

**OCTONION DÜZLEMLERDE 6-ŞEKİLLER ve UZAKLIK**

**İsa DOĞAN**



T.C.  
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**OCTONİON DÜZLEMLERDE 6-ŞEKİLLER ve UZAKLIK**

İsa DOĞAN

Prof. Dr. Atilla AKPINAR  
(Danışman)

DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2022  
Her Hakkı Saklıdır

## ÖZET

Doktora Tezi

OCTONİON DÜZLEMLERDE 6-ŞEKİLLER ve UZAKLIK

İsa DOĞAN

Bursa Uludağ Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. Atilla AKPINAR

Bu tezde; Dezag düzlemleri, Moufang düzlemleri ve bir Moufang-Klingenberg düzlem sınıfı üzerinde 6-şekillerle ilgili bilinen bazı sonuçların  $\mathbb{O}$  bir Cayley bölümlü cebiri olmak üzere girdileri  $\mathcal{A} = \mathbb{O} + \mathbb{O}\varepsilon + \dots + \mathbb{O}\varepsilon^{m-1}$  m. dereceden plural cebirinden alınarak oluşturulan özel 3x3 matrislerle kurulan octonion düzlem sınıfı ile girdileri ( $\mathcal{A}$  ya izomorf olmayacak biçimde tanımlanan)  $A = \mathbb{O}\eta_0 + \mathbb{O}\eta_1 + \mathbb{O}\eta_2 + \mathbb{O}\eta_3$  cebirinden alınarak oluşturulan matrislerle kurulan octonion düzlem sınıfı üzerindeki karşılıkları incelenmiştir.

Her iki octonion düzlem sınıfının kolinasyonlar grubunun dörtgenler üzerinde geçişken olduğu sonucu yardımıyla bir 6-şekilin  $\mathcal{A}$  nın ya da  $A$  nın bir tersinir elemanı ile temsil edilebileceği gösterilmiştir.

Son olarak, girdileri  $\mathcal{A}$  dan alınarak oluşturulan octonion düzlem sınıfının nokta ve doğrularının matris gösterimleri kullanılarak bir projektif Klingenberg düzlem sınıfı üzerinde metrik olmayan bir uzaklık tanımı verilmiş ve bu uzaklık tanımı yardımı ile Öklid düzleminden iyi bilinen çember, elips ve hiperbol kavramlarının sonlu projektif düzlemlerdeki karşılıkları incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Lokal alterne halka, Moufang-Klingenberg düzlemi, Octonion düzlem, 4-Geçişkenlik, 6-Şekil.

2022, vii + 87 sayfa .

## ABSTRACT

PhD Thesis

### 6-FIGURES AND DISTANCE IN OCTONION PLANES

İsa DOĞAN

Bursa Uludağ University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

**Supervisor:** Prof Dr. Atilla AKPINAR

In this thesis; the correspondings of some known results related to 6-figures on the Desarg planes, Moufang planes and a class of Moufang-Klingenberg plane are examined on the octonion plane class constructed by the special matrices of  $3 \times 3$ , whose entires are from  $\mathcal{A} = \mathbb{O} + \mathbb{O}\varepsilon + \dots + \mathbb{O}\varepsilon^{m-1}$  plural algebra of order  $m$  and on the octonion plane class constructed by the matrices, whose entries are from  $A = \mathbb{O}\eta_0 + \mathbb{O}\eta_1 + \mathbb{O}\eta_2 + \mathbb{O}\eta_3$  (defined in the manner that will be not isomorphic to  $\mathcal{A}$ ).

It is showed that a 6-figure can be represented by an inversible element of  $\mathcal{A}$  or  $A$  with help of the result that group of collineations of both octonion plane classes are transitive on 4-gons.

Finally, a non-metric distance definition is given on a projective Klingenberg plane class by using matrix representations of points and lines of the octonion plane class constructed by  $\mathcal{A}$  and with the help of this distance definition, correspondings of the concepts of circle, ellipse and hyperbola, which are well known from the Euclidean plane, are examined in finite projective planes.

**Key words:** Local alternative ring, Moufang-Klingenberg plane, Octonion plane, 4-Transivity, 6-Figure

**2022, vii + 87 pages.**

## TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca; tez alıŐmamın planlanmasında ve yürütülmesinde ilgi ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli hocam Prof. Dr. Atilla AKPINAR' a, teŐekkürlerimi sunarım.

Beni bu günlere getiren kıymetli anne babama ve bu zor ve uzun süreçte desteğini hiçbir zaman esirgemeyen çok değerli eŐime, teŐekkürlerimi sunarım.

116F382 numaralı ve “Bir Kuadratik Jordan Cebiri ile Tanımlanan Octonion Düzlemlerde 4-Geçişkenliğin Kurulması ve 6-Şekiller ile ifte-Oranın Bazı Özelliklerinin İncelenmesi” isimli proje ile bu çalışmayı destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik AraŐtırma Kurumuna (TÜBİTAK) teŐekkürlerimi sunarım

İsa DOĞAN  
.../.../2022

## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	3
3. 6-ŞEKİLLER.....	22
4. BAZI OCTONİON DÜZLEMLERDE UZAKLIK.....	37
5. SONUÇ.....	74
KAYNAKLAR.....	75
EKLER.....	78
EK-A 4×4 Boyutlu Matris Cebirleri.....	79
EK-B 5, 7, 8 ve 9. Mertebeden Afın Düzlemler.....	83
ÖZGEÇMİŞ.....	<b>Hata! Yer işareti tanımlanmamış.</b>

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

$Q$	Kuadratik dönüşüm
$N$	Kübik dönüşüm
$\mathbb{O}$	Octonion sayılar kümesi
$(\mathbb{O}, +, \cdot)$	Cayley halkası veya Octonion R- cebir
$-$	Eşlenik alma dönüşümü
$n(x)$	$x$ in normu veya norm form
$t(x)$	$x$ in izi veya iz form
$n(x, y)$	Birleştirilmiş form
$t(x, y)$	Jenerik iz form
$I$	Birim olmayan elemanların kümesi
$[x, y, z] = 0$	Asosyatör
$[x, y] = 0$	Komutatör
$\mathcal{N}$	Noktalar kümesi
$\mathcal{D}$	Doğrular kümesi
$\in$	Üzerinde olma bağıntısı
$\sim$	Komşuluk bağıntısı
$\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$	Projektif düzlem
$M = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in, \sim)$	Projektif Klingenberg düzlemi
$\#$	$x \rightarrow x^\#$ biçiminde bir kuadratik dönüşüm
$\mathbb{O}_3$	$\mathbb{O}$ üzerinde $3 \times 3$ matrislerin kümesi
$\mathcal{H}(\mathbb{O}_3, J_\Gamma)$	Simetrik elemanların oluşturduğu küme
$\mathbb{P}(J)$	Octonion düzlem
$M(\mathcal{A})$	$\mathcal{A}$ ile koordinatlanan $M(\mathcal{A})$ Moufang-Klingenberg düzlemi
$Z(R)$	$R$ halkasının merkezi
$\bar{\wedge}$	6-şekillerde denklik
$M_4(\mathcal{O})$	$\mathcal{O}$ üzerinde $4 \times 4$ matrislerin kümesi
$R^2$	$R \times R$ Kartezyen çarpım kümesi

### Kısaltmalar

PK-düzlem	Projektif Klingenberg düzlemi
MK-düzlem	Moufang Klingenberg düzlemi
MOLS	Mutually orthogonal latin squares

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 3.1. Bir 6-şekilin ilk codescendantı.....	22
Şekil 3.2. Bir 6-şekilin ilk descendantı. ....	23
Şekil 3.3. Menelaus 6-şekil. ....	23
Şekil 3.4. Ceva 6-şekil. ....	24
Şekil 4.1. 3. mertebeden projektif düzlem .....	51
Şekil 4.2. (0,0) noktasına 1, 2 ve 3 birim uzaklıktaki noktalar .....	51
Şekil 4.3. (0,1) noktasına 1, 2 ve 3 birim uzaklıktaki noktalar .....	51
Şekil 4.4. (1,0) noktasına 1, 2 ve 3 birim uzaklıktaki noktalar .....	52
Şekil 4.5. (1,1) noktasına 1 ve 2 birim uzaklıktaki noktalar .....	52



## ÇİZELGELER DİZİNİ

### Sayfa

Çizelge 2.1. $O$ nun bazındaki elemanlar için çarpım tablosu.....	8
Çizelge 4.1. 3. mertebeden afin düzlem.....	48
Çizelge 4.2. 4. mertebeden afin düzlem.....	49
Çizelge 4.3. 3. mertebeden projektif düzlem .....	50
Çizelge 4.4. 4. mertebeden projektif düzlem .....	50
Çizelge 4.5. 3. mertebeden projektif düzlemin çemberleri .....	53
Çizelge 4.6. 4. mertebeden projektif düzlemin çemberleri .....	53
Çizelge 4.7. 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan elipsleri .....	55
Çizelge 4.8. 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 br olan elipsleri .....	56
Çizelge 4.9. 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 br olan elipsleri .....	58
Çizelge 4.10. 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan hiperbollerini.....	59
Çizelge 4.11. 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 br olan hiperbollerini.....	60
Çizelge 4.12. 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 br olan hiperbollerini.....	62
Çizelge 4.13. 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan elipsleri .....	63
Çizelge 4.14. 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 br olan elipsleri .....	67
Çizelge 4.15. 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 br olan elipsleri .....	70
Çizelge 4.16. 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 4 br olan elipsleri .....	72

## 1. GİRİŞ

Bir cebirsel yapı ile bir geometrik yapı koordinatlanabildiği zaman bu cebirsel yapının cebirsel özellikleri ile karşılık gelen geometrik yapının geometrik özellikleri arasında önemli ilişkiler ortaya çıkar. Bu karşılıklı ilişkiler cebir ile geometri arasında iki yönlü bir bağlantının olduğunu gösterir. Mesela; bir Dezag, Moufang ya da Moufang-Klingenberg düzlemlerinin koordinatlama halkası sırasıyla, bir bölümlü halka, bir alterne bölümlü halka ya da bir lokal alterne halkadır.

Bu tezde; Dezag düzlemleri, Moufang düzlemleri ve bir Moufang-Klingenberg düzlem sınıfı üzerinde 6 şekillerle ilgili bilinen bazı sonuçların  $\mathbb{O}$  bir Cayley bölümlü cebiri,  $\varepsilon \neq \mathbb{O}$  ve  $\varepsilon^m = 0$  olmak üzere girdileri  $\mathcal{A} = \mathbb{O} + \mathbb{O}\varepsilon + \dots + \mathbb{O}\varepsilon^{m-1}$   $m$ . dereceden plural cebirden alınarak oluşturulan özel 3x3 matrislerle kurulan octonion düzlem sınıfı ile  $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \notin \mathbb{O}$ ,  $\eta_1\eta_1 = \eta_3$ ,  $\eta_1\eta_2 = \eta_2\eta_1 = 0$ ,  $\eta_1\eta_3 = \eta_3\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2\eta_2 = \eta_3$ ,  $\eta_2\eta_3 = \eta_3\eta_2 = 0$  olmak üzere girdileri ( $\mathcal{A}$  ya izomorf olmayacak biçimde tanımlanan)  $A = \mathbb{O}\eta_0 + \mathbb{O}\eta_1 + \mathbb{O}\eta_2 + \mathbb{O}\eta_3$  cebirinden alınarak oluşturulan matrislerle kurulan octonion düzlem sınıfı üzerindeki karşılıkları incelenmiştir.

$\mathcal{A}$  ve  $A$  cebirinin elemanları ile oluşturulan octonion düzlem sınıflarına aslında  $\mathcal{A}$  ve  $A$  lokal halkaları ile koordinatlanan  $M(\mathcal{A})$  ve  $M(A)$  Moufang-Klingenberg düzlem sınıfları olarak bakılabileceği sonucu bu iki octonion düzlem sınıfı üzerinde 6-şekillerle ilgili hedeflenen sonuçlara daha hızlı ulaşılmasını sağlamıştır.

$M(A)$  nın kolonasyonlar gurubunun dörtgenler üzerinde geçişken olduğu sonucuyla bir 6-şekilin  $A$  nın bir tersinir elemanı ile temsil edilebileceği sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonucun bir benzeri  $M(\mathcal{A})$  için de elde edilmiştir. Ancak her iki düzlem sınıfı üzerinde çifte oran tanımı verilemediği için 6 şeklin oranı ile ilgili sonuçlar elde edilememiştir.

Girdileri  $\mathcal{A}$  dan alınarak oluşturulan octonion düzlem sınıfının nokta ve doğrularının matris gösterimleri kullanılarak bir projektif Klingenberg düzlem sınıfı üzerinde metrik olmayan bir uzaklık tanımı verilmiştir. Bu uzaklık tanımı yardımıyla Öklid

düzleminden iyi bilinen çember elips ve hiperbol gibi kavramların sonlu projektif Klingenberg düzlemlerde ve onun epimorfik görüntüsü olarak altında yatan sonlu projektif düzlemlerdeki karşılıkları incelenmiştir.

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır.

1. bölüm, çalışmanın ana hatlarının çizildiği giriş bölümüdür.
2. bölümde tezde kullanılan temel kavramlar tanıtılmış ve ardından çalışmanın literatürdeki yeri belirlenmiştir.
3. bölümde 6-şekillerin bazı özellikleri  $M(A)$  ve  $M(\mathcal{A})$  düzlemleri üzerinde araştırılmıştır.
4. bölümde bazı octonion düzlemler üzerinde metrik olmayan bir uzaklık tanımı verilmiş ve bu uzaklık yardımı ile çember, elips ve hiperbol gibi geometrik kavramlar incelenmiştir
5. bölüm ise, bu çalışma ile ilgili genel bir değerlendirmenin yapıldığı sonuç bölümüdür.

## 2. KURAMSAL TEMELLER ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu kısımda, tezin hedeflerine ulaşmak için ihtiyaç duyulan bilgiler verilmiştir. Genel bilgilerin derlenmesinde Hungerford (1974), McDonald (1976), Fraleigh (1982), Jacobson (1985), Schafer (1996), Malik vd. (1997), Beachy (1999), Elman vd. (2008), Faulkner (2014) ve Çiftçi (2015) çalışmaları dikkate alınmıştır.

**Tanım 2.1.**  $(R, +)$  bir abel grubu ve “.” (çarpma)  $R$  üzerinde tanımlı bir iç işlem olsun. Eğer her  $x, y, z \in R$  için

$$(x + y)z = xz + yz$$

ve

$$z(x + y) = zx + zy$$

şartlarını sağlıyorsa  $(R, +, \cdot)$  üçlüsüne bir halka denir. Kısıklık olması bakımından  $(R, +, \cdot)$  halkası  $R$  ile gösterilir. Eğer  $R$  de “.” işlemi birleşmeli (asosyatif) ise halkaya birleşmeli (asosyatif) halka, “.” işleminin etkisiz elemanı varsa halkaya özdeşlikli (birimli) halka, “.” işlemi değişmeli (komutatif) ise halkaya değişmeli (komutatif) halka denir.

**Tanım 2.2.**  $R$  bir halka olsun.  $\overbrace{1+1+1\dots+1}^{n \text{ tane}} = 0$  eşitliğine uyan en küçük  $n \geq 2$  tam sayısına  $R$  halkasının *karakteristiği* denir. Eğer böyle (sonlu) bir  $n$  tamsayısı yoksa  $R$  nin *karakteristiği* sıfırdır denir

**Tanım 2.3.**  $R$  özdeşlikli bir halka ve  $0 \neq x \in R$  olsun. Eğer  $xy = 1$  olacak biçimde  $y \in R$  varsa  $y$  ye  $x$  in sağ tersi ve  $zx = 1$  olacak biçimde  $z \in R$  varsa  $z$  ye  $x$  in sol tersi denir. Eğer  $w \in R$  olmak üzere  $xw = wx = 1$  ise  $w$  ye  $x$  in tersi ve  $x$  e de birim (tersi olan) eleman denir.

**Tanım 2.4.**  $R$  bir halka olsun. Eğer  $R$  nin bir  $R'$  alt kümesi  $R$  halkasının işlemleri altında halka oluşturuyorsa  $R'$  ye  $R$  nin alt halkası denir.

**Tanım 2.5.**  $R$  bir halka olsun.  $R$  nin *merkezi*,  $R$  nin değişmeli ve birleşmeli alt halkası olarak tanımlanır ve  $Z(R)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.6.**  $R$  nin her  $x$  elemanı için  $xI \subseteq I$  ve  $Ix \subseteq I$  şartlarını sağlayan bir  $I$  alt halkasına  $R$  halkasının bir *ideali* denir

**Tanım 2.7.**  $R$  bir halka ve  $M \neq R$ ,  $R$  nin bir ideali olsun. Eğer  $M \subset I \subset R$  şartını sağlayan hiçbir  $I$  ideali yoksa  $M$  ye  $R$  nin bir *maksimal* ideali denir.

**Tanım 2.8.**  $R$  bir halka ve  $R$  nin tüm birim olmayan (tersi olmayan) elemanlarının oluşturduğu küme  $I$  ile gösterilsin. Eğer  $I$ ,  $R$  nin bir maksimal ideali ise  $R$  ye bir *lokal halka* denir. Bu durumda  $\forall x \in R$  için ya  $x$  yada  $1-x$  birimdir.

**Teorem 2.9.** Birleşmeli olmayan bir  $R$  halkasında her  $x, y \in R$  için  $x(xy) = (xx)y$  ve  $(xy)y = x(yy)$  sırasıyla, sol ve sağ alterne şartlar sağlanıyorsa  $R$  ye *alterne halka* denir.

**Teorem 2.10.**  $R$  bir alterne halka olsun. Bu takdirde, Moufang özdeşlikleri olarak da bilinen, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

a)  $(xy)(zx) = x(yz)x$

b)  $(x(zx))y = x(z(xy))$

c)  $y((xz)x) = ((yx)z)x$

(Pickert, 1955; Faulkner, 2014).

**Tanım 2.11.**  $(R, +, \cdot)$  bir birleşmeli halka ve  $(M, \oplus)$  değişmeli grup olsun. Her  $a \in R$  ve her  $x \in M$  için  $(a, x) \rightarrow a \circ x$  olacak şekilde tanımlı  $R \times M \rightarrow M$  dış işlemi her  $a, b \in R$  ve her  $x, y \in M$  için aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $(M, \oplus, \circ)$  sistemine  $R$  halkası üzerinde bir (sol) *modül*, kısaca  $M$  ye bir (sol)  $R$ -modül denir:

- 1)  $(ab) \circ x = (a \circ x)(b \circ x)$  dir.
- 2)  $(a+b) \circ x = (a \circ x) + (b \circ x)$  dir.
- 3)  $a \circ (x \oplus y) = (a \circ x) \oplus (a \circ y)$  dir.

Diğer yandan  $R$ ,  $1 \neq 0$  özdeşlikli bir halka ve her  $x \in M$  için

- 4)  $1 \circ x = x$  şartını sağlayan bir (sol)  $R$ -modüle özdeşlikli (birimli) bir (sol)  $R$ -modül denir.

**Tanım 2.12.**  $M$  bir  $R$ -modül ve  $\emptyset \neq M' \subseteq M$  olsun. Eğer  $M'$ ,  $M$  deki iç ve dış işlemlerin  $M'$  üzerine indirgenmişleri altında bir  $R$ -modül oluşturuyorsa  $M'$  ye  $M$  nin bir *alt modülü* (ya da alt uzayı) denir.

**Tanım 2.13.**  $R$  özdeşlikli bir halka olmak üzere  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $M$  nin kendisini geren (veya üreten) lineer bağımsız alt kümesine  $M$  nin bir *bazı* denir.

**Tanım 2.14.**  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$  ve  $M'$   $R$ -modülleri verilsin.  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  özelliğinde seçilmiş bir tam sayı  $x, y \in M_i$ ,  $1 \leq j \leq n$  ve  $j \neq i$  için  $\beta_j \in M_j$  ve olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir  $f: M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \rightarrow M'$  dönüşümüne bir *n-lineer dönüşüm* denir:

- 1)  $f(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, x+y, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) = f(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, x, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) + f(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, y, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n)$
- 2)  $f(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \lambda x, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) = \lambda f(\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, x, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n)$

**Tanım 2.15.**  $M$  bir  $R$ -modül olsun  $M^n = M \times M \times \dots \times M$  olmak üzere  $f: M^n \rightarrow R$  dönüşümü *n-lineer* ise  $f$  ye  $M$  üzerinde *n-lineer dönüşüm* ya da kısaca *n-lineer form* adı verilir.

**Tanım 2.16.**  $f$ ,  $M$  üzerinde bir *n-lineer dönüşüm* olsun. Eğer her  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  sıralı  $n$  lisi  $j \neq i$  için

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$$

ise  $f$  ye *simetrik n-lineer dönüşüm* denir.

**Tanım 2.17.**  $M$  ve  $M'$  iki  $R$ -modül olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir  $Q: M \rightarrow M'$  dönüşümüne *kuadratik dönüşüm* denir.

1) Her  $\lambda \in R$  ve her  $y \in M$  için  $Q(\lambda y) = \lambda^2 Q(y)$  dir.

2) Her  $x, y \in M$  için  $Q(x, y) = \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)]$  özelliğinde  $M \times M$  den  $M'$  ye bir simetrik ve 2-lineer dönüşüm vardır.

$M' = M$  iken  $Q$  kuadratik dönüşümüne  $M$  üzerinde bir kuadratik dönüşüm denir.

$M' = R$  iken  $Q$  kuadratik dönüşümüne bir *kuadratik form*, bu durumda  $Q(x, y)$  ye de *birleştirilmiş 2- lineer form* denir.

**Tanım 2.18.**  $M$  ve  $M'$  iki  $R$ -modül olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir  $N: M \rightarrow M'$  dönüşümüne bir *kübik dönüşüm* denir:

1) Her  $\lambda \in R$  ve  $y \in M$  için  $N(\lambda y) = \lambda^3 N(y)$  dir.

2) Her  $x, y, z \in M$  için

$$N(x, y, z) = \frac{1}{6}[N(x+y+z) - N(x+y) - N(y+z) - N(x+z) + N(x) + N(y) + N(z)]$$

özelliğinde  $M \times M \times M$  den  $M'$  ye bir simetrik ve 3-lineer dönüşüm vardır.

$M' = M$  iken  $N$  kübik dönüşümüne  $M$  üzerinde bir kübik dönüşüm denir.  $M' = R$  iken  $N$  kübik dönüşümüne bir *kübik form* denir (Schafer, 1959). Bu durumda  $N(x, y, z)$  ye de *birleştirilmiş 3- lineer form* denir.

**Tanım 2.19.**  $(M, \oplus, \circ)$  özdeşlikli bir  $R$ -modül olup  $M$  üzerinde bir  $\otimes$  (çarpma) iç işlemleri tanımlansın. Eğer  $M$  bu işleme göre her  $a \in R$  ve her  $x, y \in M$  için

$$(a \circ x) \otimes y = x \otimes (a \circ y) = a \circ (x \otimes y)$$

şartını sağlayan bir halka (yani  $(M, \oplus, \otimes)$  bir halka) ise  $M$  ye  $R$  halkası üzerinde *cebiri*, kısaca  $M$  ye  $R$ -*cebiri* denir.

$M$  bir  $R$ -*cebiri* iken her  $a, b, c \in M$  için  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$  ya da buna denk olan  $[a, b, c] = 0$  (asosyotör) şartını sağlıyorsa  $M$  ye *birleşmeli  $R$ -cebiri*,  $a \otimes b = b \otimes a$  ya da buna denk olan  $[a, b] = 0$  (komutatör) şartını sağlıyorsa  $M$  ye *değişmeli  $R$ -cebiri* denir.

Bundan sonra;  $\oplus$  sembolü yerine  $+$  sembolü alınacaktır,  $\otimes$  ve  $\circ$  sembolleri yerine ise elemanlar yan yana yazılacaktır.

Alterne kuralların asosyotör yardımıyla  $[a, a, b] = 0$  ve  $[b, a, a] = 0$  olarak ifade edilebileceği gibi,  $[a, c, b] + [c, a, b] = 0$  ve  $[b, a, c] + [b, c, a] = 0$  olduğu da kolayca görülebilir.

**Tanım 2.20.**  $M$  bir  $R$ -*cebiri* olsun. Eğer  $M$  nin boştan farklı bir  $M'$  alt kümesi,  $M$  nin  $R$ -*cebiri* olmasını sağlayan işlemlerin  $M'$  üzerine indirgenmişleri altında bir  $R$ -*cebiri* oluşturuyorsa  $M'$  ye  $M$  nin *alt cebiri* denir.

**Tanım 2.21.**  $R$  birim olmayan elemanlarının kümesi  $I$  ile gösterilen birleşmeli, özdeşlikli ve değişmeli bir lokal halka olsun.

$$O = \{a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3 + a_4i_4 + a_5i_5 + a_6i_6 + a_7i_7 \mid a_i \in R, i = 0, 1, 2, \dots, 7\}$$

kümesi tanımlansın.



$O$  daki toplama iç işlemini bileşen bileşene toplama işlemi olarak ve  $O$  üzerindeki dış işlem her  $\lambda \in R$  ve her  $x \in O$  için

$$\lambda x = \lambda(a_0 + a_1 i_1 + \dots + a_7 i_7) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1) i_1 + \dots + (\lambda a_7) i_7$$

olarak tanımlanırsa  $(O, +, \cdot)$  sistemi özdeşlikli bir  $R$ -modül olur.

Çizelge 2.1 yardımıyla  $O$  üzerinde ikinci bir işlem olarak çarpma iç işlemi tanımlanabilir.  $R$  nin karakteristiği 2 den farklı olması durumunda  $O$  nun  $i_0 = 1, i_1, i_2, i_3 = i_1 i_2, i_4, i_5 = i_1 i_4, i_6 = i_2 i_4, i_7 = i_3 i_4$  biçiminde bir bazı vardır.  $c_1, c_2, c_3 \in R - I$  olmak üzere  $O$  nun bazındaki elemanlar için çarpım tablosu Çizelge 2.1 deki gibidir.

**Çizelge 2.1.**  $O$  nun bazındaki elemanlar için çarpım tablosu.

	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$	$i_6$	$i_7$
$i_1$	$c_1 i_0$	$i_3$	$c_1 i_2$	$i_5$	$c_1 i_5$	$-i_7$	$-c_1 i_6$
$i_2$		$c_2 i_0$	$-c_2 i_1$	$i_6$	$i_7$	$c_2 i_4$	$c_2 i_5$
$i_3$			$-c_1 c_2 i_0$	$i_7$	$c_1 i_6$	$-c_2 i_5$	$-c_1 c_2 i_4$
$i_4$				$c_3 i_0$	$-c_3 i_1$	$-c_3 i_2$	$-c_3 i_3$
$i_5$					$-c_1 c_3 i_0$	$c_3 i_3$	$c_1 c_3 i_2$
$i_6$						$-c_2 c_3 i_0$	$-c_2 c_3 i_1$
$i_7$							$c_1 c_2 c_3 i_0$

$O$  daki çarpma işleminin değişmeli olmadığı aşıkardır, birleşmeli olmadığına dair bir örnek verilebilir (mesela,  $[i_3, i_4, i_5] \neq 0$  dır). Bu durumda  $(O, +, \cdot)$  sistemi değişmeli ve birleşmeli olmayan özdeşlikli bir halka (yani özdeşlikli bir  $R$ -cebiri) olur. Bu halkaya *Cayley halkası* veya *octonion  $R$ -cebiri* denir.

Bir octonion  $R$ -cebirde alterne kurallar geçerlidir ve bazı kaynaklarda octonion  $R$ -cebir yerine *Cayley-Dickson cebiri* de denilmektedir (Stevenson, 1972).

**Teorem 2.22.** Bir alterne halka ya birleşmelidir ya da kendi merkezi üzerinde Cayley-Dickson cebiridir.

Teorem 2.22 den  $(O, +, \cdot)$  kendi merkezi üzerine bir Cayley-Dickson cebiridir. Ayrıca  $Z(O) = R$  dir.

**Tanım 2.23.**  $(R, +, \cdot)$  ve  $(R', +', \cdot')$  iki halka,  $\Phi: R \rightarrow R'$  bir dönüşüm olsun. Eğer her  $u, v \in R$  için

1)  $\Phi(u + v) = \Phi(u) +' \Phi(v)$

2)  $\Phi(u \cdot v) = \Phi(u) \cdot' \Phi(v)$

şartlarını sağlıyorsa  $\Phi$  dönüşümüne  $R$  den  $R'$  ye bir homomorfizm denir. Eğer 2 şartı yerine  $\Phi(u \cdot v) = \Phi(v) \cdot' \Phi(u)$  şartı alınırsa  $\Phi$  dönüşümüne  $R$  den  $R'$  ye bir anti-homomorfizm denir

**Tanım 2.24.**  $(R, +, \cdot)$  ve  $(R', +', \cdot')$  iki halka olsun.  $\Phi: R \rightarrow R'$  birebir ve örten bir homomorfizm (veya anti-homomorfizm) ise  $\Phi$  dönüşümüne  $R$  den  $R'$  ye bir *izomorfizm* (veya *anti-izomorfizm*) denir.  $R$  nin kendisi üzerine bir izomorfizmine (veya *anti-izomorfizmine*)  $R$  üzerinde bir *otomorfizm* (veya *anti-otomorfizm*) denir.

**Tanım 2.25.**  $R$  bir halka olsun.  $i$ ,  $R$  üzerinde özdeşlik dönüşümü olmak üzere mertebesi (periyodu) 2, (yani  $f \neq i$  iken  $f^2 = i$ ) olan bir  $f$  otomorfizmine (veya anti-otomorfizmine)  $R$  nin *involüsyonu* (veya *anti-involüsyonu*) denir.

**Tanım 2.26.**  $R$  bir halka ve  $f$  de  $R$  nin bir involüsyonu (ya da anti-involüsyonu) olsun.  $R$  nin  $f$  involüsyonu (ya da anti-involüsyonu) altında değişmez kalan elemanlarına  $R$  nin *simetrik elemanları* denir.

Şimdi,  $O$  Cayley halkası (veya Octonion  $R$ -cebiri) ile ilgili bazı bilgiler verilecektir. Bu bilgiler için Jacobson (1985), Schafer (1996), Çelik (1995) ve Akpınar (2007) çalışmaları esas alınmıştır.

**Tanım 2.27.**  $x = \bar{a}_0 + a_1i_1 + \dots + a_7i_7 \in O$  olmak üzere  $\bar{\cdot} : O \rightarrow O$  için  $x \rightarrow \bar{x} = a_0 - a_1i_1 - \dots - a_7i_7 \in O$  biçiminde tanımlanan dönüşüme *eşlenik alma dönüşümü* denir.

**Teorem 2.28.**  $x \in O$  için  $\bar{\bar{x}} = x$  ve  $x, y \in O$  için  $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$  dir, yani eşlenik alma dönüşümü  $O$  nun bir anti-involüsyonudur.

**Tanım 2.29.**  $n : O \rightarrow R$  için  $x \rightarrow n(x) = x\bar{x}$  biçiminde tanımlanan dönüşüme *norm form*  $n(x)$  e de  $x$  in *normu* veya *norm formu* denir

Bu tanıma göre  $x = a_0 + a_1i_1 + \dots + a_7i_7 \in O$  için

$$n(x) = x\bar{x} = \bar{x}x = a_0^2 - c_1a_1^2 - c_2a_2^2 + c_1c_2a_3^2 - c_3a_4^2 + c_1c_3a_5^2 + c_2c_3a_6^2 - c_1c_2c_3a_7^2$$

dir.

**Teorem 2.30.** Her  $a, b, c \in O$  için aşağıdaki önermeler doğrudur.

i)  $[a, \bar{a}, b] = [\bar{a}, a, b] = [b, \bar{a}, a] = [b, a, \bar{a}] = 0$  dir.

ii)  $[a + c, \overline{a + c}, b] = 0 \Rightarrow [a, \bar{c}, b] + [c, \bar{a}, b] = 0$  dir.

**Tanım 2.31.**  $t : O \rightarrow R$  için  $x \rightarrow t(x) = \frac{x + \bar{x}}{2}$  biçiminde tanımlanan dönüşüme *iz-form*,

$t(x)$  e  $x$  in *izi* veya *iz-formu* denir.

Bu tanıma göre  $x = a_0 + a_1i_1 + \dots + a_7i_7 \in O$  için

$$t(x) = t(\bar{x}) = a_0$$

dir.

**Tanım 2.32.**  $n: O \times O \rightarrow R$  için

$$n(x, y) = \frac{1}{2} [n(x + y) - n(x) - n(y)]$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme *birleştirilmiş form* denir.

**Tanım 2.33.**  $t: O \times O \rightarrow R$  için  $t(x, y) := t(xy)$  olarak tanımlanan dönüşüme *jenerik iz form* denir.

$O$  üzerinde iz ve norm fonksiyonlarının sağladığı özellikler için Akpınar (2018) çalışmasındaki Teorem 2.26 ya bakılabilir.

**Tanım 2.34.**  $\mathcal{N}$  ve  $\mathcal{D}$  elemanları sırasıyla, noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme ve " $\in$ " de  $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$  kümesi üzerinde tanımlı bir üzerinde olma bağıntısı olmak üzere aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen bir  $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in)$  sistemine bir *projektif düzlem* denir (Kaya, 2005);

**PD1)** Farklı iki noktadan tam olarak bir doğru geçer.

**PD2)** Farklı iki doğrunun tam olarak bir arakesit noktası vardır.

**Tanım 2.35.**  $\mathcal{N}$  noktalar kümesini,  $\mathcal{D}$  doğrular kümesini, " $\in$ " üzerinde olma bağıntısını ve " $\sim$ " da  $\mathcal{N}$  ve  $\mathcal{D}$  üzerinde bir denklik (komşuluk) bağıntısını göstermek üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir  $M = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \in, \sim)$  yapısına bir *projektif Klingenberg düzlemi* denir veya kısaca PK-düzlemi denir;

**(PK1)** Komşu olmayan herhangi iki noktayı birleştiren tam olarak bir doğru vardır,

**(PK2)** Komşu olmayan herhangi iki doğrunun tam olarak bir arakesit noktası vardır,

**(PK3)**  $M$  den bir  $M^* = (\mathcal{N}^*, \mathcal{D}^*, \epsilon)$  projektif düzlemi üzerine her  $A, B \in \mathcal{N}^*$  ve  $c, d \in \mathcal{D}^*$  için

$$\varphi(A) = \varphi(B) \Leftrightarrow A \sim B \text{ ve } \varphi(c) = \varphi(d) \Leftrightarrow c \sim d$$

şartlarını sağlayacak biçimde bir  $\varphi$  epimorfizmi vardır.

**Tanım 2.36.**  $M$  bir PK-düzlem olsun. Eğer her  $(M, e)$ ,  $M \in e$  için  $M$  düzlemi  $(M, e)$ -geçişken ise  $M$  ye *Moufang-Klingenberg düzlemi* veya kısaca MK-düzlemi denir.

$M$  bir MK-düzlem iken  $M^*$  kanonik görüntüsü bir Moufang düzlemidir (Blunck, 1991).

**Teorem 2.37.** Her lokal alterne halkaya karşılık gelen bir MK-düzlem vardır. Tersine, her MK-düzlem bir lokal alterne halka ile koordinatlanabilir.

**Tanım 2.38.**  $M$  bir MK-düzlem olsun.  $M$  den  $M$  üzerine 1:1, örten, üzerinde olma ve komşuluk bağıntısını koruyan bir dönüşüme  $M$  nin bir *kolinasyonu* denir

**Tanım 2.39.**  $M$ , özdeşlikli bir  $R$ -modül olsun.  $M$  üzerinde  $u \rightarrow u^\#$  biçiminde bir kuadratik dönüşüm ve  $M$  üzerinde bir  $N$  kübik formu tanımlansın. Eğer  $M$  üzerinde aşağıdaki şartlar sağlanırsa  $M$  ye bir kübik  $R$ -cebir denir:

1)  $u^{\#\#} = N(u)u$  dir.

2)  $N(1) = 1$  dir.

3)  $T(u^\#, v) = N(u, v)$  dir.

4)  $1^\# = 1$  dir.

5)  $u \times v = \frac{1}{2}[(u+v)^\# - u^\# - v^\#]$  ve  $T(v) = T(v, 1)$  olmak üzere  $1 \times v = \frac{1}{2}[T(v)1 - y]$  dir

(Bix, 1980).

Şimdi octonion düzlem tanımını ifade edebilmek için bazı ön bilgiler verilecektir.

$O$  octonion  $R$ -cebirinin elemanlarını girdi kabul ederek oluşturulan  $3 \times 3$  matrislerin kümesi  $O_3$  ile gösterilsin. Matris toplama ve skalar ile bir matrisin çarpım işlemlerini sırasıyla iç ve dış işlem kabul ederek oluşturulan  $(O_3, +, \cdot)$  Cayley matris cebiri üzerinde bir

$$X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in O_3$$

elemanı için  $J_\Gamma(X) = \Gamma^{-1} \bar{X}^T \Gamma$  şeklinde  $J_\Gamma : O_3 \rightarrow O_3$  anti-involüsyonu tanımlanırsa, bu involüsyon altında değişmez kalan elemanlar yani diğer adı ile simetrik elemanlar  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$  olmak üzere

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 a_3 & \gamma_3 \bar{a}_2 \\ \gamma_1 \bar{a}_3 & \alpha_2 & \gamma_3 a_1 \\ \gamma_1 a_2 & \gamma_2 \bar{a}_1 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

formunda olduğu görülür. Bu simetrik elemanların oluşturduğu küme  $\mathcal{H}(O_3, J_\Gamma)$  ile gösterilir. Bu tip matrisler *hermityen matris* olarak da adlandırılır.  $\mathcal{H}(O_3, J_\Gamma)$  alt kümesi  $O_3$   $R$ -modülünün bir alt modülü (yani alt uzayı) olur.  $\mathcal{H}(O_3, J_\Gamma)$  alt uzayı üzerinde ikinci bir iç işlem olan “ $\cdot$ ” işlemi, her  $X, Y \in O_3$  için  $X \cdot Y := \frac{1}{2}(XY + YX)$  Jordan çarpımı alınarak  $(\mathcal{H}(O_3, J_\Gamma), +, \cdot)$  sistemi, yani bir Jordan  $R$ -ceberi elde edilmiştir (Jacobson, 1968).

Bu durumda  $J = (\mathcal{H}(O_3, J_\Gamma), +, \cdot)$  kümesi üzerinde kuadratik dönüşüm olarak  $Q(X) = X^\#$  adjoint (ek) alma dönüşümü, iz form olarak  $T(X) = iz(X)$  ve kübik form olarak da  $N(X) = \det X$  determinant fonksiyonu alınırsa  $J$  nin bir kübik cebir olduğu görülebilir (Candan, 2016). Benzer şartlar altında bir başka kübik cebir örneği için Akpınar (2018) çalışmasına bakılabilir.

**Tanım 2.40.**  $(R, I)$  bir lokal halka ve  $O$  bir octonion  $R$ -cebir olmak üzere  $J = (\mathcal{H}(O_3, J_\gamma), +, \cdot)$  kuadratik Jordan cebirinin rankı 1 olan elemanlarının kümesi  $\Pi := \{X \mid X \in J \setminus IJ \text{ ve } X \times X = X^\# = 0\}$  olsun. Burada  $X \in \Pi$  ve  $\alpha \in R \setminus I$  ise  $\alpha X \in \Pi$  dir.

$X \in \Pi$  için  $\{\alpha X \mid \alpha \in R \setminus I\}$  kümesinin iki kopya elemanı  $X_*$  ve  $X^*$  iken  $\Pi$  kümesi üzerinde  $\mathcal{N} = \{X_* \mid X \in \Pi\}$  noktalar kümesi için üzerinde olma bağıntısı " $|$ ",  $\mathcal{D} = \{X^* \mid X \in \Pi\}$  doğrular kümesi için irtibatlılık bağıntısı " $\sim$ " ile birlikte oluşturulan ve aşağıdaki şartları sağlayan  $\mathbb{P}(\Pi) = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, |, \sim)$  geometrik yapısı *octonion düzlem* denir;

- i)  $Y_* \mid X^* \Leftrightarrow V_{X,Y} 1 = X \cdot Y = 0$  ( $Y_*$  noktası  $X^*$  doğrusu üzerindedir  $\Leftrightarrow V_{X,Y} 1 = X \cdot Y = 0$ )
- ii)  $T(X, Y) \in I$  ise  $X_*$  noktası  $Y^*$  doğrusu ile irtibatlıdır denir ve bu durum  $X_* \simeq Y^*$  ile gösterilir. Aksi durum  $X_* \neq Y^*$  ile gösterilir.
- iii)  $X \times Y \in IJ$  ise  $X_*$  noktası ( $X^*$  doğrusu)  $Y_*$  noktası ( $Y^*$  doğrusu) ile irtibatlıdır denir ve bu durum  $X_* \simeq Y_*$  ( $X^* \simeq Y^*$ ) ile gösterilir. Aksi hal  $X_* \neq Y_*$  ( $X^* \neq Y^*$ ) ile gösterilir.

$O$  octonion  $R$ -cebirinde  $R$  yerine  $F$  cismi alınarak elde edilen octonion (Cayley) bölümlü cebir (halka)  $\odot$  ile gösterilecektir. Bu durumda sıfırdan farklı her  $x \in \odot$  için  $x$  birimdir.

Candan (2016) tarafından yapılan çalışmada bir  $O$  octonion  $R$ -cebiri için Teorem 2.36 da “ideali  $I = \{x = a_0 + a_1i_1 + \dots + a_7i_7 \mid n(x) \in I\}$  olan bir lokal alterne halkadır” önermesi genelde geçerli değildir:  $R$  yerine  $K$  bir cisim olmak üzere  $K + K\varepsilon$  lokal halkası alınırsa  $I = K\varepsilon$  olacaktır. Bu durumda  $O$  octonion cebirinin bir alt cebiri olan kuaternion cebirinde çalışıldığı kabul edilsin. Kuaternion cebirindeki  $2 \times 2$  matris gösterimleri kullanılarak  $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  için  $n(x) = \det(x) = \varepsilon \in I$  ve  $n(x) = \det(x) = \varepsilon \in I$  olup  $x, y \in I$  olacağı açıktır. Ancak,  $x + y = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$  için  $n(x + y) = 1 + 2\varepsilon \notin I$  olup  $x + y \notin I$  yani  $I$  bir alt halka değildir. O halde  $I$  bir ideal de olamaz.

Bu sebeple Candan (2016) tarafından verilen Teorem 2.36 daki önerme bazı octonion cebirler için geçerlidir. Mesela  $\mathbb{O}$  bir octonion bölümlü cebir iken  $I = \{0\}$  dir. Çünkü  $n(x) \in I$  olacak şekilde sadece  $x = 0$  vardır.

**Tanım 2.41.**  $\mathbb{O}$  bir bölümlü halka,  $\varepsilon \notin \mathbb{O}$  ve  $\varepsilon^m = 0$  olmak üzere,  $\mathcal{A} := \mathbb{O} + \mathbb{O}\varepsilon + \mathbb{O}\varepsilon^2 + \dots + \mathbb{O}\varepsilon^{m-1}$  üzerinde her  $a = a_0 + a_1\varepsilon + \dots + a_{m-1}\varepsilon^{m-1}$ ,  $b = b_0 + b_1\varepsilon + \dots + b_{m-1}\varepsilon^{m-1} \in \mathcal{A}$  için “+” iç işlemleri bileşen bileşene toplama ve “.” iç işlemleri

$$a \cdot b = \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) \varepsilon^k$$

olarak tanımlanırsa  $(\mathcal{A}, +, \cdot)$  bir halkadır. Bu halkaya *m. dereceden plural cebir* denir.

$\mathcal{A} = \mathbb{O} + \mathbb{O}\varepsilon + \mathbb{O}\varepsilon^2 + \dots + \mathbb{O}\varepsilon^{m-1}$  halkasının birim olmayan elemanlarının kümesi  $I$  ile gösterilirse  $I = \mathcal{A}\varepsilon = \{a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{m-1}\varepsilon^{m-1} \mid a_1, a_2, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{O}\}$  olarak bulunur.  $\mathbb{O}$



nun merkezi  $\mathbf{Z}(\mathbb{O})$  olmak üzere  $\mathcal{A}$  halkasının merkezi  $\mathbf{Z}(\mathcal{A}) = \mathbf{Z}(\mathbb{O}) + \mathbf{Z}(\mathbb{O})\varepsilon + \cdots + \mathbf{Z}(\mathbb{O})\varepsilon^{m-1}$  dir.

Şimdi octonion düzlem için daha önce verilen norm form, iz form ve eşleniklik kavramlarının  $\mathcal{A}$  üzerindeki karşılıkları Erdogan'ın (2020) çalışmasından verilecektir:

$a = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots + a_{m-1}\varepsilon^{m-1} \in \mathcal{A}$  için  $\mathcal{A}$  üzerinde tanımlı

$$\mathbf{j}: a \rightarrow \bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\varepsilon + \bar{a}_2\varepsilon^2 + \cdots + \overline{a_{m-1}}\varepsilon^{m-1} \in \mathcal{A}$$

anti-otomorfizmi,

$$\mathbf{t}(a) = t(a_0) + t(a_1)\varepsilon + t(a_2)\varepsilon^2 + \cdots + t(a_{m-1})\varepsilon^{m-1} \in \mathbf{Z}(\mathcal{A})$$

iz formu,  $m-1$  tek iken

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(a) = & n(a_0) + [n(a_0, a_1)]\varepsilon + [n(a_0, a_2) + n(a_1)]\varepsilon^2 + \cdots \\ & + \left[ n(a_0, a_{m-1}) + n(a_1, a_{m-2}) + \cdots + n\left(\frac{a_{m-1}}{2}, \frac{a_m}{2}\right) \right] \varepsilon^{m-1} \in \mathbf{Z}(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

ve  $m-1$  çift iken

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(a) = & n(a_0) + [n(a_0, a_1)]\varepsilon + [n(a_0, a_2) + n(a_1)]\varepsilon^2 + \cdots \\ & + \left[ n(a_0, a_{m-1}) + n(a_1, a_{m-2}) + \cdots + n\left(\frac{a_{m-1}}{2}, \frac{a_{m-1+1}}{2}\right) + n\left(\frac{a_{m-1}}{2}\right) \right] \varepsilon^{m-1} \in \mathbf{Z}(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

norm formu tanımlanabilir. Buradan,  $b = b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \cdots + b_{m-1}\varepsilon^{m-1} \in \mathcal{A}$  olmak üzere

$$\mathbf{n}(a, b) = \sum_{k=0}^{m-1} \left( \sum_{i+j=k} n(a_i, b_j) \right) \varepsilon^k$$

elde edilir.

Şimdi Akpınar (2019) tarafından yapılan çalışmadan aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**Önerme 2.42.**  $x, y, m, k \in \mathcal{A}$  elemanları için eğer  $y = mx + k$  ise bu takdirde

$$1. (\bar{km})(x\bar{y}) = \bar{k}((mx)\bar{y}).$$

$$2. (\bar{km})(x\bar{y}) = (\bar{k}(mx))\bar{y}.$$

**İspat.**  $j: a \rightarrow \bar{a}$  anti-involüsyonu,  $t$  iz formu,  $n$  norm formunun özellikleri ve Moufang özdeşlikleri yardımıyla ispat kolaylıkla elde edilebilir.

**Teorem 2.43.**  $a_i = a_{i0} + a_{i1}\varepsilon + \dots + a_{i(m-1)}\varepsilon^{m-1}$ ,  $b_i = b_{i0} + b_{i1}\varepsilon + \dots + b_{i(m-1)}\varepsilon^{m-1} \in \mathcal{A}$ ,  $i = 1, 2, 3$  olsun.

$(i, j, k)$ ,  $(1, 2, 3)$  ün bir dairesel permütasyonu ve  $n(a_i)$ ,  $t(a_i)$ ,  $n(a_i, b_i) \in \mathbf{Z}(\mathcal{A})$  olmak üzere;

$$1. N(X) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\gamma_2\gamma_3n(a_1) - \alpha_2\gamma_3\gamma_1n(a_2) - \alpha_3\gamma_1\gamma_2n(a_3) + \gamma_1\gamma_2\gamma_32t((a_1a_2)a_3) \\ = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_32t((a_1a_2)a_3) - \sum_{(i,j,k)} \alpha_i\gamma_j\gamma_kn(a_i)$$

dir.

$$2. x_{ii} = \alpha_j\alpha_k - \gamma_j\gamma_kn(a_i), \quad x_{ij} = \gamma_i\gamma_k a_i a_j - \gamma_i\alpha_k \bar{a}_k \quad \text{ve} \quad x_{ji} = \bar{x}_{ij} \quad \text{olmak üzere} \quad X^\# = (x_{ij})_{3 \times 3}$$

dir.

$$3. z_{ii} = \frac{1}{2}[\alpha_j\beta_k + \beta_j\alpha_k - 2\gamma_j\gamma_kn(a_i, b_i)], \quad z_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_j[\gamma_k(\overline{a_i b_j + b_i a_j}) - (\alpha_k b_k + \beta_k a_k)]) \quad \text{ve}$$

$$z_{ji} = \bar{z}_{ij} \quad \text{olmak üzere} \quad X \times Y = Y \times X = (z_{ij})_{3 \times 3} \quad \text{dir.}$$

$$4. T(X, Y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + 2\gamma_2\gamma_3n(a_1, b_1) + 2\gamma_3\gamma_1n(a_2, b_2) + 2\gamma_1\gamma_2n(a_3, b_3) \\ = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \sum_{(i,j,k)} 2\gamma_j\gamma_kn(a_i, b_i)$$

dir.

$\mathbb{P}(J) = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, |, \simeq)$  octonion düzlem tanımında noktalar ve doğrular kümesi  $J$  nin rankı 1 olan elemanlarının kümesi olarak seçilen  $\Pi$  kümesi yardımıyla tanımlandığından  $\Pi$  nin elemanları  $3 \times 3$  tipinde matrisler ve bu matrislerin rankı 1 olduğundan  $\Pi$  deki her bir elemanın yani her bir  $3 \times 3$  matrisin lineer bağımsız satır veya sütun sayısı 1 dir.

Bu demektir ki  $\Pi$  nin elemanları her ne kadar  $3 \times 3$  tipinden matrisler olsa da her bir matris bir kolon ya da bir satır vektörü olarak yani sıralı üçlüler ile ifade edilebilir. Matrislerin bu kısa gösterimi kullanılarak düzlem sınıfı üzerinde  $3 \times 3$  matrisler ile çalışmak yerine homojen olmayan koordinatlamaya benzer kısa gösterimler ile çalışma fikri Akpınar (2019) tarafından yapılan çalışmanın temel fikrini oluşturmuştur. Bu çalışmanın bir sonucu olarak girdileri  $\mathcal{A} = \mathbb{O} + \mathbb{O}\varepsilon + \mathbb{O}\varepsilon^2 + \dots + \mathbb{O}\varepsilon^{m-1}$  m. dereceden plural cebirinden alınarak oluşturulan octonion düzlemin nokta ve doğruları aşağıdaki biçimde kısaca ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = & \left\{ X = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{y} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{z} \\ y & \gamma_1^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(y) & \gamma_1^{-1}\gamma_3y\bar{z} \\ z & \gamma_1^{-1}\gamma_2z\bar{y} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\mathbf{n}(z) \end{pmatrix} =: (1, y, z) \left| y \in \mathcal{A}, z \in \mathbf{I} \right. \right\} \\ \cup & \left\{ Y = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(w) & w & \gamma_3\gamma_2^{-1}(w\bar{z}) \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}\bar{w} & 1 & \gamma_3\gamma_2^{-1}\bar{z} \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}(z\bar{w}) & z & \gamma_3\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(z) \end{pmatrix} =: (w, 1, z) \left| w, z \in \mathbf{I} \right. \right\} \\ \cup & \left\{ Z = \begin{pmatrix} \gamma_3^{-1}\gamma_1\mathbf{n}(x) & \gamma_3^{-1}\gamma_2(x\bar{y}) & x \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1(y\bar{x}) & \gamma_3^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(y) & y \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1\bar{x} & \gamma_3^{-1}\gamma_2\bar{y} & 1 \end{pmatrix} =: (x, y, 1) \left| x, y \in \mathcal{A} \right. \right\} \end{aligned}$$

ve dual olarak

$$\mathcal{D} = \left\{ S = \begin{bmatrix} 1 & -q & -p \\ -\gamma_2^{-1}\gamma_1\bar{q} & \gamma_2^{-1}\gamma_1\mathbf{n}(q) & \gamma_2^{-1}\gamma_1(\bar{q}p) \\ -\gamma_3^{-1}\gamma_1\bar{p} & \gamma_3^{-1}\gamma_1(\bar{p}q) & \gamma_3^{-1}\gamma_1\mathbf{n}(p) \end{bmatrix} =: [1, q, p] \mid p \in \mathcal{A}, \mathbf{q} \in \mathbf{I} \right\}$$

$$\cup \left\{ Q = \begin{bmatrix} \gamma_1^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(m) & -\gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{m} & \gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{m}k \\ -m & 1 & -k \\ \gamma_3^{-1}\gamma_2\bar{k}m & -\gamma_3^{-1}\gamma_2\bar{k} & \gamma_3^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(k) \end{bmatrix} =: [m, 1, k] \mid m, k \in \mathcal{A} \right\}$$

$$\cup \left\{ W = \begin{bmatrix} \gamma_1^{-1}\gamma_3\mathbf{n}(q) & \gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{q}r & -\gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{q} \\ \gamma_2^{-1}\gamma_3\bar{r}q & \gamma_2^{-1}\gamma_3\mathbf{n}(r) & -\gamma_2^{-1}\gamma_3\bar{r} \\ -q & -r & 1 \end{bmatrix} =: [q, r, 1] \mid q, r \in \mathbf{I} \right\}.$$

Octonion düzlemin noktaları ve doğruları için yukarıda elde edilen gösterimleri düzlemin homojen olmayan koordinatları olarak düşünebiliriz. Aşağıdaki teorem ise bu gösterimler altında octonion düzlemin üzerinde olma ve komşuluk bağıntılarının orjinal tanımından farklı bir biçimde daha kısa olarak ifade edilebileceğini gösterir.

**Teorem 2.44.**  $\mathbb{P}(\Pi)$  octonion düzleminde üzerinde olma bağıntısı, komşuluk bağıntıları  $\mathcal{N}$  ve  $\mathcal{D}$  için yukarıda verilen kısa gösterimler altında aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$(x, y, 1) \in [m, 1, k] \Leftrightarrow y = mx + k,$$

$$(x, y, 1) \in [1, q, p] \Leftrightarrow x = qy + p,$$

$$(x, y, 1) \notin [q, r, 1],$$

$$(1, y, z) \notin [1, q, p],$$

$$(1, y, z) \in [q, r, 1] \Leftrightarrow z = q + ry,$$

$$(w, 1, z) \notin [m, 1, k],$$

$$(w, 1, z) \in [1, q, p] \Leftrightarrow w = q + pz,$$

$$(w, 1, z) \in [q, r, 1] \Leftrightarrow z = qw + r,$$

$$(u_1, u_2, u_3) \sim (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow u_i - v_i \in \mathbf{I}, i = 1, 2, 3,$$

$$[u_1, u_2, u_3] \sim [v_1, v_2, v_3] \Leftrightarrow u_i - v_i \in \mathbf{I}, i = 1, 2, 3, .$$

Teorem 2.44 nın bir sonucu olarak, aynı bileşenlerinde 1 olan (yani aynı tipten) bir nokta ve bir doğru birbirine yakın olamazlar. Üstelik bu kısa gösterimler altında çalıştığımız  $\mathbb{P}(\Pi)$  octonion düzleminin  $\mathcal{A}$  ile koordinatlanan  $M(\mathcal{A})$  Moufang-Klingenberg düzlem tanımındaki benzer gösterimler ile temsil edildiği açık olarak görülmektedir (Blunck, 1991). Yani, bu kısa gösterimler altında  $\mathbb{P}(\Pi)$  octonion düzleminin  $\mathcal{A}$  ile koordinatlanan bir MK- düzlem olduğu ortaya çıkmaktadır.

Böylece  $M(\mathcal{A})$  da elde edilecek sonuçların  $\mathbb{P}(\Pi)$  octonion düzleminde de geçerli olduğu sonucuna varılmış olur.

$M(\mathcal{A})$  MK-düzlemi üzerinde 6-şekillerle ilgili bazı sonuçları ifade edebilmek için ilk olarak Erdoğan'ın (2020) çalışmasından  $M(\mathcal{A})$  üzerinde tanımlı  $T_{a,0}$ ,  $T_{0,b}$ ,  $L_a$ ,  $F_a$ ,  $S_{\alpha,\beta}$ ,  $I_1$ ,  $F$ ,  $G_s$  ve  $I_2$  dönüşümlerine ihtiyaç duyulacaktır. Bu dönüşümlerin kolonasyon olduğunu görmek için Celik v.d (2007) çalışmasının  $m=2$  durumundaki benzer işlemler takip edilmelidir.

Şimdi, Erdoğan'ın (2020) çalışmasından aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

**Teorem 2.45.**  $M(\mathcal{A})$  nın  $G$  kolonasyonlar grubu 3-genler üzerinde geçişkendir.

$T$  ve  $N$  nin tanımları yardımıyla aşağıdaki önerme elde edilir.

**Önerme 2.46.**  $x \in \mathcal{A}$  için  $x^2 = -N(x) + T(x)x$  dir. Şayet  $T(x) = 0$  ise bu takdirde  $x^2 = -N(x)$  dir.

Teorem 3.11 in ispatı için gerekli olan aşağıdaki önerme ispatsız olarak verilecektir. Benzer bir ispat için Celik v.d. (2007) çalışmasına bakılabilir.

**Önerme 2.47.**  $d \in \mathbb{O}$ ,  $d \notin Z(\mathbb{O})$  ve  $c \in Z(\mathbb{O})$  olsun. Bu takdirde  $t(ds) = t(sd) = c$  ve  $t(s) = 0$  özelliğinde bir  $s \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$  vardır.

Önerme 2.47  $\mathcal{A}$  ya aşağıdaki önerme yardımıyla genişletilebilir.

**Önerme 2.48.**  $d \in \mathcal{A}$ ,  $d \notin Z(\mathcal{A})$  ve  $c \in Z(\mathcal{A})$  olsun. Bu takdirde  $T(sd) = T(ds) = c$  ve  $T(s) = 0$  olacak şekilde bir  $s \in \mathcal{A} \setminus \mathbf{I}$  vardır.

**Teorem 2.49.**  $M(\mathcal{A})$  nın  $G$  kolonasyonlar grubu 4-genler üzerinde geçişkendir.

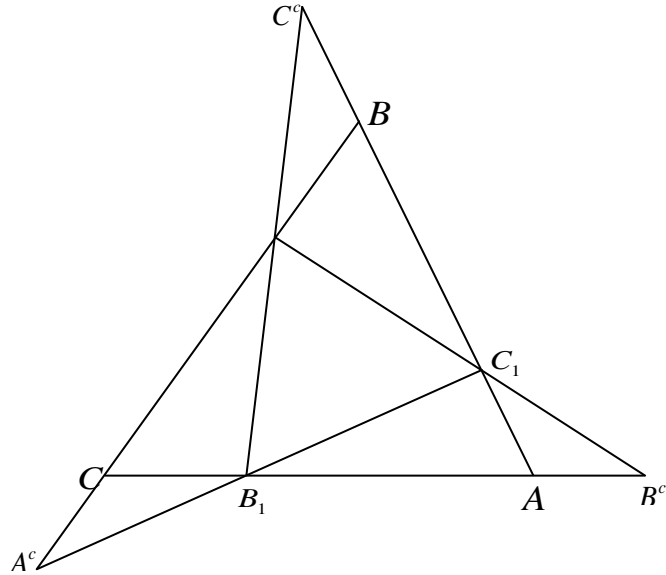
**Sonuç 2.50.**  $M(\mathcal{A})$  nın koordinatlanması koordinatlama bazının seçiminden bağımsızdır.

### 3. 6-ŞEKİLLER

Bu bölümde Akpınar v.d. (2008), Celik v.d. (2010) ve Celik v.d. (2007) tarafından  $m=2$  durumunda  $\mathbf{A} := \mathbb{O} + \mathbb{O}\varepsilon$  lokal halkası üzerinde kurulan  $M(\mathbf{A})$  MK-düzleminde elde edilen 6 şekillerle ilgili sonuçların benzerlerinin  $\mathcal{A} = \mathbb{O} + \mathbb{O}\varepsilon + \mathbb{O}\varepsilon^2 + \dots + \mathbb{O}\varepsilon^{m-1}$  ile kurulan octonion düzlem (yani  $M(\mathcal{A})$  MK-düzlem) üzerindeki karşılıkları incelenecektir

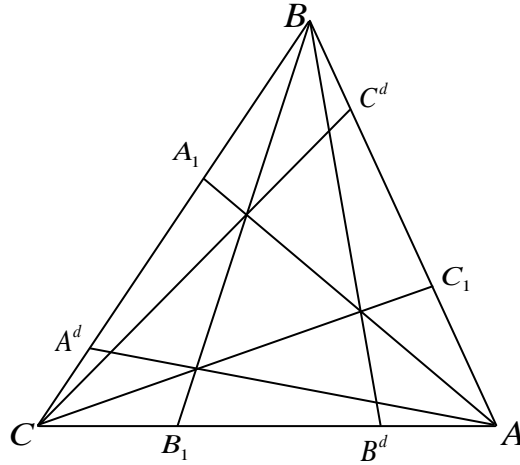
**Tanım 3.1.**  $(A, B, C)$  bir üçgen ve  $A_1 \in BC$ ,  $B_1 \in CA$ ,  $C_1 \in AB$  olmak üzere birbirine komşu olmayan  $(ABC, A_1B_1C_1)$  nokta dizisine bir 6-şekil,  $\mu = (ABC, A_1B_1C_1)$  bir 6-şekil iken  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  noktalarına  $\mu$  6-şekilin köşeleri adı verilir.

$\mu = (ABC, A_1B_1C_1)$ ,  $M(\mathcal{A})$  da bir 6-şekil ve  $A^c = BC \cap B_1C_1$ ,  $B^c = CA \cap C_1A_1$ ,  $C^c = AB \cap A_1B_1$  olsun.  $(ACB, A^cC^cB^c)$  6-şekiline  $\mu$  nün ilk *codescendantı* denir ve  $\mu^c$  ile gösterilir.  $\mu$  ye ise  $\mu^c$  nin ilk *coancestorı* denir (Bkz. Şekil 3.1 ).



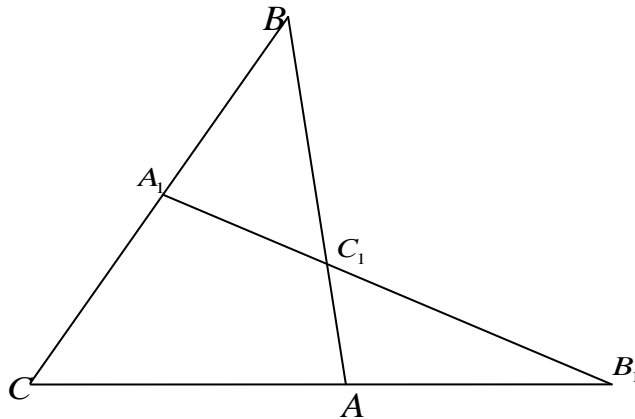
**Şekil 3.1.** Bir 6-şekilin ilk codescendantı.

$C, C^d$  ve  $AA_1 \cap BB_1$  doğrudaki olacak biçimde  $C^d \in AB$ ,  $A, A^d$  ve  $BB_1 \cap CC_1$  doğrudaki olacak biçimde  $A^d \in BC$  ve  $B, B^d, AA_1 \cap CC_1$  doğrudaki olacak biçimde  $B^d \in CA$  noktaları verilsin.  $(ACB, A^d C^d B^d)$  6-şekiline  $\mu$  nün ilk descendantı denir ve  $\mu^d$  ile gösterilir.  $\mu$  ye ise  $\mu^d$  nin ilk ancestörü denir (Bkz. Şekil 3.2).



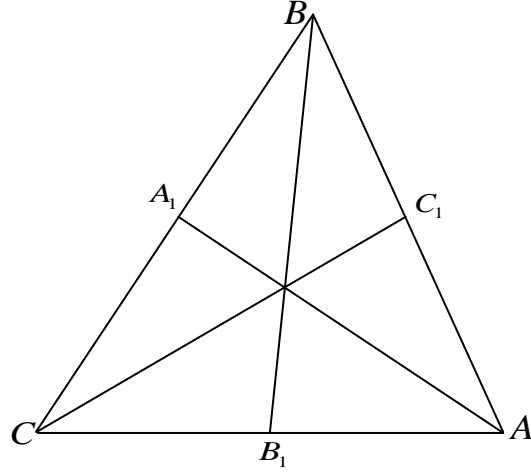
Şekil 3.2. Bir 6-şekilin ilk descendantı.

Eğer  $A_1, B_1, C_1$  doğrudaki ise  $(ABC, A_1 B_1 C_1)$  ye *Menelaus* 6-şekil denir (Bkz. Şekil 3.3). Bununla beraber eğer  $AA_1, BB_1, CC_1$  doğruları noktada ise  $(ABC, A_1 B_1 C_1)$  ye *Ceva* 6-şekil denir (Bkz. Şekil 3.4).



Şekil 3.3. Menelaus 6-şekil.





**Şekil 3.4.** Ceva 6-şekil.

$M(\mathcal{A})$  nın bir kolinasyonu sırasıyla  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  noktalarını, sırasıyla,  $D, E, F, D_1, E_1, F_1$  noktalarına dönüştürüyorsa  $(ABC, A_1B_1C_1)$  6-şekili,  $(DEF, D_1E_1F_1)$  6-şekiline denktir denir ve bu durum  $(ABC, A_1B_1C_1) \bar{\wedge} (DEF, D_1E_1F_1)$  biçiminde gösterilir.

Şimdi Cater (1978) tarafından Desarg düzlemleri, Çiftçi (1989) tarafından Moufang düzlemleri ve Celik v.d. (2007) tarafından MK-düzlemlerinin belirli bir sınıfı için verilen teoremin benzeri olan aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

**Teorem 3.2.**  $\mu = (ABC, A_1B_1C_1)$ ,  $M(\mathcal{A})$  nın bir 6-şekili olsun. Bu taktirde öyle bir  $m \in \mathcal{A} - I$  vardır ki  $U = (1, 0, 0)$ ,  $V = (0, 1, 0)$  ve  $O = (0, 0, 1)$   $M(\mathcal{A})$  nın koordinatlama bazının elemanları olmak üzere  $(UVO, (0, 1, 1)(1, 0, 1)(1, m, 0))$  6-şekili  $\mu$  ye denktir.

Celik v.d. (2007) tarafından  $m=2$  durumunda verilen ispatdaki bazı farklılıklarından dolayı aşağıdaki teoremin ispatının verilmesine ihtiyaç duyulmuştur.

**Teorem 3.3.**  $(ABC, A_1B_1C_1), (BCA, B_1C_1A_1), (CAB, C_1A_1B_1)$  6-şekilleri denktir.

**İspat:** Teorem 3.2 gereği  $(ABC, A_1B_1C_1)$  yerine  $U_1 = (0,1,1)$ ,  $V_1 = (1,0,1)$ ,  $O_1 = (1,m,0)$  ve  $m \notin I$  olmak üzere  $(UVO, U_1V_1O_1)$  alabiliriz.  $h := S_{-1,-1} \circ I_2 \circ S_{-1,1} \circ I_1$  kolinasyonunu düşünelim.  $h$  kolinasyonu  $(UVO, U_1V_1O_1)$  6-şekilini  $(VOU, V_1(1,1,0)(0, m^{-1}, 1))$  6-şekiline dönüştürür. Şimdi  $(VOU, V_1(1,1,0)(0, m^{-1}, 1))$  6-şekilini  $(VOU, V_1O_1U_1)$  6-şekiline dönüştürecek bir kolinasyon bulmalıyız. Burada  $m = m_0 + m_1\varepsilon + \dots + m_{m-1}\varepsilon^{m-1}$  için iki durum vardır:  $T(m) \in I$  ya da  $T(m) \notin I$  dır.

**1. Durum.** Eğer  $T(m) = t(m_0) + t(m_1)\varepsilon + t(m_2)\varepsilon^2 + \dots + t(m_{m-1})\varepsilon^{m-1} \in I$  ise bu takdirde  $t(m_0) = 0$  dır ve burada  $T(m)$  için iki durum vardır:

**1.1.** Eğer  $t(m_1) = t(m_2) = t(m_3) = \dots = t(m_{m-1}) = 0$  ise bu takdirde  $T(m) = 0$  olur ki Önerme 2.46 den  $m^2 = -N(m)$  dir. Bu takdirde

$$(VOU, V_1(1,1,0)(0, m^{-1}, 1)) \xrightarrow{S_{-N(m), -N(m)}} (VOU, (m^2, 0, 1)(1, 1, 0)(0, m, 1)) \xrightarrow{F_{m^{-1}}} (UVO, U_1V_1O_1)$$

elde ederiz. Bu durumda  $g := F_{m^{-1}} \circ S_{-N(m), -N(m)}$  dönüşümü tanımlanmış olsun.

**1.2.**  $t(m_1), t(m_2), t(m_3), \dots, t(m_{m-1})$  den en az biri sıfırdan farklı ise Önerme 2.48 den  $T(s) = 0 = T(sm)$  olacak şekilde  $s \in \mathcal{A} - I$  vardır ve böylece Önerme 2.46 den  $s^2 = -N(s) \in Z(\mathcal{A})$ ,  $(sm)^2 = -N(sm) \in Z(\mathcal{A})$  olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} & (VOU, V_1(1,1,0)(0, m^{-1}, 1)) \\ & \xrightarrow{S_{-N(sm), -N(sm)}} (VOU, (sm^2, 0, 1)(1, 1, 0)(0, m^{-1}(sm)^2, 1)) \\ & \xrightarrow{F_{(sm)^{-1}}} (VOU, (1, 0, 1)(1, sm, 0)(0, s, 1)) \\ & \xrightarrow{S_{1-N(s)}} (VOU, (s^2, 0, 1)(1, s^{-1}m, 0)(0, s, 1)) \\ & \xrightarrow{F_{s^{-1}}} (VOU, V_1, O_1, U_1) \end{aligned}$$

elde edilir ve burada  $g := F_{s^{-1}} \circ S_{1,-N(s)} \circ F_{(sm)^{-1}} \circ S_{-N(sm),-N(sm)}$  dönüşümü tanımlanmış oldu.

**2.Durum.** Eğer  $T(m) = t(m_0) + t(m_1)\varepsilon + t(m_2)\varepsilon^2 + \dots + t(m_{m-1})\varepsilon^{m-1} \notin I$  ise bu takdirde  $t(m_0) \neq 0$  olur. Önerme 2.48 den  $T(d) = 0 = T(dm)$  olacak şekilde bir  $d \in \mathcal{A} - I$  vardır. Bu durumda ispat  $s$  yerine  $d$  alınarak Durum 1.2 den elde edilir. Bundan dolayı  $g := F_{d^{-1}} \circ S_{1,-N(d)} \circ F_{(dm)^{-1}} \circ S_{-N(dm),-N(dm)}$  biçiminde tanımlanır. Sonuç olarak  $f := g \circ h$  kolonasyonu  $(UVO, U_1V_1O_1)$  6 şeklini  $(VOU, V_1O_1U_1)$  6-şekiline dönüştürür ve üstelik  $(VOU, V_1O_1U_1)$  6-şekilini de  $(OUV, O_1U_1V_1)$  6 şekiline dönüştürür. Bu da ispatı tamamlar.

$\mathcal{A} = \mathbb{O} + \mathbb{O}\varepsilon + \mathbb{O}\varepsilon^2 + \dots + \mathbb{O}\varepsilon^{m-1}$  ile kurulan octonion düzlem yani  $M(\mathcal{A})$  MK-düzlem üzerinde çifte oran tanımlamakta bazı zorluklar çıkmaktadır (Erdoğan, 2020). Bu nedenle  $m = 2$  durumunda 6-şekilin oranı ile ilgili elde edilen sonuçların karşılıkları  $M(\mathcal{A})$  üzerinde incelenememiştir. Tam bu noktada "Acaba bu çalışığımız halkadan farklı olan ve onun üzerine kurulacak MK-düzlemde çifte oranıda tanımlı hale getirebileceğimiz yeni bir halka (cebir) yapısı bulunabilir mi?" sorusu sorulmuştur. Yine çifte oran tanımlamakta başarısız olunsa da bu soru yardımıyla yeni MK-düzlem sınıfları elde edilmiştir (Doğan ve Akpınar, 2021a). Daha sonra elde edilen düzlem sınıfları üzerinde 6-şekillerle ilgili  $M(\mathcal{A})$  da elde edilen sonuçların benzerlerinin geçerli olduğu gösterilmiştir.

Şimdi  $K = M_4(\mathbb{O})$  ile gösterilen girdileri  $\mathbb{O}$  Cayley bölümlü halkasından alınan  $4 \times 4$  matrislerin kümesi olan özel bir matris cebiri tanıtılacaktır.  $K$  nın herhangi bir elemanı

$$X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_0 \\ 0 & x_0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 \end{bmatrix}$$

formundadır ve  $K$  üzerinde bildiğimiz matris çarpımı işlemi tanımlanmıştır. Böylece

$$\eta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \eta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $K$  nın standart bazı  $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$  kümesidir. Bu durumda  $K$  nın herhangi bir elemanı baza göre  $x = x_0 + x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 \in A$  formundadır. Burada bazın elemanları arasında  $\eta_1\eta_2 = [0]_4$ ,  $\eta_2\eta_3 = [0]_4$ ,  $\eta_2\eta_1 = [0]_4$ ,  $\eta_3\eta_1 = [0]_4$ ,  $\eta_3\eta_2 = [0]_4$ ,  $\eta_1\eta_1 = \eta_3$  ve  $\eta_2\eta_2 = \eta_3$  bağıntıları geçerlidir.

Bu tezde çalışılan  $K$  matris cebirine izomorf olmayan  $4 \times 4$  boyutlu birçok matris cebiri vardır ve bunlara EK-A kısmında yer verilmiştir.

Girdileri bir cisimden alınarak elde edilen  $4 \times 4$  boyutlu  $K$  cebirinin  $4n \times 4n$  boyutlu bir genişlemesi için Akpınar ve Erdoğan'ın (2019) çalışmasına bakılabilir.

Şimdi  $K$  cebirine izomorf olan  $A$  halkası ile ilgili aşağıdaki sonuç ispatsız olarak verilebilir.

**Önerme 3.4.**  $f(X) = x$  şeklinde tanımlanan  $f : K \rightarrow A$  dönüşümü bir izomorfizmdir.

Böylece  $A$  üzerinde bileşen bileşene toplama işlemi ve aşağıdaki çarpma işlemi ile birlikte bir halka yapısı oluşturulabilir;

$$\begin{aligned} xy &= (x_0 + x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3)(y_0 + y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + y_3\eta_3) \\ &= x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0)\eta_1 + (x_0y_2 + x_2y_0)\eta_2 + (x_0y_3 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_0)\eta_3 \end{aligned}$$

Şimdi bu halkanın bir elemanının hangi koşullarda birim olacağı aşağıdaki önerme ile belirlenecektir.

**Önerme 3.5.**  $x = x_0 + x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3$  elemanının bir birim (tersinir) eleman olması için gerek ve yeter şart  $x_0 \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** İspat için sadece  $x$  in tersini vermek yeterlidir;

$$x^{-1} = x_0^{-1} - x_0^{-1}x_1x_0^{-1}\eta_1 - x_0^{-1}x_2x_0^{-1}\eta_2 + x_0^{-1}(x_1x_0^{-1}x_1 + x_2x_0^{-1}x_2 - x_3)x_0^{-1}\eta_3$$

şeklindedir.

Bir cebirde herhangi üç eleman için tanımlanan asosyatörün lineer olma şartlarını sağladığını kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşılır:

**Önerme 3.6.**  $A$ , birim olmayan elemanların ideali olan

$$\mathbf{I} = \{x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 \mid 1 \leq i \leq 3, x_i \in \mathcal{O}\}$$

kümesi ile birlikte (birimli) alterne lokal halkadır. Ayrıca  $\mathbf{I}$  indeksi 3 olan nilpotenttir yani her  $x, y, z \in \mathbf{I}$  için  $xyz = 0$  dır.

**İspat:**  $A$  nın sadece sol alterne özelliği verilecektir. Bu nedenle tüm  $x = x_0 + x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3$ ,  $y = y_0 + y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + y_3\eta_3 \in A$  için  $[x, x, y] = 0$  olduğunu gösterilmelidir.  $\odot$  alterne olduğundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

**i)**  $[x_0, x_0, y_0] = 0$

**ii)**  $[x_0, x_1, y_0] + [x_1, x_0, y_0] = 0 = [x_0 + x_1, x_1 + x_0, y_0]$

**iii)**  $[x_0, x_2, y_0] + [x_2, x_0, y_0] = 0 = [x_0 + x_2, x_2 + x_0, y_0]$

**iv)**  $[x_0, x_1, y_0] + [x_1, x_0, y_0] + [x_0, x_2, y_0] + [x_2, x_0, y_0] + [x_0, x_3, y_0] + [x_3, x_0, y_0] = 0$   
 $= [x_0 + x_1, x_1 + x_0, y_0] + [x_0 + x_2, x_2 + x_0, y_0] + [x_0 + x_3, x_3 + x_0, y_0]$

i), ii), iii) ve vi) ile verilen eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter şart  $[x, x, y] = 0$  olmasıdır. Bu da ispatı tamamlar.

$A$  nın merkezi

$$Z(A) = Z(\mathbb{O}) + Z(\mathbb{O})\eta_1 + Z(\mathbb{O})\eta_2 + Z(\mathbb{O})\eta_3$$

dir. Böylece  $A$  üzerinde herhangi bir  $x = x_0 + x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 \in A$  için

$$J : x \rightarrow \bar{x} := \bar{x}_0 + \bar{x}_1\eta_1 + \bar{x}_2\eta_2 + \bar{x}_3\eta_3$$

biçiminde bir anti-otomorfizm tanımlanabilir.  $A$  üzerinde  $x + \bar{x}$  kuralı ile tanımlı iz (lineer) formu  $T$  ve  $x\bar{x}$  kuralı ile tanımlı norm (kuadratik) formu  $N$  ile gösterilecektir. Açık olarak  $t$  ve  $n$ ,  $T$  ve  $N$  nin  $\mathbb{O}$  ya kısıtlanmışdır. Bu durumda herhangi bir  $x = x_0 + x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 \in A$  için

$$T(x) = t(x_0) + t(x_1)\eta_1 + t(x_2)\eta_2 + t(x_3)\eta_3 \in Z(A)$$

ve

$$N(a) = n(a_0) + [n(a_0, a_1)]\eta_1 + [n(a_0, a_2)]\eta_2 + [n(a_0, a_3) + n(a_1) + n(a_2)]\eta_3 \in Z(A)$$

dır. Üstelik  $M(A)$  bir MK düzlemdir. Bu kısımdan sonra  $\mathbb{O}$  nun karakteristiğinin 2 den farklı olduğu kabulü altında  $M(A)$  MK-düzleminde çalışılacaktır.

$M(A)$  MK-düzleminde 6-şekillerle ilgili teoremleri ifade etmek için daha önce  $M(\mathcal{A})$  MK-düzlemi için yaptığımız hazırlık  $M(A)$  MK-düzlemi için tekrar edilecektir:

Sıradaki önerme ile  $M(\mathcal{A})$  MK-düzleminin kolinyasyonların  $M(A)$  MK-düzlemi üzerinde karşılıkları incelendiğinde  $T_{a,0}$ ,  $T_{0,b}$  ve  $G_s$  kolinyasyonlarının bileşenleri içinde bulunan  $(1+az)^{-1}$  teriminin  $M(A)$  daki karşılığı verilecektir.

**Önerme 3.7.**  $a \in A$  ve  $z \in \mathbf{I}$  olsun. Bu takdirde  $(1+az)^{-1} = 1-az+(az)(az)$  dir.

**İspat:** İspat kolayca görülebilir.

$M(\mathcal{A})$  daki Teorem 2.45 nin benzeri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

**Teorem 3.8.**  $M(A)$  nın  $G$  kolinyasyonlar grubu 3-genler üzerinde geçişkendir.

$T$  ve  $N$  nin tanımları yardımıyla aşağıdaki önerme yazılabilir.

**Önerme 3.9.**  $x \in A$  için  $x^2 = -N(x) + T(x)x$  dir. Şayet  $T(x) = 0$  ise bu takdirde  $x^2 = -N(x)$  dir.

Önerme 2.47  $A$  ya aşağıdaki önerme yardımıyla genişletilebilir.

**Önerme 3.10.**  $d \in A$ ,  $d \notin Z(A)$  ve  $c \in Z(A)$  olsun. Bu takdirde  $T(sd) = T(ds) = c$  ve  $T(s) = 0$  olacak şekilde bir  $s \in A - \mathbf{I}$  vardır.

**İspat.** Şayet  $d_0, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{O}$  olmak üzere eğer  $d = d_0 + d_1\eta_1 + d_2\eta_2 + d_3\eta_3 \notin Z(A)$  ise bu takdirde  $0 \leq k \leq 3$  için  $\exists d_k \notin Z(\mathbb{O})$  dir. Böylece,  $s = s_0 + s_1\eta_1 + s_2\eta_2 + s_3\eta_3$  olmak üzere

$$\begin{aligned} T(sd) &= t(s_0d_0) + t(s_0d_1 + s_1d_0)\eta_1 + t(s_0d_2 + s_2d_0)\eta_2 + t(s_0d_3 + s_1d_1 + s_2d_2 + s_3d_0)\eta_3 \\ &= t(s_0d_0) + [t(s_0d_1) + t(s_1d_0)]\eta_1 + [t(s_0d_2) + t(s_2d_0)]\eta_2 + [t(s_0d_3) + t(s_1d_1) + t(s_2d_2) + t(s_3d_0)]\eta_3 \end{aligned}$$

yazılabilir. Önerme 2.47 den

$$t(s_0d_0) = c, \quad t(s_1d_0) = -t(s_0d_1), \quad t(s_2d_0) = -t(s_0d_2), \quad t(s_3d_0) = -t(s_0d_3) - t(s_1d_1) - t(s_2d_2)$$

olacak şekilde  $0 \leq j \leq 3$  için  $0 \neq s_j \in \mathbb{O}$  özelliğinde elemanların var olduğunu bilinmektedir. Üstelik bu durumda,  $t(s_j) = 0$  olduğundan  $T(s) = 0$  dır. Böylece,  $T(sd) = T(ds) = c$  ve  $T(s) = 0$  özelliğinde bir  $s \in A - \mathbf{I}$  nin var olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi, Celik v.d. (2007) tarafından  $m = 2$  durumu için verilen Teorem 3 ün benzeri  $M(A)$  için ifade edilebilir.

**Teorem 3.11.**  $M(A)$  nın  $G$  kolinasyonlar grubu 4-genler üzerinde geçişkendir.

**İspat.**  $(P, Q, R, S)$ ,  $M(A)$  da bir dörtgen olsun.  $G$  nin bir elemanı yardımıyla  $P, Q, R, S$  noktalarının sırasıyla  $U, V, E, O$  noktalara dönüştüğünü göstermek yeterlidir. Teorem 3.8 den  $P, Q, R$  noktalarını sırasıyla  $U, V, (0, 1, 1)$  noktalara dönüştüren bir  $\sigma$  kolinasyonunun var olduğunu biliyoruz.  $QR$  ve  $PS$  doğrularının arakesiti  $E$  olsun. Bu takdirde  $\sigma(E)$  noktası  $\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(R)$  noktalarına komşu olamayacağından bu nokta  $b - 1 \notin \mathbf{I}$  olmak üzere  $(0, b, 1)$  formundadır ve böylece  $a \notin \mathbf{I}$  olmak üzere  $\sigma(S)$  de  $(a, b, 1)$  formunda olmak zorundadır. Bu yüzden,  $\sigma$  dönüşümü  $P, Q, R, S$  noktalarını sırasıyla

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (a, b, 1)$$

noktalara dönüştürür. Böylece  $c = \bar{a}(1 - b)\bar{a}$  olmak üzere önce  $T_{0,-b} \circ T_{-a,0}$  dönüşümü bu noktaları sırasıyla

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-a, 1 - b, 1), (0, 0, 1)$$



ve sonra  $L_{\bar{a}}$  dönüşümü de sırasıyla

$$(1,0,0), (0,1,0), (-N(a),c,1), (0,0,1)$$

noktalarına dönüştürür. Burada,  $a \notin \mathbf{I}$  ve  $1-b \notin \mathbf{I}$  olduğundan  $c \notin \mathbf{I}$  dir. Bu takdirde,  $S_{1,-N(a)^{-1}}$  dönüşümü de

$$(1,0,0), (0,1,0), (-N(a),c,1), (0,0,1)$$

noktalarını sırasıyla,

$$(1,0,0), (0,1,0), (1,c,1), (0,0,1)$$

noktalarına dönüştürür. Burada,  $c = c_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + c_3\eta_3$  için iki durum vardır:

Ya  $T(c) \in \mathbf{I}$  ya da  $T(c) \notin \mathbf{I}$  dir.

**1. Durum:** Eğer  $T(c) = t(c_0) + t(c_1)\eta_1 + t(c_2)\eta_2 + t(c_3)\eta_3 \in \mathbf{I}$  ise bu takdirde  $t(c_0) = 0$  dir ve burada iki alt durum vardır:

**1.1.** Eğer  $t(c_1) = t(c_2) = t(c_3) = 0$  ise bu takdirde  $T(c) = 0$  dir ve Önerme 3.9 den  $c^2 = -N(c)$  dir. Bu takdirde  $F_c$  dönüşümü

$$(1,0,0), (0,1,0), (1,c,1), (0,0,1)$$

noktalarını sırasıyla

$$(1,0,0), (0,1,0), (-N(c),-N(c),1), (0,0,1)$$

noktalarına dönüştürür. Son olarak bu noktalara  $S_{-N(c)^{-1},-N(c)^{-1}}$  dönüşümü uygulanırsa, sırasıyla,

$$(1,0,0), (0,1,0), (1,1,1), (0,0,1),$$

istenilen noktaları elde edilir ki bu durumda ispat tamamlanmış olur.

**1.2.** Eğer  $t(c_1), t(c_2), t(c_3)$  den en az biri sıfırdan farklı ise bu takdirde Önerme 3.10 dan

$$t(s_0c_0) = 0, \quad t(s_1c_0) = -t(s_0c_1), \quad t(s_2c_0) = -t(s_0c_2), \quad t(s_3c_0) = -t(s_0c_3) - t(s_1c_1) - t(s_2c_2)$$

olacak şekilde  $0 \leq j \leq 3$  için  $0 \neq s_j \in \mathbb{O}$  ve  $t(s_j) = 0$  (bu da  $T(s) = 0$  demektir) özelliğinde elemanların var olduğu bilinmektedir. Böylece  $s \in A - \mathbf{I}$  (burada  $s_0 \neq 0$  olduğuna dikkat ediniz) için  $T(sc) = T(cs) = 0$  elde edilir. Bu takdirde  $s = s_0 + s_1\eta_1 + s_2\eta_2 + s_3\eta_3$  alarak  $F_s$  dönüşümü altında

$$(1,0,0), (0,1,0), (1,c,1), (0,0,1)$$

noktaları, sırasıyla

$$(1,0,0), (0,1,0), (s^2, sc, 1), (0,0,1)$$

noktalarına dönüşür ve Önerme 3.9 yardımıyla  $s^2 = -N(s)$  dir. Son olarak  $T(sc) = 0$  olmak üzere,  $S_{1,-N(c)^{-1}}$  dönüşümü elde edilen noktaları sırasıyla

$$(1,0,0), (0,1,0), (1, sc, 1), (0,0,1)$$

noktalarına dönüştürür. Bu takdirde, Durum 1.1 den ispat tamamlanır.

**2. Durum:** Eğer  $T(c) = t(c_0) + t(c_1)\eta_1 + t(c_2)\eta_2 + t(c_3)\eta_3 \notin \mathbf{I}$  ise bu takdirde  $t(c_0) \neq 0$  dır. Önerme 3.10 yardımıyla  $d_0 \neq 0$ ,  $t(c_0 d_0) = 0$ ,  $t(d_0) = 0$ , ve  $t(d_1) = t(d_2) = t(d_3) = 0$  olacak şekilde bir  $d = d_0 + d_1\eta_1 + d_2\eta_2 + d_3\eta_3 \in A - \mathbf{I}$  bulabiliriz. Bu takdirde Önerme 3.9 dan  $T(d) = 0$  olduğundan  $d^2 = -N(d)$  dir. Bu durumda,  $F_d$  dönüşümü

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, c, 1), (0, 0, 1)$$

noktalarını, sırasıyla

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-N(d), dc, 1), (0, 0, 1)$$

noktalarına dönüştürür. Son olarak  $T(dc) = T(cd) \in \mathbf{I}$  olmak üzere  $S_{1, -N(d)^{-1}}$  dönüşümü altında bu elde edilen noktalar, sırasıyla

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, dc, 1), (0, 0, 1)$$

noktalarına dönüşür. Böylece, 1. durumdan ispat tamamlanır.

Teorem 3.11 in direkt bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 3.12.**  $M(A)$  nın koordinatlanması koordinatlama bazının seçiminden bağımsızdır.

**İspat.**  $M(A)$  da koordinatlama 4-jeni olarak  $(U, V, E, O)$  ve  $(U', V', E', O')$  seçilsin. Bu takdirde Teorem 3.11 gereği  $(P, Q, R, S)$  yi  $(U, V, E, O)$  4-genine ve  $(P, Q, R, S)$  yi  $(U', V', E', O')$  4-genine dönüştüren bir kolinasyon vardır. Bu kolinasyonları, sırasıyla

$f$  ve  $h$  ile gösterelim. Bu takdirde  $(U, V, E, O)$  yu  $(U', V', E', O')$  4-genine dönüştüren bileşke dönüşüm  $h \circ f^{-1}$  dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi, Teorem 3.2 nin benzeri olan teorem ifade edilebilir

**Teorem 3.13.**  $\mu = (ABC, A_1B_1C_1)$ ,  $M(A)$  nin bir 6-şekli olsun. Bu takdirde öyle bir  $m \in A - I$  vardır ki  $U = (1, 0, 0)$ ,  $V = (0, 1, 0)$  ve  $O = (0, 0, 1)$   $M(A)$  nin koordinatlama bazının elemanları olmak üzere  $(UVO, (0, 1, 1)(1, 0, 1)(1, m, 0))$  6-şekli  $\mu$  ye denktir.

Böylece, Teorem 3.3 ün benzeri olan teorem verilebilir. Aşağıdaki teoremin ispatı, Celik v.d. (2007) tarafından verilen ispatındaki bazı farklılıklarından dolayı verilecektir.

**Teorem 3.14.**  $(ABC, A_1B_1C_1), (BCA, B_1C_1A_1), (CAB, C_1A_1B_1)$  6-şekilleri denktir.

**İspat:** Teorem 3.13 gereği  $(ABC, A_1B_1C_1)$  yerine  $U_1 = (0, 1, 1)$ ,  $V_1 = (1, 0, 1)$ ,  $O_1 = (1, m, 0)$  ve  $m \notin I$  olmak üzere  $(UVO, U_1V_1O_1)$  alınabilir.  $h := S_{-1,-1}O_1OS_{-1,1}O_1I_1$  kolinyasyonunu düşünelim.  $h$  kolinyasyonu  $(UVO, U_1V_1O_1)$  6-şekilini  $(VOU, V_1(1, 1, 0)(0, m^{-1}, 1))$  6-şekiline dönüştürür. Şimdi  $(VOU, V_1(1, 1, 0)(0, m^{-1}, 1))$  6-şekilini  $(VOU, V_1O_1U_1)$  6-şekiline dönüştürecek bir kolinyasyon bulunmalıdır. Burada  $m = m_0 + m_1\eta_1 + m_2\eta_2 + m_3\eta_3$  için iki durum vardır:  $T(m) \in I$  ya da  $T(m) \notin I$  dir.

**1. Durum.** Eğer  $T(m) = t(m_0) + t(m_1)\eta_1 + t(m_2)\eta_2 + t(m_3)\eta_3 \in I$  ise bu takdirde  $t(m_0) = 0$  dir ve burada  $T(m)$  için iki durum vardır:

**1.1.** Eğer  $t(m_1) = t(m_2) = t(m_3) = 0$  ise bu takdirde  $T(m) = 0$  olur ki Önerme 3.9 dan  $m^2 = -N(m)$  dir. Bu takdirde

$$(VOU, V_1(1, 1, 0)(0, m^{-1}, 1)) \xrightarrow{S_{-N(m), -N(m)}} (VOU, (m^2, 0, 1)(1, 1, 0)(0, m, 1)) \xrightarrow{F_{m^{-1}}} (UV0, U_1V_1O_1)$$

elde ederiz. Bu durumda  $g := F_{m^{-1}} \circ S_{-N(m), -N(m)}$  dönüşümü tanımlanmış olsun.

**1.2.**  $t(m_1), t(m_2), t(m_3)$  den en az biri sıfırdan farklı ise Önerme 3.10 dan  $T(s) = 0 = T(sm)$  olacak şekilde  $s \in A - \mathbf{I}$  vardır ve böylece Önerme 3.9 dan  $s^2 = -N(s) \in Z(A), (sm)^2 = -N(sm) \in Z(A)$  olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& (VOU, V_1(1, 1, 0)(0, m^{-1}, 1)) \\
& \xrightarrow{S_{-N(sm), -N(sm)}} (VOU, (sm^2, 0, 1)(1, 1, 0)(0, m^{-1}(sm)^2, 1)) \\
& \xrightarrow{F_{(sm)^{-1}}} (VOU, (1, 0, 1)(1, sm, 0)(0, s, 1)) \\
& \xrightarrow{S_{1, -N(s)}} (VOU, (s^2, 0, 1)(1, s^{-1}m, 0)(0, s, 1)) \\
& \xrightarrow{F_{s^{-1}}} (VOU, V_1, O_1, U_1)
\end{aligned}$$

elde ederiz ve burada  $g := F_{s^{-1}} \circ S_{1, -N(s)} \circ F_{(sm)^{-1}} \circ S_{-N(sm), -N(sm)}$  dönüşümü tanımlanmış oldu.

**2.Durum.** Eğer  $T(m) = t(m_0) + t(m_1)\eta_1 + t(m_2)\eta_2 + t(m_3)\eta_3 \notin \mathbf{I}$  ise bu takdirde  $t(m_1) \neq 0$  olur. Önerme 3.10 dan  $T(d) = 0 = T(d)$  olacak şekilde bir  $d \in A - \mathbf{I}$  vardır. Bu durumda ispat  $s$  yerine  $d$  alınarak Durum 1.2 den elde edilir. Bundan dolayı  $g := F_{d^{-1}} \circ S_{1, -N(d)} \circ F_{(dm)^{-1}} \circ S_{-N(dm), -N(dm)}$  biçiminde tanımlanır. Sonuç olarak  $f := g \circ h$  kolinasyonu  $(UVO, U_1V_1O_1)$  6 şeklini  $(VOU, V_1O_1U_1)$  6-şekiline dönüştürür ve üstelik  $(VOU, V_1O_1U_1)$  6-şekilini de  $(OUV, O_1U_1V_1)$  6-şekiline dönüştürür. Bu da ispatı tamamlar

#### 4. BAZI OCTONİON DÜZLEMLERDE UZAKLIK

Her MK-düzlemin bir PK-düzlem olduğu açıktır ve MK-düzlem için verilen koordinatlama PK-düzlemlerin koordinatlanması için de kullanılabilir. Böylece, octonion düzlemlerdeki matrisel gösterimler PK-düzlemlerin nokta ve doğrularının temsilinde kullanılırsa PK-düzlemlerinde ve bu sayede kanonik görüntüsü olarak altında yatan projektif düzlemlerde bir uzaklık tanımı verilebilir. Bu uzaklık tanımı yardımıyla, Öklid düzlemlerinde uzaklıkla bağlantılı olarak özellikleri iyi bilinen çember, elips ve hiperbol kavramlarının sonlu projektif düzlem ve sonlu projektif Klingenberg düzlemleri üzerindeki karşılıkları incelenecektir. Bu inceleme, tek olduğu bilinen 2, 3, 4, 5, 7, 8. mertebeden projektif düzlemler, 9. mertebeden dört farklı projektif düzlemden biri ve buradan bir genellemeye gidilerek  $p$  bir asal sayı ve  $r$  pozitif bir tamsayı olmak üzere  $p^r$  mertebeli cisim düzlemleri üzerine genişletilebilir. Üstelik bu inceleme bazı sonlu Klingenberg düzlemleri üzerine de taşınarak sonuçların daha zengin hale getirilmesi mümkündür. Bu tür sonlu Klingenberg düzlem örnekleri için Akpınar, (2010) ve Akpınar v.d. (2018) çalışmalarına bakılabilir.

Önereceğimiz uzaklık tanımı, Wan (1996) tarafından bazı özel matris uzayları için verilen tanımlardan ortaya çıkacaktır. Octonion düzlemlerde her ne kadar Hermityen matris uzaylarının özel bir alt kümesi ile çalışılıyor olsa da burada Wan tarafından alterne matris uzayları için verilen aritmetik uzaklık ve eşleniklik tanımını kullanmak daha uygun olacaktır. Aksi halde, çalışılan uzayda hiçbir eşlenik nokta ikilisi bulunmayacaktır ve bu da uzaklık tanımı yapılmasına engel teşkil edecektir. Her iki matris uzayındaki uzaklık tanımları arasındaki tek fark aşağıdaki aritmetik uzaklık tanımında yer alan  $\frac{1}{2}$  çarpanıdır. Diğer yandan her iki matris uzayında eşleniklik tanımı aynıdır.

**Tanım 4.1.** Bir  $M$  PK düzleminin herhangi iki noktası  $X_1$  ve  $X_2$  olsun.  $X_1$  ve  $X_2$  arasında aritmetik uzaklık  $ad(X_1, X_2)$  ile gösterilir ve  $ad(X_1, X_2) = \frac{rank(X_1 - X_2)}{2}$

olarak tanımlanır. Şayet  $ad(X_1, X_2) = 1$  yani  $rank(X_1 - X_2) = 2$  ise  $X_1$  ve  $X_2$  ye eşleniktir denir.

Bu aritmetik uzaklık aşağıdaki özelliklere sahiptir.

**Teorem 4.2.**  $M$  bir PK-düzlem ve  $M$  nin herhangi üç noktası  $X_1, X_2$  ve  $X_3$  olsun.

Bu takdirde,

1)  $ad(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow X_1 \not\sim X_2$  ve  $ad(X_1, X_2) = 0 \Leftrightarrow X_1 \sim X_2$  dir. Yani  $ad(X_1, X_2) \geq 0$  dır.

2)  $ad(X_1, X_2) = ad(X_2, X_1)$  dir.

3)  $ad(X_1, X_2) + ad(X_2, X_3) \geq ad(X_1, X_3)$  dür.

**İspat.** Önce, komşu olmayan nokta ikilileri için inceleme yapılacaktır. PK-düzleminin üç ayrık nokta sınıfı olduğundan ve aynı sınıfta komşu olmayan nokta ikilileri de bulunabileceğinden altı durum söz konusudur:

**1. Durum:**

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{y} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{z} \\ y & \gamma_1^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(y) & \gamma_1^{-1}\gamma_3y\bar{z} \\ z & \gamma_1^{-1}\gamma_2z\bar{y} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\mathbf{n}(z) \end{pmatrix} \not\sim \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(u) & u & \gamma_3\gamma_2^{-1}(u\bar{v}) \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}\bar{u} & 1 & \gamma_3\gamma_2^{-1}\bar{v} \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}(v\bar{u}) & v & \gamma_3\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(v) \end{pmatrix} = X_2$$

olsun. Bu durumda,

$$X_1 - X_2 = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_1\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(u) & \gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{y} - u & \gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{z} - \gamma_3\gamma_2^{-1}(u\bar{v}) \\ y - \gamma_1\gamma_2^{-1}\bar{u} & \gamma_1^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(y) - 1 & \gamma_1^{-1}\gamma_3y\bar{z} - \gamma_3\gamma_2^{-1}\bar{v} \\ z - \gamma_1\gamma_2^{-1}(v\bar{u}) & \gamma_1^{-1}\gamma_2z\bar{y} - v & \gamma_1^{-1}\gamma_3\mathbf{n}(z) - \gamma_3\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(v) \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı hesaplanacaktır. Bunun için lineer bağımsız satır ve kolon sayısı belirlenmelidir. Çalıştığımız cebir değişmeli olmadığından satırlar üzerinde kat alma

işlemlerinde sol çarpım, kolonlar üzerinde kat alma işlemi için sağ çarpım kullanılacaktır (Derksen ve Makam, 2018).  $1 \leq i, j \leq 3$  olmak üzere matrisinin  $i$ . satırı  $S_i$  ve  $j$ . kolonu  $K_j$ , ile gösterilsin. Bu matrise bazı satır ve kolon elemanter (ya da basit) operasyonları uygulanacak ve böylece rank hesaplanmış olacaktır. İlk olarak  $S_2 \rightarrow S_2 - yS_1$  ve  $S_3 \rightarrow S_3 - zS_1$  elemanter operasyonları uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} 1 - \gamma_1 \gamma_2^{-1} \mathbf{n}(u) & \gamma_1^{-1} \gamma_2 \bar{y} - u & \gamma_1^{-1} \gamma_3 \bar{z} - \gamma_3 \gamma_2^{-1} (u \bar{v}) \\ \gamma_1 \gamma_2^{-1} [y \mathbf{n}(u) - \bar{u}] & yu - 1 & \gamma_3 \gamma_2^{-1} [y(u \bar{v}) - \bar{v}] \\ \gamma_1 \gamma_2^{-1} [z \mathbf{n}(u) - (v \bar{u})] & zu - v & \gamma_3 \gamma_2^{-1} [z(u \bar{v}) - \mathbf{n}(v)] \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Son matriste  $K_1 \rightarrow K_1 - K_2(\gamma_1 \gamma_2^{-1} \bar{u})$  ve  $K_3 \rightarrow K_3 - K_2(\gamma_3 \gamma_2^{-1} \bar{v})$  elemanter operasyonları uygulanırsa;

$$\begin{pmatrix} 1 - \bar{y} \bar{u} & \gamma_1^{-1} \gamma_2 \bar{y} - u & \gamma_1^{-1} \gamma_3 (\bar{z} - \bar{y} \bar{v}) \\ 0 & yu - 1 & \gamma_3 \gamma_2^{-1} [y(u \bar{v}) - (yu) \bar{v}] \\ 0 & zu - v & \gamma_3 \gamma_2^{-1} [z(u \bar{v}) - (zu) \bar{v}] \end{pmatrix}$$

matrisi bulunur. Bu matriste  $1 - \bar{y} \bar{u} \notin I$  olmak üzere  $K_2 \rightarrow K_2 - K_1[(1 - \bar{y} \bar{u})^{-1}(u - \gamma_1^{-1} \gamma_2 \bar{y})]$  ve  $K_3 \rightarrow K_3 - K_1[(1 - \bar{y} \bar{u})^{-1} \gamma_1^{-1} \gamma_3 (\bar{y} \bar{v} - \bar{z})]$  elemanter operasyonları uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} 1 - \bar{y} \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & yu - 1 & \gamma_3 \gamma_2^{-1} [y(u \bar{v}) - (yu) \bar{v}] \\ 0 & zu - v & \gamma_3 \gamma_2^{-1} [z(u \bar{v}) - (zu) \bar{v}] \end{pmatrix}$$

matrisi ve  $yu - 1 \notin I$  olmak üzere  $S_3 \rightarrow S_3 - (v - zu)(yu - 1)^{-1} S_2$  elemanter operasyonu uygulanırsa



$$\begin{pmatrix} 1-\bar{y}\bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & yu-1 & \gamma_3\gamma_2^{-1}[y(u\bar{v})-(yu)\bar{v}] \\ 0 & 0 & \gamma_3\gamma_2^{-1}([z(u\bar{v})-(zu)\bar{v}]- (v-zu)(yu-1)^{-1}[y(u\bar{v})-(yu)\bar{v}]) \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrise, son olarak  $K_2 \rightarrow K_3 - K_2[(yu-1)^{-1}\gamma_3\gamma_2^{-1}[(yu)\bar{v} - y(u\bar{v})]]$  elemanter operasyonu uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} 1-\bar{y}\bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & yu-1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3\gamma_2^{-1}([z(u\bar{v})-(zu)\bar{v}]- (v-zu)(yu-1)^{-1}[y(u\bar{v})-(yu)\bar{v}]) \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu matrisin (3,3) nolu bileşeni  $\mathbf{I}$  da değil ise matrisin rankının 3 olma ihtimali ortaya çıkar ki bunu ortadan kaldıracak tek yol çalıştığımız cebirin birleşmeli olmasıdır. Şayet cebir birleşmeli ise (3,3) nolu bileşen sıfır olup matrisin rankı 2 olur. Derksen ve Makam (2017) bir cebirin değişmeli olup olmaması durumuna göre rankın değişebileceğine dair örnekler vermiştir. Üstelik böyle bir durumda değişmeli rank (commutative rank:=crk) ve değişmeli olmayan rank(non-commutative rank:=ncrk) tanımları kullanılmıştır. Burada ise rank hesabı cebirin birleşmeli olup olmamasına göre değiştiğinden birleşmeli rank (associative rank:=ark) ve birleşmeli olmayan rank (non-associative rank:=nark) ayırımına da gitmek mümkündür. Çalıştığımız octonion bölümlü halkası birleşmeli olmadığından onun birleşmeli bir alt kümesi olan kuaternion bölümlü halkasının elemanları ile çalışmayı tercih edebiliriz. Şayet, octonion bölümlü halkasının elemanları ile çalışmaya devam edeceksek  $\mathbf{I}$  idealin elemanlarından oluşan herhangi bir satır veya kolonun sıfırlardan oluşan bir satır veya kolon gibi değerlendirilmesi ile bir matrisin rankı belirlenmelidir. Böyle bir durumda da yukarıdaki matrisin rankı 2 olur. Çünkü  $z, u, v \in \mathbf{I}$  olduğundan (3,3) nolu bileşen  $\mathbf{I}$  nın bir elemanı olup lineer bağımsız satır veya kolon sayısı 2 dir.

## 2. Durum:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{y} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{z} \\ y & \gamma_1^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(y) & \gamma_1^{-1}\gamma_3y\bar{z} \\ z & \gamma_1^{-1}\gamma_2z\bar{y} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\mathbf{n}(z) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \gamma_3^{-1}\gamma_1\mathbf{n}(u) & \gamma_3^{-1}\gamma_2(u\bar{v}) & u \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1(v\bar{u}) & \gamma_3^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(v) & v \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1\bar{u} & \gamma_3^{-1}\gamma_2\bar{v} & 1 \end{pmatrix} = X_2$$

olsun. 1. durumdaki ispata benzer bir ispat verilebilir.

## 3. Durum:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(w) & w & \gamma_3\gamma_2^{-1}(w\bar{z}) \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}\bar{w} & 1 & \gamma_3\gamma_2^{-1}\bar{z} \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}(z\bar{w}) & z & \gamma_3\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(z) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \gamma_3^{-1}\gamma_1\mathbf{n}(u) & \gamma_3^{-1}\gamma_2(u\bar{v}) & u \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1(v\bar{u}) & \gamma_3^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(v) & v \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1\bar{u} & \gamma_3^{-1}\gamma_2\bar{v} & 1 \end{pmatrix} = X_2$$

olsun. 1. durumdaki ispata benzer bir ispat verilebilir.

## 4. Durum:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{y} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{z} \\ y & \gamma_1^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(y) & \gamma_1^{-1}\gamma_3y\bar{z} \\ z & \gamma_1^{-1}\gamma_2z\bar{y} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\mathbf{n}(z) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{u} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{v} \\ u & \gamma_1^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(u) & \gamma_1^{-1}\gamma_3u\bar{v} \\ v & \gamma_1^{-1}\gamma_2v\bar{u} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\mathbf{n}(v) \end{pmatrix} = X_2$$

olsun.

İlk 3 durumdan farklı olarak bu durum için ispat verilecektir. O halde  $y-u \notin \mathbf{I}$  ve  $z-v \in \mathbf{I}$  olmak üzere

$$X_1 - X_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1^{-1}\gamma_2(\bar{y}-\bar{u}) & \gamma_1^{-1}\gamma_3(\bar{z}-\bar{v}) \\ y-u & \gamma_1^{-1}\gamma_2(\mathbf{n}(y)-\mathbf{n}(u)) & \gamma_1^{-1}\gamma_3(y\bar{z}-u\bar{v}) \\ z-v & \gamma_1^{-1}(\gamma_2z\bar{y}-v\bar{u}) & \gamma_1^{-1}\gamma_3(\mathbf{n}(z)-\mathbf{n}(v)) \end{pmatrix}$$

matrisin rankı hesaplanmalıdır. Bu matrise  $S_2 \rightarrow S_2 + (-y)S_1$  ve  $S_3 \rightarrow S_3 + (-z)S_1$  elemanter operasyonları uygulandıktan sonra  $K_2 \rightarrow K_2 + K_1(-\gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{u})$  ve  $K_3 \rightarrow K_3 + K_1(-\gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{v})$  operasyonları uygulanırsa

$$X_1 - X_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1^{-1}\gamma_2(\bar{y}-\bar{u}) & \gamma_1^{-1}\gamma_3(\bar{z}-\bar{v}) \\ y-u & 0 & 0 \\ z-v & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.  $z-v \in \mathbf{I}$  olduğundan  $\bar{z}-\bar{v} \in \mathbf{I}$  olup bu matrisin son satır ve son kolonu, sıfır satırı veya sıfır kolonu olarak değerlendirilirse bu matrisin rankı 2 olur. Üstelik son matriste  $S_3 \rightarrow S_3 + (v-z)(y-u)^{-1}S_2$  ve  $K_3 \rightarrow K_3 + K_2\gamma_2^{-1}\gamma_3(\bar{y}-\bar{u})^{-1}(\bar{v}-\bar{z})$  elemanter operasyonları uygulanırsa

$$X_1 - X_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1^{-1}\gamma_2(\bar{y}-\bar{u}) & 0 \\ y-u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi bulunur ki yine matrisin rankı 2 dir.

## 5. Durum:

$$Y = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(w) & w & \gamma_3\gamma_2^{-1}(w\bar{z}) \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}\bar{w} & 1 & \gamma_3\gamma_2^{-1}\bar{z} \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}(z\bar{w}) & z & \gamma_3\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(z) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(u) & u & \gamma_3\gamma_2^{-1}(u\bar{v}) \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}\bar{u} & 1 & \gamma_3\gamma_2^{-1}\bar{v} \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}(v\bar{u}) & v & \gamma_3\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(v) \end{pmatrix} = Y'$$

olsun. 5. durumun ispatı 4. durumun ispatına benzerdir.

### 6. Durum:

$$Z = \begin{pmatrix} \gamma_3^{-1}\gamma_1\mathbf{n}(x) & \gamma_3^{-1}\gamma_2(x\bar{y}) & x \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1(y\bar{x}) & \gamma_3^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(y) & y \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1\bar{x} & \gamma_3^{-1}\gamma_2\bar{y} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \gamma_3^{-1}\gamma_1\mathbf{n}(u) & \gamma_3^{-1}\gamma_2(u\bar{v}) & u \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1(v\bar{u}) & \gamma_3^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(v) & v \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1\bar{u} & \gamma_3^{-1}\gamma_2\bar{v} & 1 \end{pmatrix} = Z'$$

olsun. 6 durumun ispatı 4. durumun ispatına benzerdir.

Böylece, komşu olmayan tüm nokta ikilileri için aritmetik uzaklığın 1 olduğu sonucuna varılır.

Şimdi komşu olan nokta ikililerinde bu inceleme yapılacaktır. Sadece aynı tipten noktalar komşu olabileceğinden dolayı burada 3 durum söz konusudur:

### i. Durum:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{y} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{z} \\ y & \gamma_1^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(y) & \gamma_1^{-1}\gamma_3y\bar{z} \\ z & \gamma_1^{-1}\gamma_2z\bar{y} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\mathbf{n}(z) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1^{-1}\gamma_2\bar{u} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\bar{v} \\ u & \gamma_1^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(u) & \gamma_1^{-1}\gamma_3u\bar{v} \\ v & \gamma_1^{-1}\gamma_2v\bar{u} & \gamma_1^{-1}\gamma_3\mathbf{n}(v) \end{pmatrix} = X'$$

olsun. O halde, sadece bu durumun ispatı verilsin. Bunun için  $y-u \in \mathbf{I}$  ve  $z-v \in \mathbf{I}$  olmak üzere

$$X - X' = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1^{-1}\gamma_2(\bar{y}-\bar{u}) & \gamma_1^{-1}\gamma_3(\bar{z}-\bar{v}) \\ y-u & \gamma_1^{-1}\gamma_2(\mathbf{n}(y)-\mathbf{n}(u)) & \gamma_1^{-1}\gamma_3(y\bar{z}-u\bar{v}) \\ z-v & \gamma_1^{-1}\gamma_2(z\bar{y}-v\bar{u}) & \gamma_1^{-1}\gamma_3(\mathbf{n}(z)-\mathbf{n}(v)) \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı hesaplanmalıdır. Bu matrise 4. durumdaki gibi ilk dört elemanter operasyon uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_1^{-1}\gamma_2(\bar{y}-\bar{u}) & \gamma_1^{-1}\gamma_3(\bar{z}-\bar{v}) \\ y-u & 0 & 0 \\ z-v & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir ki bu matrisin tüm girdileri  $I$  nin bir elemanı olur. Bu durumda bu matrisin rankı sıfır olarak değerlendirilebilir.

**ii. Durum:**

$$Y = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(w) & w & \gamma_3\gamma_2^{-1}(w\bar{z}) \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}\bar{w} & 1 & \gamma_3\gamma_2^{-1}\bar{z} \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}(z\bar{w}) & z & \gamma_3\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(z) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(u) & u & \gamma_3\gamma_2^{-1}(u\bar{v}) \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}\bar{u} & 1 & \gamma_3\gamma_2^{-1}\bar{v} \\ \gamma_1\gamma_2^{-1}(v\bar{u}) & v & \gamma_3\gamma_2^{-1}\mathbf{n}(v) \end{pmatrix} = Y'$$

olsun. Bu durumun ispatı i. durumun ispatına benzerdir.

**iii. Durum:**

$$Z = \begin{pmatrix} \gamma_3^{-1}\gamma_1\mathbf{n}(x) & \gamma_3^{-1}\gamma_2(x\bar{y}) & x \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1(y\bar{x}) & \gamma_3^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(y) & y \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1\bar{x} & \gamma_3^{-1}\gamma_2\bar{y} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \gamma_3^{-1}\gamma_1\mathbf{n}(u) & \gamma_3^{-1}\gamma_2(u\bar{v}) & u \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1(v\bar{u}) & \gamma_3^{-1}\gamma_2\mathbf{n}(v) & v \\ \gamma_3^{-1}\gamma_1\bar{u} & \gamma_3^{-1}\gamma_2\bar{v} & 1 \end{pmatrix} = Z'$$

olsun. Bu durumda ispatı i. durumun ispatına benzerdir.

Böylece, komşu olan tüm nokta ikilileri için aritmetik uzaklığın sıfır olduğu sonucuna varılmış olur.

**2) Aritmetik uzaklık tanımından ispat aşikârdır.**

**3) İspat iki duruma ayrılarak verilecektir:**

**1. Durum:**  $X_1 \sim X_3$  olsun. Bu durumda  $ad(X_1, X_3) = 0$  olup burada iki alt durum söz konusudur:

i) Eğer  $X_2 \sim X_1$  ise bu takdirde  $X_2 \sim X_3$  olup  $ad(X_1, X_2) = 0 = ad(X_2, X_3)$  elde edilir.

Böylece, eşitsizliğin eşitlik halinin geçerli olduğu ortaya çıkar.

ii) Eğer  $X_2 \not\sim X_1$  ise bu takdirde  $X_2 \not\sim X_3$  olmak zorundadır. Buradan  $ad(X_1, X_2) = 1 = ad(X_2, X_3)$  bulunur ki eşitsizlik yine geçerlidir.

**2. Durum:**  $X_1 \not\sim X_3$  olsun. Bu durumda  $ad(X_1, X_3) = 1$  dir. Burada iki alt durum söz konusudur.

i) Eğer  $X_2 \sim X_1$  ise bu takdirde  $X_2 \not\sim X_3$  dir. Burada eşitsizliğin eşitlik halinin geçeli olduğu sonucuna varılır.

ii) Eğer  $X_2 \not\sim X_1$  ise bu takdirde ya  $X_2 \sim X_3$  ya da  $X_2 \not\sim X_3$  durumları söz konusudur. her iki durumda da eşitsizlik için aykırı bir durum ortaya çıkmaz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Sonuç 4.3.**  $M$  PK-düzleminin komşu olmayan her noktası eşleniktir.

**Sonuç 4.4.**  $M$  PK-düzleminin kanonik görüntüsü olan projektif düzlemde her bir nokta ikilisi eşleniktir.

Sonuç 4.3 ve Sonuç 4.4 yardımıyla bir PK-düzlem ve onun kanonik görüntüsü olan projektif düzlemde Wan (1996) tarafından verilen uzaklık tanımında ufak değişiklik yapılarak aşağıdaki uzaklık tanımı verilebilir.

**Tanım 4.5.**  $M$  bir PK-düzlem ve  $X, X' \in M$  olsun.  $X \not\sim X'$  iken,  $X_0 = X$  ve  $X_r = X'$  olacak şekilde bu iki noktayı birleştiren doğrunun üzerinde olup bu iki nokta arasında kalan ve birbirine komşu olmayan  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_r$  sıralı nokta dizisinin eleman sayısının bir eksiğine  $X$  ve  $X'$  arasındaki uzaklık denir ve bu durum  $d(X, X') = r$  ile gösterilir. Eğer  $X \sim X'$  ise bu durumda  $d(X, X') = 0$  dır.

Tanım 4.5 deki uzaklık tanımının bir metrik olmadığı aşıkardır.

**Önerme 4.6.** Bir  $M$  PK-düzleminin herhangi iki noktası  $X$  ve  $X'$  olsun. Bu takdirde

$$ad(X, X') \leq d(X, X')$$

olur.

**İspat.**  $X \sim X'$  ise  $ad(X, X')=0$  ve  $d(X, X')=0$  dır.  $X \not\sim X'$  ise  $ad(X, X')=1$  ve  $d(X, X') \geq 1$  dir. Dolayısıyla, verilen eşitsizlik doğrudur.

Tanım 4.5 bazı sonlu projektif düzlemler üzerine taşınacak ve bunlar üzerinde Öklid düzlemlerinden özellikleri iyi bilinen çember, elips ve hiperbolün karşılıkları incelenecektir.

Bilindiği üzere şu ana kadar bilinen projektif düzlemlerin mertebeleri  $p$  bir asal sayı ve  $r$  bir pozitif tamsayı olmak üzere  $p^r$  biçimindedir. Bu mertebeden projektif düzlemlerde 2, 3, 4, 5, 7 ve 8. mertebeli projektif düzlemler tek türlü oluşturulabilirken 9. mertebeden 4 farklı projektif düzlemin var olduğu bilinmektedir (Akpınar, 2005).

İlk olarak sonlu mertebeli projektif düzlemlerin çemberleri incelenecektir ve örnek olarak 3. ve 4. mertebeden projektif düzlemler seçilecektir. Daha sonra düzlemlerin çemberleri yardımıyla 3. mertebeden projektif düzlemlerin elips ve hiperbolleri belirlenecektir.

Şimdi latin kareler hakkında Stevenson (1975), Laywine ve Mullen (1998) ve Vanpoucke (2012) çalışmalarından bazı bilgiler paylaşılacaktır.

**Tanım 4.7.** Girdileri  $n$  elemanlı bir kümeden alınarak oluşturulan ve bu elemanların her satır ve sütunda tam olarak bir kez ortaya çıktığı  $n$  mertebeli matris  $n$ . mertebeden bir

*latin kare* denir. Bir latin karenin ilk satırı  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  kümesinde verilen sıraya göre oluşturulursa bu latin kareye *indirgenmiş latin kare* denir.

**Tanım 4.8.** Girdileri  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  kümesinden alınarak oluşturulan  $n$ . mertebeden iki latin kare üst üste çakıştırıldığında ortaya çıkan  $n^2$  tane sıralı ikili birbirinden farklı ise bu iki latin kareye *ortogonal* denir.

Şayet  $n$ . mertebeden  $n-1$  tane latin kareden oluşan bir kümede farklı her ikili ortogonal ise bu kümeye karşılıklı ortogonal latin karelerin bir tam kümesi adı verilir.  $n$ . mertebeden böyle bir tam kümenin maksimum eleman sayısı  $N(n)$  ile gösterilir.

**Teorem 4.9.**  $p$  bir asal sayı ve  $r$  pozitif tamsayı olmak üzere  $N(p^r) = p^r - 1$  dir.

Ortogonal Latin karelerin bir tam kümesi yardımı ile afin düzlemler elde edilebilmekte ve bu afin düzlemlerin paralel doğru demetleri sonsuz da kesiştirilerek projektif düzlemler elde edilebilmektedir. Diğer yandan Latin karelerin oluşturulması tek türlü değildir. Bu sebeple tanımlanacak uzaklık latin karelerin bir tam kümesinin seçimine ve bu latin kareler yardımı ile elde edilecek projektif düzlemlerin kuruluşuna bağlıdır.

Tanım 4.5 deki uzaklık tanımının değişkenlik göstermemesi için üzerinde çalışılacak projektif düzlemin tek türlü elde edilebilmesi çok önemlidir. Bunun sağlanabilmesi için projektif düzlemin altında yatan afin düzlemin de tek türlü elde edilebilmesi gereklidir. Bu sebeple latin kareler ile afin düzlem elde edilirken tekliği garanti etmek şarttır.

Şimdi 3. ve 4. mertebeden projektif düzlemin kuruluşu verilecektir:

3. mertebeden latin karelerin tam kümesi 2 tane ortogonal latin kareden oluşur yani  $N(3)=2$  dir ve bunlar

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$



şeklindedir. Bunlara

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisleri eklensin ve bu matrislerin her biri düzlemin  $(Z_3)^2$  uzayının 9 tane noktası üzerine denk gelecek biçimde yerleştirilsin. Matrisin girdilerinin aynı olduğu yerlerdeki noktalardan düzlemin bir doğrusunun geçtiği kabul edilirse; 3. mertebeden afin düzlemin doğruları paralellik sınıflarına göre Çizelge 4.1 deki gibidir.

Çizelge 4.1 de her bir doğru üzerinde alfabetik/sözlük sıralaması (lexicographical order) alınarak doğruların da tek türlü ifade edilmesi sağlanmıştır. 00 noktasını 1x noktasına birleştiren doğrunun eğiminden hareketle bu doğruyu bulunduran paralel sınıfı  $L_x$  ile gösterilmiştir. Geriye kalan son paralel sınıf  $L_\infty$  dur.

**Çizelge 4.1.** 3. mertebeden afin düzlem

$L_\infty$			$L_0$			$L_1$			$L_2$		
00	01	02	00	10	20	00	11	22	00	12	21
10	11	12	01	11	21	01	12	20	01	10	22
20	21	22	02	12	22	02	10	21	02	11	20

4. mertebeden latin karelerin tam kümesi 3 tane ortogonal latin kareden oluşur yani  $N(4)=3$  tür ve bunlar

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bunlara

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisleri eklensin ve bu matrisleri her biri  $(Z_4)^2$  uzayının 16 noktası üzerine denk gelecek şekilde yerleştirilsin. Matrisin girdilerinin aynı olduğu yerlerdeki noktalardan düzlemin bir doğrusunun geçtiği kabul edilirse 4. mertebeden afin düzlemin doğruları paralellik sınıflarına göre Çizelge 4.2 deki gibi elde edilir.

Doğruların noktaları üzerinde alfabetik sıralamanın olduğuna ve paralellik sınıflarının 3. mertebeden afin düzlemdekine benzer isimlendirildiğine dikkat ediniz.

**Çizelge 4.2.** 4. mertebeden afin düzlem

$L_\infty$				$L_0$				$L_1$			
00	01	02	03	00	10	20	30	00	11	22	33
10	11	12	13	01	11	21	31	01	10	23	32
20	21	22	23	02	12	22	32	02	13	20	31
30	31	32	33	03	13	23	33	03	12	21	30
$L_2$				$L_3$							
00	12	23	31	00	13	21	32				
01	13	22	30	01	12	20	33				
02	10	21	33	02	11	23	30				
03	11	20	32	03	10	22	31				

5, 7, 8 ve 9. mertebeden afin düzlemlerin 3. ve 4. mertebeye benzer kuruluşları için EK-B ye bakılabilir.

Şimdi 3. mertebeden afin düzlemi projektif düzleme tamamlamak için;  $L_0, L_1, L_2, L_\infty$  un doğruları sırasıyla  $(0), (1), (2), (\infty)$  sonsuz noktalarında kesiştirilsin ve bu noktalar afin düzlemin noktalar kümesine ve bu noktalardan oluşan  $\{(0), (1), (2), (\infty)\}$  sonsuz doğrusu da doğrular kümesine eklensin. Benzer işlemlerle 4, 5, 7, 8 ve 9. mertebeden afin düzlemler projektif düzleme tamamlanabilir.

Bu durumda 3. ve 4. mertebeden projektif düzlemin doğruları Çizelge 4.3 teki gibi tek türlü ifade edilebilir:

**Çizelge 4.3.** 3. mertebeden projektif düzlem

$\{(0),(1),(2),(\infty)\}$															
$L_\infty$				$L_0$				$L_1$				$L_2$			
00	01	02	( $\infty$ )	00	10	20	(0)	00	11	22	(1)	00	12	21	(2)
10	11	12	( $\infty$ )	01	11	21	(0)	01	12	20	(1)	01	10	22	(2)
20	21	22	( $\infty$ )	02	12	22	(0)	02	10	21	(1)	02	11	20	(2)

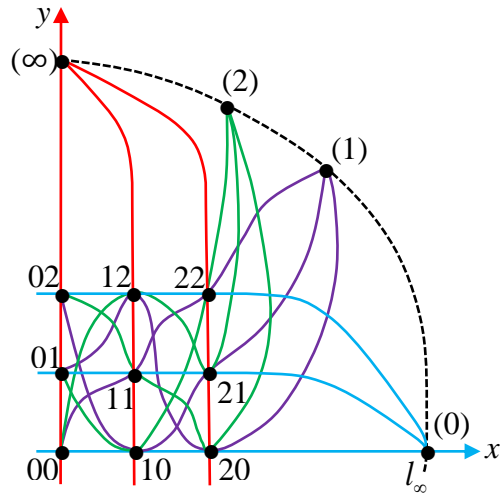
Bu durumda 3. ve 4. mertebeden projektif düzlemin doğruları Çizelge 4.4 teki gibi tek türlü ifade edilebilir:

**Çizelge 4.4.** 4. mertebeden projektif düzlem

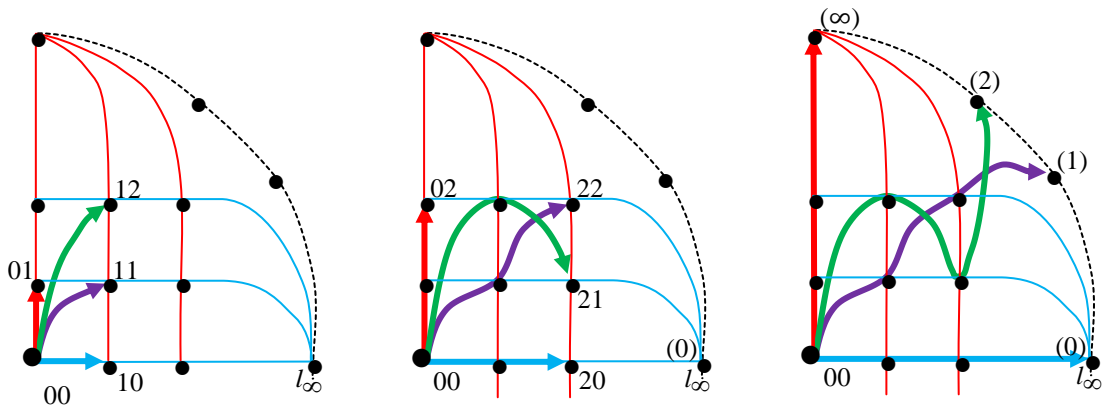
$\{(0),(1),(2),(3),(\infty)\}$															
$L_\infty$					$L_0$					$L_1$					
00	01	02	03	( $\infty$ )	00	10	20	30	(0)	00	11	22	33	(1)	
10	11	12	13	( $\infty$ )	01	11	21	31	(0)	01	10	23	32	(1)	
20	21	22	23	( $\infty$ )	02	12	22	32	(0)	02	13	20	31	(1)	
30	31	32	33	( $\infty$ )	03	13	23	33	(0)	03	12	21	30	(1)	
$L_2$					$L_3$										
00	12	23	31	(2)	00	13	21	32	(3)						
01	13	22	30	(2)	01	12	20	33	(3)						
02	10	21	33	(2)	02	11	23	30	(3)						
03	11	20	32	(2)	03	10	22	31	(3)						

Tanım 4.5 e göre eklenen yeni noktaların afin düzlemdeki doğruların hangi kısmına konulacağı da önemlidir. Alfabetik sıralamayı korumak için sonsuzdaki noktanın afin noktalardan daha büyük olduğu düşünülerek bu noktalar doğru üzerinde en sağda yazılmıştır.

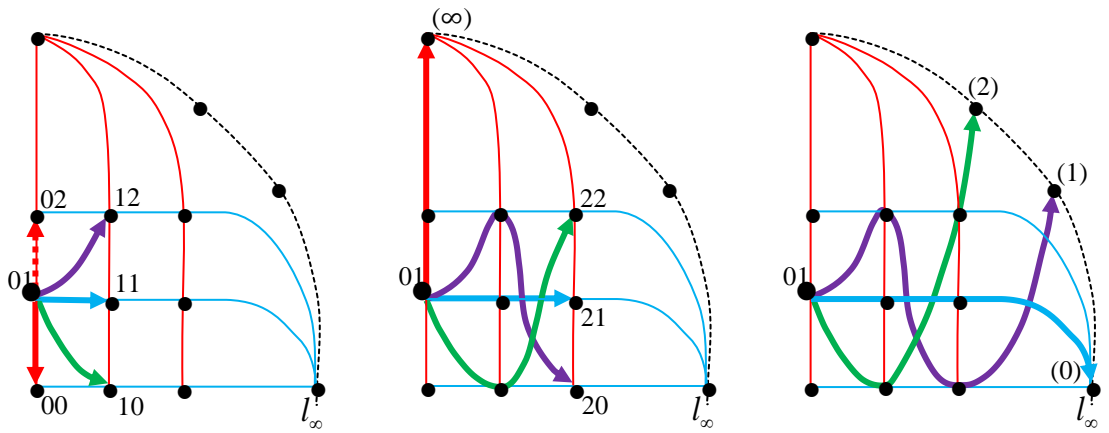
Şekil 4.1 de verilen 3. mertebeden projektif düzlemde (0,0) noktasına, sırasıyla, 1, 2 ve 3 birim uzaklıkta olan noktaları Şekil 4.2 de,(0,1) noktasına sırasıyla 1, 2 ve 3 birim uzaklıktaki noktalar Şekil 4.3 te görülmektedir.



Şekil 4.1. 3. mertebeden projektif düzlem

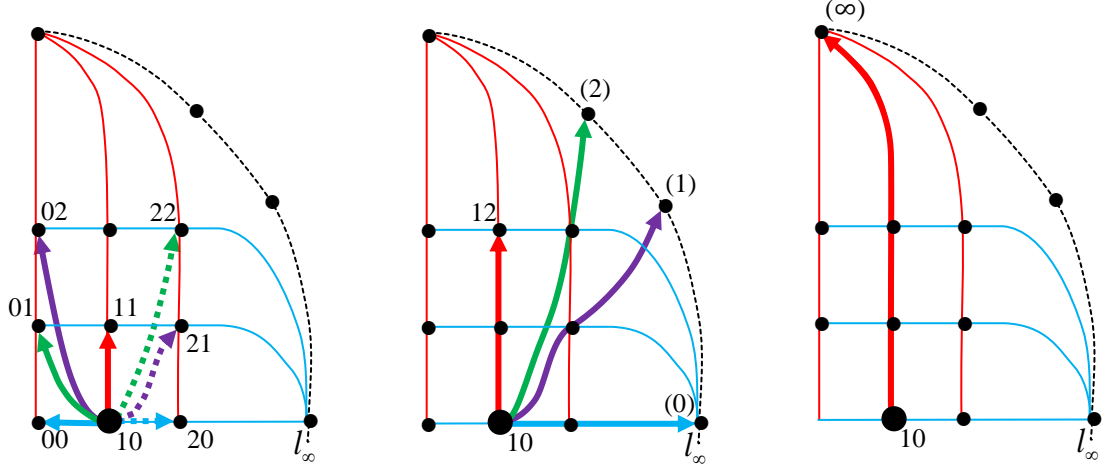


Şekil 4.2. (0,0) noktasına 1, 2 ve 3 birim uzaklıktaki noktalar



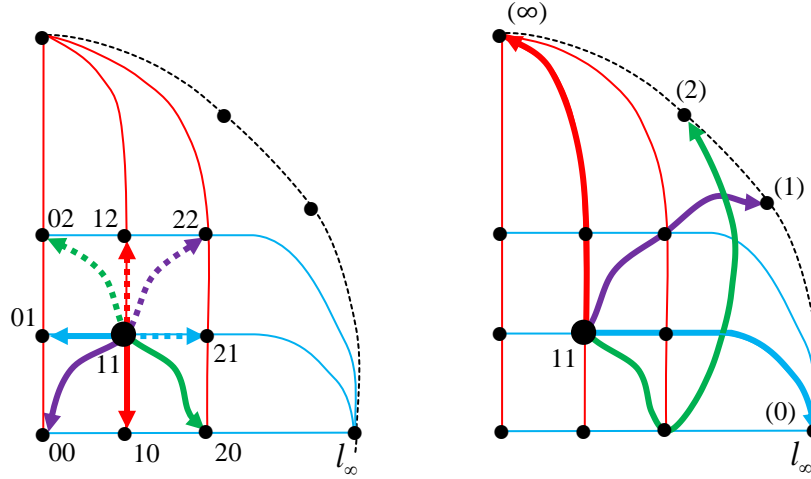
Şekil 4.3. (0,1) noktasına 1, 2 ve 3 birim uzaklıktaki noktalar

(1,0) noktasına sırasıyla 1, 2 ve 3 birim uzaklıktaki noktalar Şekil 4.4 te gösterilmiştir.



Şekil 4.4. (1,0) noktasına 1, 2 ve 3 birim uzaklıktaki noktalar

Benzer şekilde (1,1) noktasına sırasıyla 1 ve 2 birim uzaklıktaki noktalar Şekil 4.5 te gösterilmiştir.



Şekil 4.5. (1,1) noktasına 1 ve 2 birim uzaklıktaki noktalar

Dikkat edilirse Şekil 4.2, Şekil 4.3, Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 yardımıyla elde edilen noktalar 1, 2 ve 3 birim yarıçaplı çember örnekleridir. Şimdi bu örnekler 3. ve 4.

mertebeden projektif düzlemin tüm noktaları üzerine taşınırsa sırasıyla aşağıdaki Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6 elde edilir:

**Çizelge 4.5.** 3. mertebeden projektif düzlemin çemberleri

C	r = 1	r = 2	r = 3
00	{01,10,11,12}	{02,20,21,22}	{(0),(1),(2),(∞)}
01	{10,11,12,00,02}	{22,21,20,(∞)}	{(0),(1),(2)}
02	{01,12,11,10,(∞)}	{00,22,21,20}	{(0),(1),(2)}
10	{00,01,02,20,21,22,11}	{12,(0),(1),(2)}	{(∞)}
11	{02,01,00,22,21,20,12,10}	{(0),(1),(2),(∞)}	{}
12	{02,01,00,22,21,20,11,(∞)}	{10,(0),(1),(2)}	{}
20	{10,11,12,21,(0),(1),(2)}	{00,01,02,22}	{(∞)}
21	{12,11,10,22,20,(0),(1),(2)}	{02,01,00,(∞)}	{}
22	{12,11,10,21,(0),(1),(2),(∞)}	{02,01,00,20}	{}
(0)	{20,21,22,(1)}	{10,11,12,(2)}	{00,01,02,(∞)}
(1)	{20,21,22,(0),(2)}	{10,11,12,(∞)}	{00,01,02}
(2)	{20,21,22,(1),(∞)}	{10,11,12,(0)}	{00,01,02}
(∞)	{02,12,22,(2)}	{01,11,21,(1)}	{00,10,20,(0)}

**Çizelge 4.6.** 4. mertebeden projektif düzlemin çemberleri

C	r = 1	r = 2	r = 3	r = 4
00	{13,12,11,10,01}	{23,22,21,20,02}	{33,32,31,30,03}	{(∞),(0),(1),(2),(3)}
01	{13,12,11,10,02,00}	{23,22,21,20,03}	{33,32,31,30,(∞)}	{(0),(1),(2),(3)}
02	{13,12,11,10,03,01}	{23,22,21,20,00,(∞)}	{33,32,31,30}	{(0),(1),(2),(3)}
03	{13,12,11,10,02,(∞)}	{23,22,21,20,01}	{33,32,31,30,00}	{(0),(1),(2),(3)}
10	{03,02,01,00,23,22,21,20,11}	{33,32,31,30,12}	{13,(0),(1),(2),(3)}	{(∞)}
11	{03,02,01,00,23,22,21,20,12,10}	{33,32,31,30,13}	{(∞),(0),(1),(2),(3)}	{}
12	{03,02,01,00,23,22,21,20,13,11}	{33,32,31,30,10,(∞)}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
13	{03,02,01,00,23,22,21,20,12,(∞)}	{33,32,31,30,11}	{10,(0),(1),(2),(3)}	{}

**Çizelge 4.6.** 4. mertebeden projektif düzlemin çemberleri (devam)

20	{13,12,11,10,33,32,31,30,21}	{03,02,01,00,22,(0),(1),(2),(3)}	{23}	{{∞}}
21	{13,12,11,10,33,32,31,30,22,20}	{03,02,01,00,23,(0),(1),(2),(3)}	{{∞}}	{}
22	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,21}	{03,02,01,00,20,(∞),(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
23	{13,12,11,10,33,32,31,30,22,(∞)}	{03,02,01,00,21,(0),(1),(2),(3)}	{20}	{}
30	{23,22,21,20,31,(0),(1),(2),(3)}	{13,12,11,10,32}	{03,02,01,00,33}	{{∞}}
31	{23,22,21,20,32,30,(0),(1),(2),(3)}	{13,12,11,10,33}	{03,02,01,00,(∞)}	{}
32	{23,22,21,20,33,31,(0),(1),(2),(3)}	{13,12,11,10,30,(∞)}	{03,02,01,00}	{}
33	{23,22,21,20,32,(∞),(0),(1),(2),(3)}	{13,12,11,10,31}	{03,02,01,00,30}	{}
(0)	{30,31,32,33,(1)}	{20,21,22,23,(2)}	{10,11,12,13,(3)}	{00,01,02,03,(∞)}
(1)	{30,31,32,33,(0),(2)}	{20,21,22,23,(3)}	{10,11,12,13,(∞)}	{00,01,02,03}
(2)	{30,31,32,33,(1),(3)}	{20,21,22,23,(0),(∞)}	{10,11,12,13}	{00,01,02,03}
(3)	{30,31,32,33,(2),(∞)}	{20,21,22,23,(1)}	{10,11,12,13,(0)}	{00,01,02,03}
(∞)	{03,13,23,33,(3)}	{02,12,22,32,(2)}	{01,11,21,31,(1)}	{00,10,20,30,(0)}

Çizelge 4.5 ve 4.6 incelenirse; bir noktadan çizilen tüm çemberlerin düzlemin noktaları üzerinde bir parçalanış olacağı görülmektedir.

Şimdi 3. mertebeden projektif düzlemin elipsleri belirlenecektir.

3. mertebeden projektif düzlemde odaklar arasındaki uzaklığın maksimum 3 birim olacağı aşıkardır. Bu sebeple odaklar arası uzaklık sırasıyla 1, 2 ve 3 birim alınarak öncelikle tüm odak nokta ikilileri belirlenecektir. Daha sonra bu iki odağa uzaklıkları toplamı sabit olan noktalar bulunarak elipsin noktaları tespit edilecektir.

3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 birim olan elipsleri için Çizelge 4.7 ye bakılabilir.

**Çizelge 4.7.** 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan elipsleri

Odak uzaklığı 1	Odaklara olan uzaklıkları toplamı				
	2	3	4	5	6
00,01	{10,11,12}	{02}	{20,21,22}	{(∞)}	{{(0),(1),(2)}}
00,10	{01,11}	{12,02,20,21,22}	{}	{{(0),(1),(2)}}	{{(∞)}
00,11	{01,10,12}	{02,20,21,22}	{}	{{(0),(1),(2),(∞)}}	{}
00,12	{01,11}	{10,02,20,21,22}	{(∞)}	{{(0),(1),(2)}}	{}
01,10	{00,02,11}	{12,22,21,20}	{}	{{(∞),(0),(1),(2)}}	{}
01,11	{00,02,12,10}	{22,21,20}	{(∞)}	{{(0),(1),(2)}}	{}
01,12	{00,02,11}	{10,22,21,20,(∞)}	{}	{{(0),(1),(2)}}	{}
01,02	{10,11,12}	{00, (∞)}	{22,21,20}	{}	{{(0),(1),(2)}}
02,12	{01,11, (∞)}	{10,00,22,21,20}	{}	{{(0),(1),(2)}}	{}
02,11	{01,12,10}	{{(∞),00,22,21,20}	{}	{{(0),(1),(2)}}	{}
02,10	{01,11}	{12,00,22,21,20}	{(∞)}	{{(0),(1),(2)}}	{}
02,(∞)	{12}	{01,11,22}	{10,21,(2)}	{00,20,(1)}	{{(0)}
10,20	{11,21}	{00,01,02,22,12, (0),(1),(2)}	{}	{}	{{(∞)}
10,21	{22,20,11}	{00,01,02,12,(0), (1),(2)}	{}	{{(∞)}	{}
10,22	{11,21}	{00,01,02,20,12, (0),(1),(2)}	{(∞)}	{}	{}
10,11	{02,01,00,22, 21,20}	{12}	{{(0),(1),(2)}}	{{(∞)}	{}
11,22	{12,10,21}	{02,01,00,20,(0), (1),(2),(∞)}	{}	{}	{}
11,21	{12,10,22,20}	{02,01,00,(0),(1), (2)}	{{(∞)}	{}	{}
11,20	{10,12,21}	{02,01,00,22,(0), (1),(2)}	{}	{{(∞)}	{}
11,12	{02,01,00,22, 21,20}	{10,(∞)}	{{(0),(1),(2)}}	{}	{}
12,22	{11,(∞),21}	{02,01,00,10,20, (0),(1),(2)}	{}	{}	{}
12,21	{11,22,20}	{02,01,00,10,(∞), (0),(1),(2)}	{}	{}	{}
12,20	{11,21}	{02,01,00,22,10, (0),(1),(2)}	{{(∞)}	{}	{}
12,(∞)	{02,22}	{01,11,21,(2)}	{00,20,(1)}	{10,(0)}	{}



**Çizelge 4.7.** 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan elipsleri (devam)

20,21	{11,12,10,(0), (1),(2)}	{22}	{02,01,00}	{(∞)}	{}
20,(0)	{21,(1)}	{10,11,12,22,(2)}	{}	{00,01,02}	{(∞)}
20,(1)	{21,(0),(2)}	{10,11,12,22}	{}	{00,01,02,(∞)}	{}
20,(2)	{21,(1)}	{10,11,12,22,(0)}	{(∞)}	{00,01,02}	{}
21,22	{12,11,10,(0), (1),(2)}	{20,(∞)}	{02,01,00}	{}	{}
21,(0)	{20,22,(1)}	{10,11,12,(2)}	{}	{00,01,02,(∞)}	{}
21,(1)	{20,22,(0),(2)}	{10,11,12}	{(∞)}	{00,01,02}	{}
21,(2)	{20,22,(1)}	{10,11,12,(0), (∞)}	{}	{00,01,02}	{}
22,(0)	{21,(1)}	{10,11,12,20,(2)}	{(∞)}	{00,01,02}	{}
22,(1)	{21,(0),(2)}	{10,11,12,20,(∞)}	{}	{00,01,02}	{}
22,(2)	{21,(1),(∞)}	{10,11,12,20,(0)}	{}	{00,01,02}	{}
22,(∞)	{12,(2)}	{11,21,02,(1)}	{10,01,(0)}	{00,20}	{}
(0),(1)	{20,21,22}	{(2)}	{10,11,12}	{(∞)}	{00,01,02}
(1),(2)	{20,21,22}	{(0),(∞)}	{10,11,12}	{}	{00,01,02}
(2),(∞)	{22}	{21,12,(1)}	{20,11,02}	{01,10,(0)}	{00}

3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 birim olan elipsleri için Çizelge 4.8'e bakılabilir.

**Çizelge 4.8.** 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 br olan elipsleri

Odak uzaklı ğı 2	Odaklara olan uzaklıkları toplamı				
	2	3	4	5	6
00,02	{01,10,11,12}	{}	{22,21,20,(∞)}	{}	{(0),(1),(2)}
00,20	{10,11,12}	{01,21}	{02,22,(0),(1),(2)}	{}	{(∞)}
00,21	{10,11,12}	{01,22,20}	{02,(0),(1),(2)}	{(∞)}	{}
00,22	{10,11,12}	{01,21}	{02,20,(0),(1),(2), (∞)}	{}	{}

**Çizelge 4.8.** 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 br olan elipsleri (devam)

01,22	{10,11,12}	{02,00,21,(∞)}	{20,(0),(1),(2)}	{}	{}
01,21	{10,11,12}	{02,00,22,20}	{(∞),(0),(1),(2)}	{}	{}
01,20	{10,11,12}	{00,02,21}	{22,(0),(1),(2)}	{(∞)}	{}
01,(∞)	{02,12}	{11,22}	{00,10,21,(2)}	{20,(1)}	{(0)}
02,22	{10,11,12,(∞)}	{01,21}	{00,20,(0),(1),(2)}	{}	{}
02,21	{10,11,12}	{01,22,20,(∞)}	{00,(0),(1),(2)}	{}	{}
02,20	{10,11,12}	{01,21}	{00,22,(∞),(0),(1),(2)}	{}	{}
10,12	{00,01,02,22,21,21,11}	{}	{(∞),(0),(1),(2)}	{}	{}
10,(0)	{20,21,22}	{11,(1)}	{00,01,02,12,(2)}	{}	{(∞)}
10,(1)	{20,21,22}	{11,(0),(2)}	{00,01,02,12}	{(∞)}	{}
10,(2)	{20,21,22}	{11,(1)}	{00,01,02,12,(0),(∞)}	{}	{}
11,(0)	{20,21,22}	{12,10,(1)}	{00,01,02,(2)}	{(∞)}	{}
11,(1)	{20,21,22}	{12,10,(0),(2)}	{00,01,02,(∞)}	{}	{}
11,(2)	{20,21,22}	{12,10,(1),(∞)}	{00,01,02,(0)}	{}	{}
11,(∞)	{02,12,22}	{01,21,(2)}	{00,01,02,(1)}	{(0)}	{}
12,(0)	{20,21,22}	{11,(1)}	{00,01,02,10,(2),(∞)}	{}	{}
12,(1)	{20,21,22}	{11,(0),(2),(∞)}	{00,01,02,10}	{}	{}
12,(2)	{20,21,22,(∞)}	{11,(1)}	{00,01,02,10,(0)}	{}	{}
20,22	{10,11,12,21,(0),(1),(2)}	{}	{00,01,02,(∞)}	{}	{}
21,(∞)	{12,22,(2)}	{11,02,(1)}	{10,20,01,(0)}	{00}	{}
(0),(2)	{20,21,22,(1)}	{}	{10,11,12,(∞)}	{}	{00,01,02}
(1),(∞)	{22,(2)}	{21,12}	{20,11,02,(0)}	{10,01}	{00}

3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 birim olan elipsleri için Çizelge 4.9'a bakılabilir.

**Çizelge 4.9.** 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 br olan elipsleri

Odak uzaklığı 3	Odaklara olan uzaklıkları toplamı				
	2	3	4	5	6
00,(0)	{}	{10,11,12,20,21,22}	{01,(1)}	{02,(2)}	{(∞)}
00,(1)	{}	{10,11,12, 20,21,22}	{01,(0),(2)}	{02,(∞)}	{}
00,(2)	{}	{10,11,12,20,21,22}	{01,(1),(∞)}	{02,(0)}	{}
00,(∞)	{12}	{01,11,02,22}	{10,21,(2)}	{20,(1)}	{(0)}
01,(0)	{}	{10,11,12, 20,21,22}	{00,02,(1)}	{(∞),(2)}	{}
01,(1)	{}	{10,11,12, 20,21,22}	{00,02,(0),(2),(∞)}	{}	{}
01,(2)	{}	{10,11,12, 20,21,22,(∞)}	{00,02,(1)}	{(0)}	{}
02,(0)	{}	{10,11,12, 20,21,22}	{01,(1),(∞)}	{00,(2)}	{}
02,(1)	{}	{10,11,12, 20,21,22,(∞)}	{01,(0),(2)}	{00}	{}
02,(2)	{(∞)}	{10,11,12, 20,21,22}	{01,(1)}	{00,(0)}	{}
10,(∞)	{02,22}	{01,11,21,12,(2)}	{00,20,(1)}	{(0)}	{}
20,(∞)	{12,(2)}	{11,21,02,22,(1)}	{10,01,(0)}	{00}	{}
(0),(∞)	{22}	{21,12,(1),(2)}	{20,11,02}	{10,01}	{00}

Çizelge 4.7, 4.8 ve 4.9 dikkatlice incelenirse; iki noktadan çizilen tüm elipslerin düzlemin noktaları üzerinde bir parçalanış oluşturduğu görülmektedir.

Şimdi 3. mertebeden projektif düzlemin hiperbollerini belirleyeceğiz. 3. mertebeden projektif düzlemin elipsleri belirlenirken bütün odak ikilileri belirlenmişti. Bu iki odağa uzaklıkları farkı sabit olan noktalar bulunarak hiperbolün noktaları tespit edilecektir.

3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 birim olan hiperbollerini için Çizelge 4.10'a bakılabilir.

**Çizelge 4.10.** 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan hiperbolleri

<b>Odak uzaklığı 1</b>	<b>Odaklara olan uzaklık farkı 1 br, yani (1↔2) ve (2↔3)</b>	<b>Odaklara olan uzaklık farkı 2 br, yani (1↔3)</b>
00,01	{02,(∞)}	{}
00,10	{12,02,20,21,22,(0),(1),(2)}	{}
00,11	{02,20,21,22,(0),(1),(2),(∞)}	{}
00,12	{10,02,20,21,22,(0),(1),(2)}	{(∞)}
01,10	{12,22,21,20,(0),(1),(2),(∞)}	{}
01,11	{22,21,20,(0),(1),(2)}	{}
01,12	{10,22,21,20,(0),(1),(2),(∞)}	{}
01,02	{00,(∞)}	{}
02,12	{10,00,22,21,20,(0),(1),(2)}	{}
02,11	{00,22,21,20,(0),(1),(2),(∞)}	{}
02,10	{12,00,22,21,20,(0),(1),(2)}	{(∞)}
02,(∞)	{01,11,22,00,20,(1)}	{10,(2)}
10,20	{00,01,02,22,12,(0),(1),(2)}	{}
10,21	{00,01,02,12,(0),(1),(2),(∞)}	{}
10,22	{00,01,02,20,12,(0),(1),(2)}	{(∞)}
10,11	{12,(∞)}	{(0),(1),(2)}
11,22	{02,01,00,20,(0),(1),(2),(∞)}	{}
11,21	{02,01,00,(0),(1),(2)}	{(∞)}
11,20	{02,01,00,22,(0),(1),(2),(∞)}	{}
11,12	{10, (∞)}	{}
12,22	{02,01,00,10,(0),(1),(2)}	{}
12,21	{02,01,00,10,(∞),(0),(1),(2)}	{}
12,20	{02,01,00,22,10,(0),(1),(2)}	{(∞)}
12,(∞)	{01,11,21,(2),10,(0)}	{00,20}

**Çizelge 4.10.** 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan hiperbollerini (devam)

20,21	{22,(∞)}	{}
20,(0)	{10,11,12,22,(2),00,01,02}	{}
20,(1)	{10,11,12,22,00,01,02,(∞)}	{}
20,(2)	{10,11,12,22,(0),00,01,02}	{(∞)}
21,22	{20,(∞)}	{}
21,(0)	{10,11,12,2,00,01,02,(∞)}	{}
21,(1)	{10,11,12,00,01,02}	{}
21,(2)	{10,11,12,(0),(∞),00,01,02}	{}
22,(0)	{10,11,12,20,(2),00,01,02}	{(∞)}
22,(1)	{10,11,12,20,(∞),00,01,02}	{}
22,(2)	{10,11,12,20,0,00,01,02}	{}
22,(∞)	{11,21,02,(1),00,20}	{10,(0)}
(0),(1)	{(2),(∞)}	{}
(1),(2)	{(0),(∞)}	{}
(2),(∞)	{21,12,(1),01,10,(0)}	{20,02}

3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 birim olan hiperbollerini için Çizelge 4.11'e bakılabilir.

**Çizelge 4.11.** 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 br olan hiperbollerini

<b>Odak uzaklığı 2</b>	<b>Odaklara olan uzaklık farkı 1 br, yani (1↔2) ve (2↔3)</b>	<b>Odaklara olan uzaklık farkı 2 br, yani (1↔3)</b>
00,02	{}	{(∞)}
00,20	{01,21}	{(0),(1),(2)}
00,21	{01,22,20,(∞)}	{(0),(1),(2)}
00,22	{01,21}	{(0),(1),(2),(∞)}

**Çizelge 4.11.** 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 br olan hiperbolleri (devam)

01,22	{02,00,21,(∞)}	{(0),(1),(2)}
01,21	{02,00,22,20}	{(0),(1),(2)}
01,20	{00,02,21,(∞)}	{(0),(1),(2)}
01,(∞)	{11,22,20,(1)}	{00,10,(2)}
02,22	{01,21}	{(0),(1),(2)}
02,21	{01,22,20,(∞)}	{(0),(1),(2)}
02,20	{01,21}	{(∞),(0),(1),(2)}
10,12	{}	{(∞)}
10,(0)	{11,(1)}	{00,01,02}
10,(1)	{11,(0),(2),(∞)}	{00,01,02}
10,(2)	{11,(1)}	{00,01,02,(∞)}
11,(0)	{12,10,(1),(∞)}	{00,01,02}
11,(1)	{12,10,(0),(2)}	{00,01,02}
11,(2)	{12,10,(1),(∞)}	{00,01,02}
11,(∞)	{01,21,(2),(0)}	{00,01,02}
12,(0)	{11,(1)}	{00,01,02,(∞)}
12,(1)	{11,(0),(2),(∞)}	{00,01,02}
12,(2)	{11,(1)}	{00,01,02}
20,22	{}	{(∞)}
21,(∞)	{11,02,(1)}	{10,20,(0)}
(0),(2)	{}	{(∞)}
(1),(∞)	{21,12,10,01}	{20,02,(0)}

3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 birim olan hiperbollerini için Çizelge 4.12 ye bakılabilir.

**Çizelge 4.12.** 3. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 br olan hiperbollerini

<b>Odak uzaklığı 3</b>	<b>Odalara olan uzaklık farkı 1 br, yani (1↔2) ve (2↔3)</b>	<b>Odaklara olan uzaklık farkı 2 br, yani (1↔3)</b>
00,(0)	{10,11,12,20,21,22,02,(2)}	{01,(1)}
00,(1)	{10,11,12, 20,21,22,02,(∞)}	{01,(0),(2)}
00,(2)	{10,11,12,20,21,22,02,(0)}	{01,(1),(∞)}
00,(∞)	{01,11,02,22,20,(1)}	{10,21,(2)}
01,(0)	{10,11,12, 20,21,22,(∞),(2)}	{00,02,(1)}
01,(1)	{10,11,12, 20,21,22}	{00,02,(0),(2),(∞)}
01,(2)	{10,11,12, 20,21,22,(∞),(0)}	{00,02,(1)}
02,(0)	{10,11,12, 20,21,22,00,(2)}	{01,(1),(∞)}
02,(1)	{10,11,12, 20,21,22,(∞),00}	{01,(0),(2)}
02,(2)	{10,11,12, 20,21,22,00,(0)}	{01,(1)}
10,(∞)	{01,11,21,12,(2),(0)}	{00,20,(1)}
20,(∞)	{11,21,02,22,(1),00}	{10,01,(0)}
(0),(∞)	{21,12,(1),(2),10,01}	{20,11,02}

Çizelge 4.10, 4.11, 4.12 de dikkatlice incelenirse iki noktadan çizilen tüm hiperbollerin düzlemin tüm noktaları üzerinde daima bir parçalanış oluşturmadığı gözlemlenmektedir.

Bu tür parçalanışlar sadece Çizelge 4.12 de bulunmaktadır ve sayıları 7 tanedir.

Son olarak, Çizelge 4.6 yardımıyla 4. mertebeden projektif düzlemin tüm elipsleri verilecektir, bunun için ilk olarak 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 birim olan elipsleri için Çizelge 4.13'e bakılabilir. 4. mertebeden projektif düzlemin tüm hiperbollerini belirlemek ise okuyucuya bir alıştırmaya bırakılmıştır

**Çizelge 4.13.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan elipsleri

Odak uzaklığı 1	Odaklara olan uzaklıkları toplamı						
	2	3	4	5	6	7	8
00,01	{10,11,12,13}	{02}	{20,21,22,23}	{03}	{33,32,31,30}	{∞}	{(0),(1),(2),(3)}
00,10	{11,01}	{12,23,22,21,20,02}	{13,03}	{33,32,31,30}	{}	{(0),(1),(2),(3)}	{(∞)}
00,11	{12,10,01}	{13,23,22,21,20,02}	{03}	{33,32,31,30}	{}	{(0),(1),(2),(3),(∞)}	{}
00,12	{13,11,01}	{10,23,22,21,20,02}	{03}	{33,32,31,30}	{(∞)}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
00,13	{12,01}	{11,23,22,21,20,02}	{10,03}	{(∞),33,32,31,30}		{(0),(1),(2),(3)}	{}
01,10	{00,02,11}	{12,23,22,21,20,03}	{13}	{33,32,31,30}	{}	{∞,(0),(1),(2),(3)}	{}
01,11	{10,12,02,00}	{13,23,22,21,20,03}	{}	{33,32,31,30}	{(∞)}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
01,12	{13,11,02,00}	{10,23,22,21,20,03}	{}	{33,32,31,30,∞}	{}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
01,13	{12,02,00}	{11,23,22,21,20,03}	{10,(∞)}	{33,32,31,30}	{}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
01,02	{13,12,11,10}	{02,00,21}	{33,32,31,30,03,22}	{23}	{0,1,2,3}	{(∞)}	{}
02,13	{12,03}	{11,23,22,21,20,00,(∞)}	{10}	{33,32,31,30}	{}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
02,12	13,11,03,01	{10,23,22,21,20,00}	{(∞)}	{33,32,31,30}	{}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
02,11	{12,10,03,01}	{13,23,22,21,20,00}	{}	{33,32,31,30,∞}	{}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
02,10	{11,03,01}	{12,23,22,21,20,00}	{13}	{33,32,31,30}	{(∞)}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
02,03	{13,12,11,10}	{01,(∞)}	{23,22,21,20}	{00}	{33,32,31,30}	{}	{(0),(1),(2),(3)}
03,13	{12,02,(∞)}	{11,23,22,21,20,01}	{10,00}	{33,32,31,30}	{}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
03,12	{13,11,02}	{10,∞,23,22,21,20,01}	{00}	{33,32,31,30}	{}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
03,11	{10,02}	{13,23,22,21,20,01}	{00,(∞)}	{33,32,31,30}	{}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
03,10	{11,02}	{12,23,22,21,20,01}	{13,00}	{33,32,31,30,∞}	{}	{(0),(1),(2),(3)}	{}
03,(∞)	{13}	{02,12,23}	{11,33,22}	{10,(3),01,32,21}	{20,(2),31}	{00,30,(1)}	{(0)}
10,20	{11,21}	{03,02,01,00,22,33,32,31,30,12}	{23,13}	{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}	{(∞)}
10,21	{22,20,11}	{03,02,01,00,23,33,32,31,30,12}	{12}	{(0),(1),(2),(3)}	{}	{(∞)}	{}
10,22	{11,23,21}	{03,02,01,00,33,32,31,30,12,20}	{13}	{(0),(1),(2),(3)}	{(∞)}	{}	{}



**Çizelge 4.13.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan elipsleri (devam)

10,23	{22,11}	{03,02,01,00,21,33,32,31,30,12}	{20,13}	{{(∞),(0),(1),(2),(3)}	{}	{}	{}
10,11	{03,02,01,00,23,22,21,20}	{12}	{33,32,31,30}	{13}	{{(0),(1),(2),(3)}	{{(∞)}	
11,23	{22,10,12}	{03,02,01,00,21,33,32,31,30,13}	{20,(∞)}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}	{}
11,22	{23,21,12,10}	{03,02,01,00,20,33,32,31,30,13}	{}	{{(0),(1),(2),(3),(∞)}	{}	{}	{}
11,21	{22,20,12,10}	{03,02,01,00,23,33,32,31,30,13}	{}	{{(0),(1),(2),(3)}	{{(∞)}		{}
11,20	{21,12,10}	{03,02,01,00,22,33,32,31,30,13}	{23}	{{(0),(1),(2),(3)}		{{(∞)}	{}
11,12	{03,02,01,00,23,22,21,20}	{10,13}	{33,32,31,30}	{{(∞)}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
12,23	{22,13,11}	{03,02,01,00,21,33,32,31,30,10,(∞)}	{20}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}	{}
12,22	{13,11,23,21}	{33,32,31,30,10,03,02,01,00,20}	{{(∞)}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}	{}
12,21	{22,20,13,11}	{03,02,01,00,23,33,32,31,30,10}	{}	{{(0),(1),(2),(3),(∞)}	{}	{}	{}
12,20	{21,11,13}	{03,02,01,00,22,33,32,31,30,10}	{23}	{{(0),(1),(2),(3)}	{{(∞)}	{}	{}
12,13	{03,02,01,00,23,22,21,20}	{11,(∞)}	{33,32,31,30}	{10}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
13,23	{22,12,(∞)}	{03,02,01,00,21,33,32,31,30,11}	{21,10}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}	{}
13,22	{23,21,12}	{03,02,01,00,20,(∞),33,32,31,30,11}	{10}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}	{}
13,21	{22,20,12}	{03,02,01,00,23,33,32,31,30,11}	{{(∞),10}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}	{}
13,20	{21,12}	{03,02,01,00,22,33,32,31,30,11}	{23,10}	{{(∞),(0),(1),(2),(3)}	{}	{}	{}
13,(∞)	{03,23}	{02,12,22,33}	{01,21,(3),32}	{00,20,31,(2),11}	{30,(1)}	{10,(0)}	{}
20,21	{13,12,11,10,33,32,31,30}	{22}	{03,02,01,00,(0),(1),(2),(3)}	{23}	{}	{{(∞)}	{}

**Çizelge 4.13.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan elipsleri (devam)

20,33	{32,21}	{13,12,11,10, ,31,22,(0),(1), ,(2),(3)}	{30,23}	{(∞),03,02,01, 00}	{}	{}	{}
20,32	{33,31,21}	{13,12,11,10, ,30,22,(0),(1), ,(2),(3)}	{23}	{03,02,01,00}	{(∞)}	{}	{}
20,31	{32,30,21}	{13,12,11,10, ,33,22,(0),(1), ,(2),(3)}	{23}	{03,02,01,00}	{}	{(∞)}	{}
20,30	{31,21}	{13,12,11,10, ,32,22,(0),(1), ,(2),(3)}	{33,23}	{03,02,01,00}	{}	{}	{(∞)}
21,22	{13,12,11,10, 33,32,31,30}	{20,23}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3)}	{(∞)}	{}	{}	{}
21,33	{32,22,20}	{13,12,11,10, ,31,23,(0),(1), ,(2),(3)}	{30,(∞)}	{03,02,01,00}	{}	{}	{}
21,32	{33,31,22,20}	{13,12,11,10, ,30,23,(0),(1), ,(2),(3)}	{}	{03,02,01,00, (∞)}	{}	{}	{}
21,31	{32,30,22,20}	{13,12,11,10, ,33,(0),(1),(2), ,(3),23}	{}	{03,02,01,00}	{(∞)}	{}	{}
21,30	{31,22,20}	{13,12,11,10, ,32,23,(0),(1), ,(2),(3)}	{33}	{03,02,01,00}	{}	{(∞)}	{}
22,23	{13,12,11,10, 33,32,31,30}	{21,(∞)}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3)}	{20}	{}	{}	{}
22,33	{23,21,32}	{13,12,11,10, ,31,20,(0),(1), ,(2),(3),(∞)}	{30}	{03,02,01,00}	{}	{}	{}
22,32	{23,21,33,31}	{13,12,11,10, ,30,20,(0),(1), ,(2),(3)}	{(∞)}	{03,02,01,00}	{}	{}	{}
22,31	{23,21,32,30}	{13,12,11,10, ,33,20,(0),(1), ,(2),(3)}	{}	{03,02,01,00, (∞)}	{}	{}	{}
22,30	{23,21,31}	{13,12,11,10, ,32,20,(0),(1), ,(2),(3)}	{33}	{03,02,01,00}	{(∞)}	{}	{}
23,(∞)	{13,33}	{12,22,03, (3),32}	{11,31,02,(2)}	{10,30,01,21, (1)}	{00,(0)}	{20}	{}
23,33	{22,32, (∞)}	{13,12,11,10, ,31,21,(0),(1), ,(2),(3)}	{30,20}	{03,02,01,00}	{}	{}	{}
23,32	{33,31,22}	{13,12,11,10, 30,21,(∞),(0), ,(1),(2),(3)}	{20}	{03,02,01,00}	{}	{}	{}
23,31	{32,30,22}	{13,12,11,10, ,33,(0),(1), (2),(3),21}	{20,(∞)}	{03,02,01,00}	{}	{}	{}

**Çizelge 4.13.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 1 br olan elipsleri (devam)

23,30	{31,22}	{13,12,11,10,32,(0),(1),(2),(3),21}	{33,20}	{(∞),03,02,01,00}	{}	{}	{}
30,31	{23,22,21,20,(0),(1),(2),(3)}	{32}	{13,12,11,10}	{33}	{03,02,01,00}	{(∞)}	{}
30,(0)	{31,(1)}	{20,21,22,23,(2),32}	{(3),33}	{13,12,11,10}	{}	{03,02,01,00}	{(∞)}
30,(1)	{31,(0),(2)}	{20,21,22,23,32,(3)}	{33}	{10,11,12,13}	{}	{03,02,01,00,(∞)}	{}
30,(2)	{31,(1),(3)}	{23,22,21,20,(0),32}	{33}	{13,02,11,10}	{∞}	{03,02,01,00}	{}
30,(3)	{31,(2)}	{23,22,21,20,(1),32}	{(0),33}	{(∞),(3),12,11,10}	{}	{03,02,01,00}	{}
31,32	{23,22,21,20,(0),(1),(2),(3)}	{30,33}	{13,12,11,10}	{(∞)}	{03,02,01,00}	{}	{}
31,(0)	{30,32,(1)}	{20,21,22,23,(2),33}	{(3)}	{13,12,11,10}	{}	{03,02,01,00,(∞)}	{}
31,(1)	{32,30,(0),(2)}	{23,22,21,20,(3),33}	{}	{13,12,11,10}	{(∞)}	{03,02,01,00}	{}
31,(2)	{32,30,(1),(3)}	{23,22,21,20,(0),33}	{}	{13,12,11,10,(∞)}	{}	{03,02,01,00}	{}
31,(3)	{32,30,(2)}	{20,21,22,23,(1),33}	{(0),(∞)}	{13,12,11,10}	{}	{03,02,01,00}	{}
32,33	{23,22,21,20,(0),(1),(2),(3)}	{31,(∞)}	{13,12,11,10}	{30}	{03,02,01,00}		{}
32,(0)	{33,31,(1)}	{23,22,21,20,(2),30}	{(3)}	{13,12,11,10}	{(∞)}	{03,02,01,00}	{}
32,(1)	{33,31,(0),(2)}	{23,22,21,20,(3),30}	{}	{13,12,11,10,(∞)}	{}	{03,02,01,00}	{}
32,(2)	{33,31,(1),(3)}	{23,22,21,20,(0),30}	{(∞)}	{13,12,11,10}	{}	{03,02,01,00}	{}
32,(3)	{33,31,(2)}	{23,22,21,20,(1),30,(∞)}	{(0)}	{13,12,11,10}	{}	{03,02,01,00}	{}
33,(∞)	{23,(3)}	{32,(2),13,22}	{21,(1),03,12}	{20,(0),11,31,02,30}	{10,01}	{00}	{}
33,(0)	{32,(1)}	{31,23,22,21,20,(2)}	{(3),30}	{13,12,11,10,(∞)}	{}	{03,02,01,00}	{}
33,(1)	{32,(0),(2)}	{23,22,21,20,(3),31}	{(∞),30}	{13,12,11,10}	{}	{03,02,01,00}	{}
33,(2)	{32,(1),(3)}	{23,22,21,20,31,(0),(∞)}	{30}	{13,12,11,10}	{}	{03,02,01,00}	{}
33,(3)	{32,(2),(∞)}	{23,22,21,20,(1),31}	{(0),30}	{13,12,11,10}	{}	{03,02,01,00}	{}
(0),(1)	{33,32,31,30}	{(2)}	{23,22,21,(2),(0)}	{(3)}	{13,12,11,10}	{(∞)}	{03,02,01,00}
(1),(2)	{33,32,31,30}	{(0),(3)}	{23,22,21,20}	{(∞)}	{13,12,11,10}	{}	{03,02,01,00}
(2),(3)	{33,32,31,30}	{(1),(∞)}	{23,22,21,20}	{(0)}	{13,12,11,10,}	{}	{03,02,01,00}
(3),(∞)	{33}	{32,(2),23}	{31,13,22}	{30,03,12,21,(1)}	{20,02,11}	{10,(0),01}	{00}

4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 birim olan elipsleri için Çizelge 4.14'e bakılabilir.

**Çizelge 4.14.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 br olan elipsleri

Odak uzaklığı 2	Odalara olan uzaklıkları toplamı						
	2	3	4	5	6	7	8
00,02	{13,12,11,10}	{02}	{23,22,21,20}	{03}	{33,32,31,30,(∞)}	{}	{{(0),(1),(2),(3)}
00,20	{13,12,11,10}	{01,21}	{33,32,31,30,22,02}	{23,03}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{{(∞)}
00,21	{13,12,11,10}	{01,22,20}	{33,32,31,30,02,23}	{03}	{{(0),(1),(2),(3)}	{{(∞)}	{}
00,22	{13,12,11,10}	{01,21,23}	{33,32,31,30,20,02}	{03}	{{(∞),(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
00,23	{13,12,11,10}	{01,22}	{33,32,31,30,21,02}	{{(∞),20,03}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
01,23	{13,12,11,10}	{02,00,22}	{33,32,31,30,(∞),21,03}	{20}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
01,22	{13,12,11,10}	{02,00,21,23}	{33,32,31,30,03,20}	{{(∞)}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
01,21	{13,12,11,10}	{22,20,02,00}	{33,32,31,30,23,03}		{{(∞),(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
01,20	{13,12,11,10}	{02,00,21}	{33,32,31,30,22,03}	{23}	{{(0),(1),(2),(3)}	{{(∞)}	{}
01,03	{13,12,11,10,02}	{}	{00,∞,23,22,21,20}	{}	{33,32,31,30}	{}	{{(0),(1),(2),(3)}
02,23	{13,12,11,10}	{03,01,22,(∞)}	{33,32,31,30,21,00}	{20}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
02,22	{13,12,11,10}	{03,01,21}	{33,32,31,30,20,(∞)}	{}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
02,21	{13,12,11,10}	{03,01,22,20}	{33,32,31,30,00,23}	{{(∞)}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
02,20	{13,12,11,10}	{03,01,21}	{33,32,31,30,22,00}	{23}	{{(∞),(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
02,(∞)	{03,13}	{12,23}	{01,11,33,22}	{10,3,21,32}	{00,20,(2),31}	{30,(1)}	{{(0)}
03,23	{13,12,11,10,(∞)}	{02,22}	{33,32,31,30,01,21}	{20,00}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
03,22	{13,12,11,10}	{02,(∞),21,21}	{33,32,31,30,20,01}	{00}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
03,21	{13,12,11,10}	{02,22,20}	{33,32,31,30,23,01,(∞)}	{00}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
03,20	{13,12,11,10}	{02,21}	{33,32,31,30,22,01}	{{(∞),23,00}	{{(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
10,12	{03,02,01,00,23,22,21,20,11}	{}	{33,32,31,30,13}	{}	{{(∞),(0),(1),(2),(3)}	{}	{}
10,33	{23,22,21,20}	{11,32}	{03,02,01,00,(0),(1),(2),(3),31,12}	{{(∞),30,13}	{}	{}	{}

**Çizelge 4.14.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 br olan elipsleri (devam)

10,32	{23,22,21,20}	{11,33,31}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3), 12,30}	{13}	{(∞)}	{}	{}
10,31	{23,22,21,20}	{11,32,30}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3), 33,12}	{13}	{}	{(∞)}	{}
10,30	{23,22,21,20}	{11,31}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3), 32,12}	{33,13}	{}	{}	{(∞)}
11,33	{23,22,21,20}	{12,10,32}	{03,02,01,00, (∞),(0),(1),(2), (3),13,31}	{30}	{}	{}	{}
11,32	{23,22,21,20}	{10,12,33, 31}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3), 13,30}	{(∞)}	{}	{}	{}
11,31	{23,22,21,20}	{10,12,32, 30}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3), 33,13}	{}	{(∞)}	{}	{}
11, 30	{23,22,21,20}	{10,12,31}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3), 32,13}	{33}	{}	{(∞)}	{}
11,12	{03,02,01,00, 23,22,21,20}	{10,13}	{33,32,31,30}	{(∞)}	{(0),(1),(2), ,(3)}	{}	{}
12,30	{23,22,21,20}	{13,11,31}	{03,02,01,00, 10,32,(0),(1), (2),(3)}	{33}	{(∞)}	{}	{}
12,31	{23,22,21,20}	{13,11,32, 30}	{03,02,01,00, 33,10,(0),(1),( 2),(3)}	{(∞)}	{}	{}	{}
12,32	{23,22,21,20}	{13,11,33, 31}	{03,02,01,00, 10,30,∞,(0),(1), (2),(3)}	{}	{}	{}	{}
12,33	{23,22,21,20}	{13,11,32, ∞}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3), 10,31}	{30}	{}	{}	{}
12,(∞)	{03,13,23}	{02,22,33}	{01,11,21,(3), 32}	{00,20,31, (2)}	{30,10,(1)}	{(0)}	{}
13,33	{23,22,21,20, (∞)}	{12,32}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3), 11,31}	{30,10}	{}	{}	{}
13,32	{23,22,21,20}	{12,33,31, (∞)}	{03,02,01,00, (0),(1),(2),(3), 30,11}	{10}	{}	{}	{}
13,31	{23,22,21,20}	{12,32,30}	{03,02,01,00, (∞),(0),(1),(2), (3),11,33}	{10}	{}	{}	{}
13,30	{23,22,21,20}	{12,31}	{03,02,01,00,11, 32,(0),(1),(2), (3)}	{(∞),33,10}	{}	{}	{}
20,22	{13,12,11,10, 33,32,31,30, 21}	{}	{23,03,02,01, 00,(0),(1),(2), (3)}	{}	{(∞)}	{}	{}

**Çizelge 4.14.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 2 br olan elipsleri (devam)

20,(0)	{33,32,31,30}	{21,(1)}	{10,11,12,13,22,(2)}	{(3),23}	{03,02,01,00},	{}	{(∞)}
20,1	{33,32,31,30}	{21,(0),(2)}	{10,11,12,13,22,(3)}	{23}	{03,02,01,00},	{(∞)}	{}
20,2	{33,32,31,30}	{21,(1),(3)}	{10,11,12,13,22,(0)}	{23}	{03,02,01,00,(∞)}	{}	{}
20,3	{33,32,31,30}	{21,(2)}	{10,11,12,13,22,(1)}	{(∞),(0),23}	{03,02,01,00}	{}	{}
21,23	{13,12,11,10,33,32,31,30,22}	{}	{03,02,01,00,(0),(1),(2),(3),20,(∞)}	{}	{}	{}	{}
21,(3)	{33,32,31,30}	{22,20,(2)}	{13,12,11,10,23,(1),(∞)}	{(0)}	{03,02,01,00}	{}	{}
21,(2)	{33,32,31,30}	{22,20,(1),(3)}	{10,11,12,13,23,(0)}	{(∞)}	{00,01,02,03}	{}	{}
21,(1)	{33,32,31,30}	{22,20,(0),(2)}	{10,11,12,13,23,(3)}	{}	{00,01,02,03,(∞)}	{}	{}
21,(0)	{33,32,31,30}	{22,20,(1)}	{10,11,12,13,23,(2)}	{(3)}	{00,01,02,03}	{(∞)}	{}
22,(∞)	{13,23,33}	{12,32,03,(3)}	{11,21,31,02,(2)}	{10,30,01,(1)}	{00,20,(0)}	{}	{}
22,(0)	{33,32,31,30}	{23,21,(1)}	{13,12,11,10,20,(2)}	{(3)}	{00,01,02,03,(∞)}	{}	{}
22,(1)	{33,32,31,30}	{21,23,(0),(2)}	{13,12,11,10,20,(3)}	{(∞)}	{00,01,02,03},	{}	{}
22,(2)	{33,32,31,30}	{21,23,(1),(3)}	{13,12,11,10,20,(0),(∞)}	{}	{00,01,02,03},	{}	{}
22,(3)	{33,32,31,30}	{21,23,(2),(∞)}	{13,12,11,10,20,(1)}	{(0)}	{00,01,02,03},	{}	{}
23,(0)	{33,32,31,30}	{22,(1)}	{13,12,11,10,21,(2)}	{(3),20,(∞)}	{00,01,02,03},	{}	{}
23,(1)	{33,32,31,30}	{22,(0),(2)}	{13,12,11,10,21,(3),(∞)}	{20}	{00,01,02,03},	{}	{}
23,(2)	{33,32,31,30}	{22,(∞),(1),(3)}	{13,12,11,10,21,(0)}	{20}	{00,01,02,03},	{}	{}
23,(3)	{33,32,31,30,(∞)}	{22,(2)}	{13,12,11,10,21,(1)}	{20,(0)}	{00,01,02,03},	{}	{}
30,32	{23,22,21,20,31,(0),(1),(2),(3)}	{}	{13,12,11,10,33}	{}	{00,01,02,03,(∞)}	{}	{}
31,33	{23,22,21,20,32,(0),(1),(2),(3)}	{}	{30,13,12,11,10,(∞)}	{}	{00,01,02,03}	{}	{}
32,(∞)	{23,33,(3)}	{22,(2),13}	{21,31,(1),03,12}	{20,(0),02,11}	{10,30,01}	{00}	{}
2,(∞)	{33,(3)}	{32,23,22}	{31,(1),13}	{30,03,21,12}	{20,(0),02,11}	{10,01}	{00}
(0),(2)	{30,31,32,33,(1)}	{}	{20,21,22,23,(3)}	{}	{(∞),10,11,12,13}	{}	{00,01,02,03}
(1),(3)	{30,31,32,33,(2)}	{}	{(0),(∞),20,21,22,23}	{}	{10,11,12,13},	{}	{00,01,02,03}

4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 birim olan elipsleri için Çizelge 4.15'e bakılabilir.

**Çizelge 4.15.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 br olan elipsleri

Odak uzaklığı 3	Odaklara olan uzaklıkları toplamı						
	2	3	4	5	6	7	8
00,30	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{01,31}	{{(0),(1),(2),(3),02,32}	{33,03}	{}	{{∞}}
00,31	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{01,32,30}	{{(0),(1),(2),(3),33,02}	{03}	{{∞}}	{}
00,32	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{01,33,31}	{{(0),(1),(2),(3),02,30}	{{∞},03}	{}	{}
00,33	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{01,32}	{{(0),(1),(2),(3),∞,31,02}	{03,30}	{}	{}
00,03	{13,12,11,10}	{01,02}	{23,22,21,20}	{{∞}}	{{33,32,31,20}	{}	{{(0),(1),(2),(3)}
01,30	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{02,00,31}	{{(0),(1),(2),(3),03,32}	{33}	{{∞}}	{}
01,31	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{02,00,32,20}	{{(0),(1),(2),(3),03,33}	{{∞}}	{}	{}
01,32	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{02,00,33,31}	{{(0),(1),(2),(3),03,30,∞}	{}	{}	{}
01,33	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{02,00,32,∞}	{{(0),(1),(2),(3),03,31}	{30}	{}	{}
01,∞	{13}	{12,23,03,02}	{11,33,22}	{00,10,(3),32,21}	{{(2),31,20}	{30,(1)}	{{(0)}
02,30	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{03,01,31}	{{(0),(1),(2),(3),00,32,	{{∞},33}	{}	{}
02,31	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{03,01,30,32}	{{(0),(1),(2),(3),00,33,∞}	{}	{}	{}
02,32	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{03,01,33,31,∞}	{{(0),(1),(2),(3),00,30}	{}	{}	{}
02,33	{}	{13,12,11,10,23,22,21,20,∞}	{03,01,32}	{{(0),(1),(2),(3),00,31}	{30}	{}	{}
03,33	{{∞}}	{13,12,11,10,23,22,21,20}	{02,32}	{{(0),(1),(2),(3),01,31}	{00,30}	{}	{}

**Çizelge 4.15.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 br olan elipsleri (devam)

03,32	{}	{13,12,11,10, ,23,22,21,20, (∞)}	{02,33,31}	{{(0),(1),(2),(3), ,01,30}}	{00}	{}	{}
03,31	{}	{13,12,11,10, ,23,22,21, 20}	{02,(∞),30,32}	{{(0),(1),(2),(3), ,01,33}}	{00}	{}	{}
03,30	{}	{13,12,11,10, ,23,22,21, 20}	{02,31}	{{(0),(1),(2),(3), ,01,32,(∞)}	{33,00}	{}	{}
10,(0)	{}	{23,22,21,20, ,33,32,31, 30}	{11,(1)}	{03,02,01,00, 12,(2)}	{13,(3)}	{}	{(∞)}
10,(1)	{}	{23,22,21,20, ,33,32,31,30}	{11,(0),(2)}	{03,02,01,00, (3),12}	{13}	{(∞)}	{}
10,(2)	{}	{23,22,21,20, ,33,32,31, 30}	{11,(1),(3)}	{03,02,01,00, 12,(0)}	{(∞),13}	{}	{}
10,(3)	{}	{23,22,21,20, ,33,32,31, 30}	{11,(2)}	{03,02,01,00, (∞),(1),12}	{13,(0)}	{}	{}
10,13	{03,02,01,00, 23,22,21,20}	{11,12}	{33,32,31,30}	{(∞)}	{{(0),(1),(2), ,(3)}	{}	{}
11,(0)	{}	{33,32,31,30, ,23,22,21, 20}	{12,10,(1)}	{00,01,02,03, 13,(2)}	{(3)}	{(∞)}	{}
11,(1)	{}	{33,32,31,30, ,23,22,21, 20}	{12,10,(0),(2)}	{00,01,02,03, 13,(3)}	{(∞)}	{}	{}
11,(2)	{}	{33,32,31,30, ,23,22,21, 20}	{12,10,(1),(3)}	{00,01,02,03, 13,(0),(∞)}	{}	{}	{}
11,(3)	{}	{33,32,31,30, ,23,22,21, 20}	{12,10,(2), (∞)}	{00,01,02,03, 13,(1),(0)}	{}	{}	{}
11,(∞)	{03,23}	{02,12,22, 33,13}	{01,21,(3),32}	{00,01,02,03, 31,(2)}	{(1)}	{(0)}	{}
12,(0)	{}	{33,32,31,30, ,23,22,21, 20}	{13,11,(1)}	{00,01,02,03, 10,(2)}	{(∞),(3)}	{}	{}
12,(1)	{}	{33,32,31,30, 23,22,21,20}	{13,11,(0),(2)}	{00,01,02,03,1 0,(∞),(3)}	{}	{}	{}
12,(2)	{}	{33,32,31,30, ,23,22,21, 20}	{13,11,(∞),(1) (3)}	{00,01,02,03, 10,(0)}	{}	{}	{}
12,(3)	{}	{33,32,31,30, ,23,22,21,20, (∞)}	{13,11,(2)}	{00,01,02,03, 10,(1)}	{(0)}	{}	{}
13,(0)	{}	{33,32,31,30, ,23,22,21, 20}	{12,(1)}	{00,01,02,03, 11,(∞),(2)}	{10,(3)}	{}	{}



**Çizelge 4.15.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 3 br olan elipsleri (devam)

13,(1)	{}	{33,32,31,30,23,22,21,20}	{12,(∞),(0),(2)}	{00,01,02,03,11,(3)}	{10}	{}	{}
13,(2)	{}	{33,32,31,30,23,22,21,20,∞}	{12,(1),(3)}	{00,01,02,03,11,(0)}	{10}	{}	{}
13,(3)	{(∞)}	{33,32,31,30,23,22,21,20}	{12,(2)}	{00,01,02,03,11,(1)}	{10,(0)}	{}	{}
20,23	{13,12,11,10,33,32,31,30}	{21,22}	{03,02,01,00,(0),(1),(2),(3)}	{(∞)}	{}	{}	{}
21,(∞)	{13,33}	{12,22,32,03,23,(3)}	{11,31,02,(2)}	{10,20,30,01,(1)}	{00,(0)}	{}	{}
30,33	{23,22,21,20,(0),(1),(2),(3)}	{31,32}	{13,12,11,10}	{(∞)}	{03,02,01,00}	{}	{}
31,(∞)	{23,(3)}	{22,32,(2),13,33}	{21,(1),03,12}	{20,30,(0),02,11}	{01,10}	{00}	{}
(0),(3)	{30,31,32,33}	{(1),(2)}	{20,21,22,23}	{(∞)}	{10,11,12,13}	{}	{00,01,02,03}
(1),(∞)	{33}	{32,23,(2),(3)}	{31,13,22}	{30,03,12,21,(0)}	{20,02,11}	{10,01}	{00}

4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 4 birim olan elipsleri için Çizelge 4.16'ya bakılabilir.

**Çizelge 4.16.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 4 br olan elipsleri

Odak uzaklığı 4	Odalara olan uzaklıkları toplamı						
	2	3	4	5	6	7	8
00,(0)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{(1),01}	{(2),02}	{(3),03}	{(∞)}
00,(1)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{01,(0),(2)}	{02,(3)}	{03,(∞)}	{}
00,(2)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{01,(1),(3)}	{02,(0),(∞)}	{03}	{}
00,(3)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{01,(2),(∞)}	{02,(1)}	{03,(0)}	{}
00,(∞)	{13}	{12,23}	{01,11,33,03,22,02}	{10,(3),21,32}	{20,(2),31}	{30,(1)}	{(0)}
01,(0)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{00,02,(1)}	{03,(2)}	{(∞),(3)}	{}

**Çizelge 4.16.** 4. mertebeden projektif düzlemin odak uzaklığı 4 br olan elipsleri (devam)

01,(1)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{(0),(2),00,02}	{03,(3), (∞)}	{}	{}
01,(2)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{02,00,(1),(3), (∞)}	{03,(0)}	{}	{}
01,(3)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20,(∞)}	{02,00,(2)}	{03,(1)}	{(0)}	{}
02,(0)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{03,01,(1)}	{00,(2), (∞)}	{(3)}	{}
02,(1)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{03,01,(0),(2), (∞)}	{00,(3)}	{}	{}
02,(2)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20,(∞)}	{03,01,(1),(3)}	{00,(0)}	{}	{}
02,(3)	{}	{(∞)}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{01,03,(2)}	{00,(1)}	{(0)}	{}
03,(0)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{02,(∞),(1)}	{01,(2)}	{00,(3)}	{}
03,(1)	{}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20,(∞)}	{02,(0),(2)}	{01,(3)}	{00}	{}
03,(2)	{}	{(∞)}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{02,(1),(3)}	{01,(0)}	{00}	{}
03,(3)	{(∞)}	{}	{13,12,11,10,33,32,31,30,23,22,21,20}	{02,(2)}	{01,(1)}	{00,(0)}	{}
10,(∞)	{03,23}	{02,22,33}	{01,11,21,13,3,12,32}	{00,20,31,(2)}	{30,(1)}	{(0)}	{}
20,(∞)	{13,33}	{12,32,03, (3)}	{11,21,31,23, 02,22,(2)}	{10,30,01,(1)}	{00,(0)}	{}	{}
30,(∞)	{23,(3)}	{22,(2),13}	{21,31,(1),03, 33,32,12}	{20,(0),11,02}	{10,01}	{00}	{}
0,(∞)	{33}	{32,23}	{31,(1),13,(3), (2),22}	{30,03,21,12}	{20,02,11}	{10,01}	{00}

Bu bölümdeki tüm sonuçlar ve bundan daha fazlası için Doğan ve Akpınar'ın (2021b) çalışması incelenebilir.

## 5. SONUÇ

$\mathbb{O}$  bir Cayley bölümlü cebiri olmak üzere  $m=2$  durumu için girdileri  $\mathbb{O}+\mathbb{O}\varepsilon$  cebirinden (lokal halkasından) alınarak oluşturulan octonion düzlemlerde 6-şekillerle ilgili elde edilen sonuçların, genellemeye gidilerek,  $m>2$  durumu için girdileri  $\mathcal{A}=\mathbb{O}+\mathbb{O}\varepsilon+\mathbb{O}\varepsilon^2+\dots+\mathbb{O}\varepsilon^{m-1}$  cebirinden alınarak elde edilen octonion düzlem sınıfları üzerinde de karşılıkları incelenmiştir. Üstelik  $\mathbb{O}$  yine bir Cayley bölümlü cebiri olmak üzere yeni bir  $A=\mathbb{O}+\mathbb{O}\eta_1+\mathbb{O}\eta_2+\mathbb{O}\eta_3$  cebir yapısı tanımlanmış ve girdileri bu cebirden alınarak oluşturulan octonion düzlem sınıfları üzerinde çalışılmıştır. Her iki octonion düzlem sınıfında matrislerin kısa gösterimleri kullanılarak bu iki düzlem sınıfına birer Moufang Klingenberg (MK) düzlem sınıfı olarak bakılabileceği elde edilmiştir ve bu MK-düzlem sınıfları sırasıyla  $M(\mathcal{A})$  ve  $M(A)$  ile gösterilmiştir. Hem  $M(\mathcal{A})$  hem de  $M(A)$  üzerinde çifte oran tanımlanamadığından dolayı 6 şekillerin oranı ile ilgili sonuçlar hariç hedeflenen tüm sonuçlara ulaşılmıştır. Projektif Klingenberg düzlemler üzerinde metrik olmayan bir uzaklık tanımı yardımıyla sonlu projektif düzlemler ve dolayısıyla sonlu afin düzlemler üzerinde Öklid uzayından iyi bilinen çember, elips ve hiperbol kavramlarının karşılıkları incelenmiştir. Örnek olarak, 3 ve 4. mertebeden projektif düzlemin tüm çemberleri bulunmuştur ve 3. mertebeden projektif düzlemin tüm elips ve hiperbolleri, 4.mertebeden proektif düzlemin ise elipsleri belirlenmiştir.

## KAYNAKLAR

- Akpınar, A. 2005. On some projective planes of finite order, *G.U. Journal of Science*, 18(2), 319–329.
- Akpınar, A. 2007. Geometrik Yapılarda Çifte Oran. *Doktora Tezi*, U.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.
- Akpınar, A. (2010). Bazı Sonlu Klingenberg Düzlemleri İçin Üzerinde Olma Matrisleri. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 12(1), 91-99.
- Akpınar, A. 2018. 54 Boyutlu (Exceptional) Kuadratik Jordan Cebiri, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 18, 131-155.
- Akpınar, A., Celik, B., Ciftci, S. 2008. Cross-Ratios and 6-Figures in some Moufang-Klingenberg Planes, *The Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 15(1), 49-64.
- Akpınar, A., Dogan, İ., Demirci, E., Sena Gürel, Z., Boztemur, B. (2018). Some Remarks on a Class of Finite Projective Klingenberg Planes. *Journal of Advances in Mathematics*, 14(2), 7893-7902.
- Akpınar, A., Erdogan, F.O. 2019. A Class of Projective Coordinate Spaces over Modules, *Asian-European Journal of Mathematics*, 13(5), 1-27.
- Akpınar, A., Erdoğan, F.Ö., Doğan, İ., 2019. Bir Kuadratik Jordan Cebiri ile Tanımlanan Octonion Düzlemlerde 4-Geçişkenliğin Kurulması ve 6-Şekiller ile Çifte-Oranın Bazı Özelliklerinin İncelenmesi, (Proje No: 116F382) TÜBİTAK, Ankara.
- Beachy, J.A. 1999. *Introductory Lectures on Rings and Modules. London Mathematical Society Student Texts 47*, Cambridge Univ. Press, UK, 238 pp.
- Bix, R. 1980. Octonion Planes Over Local Rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 261(2), 417-438.
- Blunck, A. 1991. Projectivities in Moufang-Klingenberg Planes, *Geom. Dedicat.*, 40, 341-359.
- Candan, İ.Ö. 2016. Lokal Halkalar Üzerine Octonion Düzlemler, *Yüksek Lisans Tezi*, U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.
- Cater, F.S. 1978. On Desarguesian Projective Planes, *Geom. Dedicat.*, 7, 433-441.

- Çelik, B. 1995. Non-Assosyatif Cebirler Üzerine Kurulan Projektif Yapılar. *Doktora Tezi*, U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa.
- Celik, B., Akpınar, A., Ciftci, S. 2007. 4-Transitivity and 6-figures in some Moufang-Klingenberg planes. *Monatshefte Fur Mathematik*, 152(4), 283-294.
- Celik, N., Ciftci, S., Akpınar, A. 2010. Some Properties of 6-Figures and Cross-Ratios in some Moufang-Klingenberg Planes, *Journal of Algebra and Its Applications*, 9(2), 173-184.
- Çiftçi, S. 1989. On 6-figures in Moufang Projective Planes, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 38(1-2), 21-28.
- Çiftçi, S. 2015. *Lineer Cebir*. Dora Basın Yayın Dağıtım, Bursa, 430.
- Derksen H., Makam V., 2018. On Non-Comutative Rank and Tensor Rank, *Linear and Multilinear Algebra*, 66(6), 1069-1084.
- Doğan, İ., Akpınar, A. 2021a. On a New Class of Moufang-Kligenberg Planes, *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(7), 1-20.
- Dogan, I., Akpınar, A. 2021b. On Distance in Some Finite Planes and Graphs Arising from Those Planes, *Journal of Mathematics*, 17 pages.
- Elman, R., Karpenko, N., Merkurjev, A. 2008. *The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms*. Amer. Math. Soc., Colloguium Publications, 56, 443.
- Erdoğan, F.O. 2020. 4-Transitivity and cross-ratio in Moufang-Klingenberg planes over rings of plural numbers, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 51(4), 1417–1432.
- Faulkner, J.R. 2014. *The Role of Nonassociative Algebra in Projective Geometry*. *Graduate Studies in Mathematics*, Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 159pp.
- Fraleigh, J.B. 1982. *A First Course in Abstract Algebra*. Third Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 478 pp.
- Hungerford, T.W. 1974. *Algebra*. Holt Rinehart and Winston, Inc., New York, 502 pp.
- Jacobson, N. 1968. *Structure and Representations of Jordan Algebras*. Colloq. Publ. 39, Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 453 pp.

- Jacobson, N. 1985. *Basic Algebra I*. Second Edition, New York: W.H. Freeman and Company, 499 pp.
- Kaya, R. 2005. *Projektif Geometri*. Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No: 111, Eskişehir, 392 s.
- Laywine, C.F., Mullen, G. L., 1998. *Discrete Mathematics using Latin Squares*, Wiley, New York, 328 pp.
- Malik, D.S., Mordeson, J.M., Sen M.K. 1997. *Fundamentals of Abstract Algebra*. The McGraw-Hill, New York, 636 pp.
- McDonald, B.R. 1976. *Geometric Algebra over Local Rings*. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 421 pp.
- Pickert, G. 1955. *Projektive Ebenen*. Springer, Berlin, 343 pp.
- Schafer, R.D. 1959. On Cubic Forms Permitting Composition. *Proc. of The Amer. Math. Soc.*, 10(6), 917-925.
- Schafer, R.D. 1996. *An Introduction to Nonassociative Algebras*. New York: Dover Publications Inc., 176 pp.
- Stevenson, F. W., 1972. *Projective Planes*, W.H. Freeman Co., San Francisco, 416 pp.
- Vanpoucke, J. 2012. Mutually Orthogonal Latin Squares and Their Generalizations, *Master Thesis*, Ghent University, Faculty of Sciences, Department of Mathematics, Belgium.
- Wan, Z. X. 1996. *Geometry of Matrices*, World Scientific, Singapore, 388 pp.

## **EKLER**

- EK A**       $4 \times 4$  Boyutlu Matris Cebirleri
- EK B**      5, 7, 8 ve 9. Mertebeden Afin Düzlemler.









$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & a_0 & 0 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = I_4, \eta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\
& \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = I_4, \eta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\
& \begin{bmatrix} a_0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = I_4, \eta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\
& \begin{bmatrix} a_0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = I_4, \eta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\
& (**) \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = I_4, \eta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \eta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

(\*) Tezde çalışılan 4x4 matris cebiridir.

(\*\*) Blunck (1991) tarafından verilen  $R(3)$  lokal halkasına izomorftur.

## EK-B 5, 7, 8 ve 9. Mertebeden Afin Düzlemler

**Çizelge 1.** 5. mertebeden afin düzlem

$L_1$					$L_2$					$L_3$				
00	11	22	33	44	00	12	24	31	43	00	13	21	34	42
01	12	23	34	40	01	13	20	32	44	01	14	22	30	43
02	13	24	30	41	02	14	21	33	40	02	10	23	31	44
03	14	20	31	42	03	10	22	34	41	03	11	24	32	40
04	10	21	32	43	04	11	23	30	42	04	12	20	33	41
$L_4$					$L_0$					$L_\infty$				
00	14	23	32	41	00	10	20	30	40	00	01	02	03	04
01	10	24	33	42	01	11	21	31	41	10	11	12	13	14
02	11	20	34	43	02	12	22	32	42	20	21	22	23	24
03	12	21	30	44	03	13	23	33	43	30	31	32	33	34
04	13	22	31	40	04	14	24	34	44	40	41	42	43	44

**Çizelge 2.** 7. mertebeden afin düzlem

$L_1$							$L_2$						
00	11	22	33	44	55	66	00	12	24	36	41	53	65
01	12	23	34	45	56	60	01	13	25	30	42	54	66
02	13	24	35	46	50	61	02	14	26	31	43	55	60
03	14	25	36	40	51	62	03	15	20	32	44	56	61
04	15	26	30	41	52	63	04	16	21	33	45	50	62
05	16	20	31	42	53	64	05	10	22	34	46	51	63
06	10	21	32	43	54	65	06	11	23	35	40	52	64
$L_3$							$L_4$						
00	13	26	32	45	51	64	00	14	21	35	42	56	63
01	14	20	33	46	52	65	01	15	22	36	43	50	64
02	15	21	34	40	53	66	02	16	23	30	44	51	65
03	16	22	35	41	54	60	03	10	24	31	45	52	66
04	10	23	36	42	55	61	04	11	25	32	46	53	60
05	11	24	30	43	56	62	05	12	26	33	40	54	61
06	12	25	31	44	50	63	06	13	20	34	41	55	62
$L_5$							$L_6$						
00	15	23	31	46	54	62	00	16	25	34	43	52	61
01	16	24	32	40	55	63	01	10	26	35	44	53	62
02	10	25	33	41	56	64	02	11	20	36	45	54	63
03	11	26	34	42	50	65	03	12	21	30	46	55	64
04	12	20	35	43	51	66	04	13	22	31	40	56	65
05	13	21	36	44	52	60	05	14	23	32	41	50	66
06	14	22	30	45	53	61	06	15	24	33	42	51	60

**Çizelge 2.** 7. mertebeden afin düzlem (devam)

$L_0$							$L_{\infty}$						
00	10	20	30	40	50	60	00	01	02	03	04	05	06
01	11	21	31	41	51	61	10	11	12	13	14	15	16
02	12	22	32	42	52	62	20	21	22	23	24	25	26
03	13	23	33	43	53	63	30	31	32	33	34	35	36
04	14	24	34	44	54	64	40	41	42	43	44	45	46
05	15	25	35	45	55	65	50	51	52	53	54	55	56
06	16	26	36	46	56	66	60	61	62	63	64	65	66

**Çizelge 3.** 8. mertebeden afin düzlem

$L_1$								$L_2$							
00	11	22	33	44	55	66	77	00	12	24	36	43	51	67	75
01	10	23	32	45	54	67	76	01	13	25	37	42	50	66	74
02	13	20	31	46	57	64	75	02	10	26	34	41	53	65	77
03	12	21	30	47	56	65	74	03	11	27	35	40	52	64	76
04	15	26	37	40	51	62	73	04	16	20	32	47	55	63	71
05	14	27	36	41	50	63	72	05	17	21	33	46	54	62	70
06	17	24	35	42	53	60	71	06	14	22	30	45	57	61	73
07	16	25	34	43	52	61	70	07	15	23	31	44	56	60	72
$L_3$								$L_4$							
00	13	26	35	47	54	61	72	00	14	23	37	46	52	65	71
01	12	27	34	46	55	60	73	01	15	22	36	47	53	64	70
02	11	24	37	45	56	63	70	02	16	21	35	44	50	67	73
03	10	25	36	44	57	62	71	03	17	20	34	45	51	66	72
04	17	22	31	43	50	65	76	04	10	27	33	42	56	61	75
05	16	23	30	42	51	64	77	05	11	26	32	43	57	60	74
06	15	20	33	41	52	67	74	06	12	25	31	40	54	63	77
07	14	21	32	40	53	66	75	07	13	24	30	41	55	62	76
$L_5$								$L_6$							
00	15	21	34	42	57	63	76	00	16	27	31	45	53	62	74
01	14	20	35	43	56	62	77	01	17	26	30	44	52	63	75
02	17	23	36	40	55	61	74	02	14	25	33	47	51	60	76
03	16	22	37	41	54	60	75	03	15	24	32	46	50	61	77
04	11	25	30	46	53	67	72	04	12	23	35	41	57	66	70
05	10	24	31	47	52	66	73	05	13	22	34	40	56	67	71
06	13	27	32	44	51	65	70	06	10	21	37	43	55	64	72
07	12	26	33	45	50	64	71	07	11	20	36	42	54	65	73

**Çizelge 3.** 8. mertebeden afin düzlem (devam)

$L_7$								$L_0$							
00	17	25	32	41	56	64	73	00	10	20	30	40	50	60	70
01	16	24	33	40	57	65	72	01	11	21	31	41	51	61	71
02	15	27	30	43	54	66	71	02	12	22	32	42	52	62	72
03	14	26	31	42	55	67	70	03	13	23	33	43	53	63	73
04	13	21	36	45	52	60	77	04	14	24	34	44	54	64	74
05	12	20	37	44	53	61	76	05	15	25	35	45	55	65	75
06	11	23	34	47	50	62	75	06	16	26	36	46	56	66	76
07	10	22	35	46	51	63	74	07	17	27	37	47	57	67	77
$L_\infty$															
00	01	02	03	04	05	06	07								
10	11	12	13	14	15	16	17								
20	21	22	23	24	25	26	27								
30	31	32	33	34	35	36	37								
40	41	42	43	44	45	46	47								
50	51	52	53	54	55	56	57								
60	61	62	63	64	65	66	67								
70	71	72	73	74	75	76	77								

**Çizelge 4.** 9. mertebeden afin düzlem

$L_1$									$L_2$								
00	11	22	33	44	55	66	77	88	00	12	21	36	48	57	63	75	84
01	12	20	34	45	53	67	78	86	01	10	22	37	46	58	64	73	85
02	10	21	35	43	54	68	76	87	02	11	20	38	47	56	65	74	83
03	14	25	36	47	58	60	71	82	03	15	24	30	42	51	66	78	87
04	15	23	37	48	56	61	72	80	04	13	25	31	40	52	67	76	88
05	13	24	38	46	57	62	70	81	05	14	23	32	41	50	68	77	86
06	17	28	30	41	52	63	74	85	06	18	27	33	45	54	60	72	81
07	18	26	31	42	50	64	75	83	07	16	28	34	43	55	61	70	82
08	16	27	32	40	51	65	73	84	08	17	26	35	44	53	62	71	80
$L_3$									$L_4$								
00	13	26	37	41	54	65	78	82	00	14	28	31	45	56	62	73	87
01	14	27	38	42	55	63	76	80	01	15	26	32	43	57	60	74	88
02	15	28	36	40	53	64	77	81	02	13	27	30	44	58	61	75	86
03	16	20	31	44	57	68	72	85	03	17	22	34	48	50	65	76	81
04	17	21	32	45	58	66	70	83	04	18	20	35	46	51	63	77	82
05	18	22	30	43	56	67	71	84	05	16	21	33	47	52	64	78	80
06	10	23	34	47	51	62	75	88	06	11	25	37	42	53	68	70	84
07	11	24	35	48	52	60	73	86	07	12	23	38	40	54	66	71	85
08	12	25	33	46	50	61	74	87	08	10	24	36	41	55	67	72	83

Çizelge 1. 9. mertebeden afin düzlem (devam)

$L_5$									$L_6$								
00	15	27	34	46	52	68	71	83	00	16	23	35	42	58	67	74	81
01	13	28	35	47	50	66	72	84	01	17	24	33	40	56	68	75	82
02	14	26	33	48	51	67	70	85	02	18	25	34	41	57	66	73	80
03	18	21	37	40	55	62	74	86	03	10	26	38	45	52	61	77	84
04	16	22	38	41	53	60	75	87	04	11	27	36	43	50	62	78	85
05	17	20	36	42	54	61	73	88	05	12	28	37	44	51	60	76	83
06	12	24	31	43	58	65	77	80	06	13	20	32	48	55	64	71	87
07	10	25	32	44	56	63	78	81	07	14	21	30	46	53	65	72	88
08	11	23	30	45	57	64	76	82	08	15	22	31	47	54	63	70	86
$L_7$									$L_8$								
00	17	25	38	43	51	64	72	86	00	18	24	32	47	53	61	76	85
01	18	23	36	44	52	65	70	87	01	16	25	30	48	54	62	77	83
02	16	24	37	45	50	63	71	88	02	17	23	31	46	55	60	78	84
03	11	28	32	46	54	67	75	80	03	12	27	35	41	56	64	70	88
04	12	26	30	47	55	68	73	81	04	10	28	33	42	57	65	71	86
05	10	27	31	48	53	66	74	82	05	11	26	34	40	58	63	72	87
06	14	22	35	40	57	61	78	83	06	15	21	38	44	50	67	73	82
07	15	20	33	41	58	62	76	84	07	13	22	36	45	51	68	74	80
08	13	21	34	42	56	60	77	85	08	14	20	37	43	52	66	75	81
$L_0$									$L_{\infty}$								
00	10	20	30	40	50	60	70	80	00	01	02	03	04	05	06	07	08
01	11	21	31	41	51	61	71	81	10	11	12	13	14	15	16	17	18
02	12	22	32	42	52	62	72	82	20	21	22	23	24	25	26	27	28
03	13	23	33	43	53	63	73	83	30	31	32	33	34	35	36	37	38
04	14	24	34	44	54	64	74	84	40	41	42	43	44	45	46	47	48
05	15	25	35	45	55	65	75	85	50	51	52	53	54	55	56	57	58
06	16	26	36	46	56	66	76	86	60	61	62	63	64	65	66	67	68
07	17	27	37	47	57	67	77	87	70	71	72	73	74	75	76	77	78
08	18	28	38	48	58	68	78	88	80	81	82	83	84	85	86	87	88