 2(\alpha^2+\beta^2))\eta(Y)$$

$$Y(\alpha) - (\varphi Y)\beta + (2K + \xi(\alpha) + 2(\alpha^2+\beta^2))\eta(Y) = 0$$

$$Y(\alpha) - (\varphi Y)\beta + (K + \alpha^2 + \beta^2)\eta(Y) = 0 \qquad (4.1.15)$$

(4.1.15) nolu eşitliği

$$d\alpha(Y) - g(grad\beta, \varphi Y) + (K + \alpha^2 + \beta^2)\eta(Y) = 0$$

formunda tekrar yazıp kovaryant türevi alındığında

$$X(Y(\alpha))-g(\nabla_X grad\beta,\varphi Y)-g(grad\beta,\nabla_X\varphi Y)$$
$$+(X(\alpha^2+\beta^2))\eta(Y)+(K+\alpha^2+\beta^2)(X\eta(Y))=0$$

$$(\nabla_X d\alpha)(Y)+d\alpha(\nabla_X Y)-g(\nabla_X grad\beta,\varphi Y)-g(grad\beta,(\nabla_X\varphi)Y+\varphi\nabla_X Y)$$
$$+(X(\alpha^2+\beta^2))\eta(Y)+(K+\alpha^2+\beta^2)((\nabla_X\eta)Y+\eta(\nabla_X Y))=0$$

$$(\nabla_X d\alpha)(Y)-g(\nabla_X grad\beta,\varphi Y)-g(grad\beta,(\nabla_X\varphi)Y)+(X(\alpha^2+\beta^2))\eta(Y)$$
$$+(K+\alpha^2+\beta^2)(\nabla_X\eta)(Y)+d\alpha(\nabla_X Y)-g(grad\beta,\varphi\nabla_X Y)+(K+\alpha^2+\beta^2)\eta(\nabla_X Y)=0$$

$$(\nabla_X d\alpha)(Y)-g(\nabla_X grad\beta,\varphi Y)-g(grad\beta,(\nabla_X\varphi)Y)+(X(\alpha^2+\beta^2))\eta(Y)$$
$$+(K+\alpha^2+\beta^2)(\nabla_X\eta)(Y)=0$$

elde edilir.

X ve Y ye göre antisimetrizasyon yapılırsa

$$(\nabla_Y d\alpha)(X)-g(\nabla_Y grad\beta,\varphi X)-g(grad\beta,(\nabla_Y\varphi)X)+(Y(\alpha^2+\beta^2))\eta(X)$$
$$+(K+\alpha^2+\beta^2)(\nabla_Y\eta)(X)=0$$

$$(\nabla_X d\alpha)(Y)-(\nabla_Y d\alpha)(X)-g(\nabla_X grad\beta,\varphi Y)+g(\nabla_Y grad\beta,\varphi X)+((\nabla_Y\varphi)X-(\nabla_X\varphi)Y)\beta$$
$$+(X(\alpha^2+\beta^2))\eta(Y)-(Y(\alpha^2+\beta^2))\eta(X)+(K+\alpha^2+\beta^2)((\nabla_X\eta)Y-(\nabla_Y\eta)X)=0$$

$$g(\nabla_Y grad\beta,\varphi X)-g(\nabla_X grad\beta,\varphi Y)-((\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X)\beta$$
$$+(X(\alpha^2+\beta^2))\eta(Y)-(Y(\alpha^2+\beta^2))\eta(X)+2(K+\alpha^2+\beta^2)d\eta(X,Y)=0 \qquad (4.1.16)$$

elde edilir.

$\{E_0,E_1,E_2\};\varphi$ bazı ele alınsın. (4.1.16) nolu denklemde

$$E_0=\xi, X=E_1=\varphi E_2, Y=E_2=\varphi E_1, g(\varphi E_1,\varphi E_1)=-g(E_1,E_1)=-1$$

eşitliklerini yerine yazıp (4.1.3) nolu eşitliği ve $d\eta=-\beta F$ olduğunu kullanarak

$$g(\nabla_{\varphi E_1} grad\beta,\varphi E_1)-g(\nabla_{E_1} grad\beta,E_1)-((\nabla_{E_1}\varphi)\varphi E_1-(\nabla_{\varphi E_1}\varphi)E_1)\beta$$
$$+2(K+\alpha^2+\beta^2)d\eta(E_1,E_2)=0$$

Şimdi $((\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X)\beta$ ifadesi hesaplansın.

$$(\nabla_X\varphi)Y=-(\beta g(\varphi X,\varphi Y)+\alpha g(X,\varphi Y))\xi-\eta(Y)(\beta\varphi^2 X+\alpha\varphi X)$$
$$(\nabla_Y\varphi)X=-(\beta g(\varphi Y,\varphi X)+\alpha g(Y,\varphi X))\xi-\eta(X)(\beta\varphi^2 Y+\alpha\varphi Y)$$

$$((\nabla_{E_1}\varphi)\varphi E_1-(\nabla_{\varphi E_1}\varphi)E_1)\beta=-\alpha g(E_1,\varphi E_2)\xi+\alpha g(E_2,\varphi E_1)\xi$$
$$=-2\alpha\xi$$

O halde $((\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X)\beta=-2\alpha\xi\beta$ olarak bulunur.

$$d\eta(E_1,E_2)=-\beta F(E_1,E_2)=-\beta g(E_1,\varphi E_2)=-\beta$$

hesaplamalarından sonra

$$g(\nabla_{E_2} grad\beta, E_2)-g(\nabla_{E_1} grad\beta, E_1)-(-2\alpha\xi)\beta+2(K+\alpha^2+\beta^2)(-\beta)=0$$

$$g(\nabla_{E_1} grad\beta, E_1)-g(\nabla_{E_2} grad\beta, E_2)=2\alpha\xi\beta-2\beta(K+\alpha^2+\beta^2)=0 \qquad (4.1.17)$$

eşitliği elde edilir.

(4.1.11) nolu eşitliği $g(grad\beta,\xi)=-2\alpha\beta$ ile ifade edilip (4.1.4) ve (4.1.14) nolu eşitliklerden yararlanarak kovaryant türevi alındığında

$$\xi(\beta)=-2\alpha\beta$$

$$g(grad\beta,\xi)=-2\alpha\beta$$

$$g(\nabla_\xi grad\beta,\xi)+g(grad\beta,\nabla_\xi\xi)=-2\xi(\alpha)\beta-2\alpha\xi(\beta)$$

$$=-2(-(K+\alpha^2+\beta^2)\beta-2\alpha\xi(\beta))$$

$$g(\nabla_\xi grad\beta,\xi)=2\beta(K+\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\xi(\beta) \qquad (4.1.18)$$

sonucuna ulaşılır.

Laplace Δ sembolü ile gösterilir ve $\Delta=\text{div grad}$ ile ifade edilirse (4.1.17) ve (4.1.18) den $\Delta\beta=0$ elde edilir. M kompakt olduğundan $\beta=$sabit olacaktır. O halde iki durum söz konusudur.

i) $\beta\neq 0$

ii) $\beta=0$

Birinci durum: β sabit$\Rightarrow \xi(\beta)=-2\alpha\beta$ (4.1.11) den

$$0=-2\alpha\beta$$

$\beta\neq 0$ olduğundan $\alpha=0$ olur.

O halde $\beta\neq 0\Rightarrow\alpha=0;$ M quasi para-Sasakian dır.

İkinci durum: $\beta=0\Rightarrow Y\alpha+(K+\alpha^2)\eta(Y)=0$ (4.1.15) den

$$g(grad\alpha,Y)+(K+\alpha^2)g(Y,\xi)=0$$

$$g(grad\alpha+(K+\alpha^2)\xi,Y)=0$$

Yani $grad\alpha$ sadece E_0 yönünde olacaktır. E_1 ve E_2 deki iz düşümü sıfırdır.

$$grad\alpha+(K+\alpha^2)\xi=0$$

olur. X e göre türev alınırsa

$$\nabla_X grad\alpha + (X\alpha^2)\xi + (K+\alpha^2)\nabla_X \xi = 0$$
$$\nabla_X grad\alpha + (X\alpha^2)\xi + (K+\alpha^2)\alpha(X - \eta(X)\xi) = 0$$

Sonuç olarak

$$\nabla_{E_0} grad\alpha + E_0(\alpha^2)\xi + \alpha(K+\alpha^2)\xi = 0$$
$$\nabla_{E_1} grad\alpha + E_1(\alpha^2)\xi + \alpha(K+\alpha^2)E_1 = 0$$
$$-\nabla_{E_2} grad\alpha - E_2(\alpha^2)\xi - \alpha(K+\alpha^2)E_2 = 0$$

$$\Delta\alpha = \sum_{i=0}^{2} g(\nabla_{E_i} grad\alpha, E_i)$$

eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= g(\nabla_{E_0} grad\alpha, E_0) + g(\nabla_{E_1} grad\alpha, E_1) - g(\nabla_{E_2} grad\alpha, E_2)\\ &= -E_0(\alpha^2) - \alpha(K+\alpha^2) - \alpha(K+\alpha^2)\\ &= -2\alpha E_0(\alpha) - \alpha(K+\alpha^2) - \alpha(K+\alpha^2)\\ &= -\alpha(-2(K+\alpha^2) + (K+\alpha^2) + (K+\alpha^2))\end{aligned}$$

$$\Delta\alpha = 0$$

$$\Delta\alpha = \sum_{i=0}^{2} g(\nabla_{E_i} grad\alpha, E_i) = -2\alpha\xi(\alpha)$$

(4.1.14) den $\beta = 0$ olur. Böylece $\beta = 0 \Rightarrow \alpha =$ sabit dir. Fakat $2\alpha = \operatorname{div}\xi =$ sabit olur ve M nin kompaktlığından $\alpha = 0$ olur. O halde her durumda $\alpha = 0$ ve $\beta =$ sabit çıkmaktadır.

(4.1.14) den $K = -\beta^2 \leq 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

ADATI, T., MIYAZAWA, T., 1977. Some Properties of P-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Conditions., Tensor, N.S., 33, 173-178.

BEJANCU, A., DUGGAL, L.K., 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications., Kluwer Academic Publishers, Boston.

BLAIR, D.E., KOUFOGIORGOS T. ve PAPANTONIOU B.J, 1995. Contact Metric Manifolds Satisfying a Nullity Condition., 91, 189-214.

BLAIR, D.E., 2002. Riemann Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics.,. Birkhauser Boston.

BUCKI, D., MIERNOWSKI, A, 1985. Almost r-Paracontact Connections, Acta Math.Hung., 45(3-4), 327-336.

DACKO, P., OLSZAK, Z., 2007. On Weakly Para-Cosymplectic Manifolds of Dimension 3., Journal of Geometry and Physics., 57, 561-570.

DE, U.C., 2009. On 3-Dimensional Normal Almost Contact Metric Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions, Commun. Korean Math. Soc., 24, 265-275

ETNYRE, JOHN B., 2002. Introductoryon Contact Geometry, arxiv:math. SG/0111118v2,11.

HICKS, N. J., 1964. Notes on Differential Geometry, Van Nostrand, Princeton, New Jersey.

KANEYUKI, S., WILLAMS, 1985. F.L. Almost Paracontact and Parahodge Structures on Manifolds, Nagoya Math. J., 99, 173-187.

KOBAYASHI, S., NOMIZU, K. 1963, Foundations of Differential Geometry.

O'NEILL, B., 1983. Semi-Riemann Geometry. Academic Press, New York.

OLZSAK, Z., 1986. Normal Almost Contact Metric Manifolds of Dimension Three, Annales Polonici Mathematici., XLVII.

SATO, T., 1976. On a Structure Similar to the Almost Contact Structure, Tensor, N.S., 30, 219-224.

SHARFUDDIN, A., HUSSAIN, S.I, 1977. On Almost Paracontact Manifolds., Colloq. Math.

SHARPE, R.W., 1997. Differential Geometry, Graduate Texts in Math., Springer.

WELYCZKO, J., 2009. On Legendre Curves in 3-Dimensional Normal Almost Paracontact Metric Manifolds, Result. Math., 54, 377-387.

YANO, K., KON, M., 1984. Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corp., Singapore.

ZAMKOVOY, S., 2009. Canonical Connections on Paracontact Manifolds, Ann Glob Anal Geom., 36, 37-60.

ÖZGEÇMİŞ

31.07.1986 yılında Erzincan'da doğdu. İlk öğrenimini 1997 yılında İzmit Yahya Kaptan İlköğretim Okulu'nda ve orta öğrenimini 2004 yılında Bursa Gazi Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2004 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladı. 2008 yılında lisans öğrenimini tamamlayıp aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimine başladı ve akabinde enstitüye araştırma görevlisi olarak atandı. Halen aynı görevi sürdürmektedir.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca her zaman yanımda olan, anlayışı ve sabrıyla bilimsel desteğini ve zamanını benden esirgemeyen çok değerli hocam Prof. Dr. Cengizhan Murathan'a minnettarım.

Çalışmalarım boyunca manevi ve bilimsel desteğini benden esirgemeyen, her zaman yanımda olduğunu hissettiren sayın hocam Prof. Dr. Kadri Arslan'a çok teşekkür ederim.

En önemlisi bugünlere gelmemi sağlayan, tüm öğrenim hayatım boyunca bana her koşulda manen ve madden destek olan, sabrını ve emeğini benden esirgemeyen sevgili anneme ve babama, bana gösterdiği sevgiyle, saygıyla, güvenle her zorluğu aşmama yardımcı olan sevgili eşim Bilal Erken'e sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.