SABORDİNASYON İLE TANIMLANAN
ÇOK DEĞERLİ HARMONİK FONKSİYON SINIFLARI

Metin TOKERER

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SABORDİNASYON İLE TANIMLANAN ÇOK DEĞERLİ HARMONİK FONKSİYON SINIFLARI

Metin TOKERER
0000-0001-5984-5356

Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA-2022

TEZ ONAYI

Metin TOKERER tarafından hazırlanan "Sabordinasyon İle Tanımlanan Çok Değerli Harmonik Fonksiyon Sınıfları" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Başkan :	Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ 0000-0002-0243-8263 Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye :	Doç. Dr. Elif YAŞAR 0000-0003-0176-4961 Bursa Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı	İmza
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Şahsene ALTINKAYA 0000-0002-7950-8450 Beykent Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı	İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım
Prof. Dr. Hüseyin Aksel EREN
Enstitü Müdürü
…/.../…

B.U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

…./…./….

Metin TOKERER

TEZ YAYINLANMA
FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezin/raporun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kâğıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma izni Bursa Uludağ Üniversitesi'ne aittir. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet hakları ile tezin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları tarafımıza ait olacaktır. Tezde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alınarak kullandığını ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederiz.

Yükseköğretim Kurulu tarafından yayınlanan "**Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge**" kapsamında, yönerge tarafından belirtilen kısıtlamalar olmadığı takdirde tezin YÖK Ulusal Tez Merkezi / B.U.Ü. Kütüphanesi Açık Erişim Sistemi ve üye olunan diğer veri tabanlarının (Proquest veri tabanı gibi) erişimine açılması uygundur.

Sibel Yalçın Tokgöz
Tarih

İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

Metin Tokerer
Tarih

İmza
Bu bölüme kişinin kendi el yazısı ile okudum anladım yazmalı ve imzalanmalıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SABORDİNASYON İLE TANIMLANAN ÇOK DEĞERLİ HARMONİK FONKSİYON SINIFLARI

Metin TOKERER

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde, tezin amacı ve kapsamı belirtildi. İkinci bölümde tezin devamında kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde ise materyal ve yöntemden bahsedildi.

Dördüncü bölümde bulgulardan bahsedildi. Açık birim diskte çok değerli harmonik fonksiyonların sabordinasyon ile tanımlanan bazı alt sınıfları ve bu sınıflara ait fonksiyonlar için katsayı sınırları, distorsiyon teoremleri verildi. Ayrıca bu sınıflar için ekstremal fonksiyonlar ve konvolusyon özellikleri de elde edildi.

Son bölüm olan beşinci bölümde teze ait bir genel inceleme yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Harmonik fonksiyon, çok değerli fonksiyon, sabordinasyon, analitik fonksiyon
2021, vii+67 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

CLASSES OF HARMONIC MULTIVALENT FUNCTIONS
DEFINED BY SUBORDINATION

Metin TOKERER

Bursa Uludağ University
Graduade School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the aim and scope of the thesis are stated. In the second part, some basic definitions and theorems that will be used in the continuation of the thesis are given. In the third part, the material and method are mentioned.

In the fourth chapter, the findings are mentioned. Some subclasses of multivalued harmonic functions defined by sabordination in the open unit disk and coefficient bounds and distortion theorems for functions belonging to these classes are given. In addition, extremal functions and convolution properties are obtained for these classes.

In the fifth chapter, which is the last chapter, a general examination of the thesis is made.

Key Words: Harmonic functions, multivalent function, subordination, analytic function
2021, vii+67 pages.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Yüksek lisans dönemimde danışmanlığımı yürüten, karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında yol gösterici olan, yaşama dair her konuda ilgi ve desteğini hep hissettiğim,
Sayın danışman hocam; Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ'e,

Tüm yaşantım boyunca her zaman desteklerini gördüğüm, bana duydukları sevgi, anlayış ve güvenle beni bu günüme getiren çok değerli anne ve babama, her zaman yanımda olan kardeşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışma canım oğlum Buğra'ya ithaf edilmiştir.

Metin TOKERER

…../…../…..…

İÇİNDEKİLER

SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi.
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi.
U	$\{z \in \mathbb{C}: \lvert z\rvert < 1 \}$ açık birim diski.
$\mathcal{A}(U)$	U birim diskinde analitik bütün fonksiyonların sınıfı.
$J_f(z_0)$	f fonksiyonunun z_0 noktasındaki Jakobiyeni.
$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$	h ve g iki analitik fonksiyon olmak üzere f harmonik fonksiyonu .
$H(p)$	Çok değerli harmonik fonksiyonların sınıfı.
φ	Schwarz fonksiyonu.
$\mathcal{V}$	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı.
$f \prec g$	f fonksiyonunun U da g fonksiyonuna sabordine olması.
$f_1 * f_2$	$f_1, f_2 \in H(p)$ fonksiyonları için Hadamard Çarpımı.
$\mathcal{S}^*$	$f(0) = f\,'(0) - 1 = 0$ ile normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı.
$\mathcal{K}$	Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı.
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	α mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı.
$\mathcal{K}(\alpha)$	α mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı.
$SH(p)$	Orijine göre yıldızıl olan çok değerli harmonik fonksiyonların sınıfı.
$TH(p)$	$SH(p)$ sınıfına ait negatif katsayılı harmonik fonksiyonların sınıfı.
$SH^{\circ}(1)$	$p = 1$ ve $b_1 = 0$ için $SH(p)$ alt sınıfı.
$clcoTH(p)$	$TH(p)$ sınıfının kapalı konveks örtüsünün uç noktaları
$\{h_{n+p-1}\}, \{g_{n+p-1}\}$	$TH(p)$ sınıfının ekstrem noktaları.
$SH^*(p,\alpha)$	α mertebeli çok değerli harmonik yıldızıl fonksiyon sınıfı.
$SH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$	$SH^*(p)$ sınıfının $\frac{zh\prime(z)-zg\prime(z)}{h(z)+\overline{g(z)}} \prec \frac{p+[p\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]z}{1+\Delta z}$ şartını sağlayan fonksiyonlarının alt sınıfı.
$TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$	$SH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ sınıfına ait negatif katsayılı çok değerli harmonik fonksiyonların alt sınıfı.
D_p^k	$f = h + \bar{g}$ fonksiyonu için modifiye edilmiş Salagean operatörü.
$SH_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$	$SH(p)$ sınıfının $\frac{z\left(D_p^k f(z)\right)_z - \bar{z}\left(D_p^k f(z)\right)_{\bar{z}}}{\left(D_p^k f(z)\right)} \prec \frac{p+[p\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]z}{1+\Delta z}$ şartını sağlayan fonksiyonlarının alt sınıfı.
$\overline{SH}_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$	$SH_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$ sınıfının negatif katsayılı olan fonksiyonlarının alt sınıfı.
${}_lF_m(\alpha_1,\dots\alpha_{l;}\beta_1,\dots\beta_m)(z)$	Hipergeometrik fonksiyonlar.
$(\lambda)_n$	Pochhammer fonksiyonu.
$H_p(\alpha_1,\ldots\alpha_l;\beta_1,\ldots\beta_m)f(z)$	Hipergeometrik fonksiyonlar ile oluşturulan harmonik fonksiyon.
$z\left(H_{p,l,m}[\alpha_1]f(z)\right)'$	Genelleştirilmiş Dziok-Srivastava operatörü.

$L_{\lambda,l,m}^{1,\alpha_1}f(z)$	Genelleştirilmiş Dziok-Srivastava operatörü yardımıyla tanımlanan harmonik fonksiyon.
$\mathcal{J}_{\tau}^{\mu}f(z)$	$L_{\lambda,l,m}^{1,\alpha_1}f(z)$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanan fonksiyon.
$\mathcal{X}_{\delta,\mu}(f(z))$	$\mathcal{J}_{\tau}^{\mu}f(z)$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanan fonksiyon.
$L_p(\Gamma,\Delta;\mu,\tau,\alpha)$	$\frac{\mathcal{J}_{\tau}^{\mu}f(z)}{z^p}-\alpha\left\|\frac{\mathcal{J}_{\tau}^{\mu}f(z)}{z^p}-1\right\|\prec\frac{1+\Gamma z}{1+\Delta z}$ şartını sağlayan harmonik fonksiyonların alt sınıfı.
$H_p(\Gamma,\Delta;\mu,\tau,\alpha,\delta)$	$\mathcal{X}_{\delta,\mu}(f(z))(1-\alpha e^{-i\theta})+\alpha e^{-i\theta}\prec\frac{1+\Gamma z}{1+\Delta z}$ şartını sağlayan harmonik fonksiyonların alt sınıfı.

1. GİRİŞ

Çok değerli fonksiyonlar teorisi 1933'te P.Montel'in "Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes" isimli kitabında tanıtılmıştır. Genişletilmiş kompleks düzlemin herhangi bir bölgesinde kompleks değişkenli analitik bir fonksiyon f olsun. f bu bölgedeki her değeri en fazla p ve en az bir değeri kesin p defa alıyorsa bu fonksiyona p. mertebeden çok değerli fonksiyon denir. $p = 1$ olması durumunda ise f yalınkattır. Reel ve imajiner kısımları eşlenik olmayan yalınkat, kompleks değerli harmonik fonksiyonlara harmonik dönüşüm denir. Harmonik fonksiyonlar, Cauchy-Riemann eşitliklerini sağlamayan ve haliyle analitik olmayan fonksiyonlardır.

Çok değerli fonksiyonların yeni alt sınıflarının tanıtılarak bunların katsayı sınırlarının ve distorsiyon eşitsizliklerinin incelenmesi pek çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Keogh ve Merkes (1969), Fekete ve Szegö (1933), Hummel (1960), Goodman (1948) bu araştırmacılardan bazılarıdır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden hemen sonra, Kuramsal Temeller ve Kaynak Taraması adını alan ikinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tezde kullanılan materyal ve yöntemden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde çok değerli harmonik fonksiyonların sabordinasyon yardımıyla tanımlanan alt sınıflarına ait katsayı sınırları, ekstrem noktaları ve distorsiyon sınırları gibi özelliklerin yanı sıra yıldızıl fonksiyonların ve Salagean tipi çok değerli fonksiyonların özelliklerine de yer verilmiştir.

Beşinci bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu kısımda, diğer kısımlarda kullanılacak temel tanım ve teoremler ile çok değerli harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfının özellikleri verilecektir. Ayrıntılı bilgi için Avcı ve Zlotkiewicz (1991), Clunie ve Sheil-Small (1984), Duren (1983), Jahangiri (1998), Jahangiri (1999), Sheil-Small (1990), Silverman ve Silvia (1999) kaynakları incelenebilir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

2.1.1. Tanım. $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının r komşuluğu denir.

$$\overline{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}$$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk,

$$\partial U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r\}$$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı çember,

$$U^{\circ}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\}$$

kümesine z_0 noktasının r delinmiş komşuluğu denir. Son olarak,

$$U = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$$

kümesine de açık birim disk denir (Palka, 1991).

2.1.2. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme ve $z_0 \in A$ için $U(z_0, r) \subseteq A$ olacak şekilde $\exists\, r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir (Palka, 1991).

2.1.3. Tanım. Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir. Bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesini bulunduran kapalı kümelerin arakesitine A kümesinin kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir (Palka, 1991).

2.1.4. Tanım. $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. A kümesi boş olmayan ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa, A kümesine bağlantılıdır denir.

Bir başka deyişle,

i. $A \subset U \cup V$,

ii. $A \cap U \neq \emptyset$ ve $A \cap V \neq \emptyset$,

iii. $A \cap U \cap V = \emptyset$

olacak şekilde $U, V \subset \mathbb{C}$ gibi boş olmayan iki açık küme bulunamıyorsa A kümesine bağlantılı küme denir (Conway, 1973).

2.1.5. Tanım. Tümleyeni bağlantılı olan kümeye basit bağlantılı küme denir (Conway, 1973).

2.1.6. Tanım. Kompleks düzlemde boş olmayan, açık ve bağlantılı kümeye bölge denir (Conway, 1973).

2.1.7. Tanım.

a) $[a, b] \subset \mathbb{C}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırayla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

b) Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğridir denir.

c) Bir γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa basit eğridir denir. Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir (Başkan, 2012).

2.1.8. Tanım. f bir A bölgesinde kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise, f fonksiyonuna z_0 noktasında diferansiyellenebilir veya türevlenebilir, limit değerine de f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi denir ve bu türev $f'(z_0)$ biçiminde gösterilir (Başkan, 2012).

2.1.9. Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f: D \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in D$ olsun. z_0 noktasında kesişen D de yönlendirilmiş her C_1 ve C_2 düzgün eğri çiftinin z_0 noktasında aralarındaki açı $f(C_1)$ ve $f(C_2)$ görüntü eğrilerinin $f(z_0)$ noktasında aralarındaki açıya büyüklük olarak eşit, yön olarak aynı ise, f fonksiyonuna z_0 noktasında konform denir (Palka, 1991).

2.1.10. Teorem. D, kompleks düzlemde en az iki sınır noktası bulunan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in D$ olsun. Bu durumda D yi U açık birim diski üzerine birebir ve analitik olarak resmeden ve $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliğinde yalnız bir f fonksiyonu vardır (Riemann, 1851).

2.1.11. Tanım. A kompleks düzlemin boş olmayan açık bir alt kümesi ve f fonksiyonu tanım kümesi A yı kapsayan kompleks değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A kümesine ait her noktada diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu A kümesinde analitiktir (holomorftur) denir. Tanım kümesi açık bir küme ve bu kümede analitik olan fonksiyonlara analitik fonksiyon denir (Koebe, 1907).

U birim diskinde analitik olan fonksiyonların sınıfını $A(U)$ biçiminde gösterilsin. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $a, a_n, a_{n+1}, \ldots \in \mathbb{C}$ için,

$$A[a, n] = \{f \in A: f(z) = z + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots\}$$

olsun.

2.1.12. Teorem. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ve $z_0 \in D$ olsun. Eğer, $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu z_0 noktasında konformdur (Zill, 2003).

2.1.13. Tanım. f fonksiyonu herhangi bir $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun.
$\forall z_1, z_2 \in D$ için,

$$z_1 \neq z_2 \text{ iken } f(z_1) \neq f(z_2)$$

oluyorsa, yani f fonksiyonu bu bölgede aynı değeri iki kez almıyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde univalent (yalınkat) fonksiyon denir (Duren, 1983).

2.1.14. Tanım. f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik olsun. $f(0) = f\,'(0) - 1 = 0$ şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna normalize edilmiş fonksiyon denir (Goodman, 1983).

2.1.15. Lemma. f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $z \in U$ için $|f(z)| < 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda, $\forall z \in U$ için $|f(z)| < |z|$ ve $|f\,'(0)| \leq 1$ olur. Ayrıca, herhangi bir $z \neq 0$ noktası için $|f(z)| = |z|$ veya $|f\,'(0)| = 1$ ise $\forall w \in U$ için $f(w) = cw$ olacak şekilde $|c| = 1$ özelliğinde bir c sabiti vardır (Ahlfors, 1966).

2.1.16. Tanım. φ, U birim diskinde analitik bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonu $z \in U$ için $|\varphi(z)| < 1$ ve $\varphi(0) = 0$ şartlarını sağlarsa φ ye Schwarz fonksiyonu denir ve Schwarz fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{V}$ ile gösterilir (Graham ve Kohr, 2003).

2.1.17. Tanım. $f, g \in A(U)$ fonksiyonları verilsin. U birim diskinde $f(z) = g(\varphi(z))$ olacak şekilde bir $\varphi \in \mathcal{V}$ fonksiyonu varsa f fonksiyonu U'da g fonksiyonuna sabordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir. g fonksiyonunun univalent olması durumunda, $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ dur. (Miller ve Mocanu, 1981).

2.1.18. Tanım. D kompleks düzlemde bir bölge ve $w_0 \in D$ olsun. Başlangıç noktası w_0 olan her ışın ile D bölgesinin arakesiti bir doğru parçası veya bir ışın ise D bölgesine w_0 noktasına göre yıldızıl bölge denir (Goodman, 1983).
Diğer bir deyişle, $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $\forall w \in D$ için $(1-t)w_0 + tw \in D$ ise D bölgesine w_0 noktasına göre yıldızıl denir (Alexander, 1915).

2.1.19. Tanım. f fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun. U'yu w_0'a göre yıldızıl olan bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna w_0'a göre yıldızıl denir. $w_0 = 0$ ise f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir (Alexander, 1915).

2.1.20. Teorem. $f \in A(U)$ fonksiyonunun U'da yıldızıl olabilmesi için gerekli ve yeterli şart $\forall z \in U$ için,

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

olmasıdır (Nevanlinna, 1921).

Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir ve bu sınıf,

$$S^* = \left\{f \in A: Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.21. Tanım. $\forall w_1, w_2 \in D \subset \mathbb{C}$ için w_1 ve w_2 yi birleştiren doğru parçası D bölgesinde kalıyorsa, yani $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $tw_1 + (1-t)\, w_2 \in D$ ise D bölgesine konvekstir denir (Alexander, 1915).

2.1.22. Tanım. f fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun. U yu konveks bölgeye resmeden f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Alexander, 1915).

2.1.23. Teorem. $f \in A(U)$ fonksiyonunun U da konveks olabilmesi için gerekli ve yeterli şart $\forall z \in U$ için,

$$Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

olmasıdır (Nevanlinna, 1921).

Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir ve bu sınıf,

$$K = \left\{f \in A: Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.24. Tanım. $f \in A(U)$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\forall z \in U$ için,

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U'da α mertebeli yıldızıl fonksiyon denir (Miller ve Mocanu, 1981). α mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $S^*(\alpha)$ ile gösterilir ve bu sınıf,

$$S^*(\alpha) = \left\{f \in A: Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.25. Tanım. $f \in A(U)$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\forall z \in U$ için,

$$Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U da α mertebeli konveks fonksiyon denir (Miller ve Mocanu, 1981). α mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $K(\alpha)$ ile gösterilir ve bu sınıf,

$$K(\alpha) = \left\{f \in A: Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.26. Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $u: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun D bölgesinde ikinci mertebeden kısmi türevleri mevcut ve bu kısmi türevler sürekli olsun. Bu durumda her $z \in D$ için

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa u fonksiyonuna, D bölgesinde reel harmonik fonksiyon denir.
f, $f: D \to \mathbb{C}, f = u + iv$ olarak tanımlı fonksiyon olmak üzere u ve v fonksiyonları D bölgesinde reel harmonik fonksiyonlar ise f fonksiyonuna D bölgesinde harmoniktir denir. (Duren, 1983).

2.1.27. Tanım. Basit bağlantılı bir D bölgesinde h ve g iki analitik fonksiyon olmak üzere f harmonik fonksiyonu,

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabilir.
h fonksiyonuna, f fonksiyonunun analitik kısmı, g fonksiyonuna ise f fonksiyonunun eş analitik kısmı denir (Clunie ve Sheil-Small, 1984).

2.1.28. Tanım. $D \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $f: D \to \mathbb{C}$ ve $f = u + iv$ fonksiyonu D de birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip olsun. $z_0 \in D$ olmak üzere

$$J_f(z_0) = \begin{vmatrix} u_x(z_0) & v_x(z_0) \\ u_y(z_0) & v_y(z_0) \end{vmatrix} = u_x(z_0)v_y(z_0) - v_x(z_0)u_y(z_0)$$

sayısına f fonksiyonunun z_0 noktasındaki Jakobiyeni denir.
Eğer her $z \in D$ için $J_f(z) \neq 0$ ise, f fonksiyonuna D de bir diffeomorfizm, $J_f(z) > 0$ ise f fonksiyonuna D de yön koruyan ve $J_f(z) < 0$ ise f ye D de yönü ters çeviren adı verilir (Clunie ve Sheil-Small, 1984).

2.1.29. Teorem. $f = u + iv$ fonksiyonunun basit bağlantılı bir D bölgesindeki jakobiyeni, $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$dir (Duren, 1983).

İspat. $f = u + iv$ olmak üzere

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y)$$

ve

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

olur. Burada,

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = u_x v_y - u_y v_x = J_f$$

elde edilir. f fonksiyonunun analitik olması durumunda

$$J_f(z) = |f'(z)|^2$$

olduğu görülür.

2.1.30. Tanım. $p \geq 1$ tam sayısı için, U açık birim diskinde yön koruyan ve

$$f(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p-1} z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{n+p-1} z^{n+p-1}}, \quad |b_p| < 1 \tag{2.2}$$

biçimindeki tüm çok değerli harmonik, $f = h + \bar{g}$ fonksiyonların sınıfı $H(p)$ ile gösterilir (Ahuja ve Jahangiri, 2001).

2.1.31. Tanım. f, U açık birim diskinde harmonik yalınkat fonksiyon olmak üzere $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ özelliğinde analitik ve yalınkat bir w fonkisyonu varsa f fonksiyonu g fonksiyonuna sabordinedir denir.
Harmonik fonksiyonlar bileşke işlemi altında korunmadığından, bu tanım, $w(z)$ fonksiyonu analitik olduğunda tanımlıdır. Ayrıca, analitik fonksiyonlar için doğru olan "$f(U) \subset g(U) \Rightarrow f(z) \prec g(z)$" önermesi harmonik fonksiyonlar için doğru değildir (Miller ve Mocanu, 1981).

2.1.32. Tanım. $f_1, f_2 \in H(p)$ fonksiyonları için

$$f_k(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{k,n+p-1} z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{k,n+p-1} z^{n+p-1}}, \qquad (k = 1,2)$$

Hadamard çarpımı,

$$(f_1 * f_2)(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{1,n+p-1} a_{2,n+p-1} z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_{1,n+p-1} b_{2,n+p-1} z^{n+p-1}}$$

dır (Goodman, 1983).

2.2. Çok Değerli Harmonik Yıldızıl Fonksiyonların Özellikleri

Bu kısımda, $p \geq 1$ için $H(p)$ sınıfının, Ahuja ve Jahangiri (2001) tarafından tanımlanan iki alt sınıfı verilecek ve bu sınıflardaki fonksiyonlar için katsayı koşulları, ekstrem noktaları, distorsiyon sınırları ve Hadamard çarpımının özellikleri incelenecektir.
$p \geq 1$ için, $|z| = r < 1$ birim diski üzerinde orijine göre yıldızıl olan harmonik fonksiyonların sınıfını, $H(p)$ nin alt sınıfı olacak şekilde $SH(p)$ ile gösterelsin. Bu sınıfa ait bir fonksiyon $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ ve $0 \leq r < 1$ için

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(arg\left(f(re^{i\theta})\right)\right) \geq 0 \tag{2.3}$$

koşulunu sağlamalıdır.

$p \geq 1$ için $SH(p)$ sınıfına ait $f = h + \bar{g}$ için h ve g fonksiyonları

$$h(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n+p-1}| z^{n+p-1}, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n+p-1}| z^{n+p-1} \tag{2.4}$$

biçiminde ise bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf da $TH(p)$ ile gösterilsin.

2.2.1. Teorem. $p = 1$ ve $b_1 = 0$ için $SH(p)$ nin alt sınıfı, $SH^{\circ}(1)$ ile gösterilir ve $f \in SH^{\circ}(1)$ ise

$$|a_n| \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ve } |b_n| \leq \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$$

dır (Sheil-Small, 1990).

2.2.2. Teorem. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu (2.2) formunda olsun. $a_p = 1$ ve $p \geq 1$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left(\left|a_{p+n-1}\right| + \left|b_{p+n-1}\right|\right) \leq 2p \tag{2.5}$$

ise f harmonik fonksiyonu yön koruyandır ve $SH(p)$ sınıfına aittir.

İspat. $0 \leq r < 1$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ için $z = re^{i\theta}$ olsun. (2.2)'de verilen h ve g fonksiyonları için,

$$\begin{aligned}
&|h'(z)| - |g'(z)| \\
&= \left|pz^{p-1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+p-1)a_{n+p-1}z^{n+p-2}\right| - \left|\sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)b_{n+p-1}z^{n+p-2}\right| \\
&\geq |pz^{p-1}| - \left|\sum_{n=2}^{\infty}(n+p-1)a_{n+p-1}z^{n+p-2}\right| - \left|\sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)b_{n+p-1}z^{n+p-2}\right| \\
&\geq pr^{p-1} - \sum_{n=2}^{\infty}(n+p-1)\left|a_{n+p-1}\right|r^{n+p-2} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left|b_{n+p-1}\right|r^{n+p-2} \\
&= r^{p-1}\left[p - \sum_{n=2}^{\infty}(n+p-1)\left|a_{n+p-1}\right|r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left|b_{n+p-1}\right|r^{n-1}\right] \\
&> r^{p-1}\left[p - \sum_{n=2}^{\infty}(n+p-1)\left|a_{n+p-1}\right| - \sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left|b_{n+p-1}\right|\right] \\
&= r^{p-1}\left\{2p - \left[\sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left(\left|a_{n+p-1}\right| + \left|b_{n+p-1}\right|\right)\right]\right\} \geq 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlik, f harmonik fonksiyonunun U birim diskinde yön koruyan olduğunu gösterir. Şimdi ise f harmonik fonksiyonunun $SH(p)$ sınıfına ait olduğu gösterilmelidir. f nin $SH(p)$ sınıfında olması için gerekli ve yeterli şart

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(arg(f(re^{i\theta}))\right) = Im\left(\frac{\partial}{\partial\theta} log(f(re^{i\theta}))\right) = Re\left(\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}\right) \geq 0$$

dır.

$0 < r < 1$ için,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(arg(f(re^{i\theta}))\right) = Re\left(\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}\right)$$

$$= \frac{pz^p + \sum_{n=2}^{\infty}(n+p-1)a_{n+p-1}z^{n+p-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\bar{b}_{n+p-1}\bar{z}^{n+p-1}}{z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p-1}z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_{n+p-1}\bar{z}^{n+p-1}}$$

$$= Re\left[\frac{p + A(z)}{1 + B(z)}\right]$$

elde edilir. $z = re^{i\theta}$ olmak üzere,

$$A(re^{i\theta}) = \sum_{n=2}^{\infty}(n+p-1)a_{n+p-1}r^{n-1}e^{(n-1)\theta i}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\bar{b}_{n+p-1}r^{n-1}e^{-(n+2p-1)\theta i}$$

ve

$$B(re^{i\theta}) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p-1}r^{n-1}e^{(n-1)\theta i} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{b}_{n+p-1}r^{n-1}e^{-(n+2p-1)\theta i}$$

için,

$$\frac{p + A(z)}{1 + B(z)} = p\frac{1 + w(z)}{1 - w(z)}$$

olacak şekilde $|w(z)| \le r < 1$ özelliğinde bir w fonksiyonunun mevcut olduğu gösterilmelidir. Bu durumda,

$$|w(z)| = \left|\frac{A(z) - pB(z)}{A(z) + pB(z) + 2p}\right|$$

$$= \left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n+p-1}r^{n-1}e^{(n-1)\theta i} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+2p-1)\bar{b}_{n+p-1}r^{n-1}e^{-(n+2p-1)\theta i}}{2p + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2p-1)a_{n+p-1}r^{n-1}e^{(n-1)\theta i} - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\bar{b}_{n+p-1}r^{n-1}e^{-(n+2p-1)\theta i}}\right|$$

$$\le \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_{n+p-1}|r^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2p-1)|b_{n+p-1}|r^{n-1}}{2p - \sum_{n=2}^{\infty}(n+2p-1)|a_{n+p-1}|r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)|b_{n+p-1}|r^{n-1}}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n-1)|a_{n+p-1}| + (n+2p-1)|b_{n+p-1}|\right]r^{n-1}}{4p - \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2p-1)|a_{n+p-1}| + (n-1)|b_{n+p-1}|\right]r^{n-1}}$$

$$< \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n-1)|a_{n+p-1}| + (n+2p-1)|b_{n+p-1}|\right]}{4p - \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2p-1)|a_{n+p-1}| + (n-1)|b_{n+p-1}|\right]} \le 1.$$

Böylece f harmonik fonksiyonu $SH(p)$ sınıfına aittir.

$$\sum_{n=2}^{\infty}|x_n| + \sum_{n=1}^{\infty}|y_n| = p$$

olmak üzere,

$$f(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x_n}{n+p-1}z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{y_n}}{n+p-1}\bar{z}^{n+p-1} \qquad (2.6)$$

şeklindeki harmonik fonksiyonlar için;

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left(|a_{n+p-1}| + |b_{n+p-1}|\right) = p + \sum_{n=2}^{\infty}|x_n| + \sum_{n=1}^{\infty}|y_n| = 2p$$

olduğundan (2.5)'deki katsayı sınırı kesindir.

2.2.3 Teorem. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonu (2.4) formunda alınsın. $f \in TH(p)$ olması için gerekli ve yeterli şart, $a_p = 1$ ve $p \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left(\left|a_{n+p-1}\right| + \left|b_{n+p-1}\right|\right) \leq 2p \qquad (2.7)$$

olmasıdır.

İspat. İspatın ilk kısmı, $TH(p) \subset SH(p)$ ve $p \geq 1$ olduğundan Teorem 2.2.2'den dolayı sağlanır. İkinci kısmında ise koşul (2.7) sağlanmazsa $f \notin TH(p)$ olduğu gösterilmelidir. Şimdi, $f = h + \bar{g} \in TH(p)$ için gerekli olan (2.3) koşulu,

$$Re\,\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + g(z)}$$

$$= Re\,\frac{pz^p - \sum_{n=2}^{\infty}(n+p-1)\left|a_{n+p-1}\right|z^{n+p-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left|b_{n+p-1}\right|\bar{z}^{n+p-1}}{z^p - \sum_{n=2}^{\infty}\left|a_{n+p-1}\right|z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{n+p-1}\right|\bar{z}^{n+p-1}} \geq 0$$

eşitsizliğine denktir. Yukarıdaki koşul, tüm $|z| = r < 1$ özelliğindeki z değerleri için geçerli olduğundan pozitif reel eksende $0 \leq z = r < 1$ olacak şekilde z değerleri için;

$$\frac{p - \sum_{n=2}^{\infty}(n+p-1)\left|a_{n+p-1}\right|r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left|b_{n+p-1}\right|r^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left|a_{n+p-1}\right|r^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{n+p-1}\right|r^{n-1}} \geq 0 \qquad (2.8)$$

dır.

Eğer koşul (2.7) sağlanmazsa 1'e yeterince yakın r'ler için pay negatif olur. Böylece $(0,1)$ aralığındaki $z_0 = r_0$ için (2.8)'deki oran negatif olur. Bu da gerek koşulla yani $f \in TH(p)$ olmasıyla çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

2.2.4. Tanım. $TH(p)$ nin kapalı konveks örtüsünün uç noktaları $clcoTH(p)$ ile gösterilir.

2.2.5. Teorem. $f = h + \bar{g} \in clcoTH(p)$ olması için gerekli ve yeterli şart,

$$h_p(z) = z^p, h_{n+p-1}(z) = z^p - \frac{p}{n+p-1} z^{n+p-1} \quad (n = 2,3,\ldots),$$
$$g_{n+p-1}(z) = z^p + \frac{p}{n+p-1} z^{n+p-1} (n = 1,2,\ldots),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(X_{n+p-1} + Y_{n+p-1}\right) = 1\,, \quad X_{n+p-1} \geq 0, Y_{n+p-1} \geq 0$$

için,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_{n+p-1} h_{n+p-1} + Y_{n+p-1} g_{n+p-1}\right) \tag{2.9}$$

şeklinde ifade edilmesidir. Ayrıca $TH(p)$ nin ekstrem noktaları, $\{h_{n+p-1}\}$ ve $\{g_{n+p-1}\}$ dir.

İspat. f fonksiyonu (2.9) formunda olsun. Bu taktirde,

$$f(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p}{n+p-1} X_{n+p-1} z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{n+p-1} Y_{n+p-1} \bar{z}^{n+p-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+p-1} z^{n+p-1} + b_{n+p-1} \bar{z}^{n+p-1}\right)$$

dir. Burada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+p-1)\left(|a_{n+p-1}| + |b_{n+p-1}|\right) = p + \sum_{n=2}^{\infty} p|X_{n+p-1}| + \sum_{n=1}^{\infty} p|Y_{n+p-1}|$$
$$= p + p(1 - X_p) \leq 2p$$

olduğundan $f = h + \bar{g} \in clcoTH(p)$ elde edilir. Tersine $f = h + \bar{g} \in clcoTH(p)$ olduğu varsayılsın.

$$X_{n+p-1} = \frac{n+p-1}{p}\left|a_{n+p-1}\right|, (n = 2,3, \dots),$$
$$Y_{n+p-1} = \frac{n+p-1}{p}\left|b_{n+p-1}\right|, (n = 1,2, \dots)$$

ve

$$X_p = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} X_{n+p-1} - \sum_{n=2}^{\infty} Y_{n+p-1}$$

alalım. Burada,

$$f(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty}\left|a_{n+p-1}\right|z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left|b_{n+p-1}\right|\bar{z}^{n+p-1}$$

elde edilir.

Bir sonraki teorem, $TH(p)$ sınıfına ait fonksiyonlar için distorsiyon sınırları üzerinedir. Bu sınırlar da $TH\ (p)$ sınıfı için bir kapsama sonucunu verir.

2.2.6. Teorem. f fonksiyonu $TH(p)$ sınıfına ait ise;

$$|f(z)| \leq \left(1 + \left|b_p\right|\right)r^p + \frac{p\left(1 - \left|b_p\right|\right)}{p+1}r^{p+1}, \qquad |z| = r < 1$$

ve

$$|f(z)| \geq \left(1 - \left|b_p\right|\right)r^p - \frac{p\left(1 - \left|b_p\right|\right)}{p+1}r^{p+1}, \qquad |z| = r < 1$$

dir.

İspat. Teorem 2.2.3'den dolayı,

$$p\left(1+|b_p|\right)+(p+1)\sum_{n=2}^{\infty}\left(|a_{n+p-1}|+|b_{n+p-1}|\right)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)(|a_{n+p-1}|+|b_{n+p-1}|) \leq 2p$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(|a_{n+p-1}|+|b_{n+p-1}|\right) \leq \frac{p\left(1-|b_p|\right)}{p+1} \tag{2.10}$$

dir. Şimdi ise $TH(p)$ sınıfa ait olan f nin mutlak değeri alınarak,

$$|f(z)| = \left| z^p - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p-1} z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+p-1} \bar{z}^{n+p-1} \right|$$
$$\leq r^p + \sum_{n=2}^{\infty}|a_{n+p-1}| r^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}|b_{n+p-1}| r^{n+p-1}$$
$$= \left(1+|b_p|\right) r^p + \sum_{n=2}^{\infty}\left(|a_{n+p-1}|+|b_{n+p-1}|\right) r^{n+p-1}$$
$$\leq \left(1+|b_p|\right) r^p + \sum_{n=2}^{\infty}\left(|a_{n+p-1}|+|b_{n+p-1}|\right) r^{p+1}$$
$$\leq \left(1+|b_p|\right) r^p + \frac{p\left(1-|b_p|\right)}{p+1} r^{p+1}$$

ve

$$|f(z)| = \left| z^p - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+p-1} z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+p-1} \bar{z}^{n+p-1} \right|$$

$$\geq r^p - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n+p-1}| r^{n+p-1} - \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n+p-1}| r^{n+p-1}$$

$$= (1 - |b_p|) r^p - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_{n+p-1}| + |b_{n+p-1}|)\, r^{n+p-1}$$

$$\geq (1 - |b_p|) r^p - \sum_{n=2}^{\infty} (|a_{n+p-1}| + |b_{n+p-1}|)\, r^{n+p-1}$$

$$\geq (1 - |b_p|) r^p - \frac{p(1 - |b_p|)}{p+1} r^{p+1}$$

elde edilir. $TH(p)$ sınıfındaki $f = h + \bar{g}$ fonksiyonları için Teorem 2.2.6'da verilen sınırlar, katsayı koşulunu sağlar ise $SH(p)$ deki fonksiyonlar için de geçerlidir.

$$f(z) = z^p + |b_p| \bar{z}^p + \frac{p(1 - |b_p|)}{p+1} \bar{z}^{p+1}$$

fonksiyonu ve rotasyonları, Teorem 2.2.6'da verilen sınırların kesin olduğunu gösterir.

Aşağıdaki sonuç ise Teorem 2.2.6'daki eşitsizliğin sol tarafından elde edilir.

2.2.7. Sonuç. f fonksiyonu $TH(p)$ sınıfına ait ise;

$$\left\{ w : |w| < \frac{1 - |b_p|}{p+1} \right\} \subset f(U)$$

dur.

2.2.8. Tanım. $f, F \in TH(p)$ harmonik fonksiyonları,

$$f(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n+p-1}| z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n+p-1}| \bar{z}^{n+p-1} \tag{2.11}$$

ve

$$F(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty} |A_{n+p-1}| z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |B_{n+p-1}| \bar{z}^{n+p-1} \tag{2.12}$$

şeklinde verilsin. Bu iki fonksiyon için Hadamard çarpımı;

$$(f * F)(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n+p-1} A_{n+p-1}| z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n+p-1} B_{n+p-1}| \bar{z}^{n+p-1} \tag{2.13}$$

biçiminde tanımlanır.

2.2.9. Teorem. f ve F fonksiyonu $TH(p)$ sınıfına ait ise $f * F$ çarpımı da aynı sınıfa aittir.

İspat. f ve F fonksiyonları (2.11) ve (2.12) formlarında ve $TH(p)$ sınıfına ait olsun. Hadamard çarpımı (2.13)'deki gibi verilsin. $F \in TH(p)$ olduğundan $|A_{n+p-1}| \leq 1$ ve $|B_{n+p-1}| \leq 1$ dir. Bu durumda,

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} (n+p-1)\left(|a_{n+p-1}||A_{n+p-1}| + |b_{n+p-1}||B_{n+p-1}|\right)$$
$$\leq \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} (n+p-1)\left(|a_{n+p-1}| + |b_{n+p-1}|\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı $2p$ ile sınırlıdır çünkü $f \in TH(p)$ dir. Bu nedenle $f * F \in TH(p)$ olur.

2.2.10. Teorem. $TH(p)$ sınıfı konveks kombinasyonlar altında kapalıdır.

İspat. $f_j(z) \in TH(p)$ sınıfına ait ve

$$f_j(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty} \left|a_{j_{n+p-1}}\right| z^{n+p-1} + (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \left|b_{j_{n+p-1}}\right| \bar{z}^{n+p-1}, j = 1,2,3,\ldots$$

biçimindeki fonksiyonlar için (2.7)'den dolayı,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left(\left|a_{j_{n+p-1}}\right|+\left|b_{j_{n+p-1}}\right|\right)\leq 2p \tag{2.14}$$

dir. Diğer yandan,

$\sum_{j=1}^{\infty} t_j = 1,\;\; 0\leq t_j\leq 1$ için f_j fonksiyonlarının konveks kombinasyonu,

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_j f_j(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j\left|a_{j_{n+p-1}}\right|\right) z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j\left|b_{j_{n+p-1}}\right|\right)\bar{z}^{n+p-1}$$

dir. (2.14)'den dolayı

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)&\left(\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j\left|a_{j_{n+p-1}}\right|\right|+\left|\sum_{j=1}^{\infty} t_j\left|b_{j_{n+p-1}}\right|\right|\right)\\ &=\sum_{j=1}^{\infty} t_j\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+p-1)\left|a_{j_{n+p-1}}\right|+\left|b_{j_{n+p-1}}\right|\right)\\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} t_j(2p) = 2p\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{j=1}^{\infty} t_j f_j(z) \in TH(p)$$

olur.

2.2.11. Tanım. (2.2) formundaki f fonksiyonu U bölgesinde α $(0\leq\alpha<1)$ mertebeli olması için her z $(|z|=r<1)$ ve $0\leq\alpha<1$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(arg\left(f(re^{i\theta})\right)\right) \geq p\alpha$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye α mertebeli yıldızıl harmonik fonksiyon denir. $SH(p)$ ve $TH(p)$ sınıflarının alt sınıfları sırasıyla $SH^*(p,\alpha)$ ve $TH^*(p,\alpha)$ olacak şekilde α mertebeli yıldızıl sınıflar olarak tanımlansın. Ayrıca $SH^*(p,0) \equiv SH^*(p)$ ve $TH^*(p,0) \equiv TH^*(p)$ dir.

2.2.12. Teorem. (2.2)'de verildiği gibi $f = h + \bar{g}$ şeklinde alalım. $a_p = 1$ ve $p \geq 1$ olmak üzere;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+p(1-\alpha)-1}{p(1-\alpha)}\left|a_{n+p-1}\right| + \frac{n+p(1+\alpha)-1}{p(1-\alpha)}\left|b_{n+p-1}\right|\right] \leq 2 \qquad (2.15)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f harmonik fonksiyonu yön koruyan, p-valent ve $SH(p,\alpha)$ sınıfına aittir. Teorem 2.2.2'nin ispatında tanımlanan $A(z)$ ve $B(z)$ fonksiyonları için,

$$-p\alpha + \frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left(f\left(re^{i\theta}\right)\right) = Re\left(\frac{p(1-\alpha)+A(z)-p\alpha B(z)}{1+B(z)}\right) \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlandığına dikkat edilmelidir. Teorem 2.2.2'nin ispatına benzer bir ispat yapılırsa gerekli katsayı koşulu da sağlanır (2.15).

2.2.13. Teorem. $f \in TH^*(p,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli şart (2.15) katsayı eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Teorem 2.2.5'de olduğu gibi, $TH(p,\alpha)$ için gerekli ve yeterli katsayı koşulları ekstrem noktaların;

$$h_p(z) = z^p,$$

$$h_{n+p-1}(z) = z^p - \frac{p(1-\alpha)}{n+p(1-\alpha)-1}z^{n+p-1}, \qquad (n = 2,3,\dots)$$

ve

$$g_{n+p-1}(z) = z^p - \frac{p(1-\alpha)}{n+p(1+\alpha)-1}\bar{z}^{n+p-1}, \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

olduğunu gösterir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Sabordinasyon tekniği kullanılarak açık birim diskte çok değerli harmonik fonksiyonların bazı alt sınıfları tanımlandı.
Konvolusyon tekniği kullanılarak çok değerli harmonik bir fonksiyonun bu alt sınıflara ait olması için gerekli ve yeterli koşullar verildi.

Katsayı tahmin tekniği kullanılarak çok değerli harmonik bir fonksiyonun bu alt sınıflara ait olması için gerekli katsayı bağıntısı verildi. Daha sonra bu alt sınıflardaki fonksiyonların katsayıları negatif veya pozitif seçildiğinde sınıfa ait olma şartı kullanılarak fonksiyonların katsayı sınırları elde edildi.

Katsayı bağıntısı kullanılarak bu sınıflara ait fonksiyonlar için distorsiyon sınırları elde edildi. Distorsiyonun sol sınırı kullanılarak bu sınıflar için kapsama sonuçları elde edildi.

Yine katsayı bağıntıları yardımıyla bu alt sınıflar için ekstrem noktalar elde edildi ve bu sınıfların konveks kombinasyonlar altında kapalı olduğu gösterildi.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde açık birim diskte çok değerli harmonik fonksiyonların sabordinasyon yardımıyla tanımlanan alt sınıflarına ait katsayı sınırları, ekstrem noktaları ve distorsiyon sınırları gibi özellikleri verilecektir. Ayrıntılı bilgi için, Ahuja ve Jahangiri (2001), Ahuja ve Jahangiri (2002), Altınkaya ve diğerleri (2018), Aouf ve Seoudy (2020), Clunie ve Sheil-Small (1984), Duren (1983), Dziok ve Srivastava (2003), Jahangiri (1999), Jahangiri ve diğerleri (2002), Jahangiri ve diğerleri (2003), Jahangiri ve diğerleri (2016), Silverman ve Silvia (1999), Srivastava ve diğerleri (2009), Yalçın Tokgöz ve Altınkaya (2019), Yaşar ve Yalçın (2011), Yaşar ve Yalçın (2013), Yaşar ve Yalçın (2015) kaynakları incelenebilir.

4.1. $SH^{*}(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ ve $TSH^{*}(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ Sınıflarına Ait Sabordinasyon ile Tanımlı Çok Değerli Harmonik Yıldızıl Fonksiyonların Özellikleri

4.1.1. Tanım. $-1 \leq \Delta \leq -\Delta < \Gamma \leq 1,\ 0 \leq \alpha < p,\ p \geq 1$ için,

$$\frac{zh'(z) - zg'(z)}{h(z) + \overline{g(z)}} \prec \frac{p + [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]z}{1 + \Delta z} \tag{4.1}$$

şartını sağlayan (2.2) formundaki $f = h + \bar{g}$ fonksiyonlarından oluşan $H(p)$ sınıfının bir alt sınıfı $SH^{*}(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ ile tanımlanır. $SH^{*}(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ sınıfına ait $f = h + \bar{g}$ için h ve g

$$h(z) = z^{p} - \sum_{n=2}^{\infty} |a_{n+p-1}| z^{n+p-1} \text{ ve } g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_{n+p-1}| z^{n+p-1}, |b_p| < 1 \tag{4.2}$$

biçiminde ise bu fonksiyonların sınıfı $TSH^{*}(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ ile gösterilir.

4.1.2. Teorem. $f \in H(p)$ olsun. Bu durumda $f \in SH^{*}(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart $z \in U \setminus \{0\}$ için

$$\emptyset(z;\zeta)=z^p\frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)\zeta-z-[\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]\zeta z}{(1-z)^2}$$
$$+\overline{z^p}\frac{2p(1+\Delta\zeta)+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)\zeta+[(1-2p)(1+\Delta\zeta)+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)\zeta]\bar{z}}{(1-\bar{z})^2}$$

olmak üzere,

$$f(z)*\emptyset(z;\zeta)\neq 0,\qquad (\zeta\in\mathbb{C},|\zeta|=1,z\in U\setminus\{0\})$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $f\in H(p)$ ve (2.2) formunda olsun. $f\in SH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1) ile verilen şartın sağlanması veya bu şarta denk olarak,

$\zeta\in\mathbb{C},|\zeta|=1$ ve $z\in U\setminus\{0\}$ için,

$$\frac{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}{h(z)+\overline{g(z)}}\neq\frac{p+[p\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]\zeta}{1+\Delta\zeta}\tag{4.3}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada,

$$h(z)=h(z)*\frac{z^p}{1-z},\qquad g(z)=g(z)*\frac{z^p}{1-z}$$

ve

$$zh'(z)=h(z)*\frac{z^p[p+(1-p)z]}{(1-z)^2},\qquad zg'(z)=g(z)*\frac{z^p[p+(1-p)z]}{(1-z)^2}$$

olduğu dikkate alınarak,

$$(p+[p\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]\zeta)\left[h(z)+\overline{g(z)}\right]-(1+\Delta\zeta)\left[zh'(z)-\overline{zg'(z)}\right]$$

$$= h(z) * \left\{ (p + [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]\zeta) \frac{z^p}{(1-z)} - (1 + \Delta\zeta) \frac{z^p[p + (1-p)z]}{(1-z)^2} \right\}$$

$$+\overline{g(z)} * \left\{ (p + [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]\zeta) \frac{\overline{z^p}}{\overline{(1-z)}} + (1 + \Delta\zeta) \frac{\overline{z^p}[p + (1-p)\bar{z}]}{\overline{(1-z)^2}} \right\}$$

$$= h(z) * \frac{z^p}{(1-z)^2} [(p-\alpha)(\Gamma - \Delta)\zeta - z - [\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]\zeta z]$$

$$+\overline{g(z)} * \frac{\overline{z^p}}{\overline{(1-z)^2}} [2p(1 + \Delta\zeta) + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)\zeta + [(1-2p)(1 + \Delta\zeta) + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)\zeta]\bar{z}]$$

$$= f(z) * \phi(z;\zeta) \neq 0$$

bulunur.

4.1.3. Teorem. $f \in H(p)$ olsun. Bu taktirde

$$-1 \leq \Delta \leq -\Delta < \Gamma \leq 1, \qquad 0 \leq \alpha < p, \qquad p \geq 1$$

için,

$$\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta) = (1-\Delta)(n-1) + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta) \tag{4.4}$$

ve

$$\psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta) = (1-\Delta)(n+2p-1) - (p-\alpha)(\Gamma - \Delta) \tag{4.5}$$

olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)\left|a_{n+p-1}\right| + \psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)\left|b_{n+p-1}\right|\right] \leq 2(p-\alpha)(\Gamma - \Delta) \tag{4.6}$$

ise f harmonik fonksiyonu $SH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ sınıfına aittir.

İspat. (4.6) eşitsizliğinin sağlanması durumunda $f \in SH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olduğu gösterilmelidir. Sabordinasyon tanımına göre $f \in SH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$z \in U \setminus \{0\}$ için,

$$\frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} = \frac{p + [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]w(z)}{1 + \Delta w(z)}$$

olacak şekilde $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ özelliğinde karmaşık bir w fonksiyonunun mevcut olması veya buna denk olarak,

$$\left| \frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)} - ph(z) - p\overline{g(z)}}{\Delta(zh'(z) - \overline{zg'(z)}) - [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)](h(z) + \overline{g(z)})} \right| < 1 \qquad (4.7)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada, $zh'(z)$, $zg'(z)$, $h(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları (4.7)'de yerine yazılarak, (4.6) eşitsizliğinden

$$\left|\Delta(zh'(z) - \overline{zg'(z)}) - [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)](h(z) + \overline{g(z)})\right|$$
$$-\left|zh'(z) - \overline{zg'(z)} - ph(z) - p\overline{g(z)}\right|$$
$$= \Big|(p-\alpha)(\Gamma - \Delta)z^p$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [-\Delta(n+p-1) + p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)] a_{n+p-1} z^{n+p-1}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} [-\Delta(n+p-1) - p\Delta - (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)] \overline{b_{n+p-1} z^{n+p-1}}\Big|$$
$$- \left| \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n+p-1} z^{n+p-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (n+2p-1) \overline{b_{n+p-1} z^{n+p-1}} \right|$$
$$\geq (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)|z|^p$$
$$- \sum_{n=2}^{\infty} [(1-\Delta)(n-1) + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)] |a_{n+p-1}| |z|^{n+p-1}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} [(1-\Delta)(n+2p-1) - (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)] |b_{n+p-1}| |z|^{n+p-1}$$
$$> |z|^p \{(p-\alpha)(\Gamma - \Delta)$$
$$- \sum_{n=2}^{\infty} [(1-\Delta)(n-1) + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)] |a_{n+p-1}|$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}[(1-\Delta)(n+2p-1)-(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]\left|b_{n+p-1}\right|\Bigg\}\geq 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. Diğer yandan

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|x_{n+p-1}\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|y_{n+p-1}\right|=1$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(z)=z^p&+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}{\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)}x_{n+p-1}z^{n+p-1}\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}{\psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)}y_{n+p-1}\overline{z^{n+p-1}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

biçimindeki harmonik fonksiyonlar için,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\left[\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)\left|a_{n+p-1}\right|+\psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)\left|b_{n+p-1}\right|\right]\\ &=(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)\sum_{n=2}^{\infty}\left|x_{n+p-1}\right|+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)+\sum_{n=1}^{\infty}\left|y_{n+p-1}\right|\\ &=(p-\alpha)(\Gamma-\Delta) \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.1.3’de verilen katsayı sınırı kesindir. (4.8) formundaki fonksiyonlar, $SH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ sınıfındadır.

4.1.4. Teorem. (4.2) formundaki h ve g için $f=h+\bar{g}$ olsun. $f\in TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olması için gerekli ve yeterli koşul (4.6) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Teorem 4.1.3'e göre (4.6) sağlanmadığında $f \notin TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun $TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli koşul;

$$\left|\frac{H(z)}{G(z)}\right| < 1$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada,

$$H(z) = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left|a_{n+p-1}\right|z^{n+p-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+2p-1)\left|b_{n+p-1}\right|\overline{z^{n+p-1}}$$

ve

$$\begin{aligned} G(z) = {} & (p-\alpha)(\Gamma-\Delta)z^p \\ & -\sum_{n=2}^{\infty}[-\Delta(n-1)+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]\left|a_{n+p-1}\right|z^{n+p-1} \\ & -\sum_{n=1}^{\infty}[-\Delta(n+2p-1)-(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]\left|b_{n+p-1}\right|\overline{z^{n+p-1}} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca $z = r < 1$ için,

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left|a_{n+p-1}\right|r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(n+2p-1)\left|b_{n+p-1}\right|r^{n-1}}{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)r^p - \sum_{n=2}^{\infty}[\Delta(n-1)-(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]\left|a_{n+p-1}\right|r^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}[\Delta(n+2p-1)+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]\left|b_{n+p-1}\right|r^{n-1}} < 1 \quad (4.9)$$

eşitsizliği elde edilir.

(4.6) sağlanmıyorsa 1'e yeterince yakın r'ler için, (4.9) da sağlanmaz. Böylece (4.9)'daki oran 1'den büyük olacak şekilde bir $z_0 = r_0 \in (0,1)$ sayısı mevcut olur.

Bu da $f \in TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olması ile çelişmektedir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

4.1.5. Teorem. $f \in TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olsun. O halde $|z| = r < 1$ için

$$|f(z)| \leq (1 + |b_p|)r^p$$
$$+\left(\frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}{1-\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)} - \frac{[2p(1-\Delta)-(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]}{1-\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}|b_p|\right)r^{p+1},$$

ve

$$|f(z)| \geq (1 - |b_p|)r^p$$
$$-\left(\frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}{1-\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)} - \frac{[2p(1-\Delta)-(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]}{1-\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}|b_p|\right)r^{p+1}$$

dir.

İspat. Sadece ikinci eşitsizlik kanıtlanacaktır. Eşitsizliğin diğer tarafı benzer şekilde kanıtlanabilir. $f \in TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olsun.

$$|f(z)| \geq (1 - |b_p|)r^p - \sum_{n=2}^{\infty}\left(|a_{n+p-1}| + |b_{n+p-1}|\right)r^{n+p-1}$$
$$\geq (1 - |b_p|)r^p - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)|a_{n+p-1}| + \psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)|b_{n+p-1}|}{1-\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}r^{p+1}$$
$$\geq (1 - |b_p|)r^p - \frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)-[2p(1-\Delta)-(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]|b_p|}{1-\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}r^{p+1}$$

olup ispat tamamlanır.

4.1.6. Sonuç. (4.2) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ olsun. $f \in TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ ise burada,

$$\left\{w: |w| < \frac{1-\Delta+[2p(1-\Delta)-(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]|b_p|}{1-\Delta+(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}\right\} \subset f(U)$$

dur.

4.1.7. Teorem.

$$h_p(z) = z^p$$

$$h_{n+p-1}(z) = z^p - \frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}{\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)} z^{n+p-1}, (n = 2,3, \dots)$$

ve

$$g_{n+p-1}(z) = z^p + \frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}{\psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)} \overline{z^{n+p-1}}, (n = 1,2, \dots)$$

olsun.

Bu taktirde $x_{n+p-1} \geq 0$, $y_{n+p-1} \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n+p-1} + y_{n+p-1} = 1$ olmak üzere, $f \in TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+p-1} h_{n+p-1}(z) + y_{n+p-1} g_{n+p-1}(z)$$

olacak şekilde ifade edilebilmesidir. Ayrıca $TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ sınıfının uç noktaları da $\{h_{n+p-1}\}$ ve $\{g_{n+p-1}\}$ dir.

İspat.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+p-1} h_{n+p-1}(z) + y_{n+p-1} g_{n+p-1}(z)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+p-1} + y_{n+p-1}) z^p - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}{\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)} x_{n+p-1} z^{n+p-1}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}{\psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)} y_{n+p-1} \overline{z^{n+p-1}}$$

olsun. Burada,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)\left|a_{n+p-1}\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)\left|b_{n+p-1}\right|$$

$$= (p-\alpha)(\Gamma-\Delta)\sum_{n=2}^{\infty} x_{n+p-1} + (p-\alpha)(\Gamma-\Delta)\sum_{n=1}^{\infty} y_{n+p-1}$$

$$= (p-\alpha)(\Gamma-\Delta)(1-x_p) \leq (p-\alpha)(\Gamma-\Delta)$$

eşitsizliği elde edilir ve $f \in TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ olur.

Tersine, $f \in TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$ ise,

$$\left|a_{n+p-1}\right| \leq \frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}{\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)}$$

ve

$$\left|b_{n+p-1}\right| \leq \frac{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}{\psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)}$$

dir.

$$x_{n+p-1} = \frac{\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)}{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}\left|a_{n+p-1}\right|, (n = 2,3, \dots)$$

ve

$$y_{n+p-1} = \frac{\psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)}{(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)}\left|b_{n+p-1}\right|, (n = 1,2\ \dots)$$

alınırsa, Teorem 4.1.4’den dolayı

$0 \leq x_{n+p-1} \leq 1,\ (n = 2,3,\dots)$ ve $0 \leq y_{n+p-1} \leq 1,\ (n = 1,2,\dots)$ dır.

$$x_p = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} x_{n+p-1} - \sum_{n=1}^{\infty} y_{n+p-1}$$

şeklinde tanımlanırsa Teorem 4.1.4'den dolayı $x_p \geq 0$ olur. Sonuç olarak,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+p-1} h_{n+p-1}(z) + y_{n+p-1} g_{n+p-1}(z)$$

elde edilir.

4.1.8. Teorem. $TSH^*(p, \alpha, \Gamma, \Delta)$ sınıfı konveks kombinasyonlar altında kapalıdır.

İspat. $k = 1,2,3, \ldots$ için $f_k \in TSH^*(p, \alpha, \Gamma, \Delta)$ olsun. Burada,

$$f_k(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty} \left|a_{k,n+p-1}\right| z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left|b_{k,n+p-1}\right| \overline{z^{n+p-1}}$$

şeklindedir. (4.6)'dan dolayı,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\phi_n(p, \alpha, \Gamma, \Delta)\left|a_{k,n+p-1}\right| + \psi_n(p, \alpha, \Gamma, \Delta)\left|b_{k,n+p-1}\right|\right) \leq 2(p-\alpha)(\Gamma - \Delta) \tag{4.10}$$

elde edilir.

$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = 1,\;\; 0 \leq t_k \leq 1$ için f_k'nın konveks kombinasyonu,

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k f_k(z) = z^p - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \left|a_{k,n+p-1}\right| \right) z^{n+p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k \left|b_{k,n+p-1}\right| \right) \overline{z^{n+p-1}}$$

şeklinde yazılır. (4.10)'dan dolayı

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)\sum_{k=1}^{\infty}t_k\left|a_{k,n+p-1}\right|+\psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)\sum_{k=1}^{\infty}t_k\left|b_{k,n+p-1}\right|\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}t_k\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\phi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)\left|a_{k,n+p-1}\right|+\psi_n(p,\alpha,\Gamma,\Delta)\left|b_{k,n+p-1}\right|\right]\right)$$
$$\leq 2(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)\sum_{k=1}^{\infty}t_k=2(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$\sum_{k=1}^{\infty}t_kf_k(z)\in TSH^*(p,\alpha,\Gamma,\Delta)$$

olur.

4.2. $SH_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$ Sınıflarına Ait Sabordinasyon ile Tanımlı Salagean Tipli Çok Değerli Harmonik Fonksiyonların Özellikleri

$$h(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_nz^n \text{ ve } g(z)=\sum_{n=p}^{\infty}b_nz^n,\ \left|b_p\right|<1 \qquad (4.11)$$

olmak üzere $f=h+\bar{g}$ harmonik fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf SH_p ile gösterilsin. Salagean (1983) tarafından, $k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere D^k diferansiyel operatörü tanımlanmıştır. Daha sonra, Jahangiri ve diğerleri (2009) tarafından (4.11) formunda seri açılıma sahip, $f=h+\bar{g}$ fonksiyonu için modifiye edilmiş Salagean operatörü;

$$D_p^kf(z)=D_p^kh(z)+(-1)^k\overline{D_p^kg(z)} \quad (p\geq 1) \qquad (4.12)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada,

$$D_p^k h(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right)^k a_n z^n$$

ve

$$D_p^k g(z) = \sum_{n=p}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right)^k b_n z^n$$

dir.

4.2.1. Tanım. D_p^k, (4.12)'de verildiği gibi ve $-\Delta \leq \Gamma < \Delta \leq 1;\ 0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$\frac{z\left(D_p^k f(z)\right)_z - \bar{z}\left(D_p^k f(z)\right)_{\bar{z}}}{D_p^k f(z)} \prec \frac{p + [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]z}{1 + \Delta z} \tag{4.13}$$

şartını sağlayan (4.11) formundaki f fonksiyonlarından oluşan SH_p nin alt sınıfı olan $SH_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ sınıfı tanımlansın. Ayrıca,

$$h(z) = z^p - \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| z^n \text{ ve } g(z) = (-1)^k \sum_{n=p}^{\infty} |b_n| z^n, |b_p| < 1 \tag{4.14}$$

olmak üzere SH_p sınıfına ait $f = h + \bar{g}$ fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıf da $SH_{p,k}$ ile gösterilsin. $\overline{SH}_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta) \equiv SH_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta) \cap SH_{p,k}$ olarak tanımlansın.

4.2.2. Teorem. $f \in SH_p$ olsun. Bu takdirde $f \in SH_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$\varphi(z;\zeta) = z^p \frac{(p-\alpha)(\Delta - \Gamma)\zeta + (1 + [\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)\zeta])z}{(1-z)^2}$$
$$-\overline{z^p} \frac{2p + [2p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]\zeta + [(1-2p)(1+\Delta\zeta) + (p-\alpha)(\Delta - \Gamma)\zeta]\bar{z}}{(1-\bar{z})^2}$$

olmak üzere

$$D_p^k f(z) * \varphi(z;\zeta) \neq 0, \quad (\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1, z \in U \setminus \{0\})$$

olmasıdır.

İspat. $f \in SH_p$ ve (4.11) formunda olsun. $f \in SH_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart (4.13) ile verilen bağıntının sağlanması ya da buna denk olarak, $\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1$ ve $z \in U \setminus \{0\}$ için,

$$\frac{z\left(D_p^k f(z)\right)_z - \bar{z}\left(D_p^k f(z)\right)_{\bar{z}}}{D_p^k f(z)} \neq \frac{p + [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]\zeta}{1 + \Delta\zeta} \tag{4.15}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada,

$$D_p^k f(z) = D_p^k f(z) * \left(\frac{z^p}{1-z} + \frac{\overline{z^p}}{1-\bar{z}}\right)$$

ve

$$z\left(D_p^k f(z)\right)_z - \bar{z}\left(D_p^k f(z)\right)_{\bar{z}} = D_p^k f(z) * \left(\frac{z^p[p + (1-p)z]}{(1-z)^2} - \frac{\overline{z^p}[p + (1-p)\bar{z}]}{(1-\bar{z})^2}\right)$$

olduğu (4.15) eşitsizliğinde dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
&(1 + \Delta\zeta)\left\{z\left(D_p^k f(z)\right)_z - \bar{z}\left(D_p^k f(z)\right)_{\bar{z}}\right\} - \{p + [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]\zeta\} D_p^k f(z) \\
&= D_p^k h(z) * \left\{(1 + \Delta\zeta)\frac{z^p[p + (1-p)z]}{(1-z)^2} - (p + [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]\zeta)\frac{z^p}{1-z}\right\} \\
&-(-1)^k \overline{D_p^k g(z)} * \left\{(1 + \Delta\zeta)\frac{\overline{z^p}[p + (1-p)\bar{z}]}{(1-\bar{z})^2} + (p + [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]\zeta)\frac{\overline{z^p}}{1-\bar{z}}\right\} \\
&= D_p^k f(z) * \varphi(z;\zeta) \neq 0
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

4.2.3. Teorem. $f \in SH_p$ olsun. Bu takdirde

$$-1 \leq -\Delta \leq \Gamma < \Delta \leq 1, \qquad 0 \leq \alpha < p, \qquad p \geq 1$$

için,

$$\phi_n = (1+\Delta)(n-p) + (p-\alpha)(\Delta-\Gamma) \tag{4.16}$$

ve

$$\psi_n = (1+\Delta)(n+p) - (p-\alpha)(\Delta-\Gamma) \tag{4.17}$$

olmak üzere,

$$\sum_{n=p}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right)^k [\phi_n|a_n| + \psi_n|b_n|] \leq 2(p-\alpha)(\Gamma-\Delta) \tag{4.18}$$

ise $f \in SH_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$ dır.

İspat. (4.18)'in sağlanması durumunda $f \in SH_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$ olduğu gösterilmelidir. Sabordinasyon tanımına göre $f \in SH_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$\frac{z\left(D_p^k f(z)\right)_z - \bar{z}\left(D_p^k f(z)\right)_{\bar{z}}}{D_p^k f(z)} = \frac{p + [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]w(z)}{1+\Delta w(z)}$$

olacak şekilde $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ özelliğinde karmaşık bir w fonksiyonu mevcut olması veya buna denk olarak,

$$\left|\frac{z\left(D_p^k f(z)\right)_z - \bar{z}\left(D_p^k f(z)\right)_{\bar{z}} - pD_p^k f(z)}{\Delta\left[z\left(D_p^k f(z)\right)_z - \bar{z}\left(D_p^k f(z)\right)_{\bar{z}}\right] - [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]D_p^k f(z)}\right| < 1$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Gerçekten, (4.18) eşitsizliğinden $|z| = r$ ve $(0 < r < 1)$ için;

$$\left|z\left(D_p^k f(z)\right)_z - \bar{z}\left(D_p^k f(z)\right)_{\bar{z}} - pD_p^k f(z)\right|$$

$$-\left|\Delta\left[z\left(D_p^k f(z)\right)_z - \bar{z}\left(D_p^k f(z)\right)_{\bar{z}}\right] - [p\Delta + (p-\alpha)(\Gamma - \Delta)]D_p^k f(z)\right|$$

$$= \left|\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k (n-p)a_n z^n + (-1)^{k+1}\sum_{n=p}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k (n+p)\overline{b_n z^n}\right|$$

$$-\left|(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k [\Delta(n-p) + (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)]a_n z^n\right.$$

$$\left. + (-1)^{k+1}\sum_{n=p}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k [\Delta(n+p) + (p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]\overline{b_n z^n}\right|$$

$$\leq \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k [(1+\Delta)(n-p) + (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)]|a_n||z|^n$$

$$+\sum_{n=p}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k [(1+\Delta)(n+p) - (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)]|b_n||z|^n - (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)|z|^p$$

$$= |z|^p\left\{\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k [(1+\Delta)(n-p) + (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)]|a_n||z|^{n-p}\right.$$

$$\left. + \sum_{n=p}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k [(1+\Delta)(n+p) - (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)]|b_n||z|^{n-p} - (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)\right\} < 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. Diğer yandan

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}|x_n| + \sum_{n=p}^{\infty}|y_n| = 1 \text{ ve } |x_p| = 1,$$

olmak üzere (4.18) eşitsizliği

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{p^k(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)}{n^k\phi_n} x_n z^n + \sum_{n=p}^{\infty} \frac{p^k(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)}{n^k\psi_n} \overline{y_n z^n}$$

biçimindeki harmonik fonksiyonları için

$$\sum_{n=p}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right)^k [\phi_n|a_n| + \psi_n|b_n|] = (p-\alpha)(\Gamma-\Delta)\sum_{n=p}^{\infty}(|x_n| + |y_n|) = 2(p-\alpha)(\Gamma-\Delta)$$

olduğundan katsayı sınırı kesindir. Böylece $f \in SH_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ olur.

4.2.4. Teorem. (4.14) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ olsun. $f \in \overline{SH}_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ olması için gerekli ve yeterli koşul (4.18) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. Teorem 4.2.3'e göre (4.18) sağlanmadığında $f \notin \overline{SH}_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ olduğu göstermek yeterlidir. $f = h + \bar{g}$ fonksiyonunun $\overline{SH}_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\left|\frac{H(z)}{G(z)}\right| < 1$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada,

$$H(z) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right)^k (n-p)|a_n|z^n + \sum_{n=p}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right)^k (n+p)|b_n|\overline{z^n}$$

ve

$$G(z) = (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)z^p - \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right)^k [\Delta(n-p) + (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)]|a_n|z^n$$
$$-\sum_{n=p}^{\infty} \left(\frac{n}{p}\right)^k [\Delta(n+p) + (p-\alpha)(\Gamma-\Delta)]|b_n|\overline{z^n}$$

dir. $z = r < 1$ için,

$$\frac{\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k (n-p)|a_n|r^{n-p} + \sum_{n=p}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k (n+p)|b_n|r^{n-p}}{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma) - \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k [\Delta(n-p)+(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)]|a_n|r^{n-p} - \sum_{n=p}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k [\Delta(n+p)+(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)]|b_n|r^{n-p}} < 1 \quad (4.19)$$

eşitsizliği sağlanır.

(4.17) sağlamıyorsa 1'e yeterince yakın r'ler için (4.19) da sağlanmaz. (4.19)'daki oran 1'den büyük olacak şekilde $z_0 = r_0 \in (0,1)$ sayısı mevcut olur. Bu da $f \in \overline{SH}_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$ olması ile çelişmektedir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

4.2.5. Teorem. $f \in \overline{SH}_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$ olsun. Bu takdirde $|z| = r < 1$ için,

$$|f(z)| \leq (1+|b_p|)r^p$$
$$+\left(\frac{p}{p+1}\right)^k \frac{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma) - [p(2+\Gamma+\Delta)+\alpha(\Delta-\Gamma)]|b_p|}{1+\Delta+(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)} r^{p+1}$$

ve

$$|f(z)| \geq (1-|b_p|)r^p$$
$$-\left(\frac{p}{p+1}\right)^k \frac{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma) - [p(2+\Gamma+\Delta)+\alpha(\Delta-\Gamma)]|b_p|}{1+\Delta+(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)} r^{p+1}$$

dir.

İspat. Sadece ikinci eşitsizlik kanıtlanacaktır. Eşitsizliğin diğer tarafı benzer şekilde kanıtlanabilir. $f \in \overline{SH}_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$ olsun.

$$|f(z)| \geq (1-|b_p|)r^p - \sum_{n=p+1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)r^n$$
$$\geq (1-|b_p|)r^p - \left(\frac{p}{p+1}\right)^k \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k \frac{\phi_n|a_n|+\psi_n|b_n|}{1+\Delta+(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)} r^{p+1}$$

$$\geq (1-|b_p|)r^p - \left(\frac{p}{p+1}\right)^k \frac{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)-[p(2+\Gamma+\Delta)+\alpha(\Delta-\Gamma)]|b_p|}{1+\Delta+(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)} r^{p+1}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

4.2.6. Sonuç. (4.14) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ olsun. Eğer $f \in \overline{SH}_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ ise;

$$\lambda(p,k,\alpha,\Gamma,\Delta) = (p+1)^k[1+\Delta+(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)] - p^k(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)$$

ve

$$\mu(p,k,\alpha,\Gamma,\Delta) = p^k[p(2+\Gamma+\Delta)+\alpha(\Delta-\Gamma)] - (p+1)^k[1+\Delta+(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)]$$

için

$$\left\{w: |w| < \frac{\lambda(p,k,\alpha,\Gamma,\Delta)+\mu(p,k,\alpha,\Gamma,\Delta)|b_p|}{1+\Delta+(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)}\right\} \subset f(U)$$

dur.

4.2.7. Teorem.

$$h_p(z) = z^p,$$

$$h_n(z) = z^p - \left(\frac{p}{n}\right)^k \frac{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)}{\phi_n} z^n, \qquad (n = p+1, p+2, \dots)$$

ve

$$g_n(z) = z^p + (-1)^k \left(\frac{p}{n}\right)^k \frac{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)}{\psi_n} \overline{z_n}, \qquad (n = p, p+1, p+2, \dots)$$

olsun.

Bu taktirde $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ ve $\sum_{n=p}^{\infty}(x_n + y_n) = 1$ olmak üzere, $f \in \overline{SH}_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty}(x_n h_n(z) + y_n g_n(z))$$

olacak şekilde ifade edilebilmesidir. Ayrıca $\overline{SH}_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ sınıfının ekstrem noktaları da $\{h_n\}$ ve $\{g_n\}$ dir.

İspat.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=p}^{\infty}(x_n h_n(z) + y_n g_n(z)) \\ &= \sum_{n=p}^{\infty}(x_n + y_n) z^p - \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{p}{n}\right)^k \frac{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)}{\phi_n} x_n z^n \\ &\quad + \sum_{n=p}^{\infty}\left(\frac{p}{n}\right)^k \frac{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)}{\psi_n} y_n \overline{z^n} \end{aligned}$$

olsun. Burada,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k \phi_n |a_n| + \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k \psi_n |b_n| \\ &= (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)\left(\sum_{n=p+1}^{\infty} x_n + \sum_{n=p}^{\infty} y_n\right) \\ &= (p-\alpha)(\Delta-\Gamma)(1-x_p) \\ &\leq (p-\alpha)(\Delta-\Gamma) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve $f \in \overline{SH}_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ olur. Tersine, eğer $f \in \overline{SH}_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$ ise

$$|a_n| \leq \left(\frac{p}{n}\right)^k \frac{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)}{\phi_n}$$

ve

$$|b_n| \leq \left(\frac{p}{n}\right)^k \frac{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)}{\psi_n}$$

dir.

$$x_n = \left(\frac{n}{p}\right)^k \frac{\phi_n}{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)} |a_n| \ \ (n = p+1, p+2, \dots)$$

ve

$$y_n = \left(\frac{n}{p}\right)^k \frac{\psi_n}{(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)} |b_n| \ \ (n = p, p+1, \dots)$$

alınırsa, Teorem 4.2.3'den dolayı

$0 \leq x_n \leq 1, (n = p+1, p+2, \dots)$ ve $0 \leq y_n \leq 1, (n = p, p+1, \dots)$

dir.

$$x_p = 1 - \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n - \sum_{n=p}^{\infty} y_n$$

şeklinde tanımlanırsa Teorem 4.2.3'den dolayı $x_p \geq 0$ olur. Sonuç olarak,

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} (x_n h_n(z) + y_n g_n(z))$$

elde edilir.

4.2.8. Teorem. $\overline{SH}_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$ sınıfı konveks kombinasyonlar altında kapalıdır.

İspat. $j=1,2,3,\ldots$ için $f_j\in\overline{SH}_{p,k}(\alpha,\Gamma,\Delta)$ olsun. Burada,

$$f_j(z)=z^p-\sum_{n=p+1}^{\infty}|a_{j,n}|z^n+(-1)^k\sum_{n=p}^{\infty}|b_{j,n}|\overline{z^n}$$

şeklindedir. (4.17)'den dolayı,

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k\left(\phi_n|a_{j,n}|+\psi_n|b_{j,n}|\right)\le 2(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)$$

elde edilir.

$\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j=1,\;\; 0\le\delta_j\le 1$ için f_j'nin konveks kombinasyonu,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j f_j(z)=z^p-\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j|a_{j,n}|\right)z^n+(-1)^k\sum_{n=p}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j|b_{j,n}|\right)\overline{z^n}$$

şeklinde yazılır. (4.19)'dan dolayı

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k&\left(\phi_n\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j|a_{j,n}|+\psi_n\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j|b_{j,n}|\right)\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j\left(\sum_{n=p}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)^k\left[\phi_n|a_{j,n}|+\psi_n|b_{j,n}|\right]\right)\\&\le 2(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j=2(p-\alpha)(\Delta-\Gamma)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j f_j(z) \in \overline{SH}_{p,k}(\alpha, \Gamma, \Delta)$$

olur.

4.3. $H_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ ve $L_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha)$ Sınıflarına Ait Sabordinasyon ile Tanımlı Çok Değerli Harmonik Fonksiyonların Özellikleri

Bu bölümde çok değerli harmonik fonksiyonların yeni bir alt sınıfı tanımlanırken notasyonda değişikliğe gidilmiş olup, m pozitif tam sayısı için,

$$h(z) = z^m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n z^n, (|b_m| < 1)$$

olmak üzere U'da tanımlı, yön koruyan ve çok değerli $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf H_m ile gösterilmiştir.
H_p ile de

$$h(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n z^n;\ p \geq 1 \tag{4.21}$$

olmak üzere, U'da tanımlı, yön koruyan ve çok değerli

$$f = h + \bar{g} \tag{4.22}$$

harmonik fonksiyonların sınıfı gösterilir. Bu durumda $H_p \subset H_m$ olduğu açıktır.
H_p ailesinin

$$h(z) = z^p - \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| z^n \text{ ve } g(z) = -\sum_{n=p+1}^{\infty} |b_n| z^n \tag{4.23}$$

olmak üzere $f = h + \bar{g}$ fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıf $\overline{H}_p$ ile gösterilsin.

$$F(z) = H(z) + \overline{G(z)} = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} A_n z^n + \overline{\sum_{n=p+1}^{\infty} B_n z^n} \tag{4.24}$$

olacak şeklinde verilsin. Hipergeometrik fonksiyonu;

$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}, (i = 1,2,3 \ldots l$ ve $j = 1,2,3, \ldots m)$ ve $l \leq m + 1;\ l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için,

$${}_lF_m(\alpha_1, \ldots \alpha_{l;} \beta_1, \ldots \beta_m)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_l)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_m)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

şeklinde ve Pochhammer fonksiyonu da;

$$(\lambda)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \lambda(\lambda + 1) \ldots (\lambda + n - 1), & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca,

$$h_p(\alpha_1, \ldots \alpha_l; \beta_1, \ldots \beta_m; z) = z^{-p}\ {}_lF_m(\alpha_1, \ldots \alpha_{l;} \beta_1, \ldots \beta_m)(z)$$

fonksiyonuna karşılık gelen $H_p(\alpha_1, \ldots \alpha_l; \beta_1, \ldots \beta_m): H_p \to H_p$ lineer operatörü de Hadamard çarpımı kullanılarak;

$$H_p(\alpha_1, \ldots \alpha_l; \beta_1, \ldots \beta_m) f(z) = h_p(\alpha_1, \ldots \alpha_l; \beta_1, \ldots \beta_m; z) * f(z)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan (4.22) formundaki f fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} &H_p(\alpha_1, \ldots \alpha_l; \beta_1, \ldots \beta_m) f(z) \\ &\qquad = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_l)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_m)_n} \cdot \frac{a_n z^n}{n!} + \overline{\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_l)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_m)_n} \cdot \frac{b_n z^n}{n!}} \end{aligned}$$

$$= H_{p,l,m}[\alpha_1]f(z) \tag{4.25}$$

elde edilir.

(4.25)'de tanımlanan $H_{p,l,m}[\alpha_1]\,(p=1)$ operatörü, Dziok ve Srivastava (1999) tarafından tanıtılmıştır. Genelleştirilmiş Dziok-Srivastava operatörü olan $H_{(p)}$ ise;

$$z\big(H_{p,l,m}[\alpha_1]f(z)\big)' = z\big(H_{p,l,m}[\alpha_1]h(z)\big)' - \overline{z\big(H_{p,l,m}[\alpha_1]g(z)\big)'}$$

olmak üzere;

$$L_{\lambda,l,m}^{1,\alpha_1}f(z) = (1-\lambda)H_{p,l,m}[\alpha_1]f(z) + \frac{\lambda}{p}z\big(H_{p,l,m}[\alpha_1]f(z)\big)' = L_{\lambda,l,m}^{\alpha_1}f(z), \qquad \lambda \geq 0$$

biçiminde tanımlanır. Genel olarak,

$$L_{\lambda,l,m}^{\tau,\alpha_1}f(z) = z^p \frac{+\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{n\lambda}{p}\right)(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_l)_n}{n!\,(\beta_1)_n\ldots(\beta_m)_n}\right)^{\tau} a_n z^n}{+\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{n\lambda}{p}\right)(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_l)_n}{n!\,(\beta_1)_n\ldots(\beta_m)_n}\right)^{\tau} b_n z^n} \tag{4.26}$$

ve $\lambda \geq 0, \tau \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$L_{\lambda,l,m}^{\tau,\alpha_1}f(z) = L_{\lambda,l,m}^{\alpha_1}\big(L_{\lambda,l,m}^{\tau-1,\alpha_1}f(z)\big), \qquad l \leq m+1;\, l,m \in \mathbb{N}_0, \tau \in \mathbb{N} \tag{4.27}$$

biçimindedir.

$\mu \geq 0, \tau \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{J}_\tau^\mu : H_p \to H_p$ lineer operatörü,

$$\mathcal{J}_\tau^\mu f(z) = \mathcal{J}_\tau^\mu(z) * f(z) = \mathcal{J}_\tau^\mu(z) * h(z) + \overline{\mathcal{J}_\tau^\mu(z) * g(z)}, \qquad z \in U \tag{4.28}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\mathcal{J}_\tau^\mu(z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$L_{\lambda,l,m}^{\tau,\alpha_1}(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{n\lambda}{p}\right)(\alpha_1)_n\dots(\alpha_l)_n}{n!\,(\beta_1)_n\dots(\beta_m)_n}\right)^{\tau} z^n \tag{4.29}$$

ve

$$L_{\lambda,l,m}^{\tau,\alpha_1}(z) * \mathcal{J}_\tau^\mu(z) = \frac{z^p}{(1-z)^\mu}, \qquad \mu \geq 0, \qquad z \in U \tag{4.30}$$

şeklinde olmak üzere

$$\frac{z^p}{(1-z)^\mu} = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{(\mu)_n}{n!}z^{n-p}, \qquad \mu \geq 0, \qquad z \in U \tag{4.31}$$

olduğundan ve (4.28)-(4.31) arasındaki denklemlerden,

$$\mathcal{J}_\tau^\mu(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{n!\,(\beta_1)_n\dots(\beta_m)_n}{\left(1+\frac{n\lambda}{p}\right)(\alpha_1)_n\dots(\alpha_l)_n}\right)^{\tau}\frac{(\mu)_n}{n!}z^n, \qquad \mu \geq 0, z \in U \tag{4.32}$$

elde edilir. f fonksiyonu (4.22)'de verildiği gibi ise (4.28) ve (4.32)'den

$$\Phi_n^\mu = \left(\frac{n!\,(\beta_1)_n\dots(\beta_m)_n}{\left(1+\frac{n\lambda}{p}\right)(\alpha_1)_n\dots(\alpha_l)_n}\right)^{\tau}\frac{(\mu)_n}{n!}, \qquad \mu > 0 \tag{4.33}$$

$$\mathcal{J}_\tau^\mu f(z) = \mathcal{J}_\tau^\mu h(z) + \overline{\mathcal{J}_\tau^\mu g(z)} = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \Phi_n^\mu a_n z^n + \overline{\sum_{n=p+1}^{\infty} \Phi_n^\mu b_n z^n} \tag{4.34}$$

bulunur.

4.3.1. Tanım. (4.22) formundaki bir $f(z) \in H_p$ fonksiyonunun $H_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli şart, (4.34)'de tanımlanan $\mathcal{J}_\tau^\mu f(z)$ fonksiyonu ve $p \in \mathbb{N}; \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}, \Gamma \neq \Delta, |\Delta| \leq 1; \tau \in \mathbb{N}, \mu > 0, \alpha \geq 0, \delta \geq 0$ değerleri ve

$$\mathcal{X}_{\delta,\mu}(f(z)) = (1-\delta)\frac{\mathcal{J}_\tau^\mu f(z)}{z^p} + \frac{\delta}{pz^{p-1}}\left(\mathcal{J}_\tau^\mu f(z)\right)' \tag{4.35}$$

için

$$\mathcal{X}_{\delta,\mu}(f(z)) - \alpha\left|\mathcal{X}_{\delta,\mu}(f(z)) - 1\right| \prec \frac{1+\Gamma z}{1+\Delta z} \tag{4.36}$$

olmasıdır.

$\delta = 0$ için $L_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha)$ yeni alt sınıfı elde edilir. (4.22) formundaki bir $f(z) \in H_p$ fonksiyonunun $L_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha)$ sınıfına ait olması için gerekli ve yeterli şart (4.34)'de tanımlanan $\mathcal{J}_\tau^\mu f(z)$ fonksiyonu ve $p \in \mathbb{N};\ \Gamma, \Delta \in \mathbb{R},\ \Gamma \neq \Delta,\ |\Delta| \leq 1;\ \tau \in \mathbb{N},\ \mu > 0,$ $\alpha \geq 0$ değerleri için,

$$\frac{\mathcal{J}_\tau^\mu f(z)}{z^p} - \alpha\left|\frac{\mathcal{J}_\tau^\mu f(z)}{z^p} - 1\right| \prec \frac{1+\Gamma z}{1+\Delta z} \tag{4.37}$$

olmasıdır. Ayrıca,

$$\overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta) = \overline{H}_p \cap H_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$$

ve

$$\overline{L}_p(\Gamma,\Delta;\mu,\tau,\alpha)=\overline{H}_p\cap L_p(\Gamma,\Delta;\mu,\tau,\alpha)$$

dır.

4.3.2. Lemma. $\Gamma,\Delta\in\mathbb{R},\Gamma\neq\Delta,|\Delta|\leq 1;\alpha\geq 0$ olsun. $w(z)$ bir analitik fonksiyon ve $w(0)=1$ ise

$$w(z)-\alpha|w(z)-1|\prec\frac{1+\Gamma z}{1+\Delta z}\Leftrightarrow w(z)(1-\alpha e^{-i\theta})+\alpha e^{-i\theta}\prec\frac{1+\Gamma z}{1+\Delta z},\theta\in\mathbb{R} \tag{4.38}$$

dir. (4.37) ve Lemma 4.3.2 gereğince $f(z)\in H_p(\Gamma,\Delta;\mu,\tau,\alpha,\delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart, (4.35)'deki $\mathcal{X}_{\delta,\mu}(f(z))$ fonksiyonu için,

$$\mathcal{X}_{\delta,\mu}(f(z))(1-\alpha e^{-i\theta})+\alpha e^{-i\theta}\prec\frac{1+\Gamma z}{1+\Delta z} \tag{4.39}$$

dir.

4.3.3. Teorem. (4.21) formundaki h ve g için $f=h+\bar{g}$ ve Φ_n^{μ} (4.33)'de verildiği gibi olsun. Ayrıca $p\in\mathbb{N};\Gamma,\Delta\in\mathbb{R}$ ve $\Gamma\neq\Delta,|\Delta|<1$ verilsin. Bu takdirde,

$$\xi_n^{\mu}=\left(1-\delta+\frac{\delta n}{p}\right)\Phi_n^{\mu}\text{ ve }\eta_n^{\mu}=\left(1-\delta-\frac{\delta n}{p}\right)\Phi_n^{\mu} \tag{4.40}$$

olmak üzere,

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}(1+|\Delta|)(1+\alpha)\left(\left|\xi_n^{\mu}\right||a_n|+\left|\eta_n^{\mu}\right||b_n|\right)\leq|\Gamma-\Delta| \tag{4.41}$$

ise $f\in H_p(\Gamma,\Delta;\mu,\tau,\alpha,\delta)$ dir.

İspat. İlk olarak, $f=h+\bar{g}$ fonksiyonunun katsayıları (4.41) eşitsizliğini sağladığında, (4.39) koşulunun da sağlandığı gösterilecek. Bunun için, (4.39)'dan,

$$p(z) = \mathcal{X}_{\delta,\mu}(f(z))(1-\alpha e^{-i\theta}) + \alpha e^{-i\theta} \tag{4.42}$$

olmak üzere,

$$p(z) \prec \frac{1+\Gamma z}{1+\Delta z}$$

olduğunu ispatlamak gerekir.

$$p(z) \prec \frac{1+\Gamma z}{1+\Delta z} \Leftrightarrow |1-p(z)| \leq |\Delta p(z) - \Gamma|$$

olduğu gerçeği kullanarak

$$|1-p(z)| - |\Delta p(z) - \Gamma| \leq 0 \tag{4.43}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Böylece, (4.41) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&|1-p(z)| - |\Delta p(z) - \Gamma| \\
&= \left|\left(1-\alpha e^{-i\theta}\right) \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\xi_n^{\mu} a_n z^{n-p} + \eta_n^{\mu} b_n z^{-p}\overline{z^n}\right)\right| \\
&- \left|\Delta - \Delta\left(1-\alpha e^{-i\theta}\right) \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\xi_n^{\mu} a_n z^{n-p} + \eta_n^{\mu} b_n z^{-p}\overline{z^n}\right) - \Gamma\right| \\
&\leq \left|(1+\alpha) \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\left|\xi_n^{\mu}\right||a_n||z|^{n-p} + \left|\eta_n^{\mu}\right||b_n||z|^{n-p}\right)\right| - \\
&\left(|\Gamma - \Delta| - |\Delta|(1+\alpha) \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\left|\xi_n^{\mu}\right||a_n||z|^{n-p} + \left|\eta_n^{\mu}\right||b_n||z|^{n-p}\right)\right) \\
&= \sum_{n=p+1}^{\infty} (1+|\Delta|)(1+\alpha)\left[\left|\xi_n^{\mu}\right||a_n||z|^{n-p} + \left|\eta_n^{\mu}\right||b_n||z|^{n-p}\right] - |\Gamma - \Delta| \\
&\leq \sum_{n=p+1}^{\infty} (1+|\Delta|)(1+\alpha)\left[\left|\xi_n^{\mu}\right||a_n| + \left|\eta_n^{\mu}\right||b_n|\right] - |\Gamma - \Delta| \leq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} |X_n| + |Y_n| = 1$$

olmak üzere (4.41)'de verilen katsayı bağıntısı

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{|\Gamma - \Delta|}{(1+|\Delta|)(1+\alpha)} \left(\frac{1}{|\xi_n^{\mu}|} X_n z^n + \frac{1}{|\eta_n^{\mu}|} \overline{Y_n z^n} \right) \tag{4.44}$$

harmonik fonksiyonları için kesindir.

4.3.4. Sonuç. (4.21) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ ve ξ_n^{μ} ile η_n^{μ} de (4.39)'da verildiği gibi olsun. Ayrıca $p \in \mathbb{N}; \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}$ verilsin.

i. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0$ için,

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (1-\Delta)(1+\alpha)\left[|\xi_n^{\mu}||a_n| + |\eta_n^{\mu}||b_n|\right] \leq \Gamma - \Delta$$

ise $f \in H_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ dır.

ii. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta > 0$ için,

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (1+\Delta)(1+\alpha)\left[|\xi_n^{\mu}||a_n| + |\eta_n^{\mu}||b_n|\right] \leq \Delta - \Gamma$$

ise $f \in H_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ dır.

4.3.5. Sonuç. (4.21) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ olsun ve Φ_n^{μ} (4.33)'de verildiği gibi olsun. Ayrıca $p \in \mathbb{N}; \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}$ ve $\Gamma \neq \Delta, |\Delta| \leq 1$ verilsin. Bu takdirde

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (1 + |\Delta|)(1 + \alpha)\left[\left|\Phi_n^{\mu}\right|(|a_n| + |b_n|)\right] \leq |\Gamma - \Delta|$$

ise $f \in L_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha)$ dir.

4.3.6. Teorem. (4.21) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ ve ξ_n^{μ} ile η_n^{μ} de (4.40)'da verildiği gibi olsun. Ayrıca $p \in \mathbb{N}; \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}$ ve $\Gamma \neq \Delta, |\Delta| \leq 1, 0 \leq \delta < \frac{p}{2p+1}$ verilsin.

i. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0$ ise $f \in \overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (1 - \Delta)(1 + \alpha)\left[\xi_n^{\mu}|a_n| + \eta_n^{\mu}|b_n|\right] \leq \Gamma - \Delta \tag{4.45}$$

olmasıdır.

ii. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta > 0$ ise $f \in \overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (1 + \Delta)(1 + \alpha)\left[\xi_n^{\mu}|a_n| + \eta_n^{\mu}|b_n|\right] \leq \Delta - \Gamma \tag{4.46}$$

olmasıdır.

İspat. $\overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta) \subset H_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ olduğundan Sonuç 3.4.4 gereği teoremin ilk kısmını ispatlamak yeterli olacaktır.

i. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0$ için $f \in \overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ olsun. Bu takdirde (4.42) formundaki $p(z)$ için,

$$\left|\frac{1 - p(z)}{\Delta p(z) - \Gamma}\right| < 1 \tag{4.47}$$

dır. (4.47)'deki eşitsizlik ise

$$\left|\frac{\left(1 - \alpha e^{-i\theta}\right)\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\xi_n^{\mu}|a_n|z^{n-p} + \eta_n^{\mu}|b_n|z^{-p}\overline{z^n}\right)}{\Delta - \Delta\left(1 - \alpha e^{-i\theta}\right)\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\xi_n^{\mu}|a_n|z^{n-p} + \eta_n^{\mu}|b_n|z^{-p}\overline{z^n}\right) - \Gamma}\right| < 1 \tag{4.48}$$

eşitsizliğine denktir. (4.48) eşitsizliğinden

$$\left\{\frac{\left(1 - \alpha e^{-i\theta}\right)\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\xi_n^{\mu}|a_n|z^{n-p} + \eta_n^{\mu}|b_n|z^{-p}\overline{z^n}\right)}{\Gamma - \Delta + \Delta\left(1 - \alpha e^{-i\theta}\right)\sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\xi_n^{\mu}|a_n|z^{n-p} + \eta_n^{\mu}|b_n|z^{-p}\overline{z^n}\right)}\right\} < 1 \tag{4.49}$$

elde edilir. Burada, $z = r$ $(0 < r < 1)$ ve $\theta = \pi$ değerleri (4.49)'da yazılırsa,

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}(1 - \Delta)(1 + \alpha)\left[\xi_n^{\mu}|a_n| + \eta_n^{\mu}|b_n|\right]r^{n+p} \leq \Gamma - \Delta \tag{4.50}$$

olur. (4.50)'da $r \to 1$ alınarak (4.45) elde edilir.

ii. Benzer şekilde ispat edilir.

4.3.7. Sonuç. (4.21) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ ve Φ_n^{μ} de (4.33)'de verildiği gibi olsun. Ayrıca $p \in \mathbb{N}$; $\Gamma, \Delta \in \mathbb{R}$ ve $\Gamma \neq \Delta, |\Delta| \leq 1$ verilsin.

i. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0$ ise $f \in \overline{L}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}(1-\Delta)(1+\alpha)\Phi_n^{\mu}(|a_n|+|b_n|)\leq\Gamma-\Delta$$

olmasıdır.

ii. $-1\leq\Delta<\Gamma\leq 1,\Delta>0$ ise $f\in\bar{L}_p(\Gamma,\Delta;\mu,\tau,\alpha)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$\sum_{n=p+1}^{\infty}(1+\Delta)(1+\alpha)\Phi_n^{\mu}(|a_n|+|b_n|)\leq\Delta-\Gamma$$

olmasıdır.

4.3.8. Teorem. (4.23) formundaki h ve g için $f=h+\bar{g}$ ve ξ_n^{μ} ile η_n^{μ} de (4.40)'da verildiği gibi olsun. Ayrıca $\mu>1, 0\leq\delta<\frac{p}{2p+1}$ verilsin.

i. $-1\leq\Delta<\Gamma\leq 1,\Delta<0$ ise $f\in\bar{H}_p(\Gamma,\Delta;\mu,\tau,\alpha,\delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$r^p-\frac{\Gamma-\Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_{p+1}^{\mu}}r^{p+1}\leq|f(z)|\leq r^p+\frac{\Gamma-\Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_{p+1}^{\mu}}r^{p+1}\qquad(4.51)$$

olmasıdır.

ii. $-1\leq\Delta<\Gamma\leq 1,\Delta>0$ ise $f\in\bar{H}_p(\Gamma,\Delta;\mu,\tau,\alpha,\delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$r^p-\frac{\Delta-\Gamma}{(1+\Delta)(1+\alpha)\eta_{p+1}^{\mu}}r^{p+1}\leq|f(z)|\leq r^p+\frac{\Delta-\Gamma}{(1+\Delta)(1+\alpha)\eta_{p+1}^{\mu}}r^{p+1}\qquad(4.52)$$

olmasıdır.

İspat. $f \in \overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ olduğunda Teorem 4.3.6 kullanılarak,

$$\begin{aligned}(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_{p+1}^{\mu} \sum_{n=p+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \\ \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} (1-\Delta)(1+\alpha)\left[\xi_n^{\mu}|a_n| + \eta_n^{\mu}|b_n|\right] \leq \Gamma - \Delta\end{aligned} \tag{4.53}$$

elde edilir. Böylece,

i. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0$ ise (4.53)'den,

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq \frac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_{p+1}^{\mu}} \tag{4.54}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}|f(z)| \leq r^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leq r^p + r^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \\ \leq r^p + \frac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_{p+1}^{\mu}} r^{p+1}\end{aligned}$$

ve

$$|f(z)| \geq r^p - \frac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_{p+1}^{\mu}} r^{p+1}$$

dir.

ii. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1,\ \Delta < 0$ için de benzer şekilde ispat yapılır.

4.3.9. Sonuç. (4.23) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ ve ξ_n^{μ} ile η_n^{μ} de (4.40)'da verildiği gibi olsun. Ayrıca $\mu > 1$, $0 \le \delta < \frac{p}{2p+1}$ verilsin. Bu takdirde,

i. $-1 \le \Delta < \Gamma \le 1, \Delta < 0$ için, $f \in \overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ ise

$$\left\{ w: |w| < 1 - \frac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_{p+1}^{\mu}} \right\} \subset f(U)$$

dur.

ii. $-1 \le \Delta < \Gamma \le 1, \Delta > 0$ için, $f \in \overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ ise

$$\left\{ w: |w| < 1 - \frac{\Delta - \Gamma}{(1+\Delta)(1+\alpha)\eta_{p+1}^{\mu}} \right\} \subset f(U)$$

dur.

4.3.10. Sonuç. (4.23) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ ve Φ_n^{μ} (4.33)'de verildiği gibi olsun. Ayrıca $|z| = r < 1$ ve $\mu > 1$ verilsin. Bu takdirde,

i. $-1 \le \Delta < \Gamma \le 1, \Delta < 0$ ise $f \in \overline{L}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha)$ ise

$$r^p - \frac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\Phi_{p+1}^{\mu}} r^{p+1} \le |f(z)| \le r^p + \frac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\Phi_{p+1}^{\mu}} r^{p+1}$$

dir.

ii. $-1 \le \Delta < \Gamma \le 1, \Delta > 0$ ise $f \in \overline{L}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha)$ ise

$$r^p - \frac{\Delta - \Gamma}{(1+\Delta)(1+\alpha)\Phi_{p+1}^{\mu}} r^{p+1} \le |f(z)| \le r^p + \frac{\Delta - \Gamma}{(1+\Delta)(1+\alpha)\Phi_{p+1}^{\mu}} r^{p+1}$$

4.3.11. Teorem. (4.21) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ ve ξ_n^μ, η_n^μ de (4.40)'da verildiği gibi olsun. Ayrıca $p \in \mathbb{N}; \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}$ ve $\Gamma \neq \Delta, |\Delta| \leq 1, 0 \leq \delta < \frac{p}{2p+1}$ verilsin. $f \in clco\overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$h_p(z) = z^p,$$

$$h_n(z) = \begin{cases} z^p - \dfrac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\xi_p^\mu} z^n, n \geq p+1, -1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0, \\ z^p - \dfrac{\Delta - \Gamma}{(1+\Delta)(1+\alpha)\xi_p^\mu} z^n, n \geq p+1, -1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta > 0, \end{cases}$$

$$g_n(z) = \begin{cases} -\dfrac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_p^\mu} \overline{z^n}, n \geq p+1, -1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0, \\ -\dfrac{\Delta - \Gamma}{(1+\Delta)(1+\alpha)\eta_p^\mu} \overline{z^n}, n \geq p+1, -1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta > 0, \end{cases}$$

ve

$$X_p \equiv 1 - \sum_{n=p+1}^{\infty} (X_n + Y_n), X_n \geq 0, Y_n \geq 0$$

olmak üzere,

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} X_n h_n(z) + \sum_{n=p+1}^{\infty} Y_n (h_p(z) + g_n(z)), z \in U \setminus \{0\} \tag{4.55}$$

olmasıdır. Ayrıca $\overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha)$ ailesinin ekstrem noktaları da h_n ve g_n dir.

İspat. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0$ için,

$$f(z) = z^p - \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)} \left(\frac{1}{\xi_n^\mu} X_n z^n + \frac{1}{\eta_n^\mu} Y_n \overline{z^n} \right) \tag{4.56}$$

olacak şekilde alalım. $0 \leq X_n \leq 1, (n = p + 1, \dots)$ olduğundan

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(1-\Delta)(1+\alpha)\xi_n^{\mu}}{\Gamma-\Delta} \frac{\Gamma-\Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\xi_n^{\mu}} X_n + \frac{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_n^{\mu}}{\Gamma-\Delta} \frac{\Gamma-\Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_n^{\mu}} Y_n$$

$$= \sum_{n=p+1}^{\infty} (X_n + Y_n) = 1 - X_p \leq 1$$

elde edilir. Sonuç olarak Teorem 4.3.6'ya göre $f \in \overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ dır.

Tersine $f \in \overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ ise,

$$|a_n| \leq \frac{\Gamma-\Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\xi_n^{\mu}}, \qquad |b_n| \leq \frac{\Gamma-\Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_n^{\mu}} \tag{4.57}$$

dir.

$$X_n = \frac{(1-\Delta)(1+\alpha)\xi_n^{\mu}}{\Gamma-\Delta}|a_n|, \qquad Y_n = \frac{\Gamma-\Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_n^{\mu}}|b_n|, \tag{4.58}$$

ve

$$X_p = 1 - \sum_{n=p+1}^{\infty} (X_n + Y_n) \geq 0$$

fonksiyonda yerine yazılırsa;

$$f(z) = z^p - \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_n| z^n - \sum_{n=p+1}^{\infty} |b_n| \bar{z}^n$$

$$= \left(X_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} (X_n + Y_n) \right) z^n - \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\xi_n^{\mu}} X_n z^n$$

$$- \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\eta_n^{\mu}} Y_n \bar{z}^n$$

$$= X_n z^n + \sum_{n=p+1}^{\infty} h_n(z) X_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} (z^p + g_n(z)) Y_n$$

$$= X_p h_p(z) + \sum_{n=p+1}^{\infty} h_n(z) X_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} (z^p + g_n(z)) Y_n$$

$$= \sum_{n=p}^{\infty} h_n(z) X_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} (z^p + g_n(z)) Y_n$$

elde edilir. Böylece f (4.55)'deki gibi ifade edilmiş olur. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1,\ \Delta < 0$ için de benzer şekildedir.

4.3.12. Sonuç. (4.21) formundaki h ve g için $f = h + \bar{g}$ ve Φ_n^{μ} de (4.33)'de verildiği gibi olsun. Ayrıca $p \in \mathbb{N}; \Gamma, \Delta \in \mathbb{R}$ ve $\Gamma \neq \Delta, |\Delta| \leq 1$ verilsin. $f \in clco\overline{L}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ olması için gerekli ve yeterli şart

$$h_p(z) = z^p,$$

$$h_n(z) = \begin{cases} z^p - \dfrac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\Phi_n^{\mu}} z^n, n \geq p+1, -1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0, \\ z^p - \dfrac{\Delta - \Gamma}{(1+\Delta)(1+\alpha)\Phi_n^{\mu}} z^n, n \geq p+1, -1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta > 0, \end{cases}$$

$$g_n(z) = \begin{cases} -\dfrac{\Gamma - \Delta}{(1-\Delta)(1+\alpha)\Phi_n^{\mu}} \overline{z^n}, n \geq p+1, -1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0, \\ -\dfrac{\Delta - \Gamma}{(1+\Delta)(1+\alpha)\Phi_n^{\mu}} \overline{z^n}, n \geq p+1, -1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta > 0, \end{cases}$$

ve

$$X_p \equiv 1 - \sum_{n=p+1}^{\infty} (X_n + Y_n), X_n \geq 0, Y_n \geq 0$$

olmak üzere,

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} X_n h_n(z) + \sum_{n=p+1}^{\infty} Y_n(h_p(z) + g_n(z)), z \in U \setminus \{0\}$$

olmasıdır. Ayrıca $\overline{L}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha)$ ailesinin ekstrem noktaları da h_n ve g_n dir.

4.3.13. Teorem. $0 \leq \delta < \frac{p}{2p+1}$ sayısı için, $\overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ sınıfı konveks kombinasyonlar altında kapalıdır.

İspat. $j = 1,2$ için**,**

$$f_j(z) = z^p - \sum_{n=p+1}^{\infty} |a_{j,n}| z^n - \sum_{n=p}^{\infty} |b_{j,n}| \overline{z^n} \tag{4.59}$$

ile verilen f_j fonksiyonları $f_j \in \overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ sınıfına ait olsun. Bu takdirde $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 1,\ \ 0 \leq \lambda_j \leq 1$ için f_j 'lerin konveks kombinasyonu,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j = \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |a_{j,n}| \right) z^n - \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |b_{j,n}| \right) \overline{z^n} \tag{4.60}$$

şeklinde yazılır.

i. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta < 0$ için ve (4.45), (4.59) ve (4.60)'dan dolayı

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (1-\Delta)(1+\alpha) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left(\xi_n^{\mu} |a_{j,n}| + \eta_n^{\mu} |b_{j,n}| \right) \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left[\sum_{n=p+1}^{\infty} (1-\Delta)(1+\alpha) \left(\xi_n^{\mu} |a_{j,n}| + \eta_n^{\mu} |b_{j,n}| \right) \right]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\Gamma - \Delta) = \Gamma - \Delta$$

elde edilir. Yani, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j \in \overline{H}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$’dır.

ii. $-1 \leq \Delta < \Gamma \leq 1, \Delta > 0$ için de benzer şekilde ispat yapılır.

4.3.14. Sonuç. $\overline{L}_p(\Gamma, \Delta; \mu, \tau, \alpha, \delta)$ sınıfı konveks kombinasyonlar altında kapalıdır.

5. SONUÇ

Bu tezde, çok değerli harmonik fonksiyonların sabordinasyon yardımıyla tanımlanan bazı alt sınıfları incelenmiştir. Bu alt sınıflar için gerekli ve yeterli konvolüsyon şartları, katsayı bağıntıları, distorsiyon sınırları ve ekstrem noktaları verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümü, çok değerli harmonik fonksiyonların sabordinasyon ile tanımlanan alt sınıfları üzerinedir. Bu bölüm, üç alt bölümden oluşmuştur. İlk bölümde, Yalçın Tokgöz ve Altınkaya (2019) tarafından tanımlanan çok değerli harmonik yıldızıl fonksiyonların sabordinasyon yardımıyla tanımlanan alt sınıfı tanıtılmıştır. İkinci bölümde, Çakmak ve diğerleri (2020) tarafından tanımlanan çok değerli harmonik fonksiyon sınıfları tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde; Li ve Tang (2016) tarafından tanımlanan genelleştirilmiş Dziok-Srivastava operatörü yardımıyla kurulan çok değerli harmonik fonksiyon sınıfı tanıtılmıştır. Bu fonksiyon sınıfı için gerekli ve yeterli konvolüsyon şartları ve yeterli katsayı şartları verilmiştir.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L.V. (1966). Complex Analysis. *McGraw-Hill Book Company*, 317p.

Ahuja, O. P. ve Jahangiri, J.M. (2001). Multivalent harmonic starlike functions. *Annales Universitatis Mariae Curie– Skłodowska Sectio A. Mathematica*, 55(1): 1-13.

Ahuja, O. P. ve Jahangri, J. M. (2002). On a linear combination of classes of multivalently harmonic functions. *Kyungpook Mathematical Journal*, 42(1), 61-70.

Alexander, J. W. (1915). Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. *Annals of Mathematics*, 17: 12-22.

Altınkaya, Ş., Çakmak, S. ve Yalçın, S. (2018). On a new class of Salageantype harmonic univalent functions associated with subordination. *Honam Mathematical Journal*, 40(3):433–446. doi: 10.5831/HMJ.2018.40.3.433

Aouf, M. K. ve Seoudy, T. (2020). Fekete–Szego problem for certain subclass of analytic functions with complex order defined by q-analogue of Rucheweyh operator. *Constructive Mathematical Analysis*, 3(1): 36–44. doi: 10.33205/cma.648478

Avci, Y. ve Zlotkiewicz, E. (1991). On harmonic univalent mappings. *Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska sectio A*, 44, 1–7.

Başkan, T. (2012). Complex Function Theory. *Dora Bursa,* 342.

Clunie, J. ve Sheil-Small, T. (1984). Harmonic univalent functions. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 9, 3-25.

Conway, J. B. (1973). Functions of Complex Variable. *Springer – Verlag, New York, Berlin.*

Çakmak, S., Yalçın, S. ve Altınkaya, Ş. (2020). A new class of salagean-Type Multivalent Harmonic Functions Defined by Subordination. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 44-6,1899–1904. doi: 10.1007/s40995-020-00998-x

Duren, P. L. (1983). Univalent Functions. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo*.

Dziok, J. ve Srivastava, H.M. (1999). Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function. *Applied Mathematics and Computation*, 103(1): 1-13.

Dziok, J. ve Srivastava, H.M. (2003). Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function. *Integral Transforms and Special Functions*, 14(1): 7-18.

Fekete, M. ve Szegö, G. (1933). Eine bemerkung über ungerade schlichte funktionen. *Finska-Vetenskaps Societeten Forhandlingar*, 63(A): 6 FM 48-403.

Goodman, A.W. (1948). On some determinants related to p-valent functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 63, 175–192.

Goodman, A.W. (1983). Univalent Functions. *Mariner Publisher Company Vols I*, 107-108.

Graham, D. ve Kohr M. (2003). Univalent Subordination Chains in Reflexive Complex Banach Spaces. *Contemporary Mathematics*.

Hummel, J.A. (1960). Extremal problems in the class of starlike functions. *Proceedings of The American Mathematical Society*, 11, 741-749.

Jahangiri, J. M. (1998). Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients. *Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, sectio A*, 52, no: 2, 57–66.

Jahangiri, J. M. (1999). Harmonic functions starlike in the unit disk. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 235, 470–477.

Jahangiri, J. M., Murugusundaramoorthy, G. ve Vijaya, K. (2002). Salageantype harmonic univalent functions. *South Pacific Journal of Pure & Applied Mathematics*, 2:77–82.

Jahangiri, J. M., Murugusundaramoorthy, G. ve Vijaya, K. (2003). On starlikeness of certain multivalent harmonic functions. *Journal National Geometry*, 24:1–10.

Jahangiri, J. M., Şeker, B. ve Eker, S.S. (2009). Salagean-type harmonic multivalent functions. *Acta Universitatis Apulensis*, 18, 233-244.

Keogh, F. ve Merkes, E., (1969). A coefficient inequality for certain classes of analytic functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 20, 8-12.

Koebe, P. (1907). Über die Uniform isierung beliebiger analytischer Kurven. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 191-210.

Li S. ve Tang, H. (2016). A new class of harmonic multivalent functions defined. *Mathematical Society*, 11, 741-749. doi: 10.3770/j.issn:2095-2651.2016.05.005

Miller, S.S. ve Mocanu, P.T. (1981). Differential Subordinations and Univalent Functions. *Michigan Mathematical Journal*, 28, 157-171.

Nevanlinna, R. (1921). Über die konforme Abbildung Sterngebieten. *Översikt av Finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar*, no:2, 57–66.

Palka, B. P. (1991). An introduction to Complex Function Theory. *Springer-Verlag New York*, 560p.

Riemann, B. (1851). Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. *PhD Thesis, University of Göttingen, Germany*.

Salagean, G. S. (1983). Subclasses of univalent functions. *Lecture Notes in Mathematics Springer Heidelberg*, 362–372.

Sheil-Small, T. (1990). Constants for planar harmonic mappings. *Journal of the London Mathematical Society*, 42, 237–248.

Silverman, H. ve Silvia, E. M. (1999). Subclasses of harmonic univalent functions. *New Zealand Journal of Mathematics*, 28, 275–284.

Srivastava, H.M., Li S. ve Tang, H. (2009). Certain classes of k-uniformly close to-convex functions and other related functions defined by using the Dziok-Srivastava operator. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 3(1): 49-63.

Yalçın Tokgöz, S. ve Altınkaya, Ş. (2019). Multivalent harmonic starlike functions defined by subordination, Operators in General Morrey-Type Spaces and Applications. *(OMTSA), Kütahya, Turkey*.

Yaşar, E. ve Yalçın, S. (2011). Neighborhoods of a new class of harmonic multivalent functions. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(1), 462-473.

Yaşar, E. ve Yalçın, S. (2013). On a new subclass of Ruscheweyh-type harmonic multivalent functions. *Journal of Inequalites and Applications*, 271.

Yaşar, E. ve Yalçın, S. (2015). Partial sums of starlike harmonic multivalent functions. *Africa Mathematica*, 26(1-2), 53-63.

Zill, D. G.ve Shanahan, P. D. (2003). A first course in complex analysis with applications. *Jones and Bartlett Publishers*, U.S.A., 517p.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Metin TOKERER
Doğum Yeri ve Tarihi	: Antalya, 21/06/1980
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	: Alanya Lisesi (1995-1998)
Lisans	: Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (1998-2002) Bursa Uludağ Üniversitesi Hukuk Fakültesi (2018-….)
Yüksek Lisans	: Isparta Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Öğretmenliği (2002-2004)

Çalıştığı Kurumlar	: İnegöl 21. Yüzyıl Koleji İnegöl Sınav Özel Öğretim Kursu Nilüfer Final Fen Lisesi Nilüfer YEK Özel Öğretim Kursu Nilüfer Hedef Özel Öğretim Kursu Millî Eğitim Bakanlığı
İletişim	: metintokerer@hotmail.com